

미적2 2차고사 선행범위 I [작년 수능완성]

1) 함수 $f(x) = \sqrt{4x^2 + 1}$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = \left\{f\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^3$ 이라 하자. $g'(1) = p$ 일 때, p^2 의 값을 구하시오. [30p05]

2) 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad g(1) = 1, \quad g'(1) = \frac{1}{4}$$

$$(나) \quad \text{모든 실수 } x \text{에 대하여 } g(f(x)) = \frac{1}{2}x \text{이다.}$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(2, a)$ 에서의 접선의 기울기는 b 이다. $30(a+b)$ 의 값을 구하시오. [29p06]

3) 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) + 7}{x + 1} = 11$$

$$(나) \quad \text{모든 실수 } x \text{에 대하여 } f(x) + f(-x) = 0 \text{이다.}$$

함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-7}{g(x)-g(7)}$ 의 값은?

[30p09]

- ① 11
- ② 12
- ③ 13
- ④ 14
- ⑤ 15

4) 열린 구간 $(0, 1)$ 에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad \text{열린 구간 } (0, 1) \text{에 속하는 모든 실수 } x \text{에 대하여 } f''(x) = 2f(x)f'(x) \text{이고, } f'(x) > 0 \text{이다.}$$

$$(나) \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = k \quad (k > 0)$$

함수 $g(x)$ 를 $g(x) = \ln f'(x)$ 라 할 때, $g'\left(\frac{1}{3}\right)$ 의 값을 k 로 나타낸 것은? [30p12]

- ① k
- ② $\frac{3}{2}k$
- ③ $2k$
- ④ $\frac{5}{2}k$
- ⑤ $3k$

5) 자연수 n 에 대하여 점 $(n, 0)$ 에서 곡선 $y = xe^{x+1}$ 에 그은 두 접선의 기울기를 각각 m_1, m_2 라 하고, $\ln m_1 m_2$ 의 값을 $f(n)$ 이라 하자.

$\sum_{n=1}^{10} f(n)$ 의 값을 구하시오. [33p18]

- 6) 함수 $f(x) = (3x + k)e^{x^2}$ 이 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 정수 k 의 개수는? [34p20]
- ① 1
 - ② 3
 - ③ 5
 - ④ 7
 - ⑤ 9

- 7) 자연수 n 에 대하여 함수 $f(x) = \ln(x^2 + n^2) + kx$ 의 극값이 존재하지 않도록 하는 양의 실수 k 의 최솟값을 $g(n)$ 이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{g(n)}$ 의 값을 구하시오. [35p24]

- 8) 함수 $f(x) = x^2 - 3x + \ln x$ 에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [36p27]

ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극댓값 -2 를 갖는다.
 ㄴ. 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점의 개수는 1이다.
 ㄷ. 열린 구간 $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 는 위로 볼록하다.

- ① ㄴ
- ② ㄷ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

- 9) 함수 $f(x) = |x - 1|\sqrt{x}$ 에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [37p29]

ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 미분가능하다.
 ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.
 ㄷ. 열린 구간 $(0, 1)$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 는 위로 볼록하다.

- ① ㄴ
- ② ㄷ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

- 10) 닫힌 구간 $[0, 5]$ 에서 함수 $f(x) = (x - 4)^2 e^{x-2}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값은? [38p30]

- ① e
- ② e^2
- ③ e^3
- ④ e^4
- ⑤ e^5

11) 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $e^x \geq e^2x - k$ 가 성립하도록 하는 실수 k 의 최솟값은? [30p33]

- ① e
- ② $e^{\frac{3}{2}}$
- ③ e^2
- ④ $e^{\frac{5}{2}}$
- ⑤ e^3

12) 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ 이고, $f(1) = 1$ 이다. 닫힌 구간 $[1, e]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은? [42p02]

- ① $1 - \frac{1}{2e}$
- ② $2 - \frac{1}{e}$
- ③ $\frac{1+2}{e}$
- ④ $2 - \frac{1}{2e}$
- ⑤ $2 + \frac{1}{e}$

13) 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 의 도함수가 $f'(x) = 2x \ln x + x$ 이고 $f(e) = e^2 + 1$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 극솟값은? [43p05]

- ① $1 - \frac{1}{6e}$
- ② $1 - \frac{1}{5e}$
- ③ $1 - \frac{1}{4e}$
- ④ $1 - \frac{1}{3e}$
- ⑤ $1 - \frac{1}{2e}$

14) 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)g(x) = f'(x)g(x)$ 이다.
 (나) $\int f(x)g(x)dx = e^{2x-1} + C$ (C 는 적분상수)

함수 $h(x) = \int f(x)g'(x)dx$ 에 대하여 $h\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ 일 때, $h(1)$ 의 값은? [44p09]

- ① $e - 2$
- ② $e - 1$
- ③ e
- ④ $e + 1$
- ⑤ $e + 2$

15) 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 그 도함수 $f'(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다. 두 함수 $f(x)$ 와 $f'(x)$ 가 모든 자연수 n 에 대하여

$$\int_n^{n+1} f(x)f'(x)dx = 2^{n-1}$$

을 만족시킬 때, $\{f(10)\}^2 - \{f(1)\}^2$ 의 값은? [45p12]

- ① 1014
- ② 1016
- ③ 1018
- ④ 1020
- ⑤ 1022

16) $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^x |e^x - 1| dx$ 의 값은? [46p13]

- ① $\frac{1}{2}$
- ② $\frac{5}{8}$
- ③ $\frac{3}{4}$
- ④ $\frac{7}{8}$
- ⑤ 1

17) 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\int_0^1 xf(x^2 + 1)dx = 3, \int_0^1 f(2x + 1)dx = 5$$

일 때, $\int_2^3 f(x)dx$ 의 값은? [46p15]

- ① 2
- ② $\frac{5}{2}$
- ③ 3
- ④ $\frac{7}{2}$
- ⑤ 4

18) 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 있다.

그 도함수 $f'(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이고,

$$\int_0^1 xf'(x+1)dx = 1$$

을 만족시킨다. $f(2) = 2$ 일 때, $\int_1^2 f(x)dx$ 의 값은? [47p18]

- ① $\frac{2}{3}$
- ② 1
- ③ $\frac{4}{3}$
- ④ $\frac{5}{3}$
- ⑤ 2

19) 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다. [48p21]

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$ 이다.

(나) $\int_2^3 f(1-x)dx = 2$

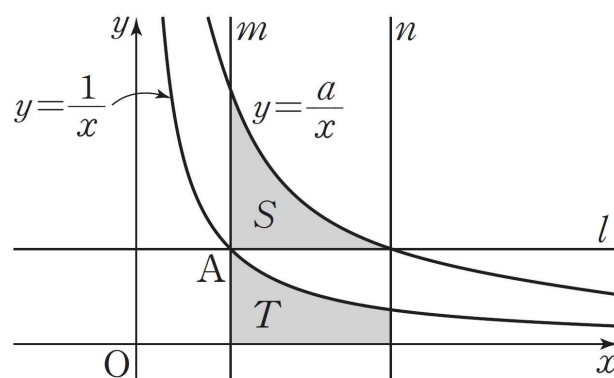
(다) $\int_0^2 xf(x-1)dx = 2$

$\int_0^2 f(x)dx$ 의 값은?

- ① 3
- ② 4
- ③ 5
- ④ 6
- ⑤ 7

20) 그림과 같이 곡선 $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) 위의 점 A 를 지나고 x 축, y

축과 평행한 직선을 각각 l , m 이라 하고, 직선 l 과 곡선 $y = \frac{a}{x}$ ($x > 0$, $a > 1$)이 만나는 점을 지나고 y 축에 평행한 직선을 n 이라 하자. 두 직선 l , m 과 곡선 $y = \frac{a}{x}$ ($x > 0$, $a > 1$)로 둘러싸인 부분을 S , 두 직선 m , n 과 곡선 $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) 및 x 축으로 둘러싸인 부분을 T 라 하자. S 의 넓이와 T 의 넓이가 서로 같을 때, 상수 a 의 값은? [54p38]



- ① $\frac{e}{2}$
- ② $e - 1$
- ③ $e - \frac{1}{2}$
- ④ e
- ⑤ $2e$

1) 답 : 18

$$f\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{4\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}=\sqrt{x^2+1} \text{ 이므로}$$

$$g(x)=\left\{f\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^3=(\sqrt{x^2+1})^3=(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

따라서 함수 $g(x)$ 의 도함수는

$$g'(x)=\frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)'=3x\sqrt{x^2+1} \text{ 이므로}$$

$$g'(1)=3\times 1\times \sqrt{2}=3\sqrt{2}$$

$$\text{따라서 } p=3\sqrt{2} \text{ 이므로 } p^2=(3\sqrt{2})^2=18$$

2) 답 : 90

$$\text{(나)에서 } g(f(x))=\frac{1}{2}x \text{의 양변에 } x=2 \text{를 대입하면 } g(f(2))=1$$

조건 (가)에서 $g(1)=1$ 이고, 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수

$g(x)$ 는 일대일 대응이므로 $f(2)=1$

점 $(2, a)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $a=1$

조건 (나)에서 $g(f(x))=\frac{1}{2}x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

합성함수의 미분법에 의하여

$$g'(f(x))f'(x)=\frac{1}{2} \text{에서 } f'(x)=\frac{1}{2g'(f(x))} \cdots \cdots \textcircled{\small{\text{D}}}$$

$$\textcircled{\small{\text{D}}}\text{의 양변에 } x=2 \text{를 대입하면 } f'(2)=\frac{1}{2g'(f(2))}$$

$$f(2)=1 \text{이고 } g'(1)=\frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$f'(2)=\frac{1}{2g'(f(2))}=\frac{1}{2g'(1)}=\frac{1}{2\times \frac{1}{4}}=2$$

$y=f(x)$ 위의 점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 기울기 b 는 $b=f'(2)=2$

$$\text{따라서 } a=1, b=2 \text{이므로 } 30(a+b)=30\times 3=90$$

3) 답 : ①

조건 (가)에서 $x\rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 $\lim_{x\rightarrow -1}\frac{f(x)+7}{x+1}$ 의 값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x\rightarrow -1}\{f(x)+7\}=0$$

함수 $f(x)$ 는 연속함수이므로 $f(-1)+7=0$ 에서 $f(-1)=-7$

$$\text{조건 (가)에서 } \lim_{x\rightarrow -1}\frac{f(x)+7}{x+1}=\lim_{x\rightarrow -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)=11$$

조건 (나)에서 $f(x)+f(-x)=0$ 에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1)+f(-1)=0 \text{이므로 } f(1)=-f(-1)=-(-7)=7$$

조건 (나)에서 $f(x)+f(-x)=0$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)-f'(-x)=0 \text{에서 } f'(x)=f'(-x) \cdots \cdots \textcircled{\small{\text{E}}}$$

$\textcircled{\small{\text{E}}}$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $f'(1)=f'(-1)=11$

함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이고, $f(1)=7$ 이므로 역함수의 미분법에

$$\text{의하여 } \lim_{x\rightarrow 7}\frac{x-7}{g(x)-g(7)}=\frac{1}{g'(7)}=f'(1)=11$$

4) 답 : ③

$$g(x)=\ln f'(x) \text{에서 } g'(x)=\frac{f''(x)}{f'(x)}$$

조건 (가)에서 $f''(x)=2f(x)f'(x)$ 이고,

$$f'(x)>0 \text{이므로 } g'(x)=\frac{f''(x)}{f'(x)}=\frac{2f(x)f'(x)}{f'(x)}=2f(x)$$

$$\text{따라서 } g\left(\frac{1}{3}\right)=2f\left(\frac{1}{3}\right)=2\times k=2k$$

5) 답 : 75

$$y=xe^{x+1} \text{에서 } y'=e^{x+1}+xe^{x+1}=e^{x+1}(x+1) \text{이므로}$$

곡선 $y=xe^{x+1}$ 위의 점 (t, te^{t+1}) 에서의 접선의 방정식은

$$y-te^{t+1}=e^{t+1}(t+1)(x-t)$$

$$\text{이 접선이 점 } (n, 0) \text{을 지나므로 } -te^{t+1}=e^{t+1}(t+1)(n-t)$$

$$e^{t+1}(t^2-nt-n)=0$$

$$e^{t+1}>0 \text{이므로 } t^2-nt-n=0$$

이 이차방정식의 두 실근을 α, β 라 하면 이차방정식의 근과 계수의

관계에 의하여 $\alpha+\beta=n, \alpha\beta=-n$

두 접선의 기울기의 곱 m_1, m_2 는

$$m_1m_2=e^{\alpha+1}(\alpha+1)\times e^{\beta+1}(\beta+1)=e^{\alpha+\beta+2}\{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1\} \\ =e^{n+2}$$

이므로 $\ln m_1m_2=n+2$, 따라서 $f(n)=n+2$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{10}f(n)=\sum_{n=1}^{10}(n+2)=\frac{10\times 11}{2}+20=75$$

6) 답 : ⑤

$$f(x)=(3x+k)e^{x^2} \text{에서}$$

$$f'(x)=3e^{x^2}+(3x+k)e^{x^2}\times 2x=e^{x^2}(6x^2+2kx+3)$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하

여 $f'(x)\geq 0$ 에서 $e^{x^2}>0$ 이므로 $6x^2+2kx+3\geq 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $6x^2+2kx+3=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-6\times 3\leq 0$$

$$\text{즉, } k^2\leq 18$$

따라서 정수 k 의 값은 $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ 로 조건을 만족시키는 정수 k 의 개수는 9이다.

7) 답 : 55

$$f(x)=\ln(x^2+n^2)+kx \text{에서}$$

$$f'(X)=\frac{2x}{x^2+n^2}+k=\frac{kx^2+2x+n^2k}{x^2+n^2}$$

$k>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 극값이 존재하지 않도록 하려면 모든 실수 x 에 대하여 함수 $f(x)$ 가 증가해야 한다.

$$\text{즉, } f'(x)\geq 0 \text{에서 } \frac{kx^2+2x+n^2k}{x^2+n^2}\geq 0$$

$$x^2+n^2>0 \text{이므로 } kx^2+2x+n^2k\geq 0$$

이차방정식 $kx^2+2x+n^2k=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $k>0$ 이므로

$$\frac{D}{4}=1-k\times n^2k=1-n^2k^2\leq 0$$

$$n^2k^2-1\geq 0, (nk+1)(nk-1)\geq 0$$

자연수 n 과 양의 실수 k 에 대하여 $nk+1>0$ 이므로 $nk-1\geq 0$

$$\text{즉, } nk\geq 1 \text{에서 } k\geq \frac{1}{n}$$

$$k \text{의 최솟값이 } \frac{1}{n} \text{이므로 } g(n)=\frac{1}{n}$$

$$\text{따라서 } \sum_{n=1}^{10}\frac{1}{g(n)}=\sum_{n=1}^{10}n=\frac{10\times 11}{2}=55$$

8) 답 : ④

$$f(x)=x^2-3x+\ln x \text{에서}$$

$$f'(x)=2x-3+\frac{1}{x}=\frac{2x^2-3x+1}{x}=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=1$$

$$f''(x)=2-\frac{1}{x^2}=\frac{2x^2-1}{x^2}=\frac{(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)}{x^2}$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } x>0 \text{이므로 } x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore f'(1)=0$ 이고 $f''(1)=2-1=1>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값 $f(1)=1-3+\ln 1=-2$ 를 갖는다. (거짓)

ㄴ. $f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$ 이고, $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 점 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$ 은 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이다.
 그러므로 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점의 개수는 1이다. (참)
 ㄷ. 열린 구간 $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 에서 $f''(x)<0$ 이므로 열린 구간 $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 는 위로 볼록하다. (참)
 이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

9) 답 : ④
 ㄱ. $f(x)=|x-1|\sqrt{x}=\begin{cases} -1(x-1)\sqrt{x} & (0\leq x<1) \\ (x-1) & (x\geq 1) \end{cases}$ 에 대하여
 $\lim_{h\rightarrow 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\rightarrow 0-}\frac{-h\sqrt{1+h}}{h}=-\lim_{h\rightarrow 0-}\sqrt{1+h}=-1$ 이고,
 $\lim_{h\rightarrow 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\rightarrow 0+}\frac{h\sqrt{1+h}}{h}=\lim_{h\rightarrow 0+}\sqrt{1+h}=1$
 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다. (거짓)
 ㄴ. $0<x<2$ ($x\neq 1$)에서 $f(x)>0$ 이고, $f(1)=0$ 이다.
 따라서 $x=1$ 을 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x 에 대하여 $f(x)\geq f(1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값을 갖는다.
 $x\geq 1$ 일 때 $f(x)=(x-1)\sqrt{x}$ 이므로 $x>1$ 일 때
 $f'(x)=\sqrt{x}+(x-1)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2x+x-1}{2\sqrt{x}}=\frac{3x-1}{2\sqrt{x}}>0$
 이므로 함수 $f(x)$ 는 구간 $(1, \infty)$ 에서 증가한다.
 $0\leq x<1$ 일 때 $f(x)=-(x-1)\sqrt{x}$ 이므로
 $0<x<1$ 일 때
 $f'(x)=-\sqrt{x}-(x-1)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=-\frac{2x+x-1}{2\sqrt{x}}=-\frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$
 $f'(x)=0$ 에서 $3x-1=0$ 이므로 $x=\frac{1}{3}$
 $x=\frac{1}{3}$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{1}{3}$ 에서 극댓값을 갖는다.

그러므로 함수 $f(x)$ 는 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다. (참)
 ㄷ. $0<x<1$ 일 때

$$f''(x)=-\frac{3\times 2\sqrt{x}-(3x-1)\times\frac{1}{\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2}$$

$$=-\frac{6x-(3x-1)}{4x\sqrt{x}}=-\frac{3x+1}{4x\sqrt{x}}<0$$

 이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 위로 볼록하다.
 따라서 열린 구간 $(0, 1)$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 는 위로 볼록하다. (참)
 이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

10) 답 : ③
 $f(x)=(x-4)^2e^{x-2}$ 에서
 $f'(x)=2(x-4)e^{x-2}+(x-4)^2e^{x-2}=(x-2)(x-4)e^{x-2}$
 $f'(x)=0$ 에서 $e^{x-2}>0$ 이므로 $x=2$ 또는 $x=4$
 닫힌 구간 $[0, 5]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| | | | | | | | |
|---------|------------------|------------|---------|------------|---------|------------|-------|
| x | 0 | ... | 2 | ... | 4 | ... | 5 |
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | $\frac{16}{e^2}$ | \nearrow | 4 극대 | \searrow | 0 극소 | \nearrow | e^3 |

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값 4를 가지고, $x=4$ 에서 극솟값 0을 갖는다.
 또한 $f(0)=\frac{16}{e^2}$, $f(5)=e^3$ 이므로 $M=e^3$, $m=0$

따라서 $M+m=e^3+0=e^3$

11) 답 : ③
 $f(x)=e^x-e^2x+k$ 라 하면 $f'(x)=e^x-e^2$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=2$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| | | | |
|---------|------------|----|------------|
| x | ... | 2 | ... |
| $f'(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | \searrow | 극소 | \nearrow |

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극소이면서 최소이다.
 즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최솟값 $f(2)=e^2-2e^2+k=-e^2+k$ 를 갖는다. 따라서 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)\geq 0$ 이 성립하려면 $-e^2+k\geq 0$ 이어야 한다.
 즉, $k\geq e^2$ 이므로 실수 k 의 최솟값은 e^2 이다.

12) 답 : ②
 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$ 에서

$$f(x)=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{x}+C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

이때 $x>0$ 이므로
 $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}+C$
 $f(1)=1$ 이므로 $\ln 1+\frac{1}{1}+C=1$, $C=2$

닫힌 구간 $[1, e]$ 에서 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 닫힌 구간 $[1, e]$ 에서 증가한다.
 따라서 닫힌 구간 $[1, e]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=e$ 에서 최댓값을 가지고,
 $x=1$ 에서 최솟값을 가지므로
 $M-m=f(e)-f(1)$

$$=\left(\ln e-\frac{1}{e}+2\right)-\left(\ln 1+\frac{1}{1}+2\right)$$

$$=\left(3-\frac{1}{e}\right)-1$$

$$=2-\frac{1}{e}$$

13) 답 : ⑤
 $f'(x)=2x\ln x+x$ 에서 $f(x)=\int(2x\ln x+x)dx$
 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=2x$ 로 놓으면 $u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x^2$ 이므로

$$f(x)=\int(2x\ln x+x)dx$$

$$=x^2\ln x-\int\left(x^2\times\frac{1}{x}\right)dx+\int xdx$$



$$=x^2\ln x+\int(-x+x)dx$$

$$=x^2\ln x+C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$
 $f(e)=e^2\ln e+C=e^2+1$ 이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=x^2\ln x+1$
 한편, $f'(x)=2x\ln x+x=0$ 에서 $x>0$ 이므로 $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| | | | | |
|---------|-----|-----|----------------------|-----|
| x | (0) | ... | $\frac{1}{\sqrt{e}}$ | ... |
| $f'(x)$ | | - | 0 | + |

| | | | | |
|--------|--|---|----|---|
| $f(x)$ | |  | 극소 |  |
|--------|--|---|----|---|

함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ 에서 극솟값을 가지므로 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \ln \frac{1}{\sqrt{e}} + 1 = \frac{1}{e} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 1 - \frac{1}{2e}$

14) 답 : ④

조건 (나)에서 $\int f(x)g(x)dx = e^{2x-1} + C$ 의 양변을 x 에 대하여 미분

하면 $f(x)g(x) = 2e^{2x-1} \dots\dots\ominus$

조건 (가)에서 $f(x)g(x) = f'(x)g(x)$ 이므로

$$\int f'(x)g(x)dx = \int f(x)g(x)dx = e^{2x-1} + C \dots\dots\ominus$$

\ominus, \ominus 에서

$$\begin{aligned} h(x) &= \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \\ &= 2e^{2x-1} - (e^{2x-1} + C) \\ &= e^{2x-1} - C \end{aligned}$$

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = e^{2 \times \frac{1}{2} - 1} - C = 2 \text{이므로 } C = -1$$

따라서 $h(x) = e^{2x-1} + 1$ 이므로

$$h(1) = e^{2 \times 1 - 1} + 1 = e + 1$$

15) 답 : ⑤

$\{f(x)\}^2\}' = 2f(x)f'(x)$ 이므로

함수 $f(x)f'(x)$ 의 한 부정적분은 $\frac{1}{2}\{f(x)\}^2$ 이다.

$$\text{따라서 } \int_1^{10} f(x)f'(x)dx = \left[\frac{1}{2}\{f(x)\}^2\right]_1^{10} = \frac{1}{2}[\{f(10)\}^2 - \{f(1)\}^2]$$

$$\begin{aligned} \text{한편, } \int_1^{10} f(x)f'(x)dx &= \sum_{n=1}^9 \int_n^{n+1} f(x)f'(x)dx \\ &= \sum_{n=1}^9 2^{n-1} = \frac{2^9 - 1}{2 - 1} = 511 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{2}[\{f(10)\}^2 - \{f(1)\}^2] = 511 \text{이므로}$$

$$\{f(10)\}^2 - \{f(1)\}^2 = 1022$$

16) 답 : ②

$e^x - 1 = t$ 로 놓으면 $e^x = \frac{dt}{dx}$ 이고

$x = -\ln 2$ 일 때 $t = -\frac{1}{x}$, $x = \ln 2$ 일 때 $t = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^x |e^x - 1| dx &= \int_{-\frac{1}{2}}^1 |t| dt \\ &= -\int_{-\frac{1}{2}}^0 t dt + \int_0^1 t dt \\ &= -\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-\frac{1}{2}}^0 + \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 \\ &= -\left(0 - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

17) 답 : ⑤

$x^2 + 1 = t$ 로 놓으면 $2x = \frac{dt}{dx}$ 이고

$x = 0$ 일 때 $t = 1$, $x = 1$ 일 때 $t = 2$ 이므로

$$\int_0^1 xf(x^2 + 1)dx = \int_1^2 -\frac{1}{2}f(t)dt = 3$$

$$\text{즉, } \int_1^2 f(t)dt = \int_1^2 f(x)dx = 6$$

한편, $2x + 1 = s$ 로 놓으면 $2 = \frac{ds}{dx}$ 이고

$x = 0$ 일 때 $s = 1$, $x = 1$ 일 때 $s = 3$ 이므로

$$\int_0^1 f(2x + 1)dx = \int_1^3 \frac{1}{2}f(s)ds = 5$$

$$\text{즉, } \int_1^3 f(s)ds = \int_1^3 f(x)dx = 10$$

$$\text{따라서 } \int_2^3 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx = 10 - 6 = 4$$

18) 답 : ②

$x + 1 = t$ 로 놓으면 $1 = \frac{dt}{dx}$ 이고

$x = 0$ 일 때 $t = 1$, $x = 1$ 일 때 $t = 2$ 이므로

$$\int_0^1 xf'(x + 1)dx = \int_1^2 (t - 1)f'(t)dt$$

$u(t) = t - 1$, $v'(t) = f'(t)$ 로 놓으면 $u'(t) = 1$, $v(t) = f(t)$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 xf'(x + 1)dx &= \int_1^2 (t - 1)f'(t)dt \\ &= [(t - 1)f(t)]_1^2 - \int_1^2 f(t)dt \\ &= f(2) - \int_1^2 f(t)dt \\ &= 2 - \int_1^2 f(t)dt = 1 \end{aligned}$$

$$\int_1^2 f(t)dt = 1 \text{ 따라서 } \int_1^2 f(x)dx = 1$$

19) 답 : ①

$$\int_2^3 f(1 - x)dx = 2 \text{에서}$$

$1 - x = s$ 로 놓으면 $-1 = \frac{ds}{dx}$ 이고

$x = 2$ 일 때 $s = -1$, $x = 3$ 일 때 $s = -2$ 이므로

$$\int_2^3 f(1 - x)dx = -\int_{-1}^{-2} f(s)ds = \int_{-2}^{-1} f(s)ds = 2$$

조건 (가)에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로

$$\int_1^2 f(s)ds = \int_{-2}^{-1} f(s)ds = 2 \dots\dots\ominus$$

$$\text{한편 } \int_0^2 xf(x - 1)dx = 2 \text{에서}$$

$x - 1 = t$ 로 놓으면 $1 = \frac{dt}{dx}$ 이고

$x = 0$ 일 때 $t = -1$, $x = 2$ 일 때 $t = 1$ 이므로

$$\int_0^2 xf(x - 1)dx = \int_{-1}^1 (t + 1)f(t)dt = \int_{-1}^1 tf(t)dt + \int_{-1}^1 f(t)dt$$

여기서 $g(x) = xf(x)$ 라 하면

$$g(-x) = -xf(-x) = -xf(x) = -g(x)$$

이므로 함수 $y = xf(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

또한 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로

$$\int_0^2 xf(x - 1)dx = \int_{-1}^1 tf(t)dt + \int_{-1}^1 f(t)dt + 0 + 2 \int_0^1 f(t)dt = 2$$

$$\text{따라서 } \int_0^1 f(t)dt = 1 \dots\dots\omin�$$

$\omin�, \omin�$ 에서

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)dx &= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx \\ &= \int_0^1 f(t)dt + \int_1^2 f(s)ds = 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

20) 답 : ④

점 A 의 좌표를 $A\left(t, \frac{1}{t}\right)$ ($t > 0$)이라 하면 직선 l 과 곡선 $y = \frac{a}{x}$

($x > 0$, $a > 1$)이 만나는 점의 좌표는 $\left(at, \frac{1}{t}\right)$ 이다.

S 의 넓이와 T 의 넓이가 서로 같으므로 두 곡선과 직선 $x = t$ 및 직선 $x = at$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 가로, 세로의 길이가 각각 $(a-1)t$, $\frac{1}{t}$ 인 직사각형의 넓이와 같다.

$$\text{즉, } \int_t^{at} \left(\frac{a}{x} - \frac{1}{x} \right) dx = (a-1)t \times \frac{1}{t}$$

$$[a \ln|x| - \ln|x|]_t^{at} = a-1$$

$$(a \ln at - \ln at) - (a \ln t - \ln t) = a-1$$

$$(a-1)(\ln at - \ln t) = a-1$$

$$(a-1) \ln a = a-1$$

$$a > 1 \text{이므로 } \ln a = 1$$

$$\text{따라서 } a = e$$