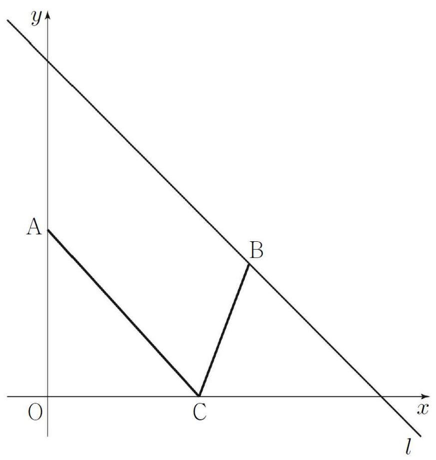
수학 준킬러 미니 모의고사01

1) 좌표평면에서 이차함수 $y=x^2-8x+1$의 그래프와 직선 $y=2x+6$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 무게중심의 좌표를 (a, b)라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [201126]

2) 좌표평면 위에 점 $\mathrm{A}(0, 1)$과 직선 $l : y=-x+2$가 있다. 직선 l 위의 제1사분면 위의 점 $\mathrm{B}(a, b)$와 x축 위의 점 C에 대하여 $\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}}$의 값이 최소일 때, a^2+b^2의 값은? [201114]



① $\frac{1}{2}$

② 1

③ $\frac{3}{2}$

④ 2

⑤ $\frac{5}{2}$

3) 두 자연수 a, b에 대하여 이차함수 $f(x)=a(x-2)(x-b)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값은? [200914]

가. $f(0)=6$
나. x 의 값의 범위가 $x>2$ 일 때, $f(x)>0$ 이다.

① 18

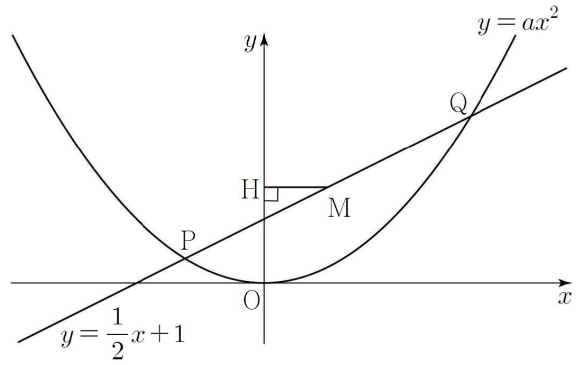
② 20

③ 22

④ 24

⑤ 26

4) 그림과 같이 이차함수 $y=ax^2$ $(a>0)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$이 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 선분 PQ의 중점 M에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분 MH의 길이가 1일 때, 선분 PQ의 길이는? [200916]



① 4

② $\frac{9}{2}$

③ 5

④ $\frac{11}{2}$

⑤ 6

5) 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 6)$이 있다. 다음 조건을 만족시키는 두 직선 l, m의 기울기의 합의 최댓값은? (단, O는 원점이다.) [201118]

가. 직선 l은 점 O를 지난다. 나. 두 직선 l과 m은 선분 AB 위의 점 P에서 만난다. 다. 두 직선 l과 m은 삼각형 OAB의 넓이를 삼등분한다.

① $\frac{3}{4}$

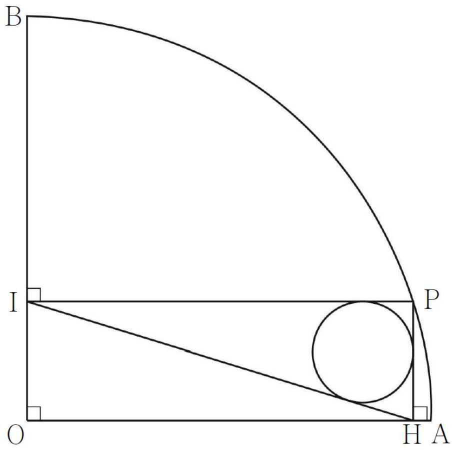
② $\frac{4}{5}$

③ $\frac{5}{6}$

④ $\frac{6}{7}$

⑤ $\frac{7}{8}$

6) 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 4이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 두 선분 OA, OB에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하자. 삼각형 PIH에 내접하는 원의 넓이가 $\frac{\pi}{4}$일 때, $\overline{\mathrm{PH}}^3+\overline{\mathrm{PI}}^3$의 값은? (단, 점 P는 점 A도 아니고 점 B도 아니다.) [201119]



① 56

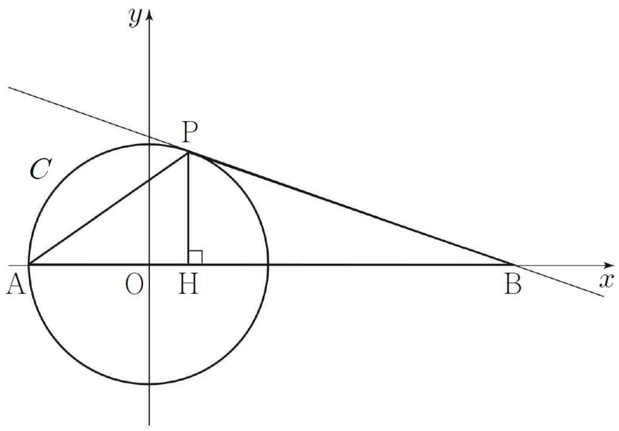
② $\frac{115}{2}$

③ 59

④ $\frac{121}{2}$

⑤ 62

7) 그림과 같이 좌표평면에 원 $C: x^2+y^2=4$와 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$이 있다. 원 C 위의 제1사분면 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. $2\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{HB}}$일 때, 삼각형 PAB의 넓이는? [201120]



① $\frac{10\sqrt{2}}{3}$

② $4\sqrt{2}$

③ $\frac{14\sqrt{2}}{3}$

④ $\frac{16\sqrt{2}}{3}$

⑤ $6\sqrt{2}$

8) 좌표평면 위에 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$이 있다. $f(x)=\frac{1}{4}x^2$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{t^2}{4}\right)$ $(t>0)$을 지나고 기울기가 $\frac{t}{2}$인 직선이 x축과 만나는 점을 Q라 할 때, 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [200919]

ㄱ. $t=2$일 때, 점 Q의 x좌표는 1이다. ㄴ. 두 직선 PQ와 AQ는 서로 수직이다. ㄷ. 선분 QA를 $3:2$로 외분하는 점 R가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점일 때, 삼각형 RQP의 넓이는 $6\sqrt{3}$이다.

① ㄱ

② ㄴ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1) 답 : 14

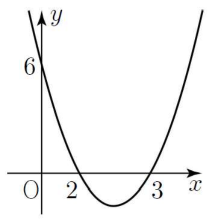
곡선 $y=x^2-8x+1$과 직선 $y=2x+6$의 두 교점 A, B의 좌표를 각각 $(\alpha,\ 2\alpha+6)$, $(\beta,\ 2\beta+6)$이라 하면 $\alpha,\ \beta$는 $x^2-10x-5=0$의 서로 다른 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=10$
점 $(a,\ b)$가 삼각형 OAB의 무게중심이므로
$a=\dfrac{\alpha+\beta+0}{3}$, $b=\dfrac{(2\alpha+6)+(2\beta+6)+0}{3}$
따라서 $a+b=\alpha+\beta+4=14$

2) 답 : ⑤

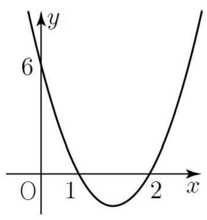
점 B가 직선 $y=-x+2$ 위의 점이므로 점 B의 좌표는 $(a,\ -a+2)$이다. 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면
$\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{A'C}}+\overline{\mathrm{BC}}\ge\overline{\mathrm{A'B}}$이고
$\overline{\mathrm{A'B}}$가 최소일 때 $\overline{\mathrm{A'B}}^2$도 최소이므로
$\overline{\mathrm{A'B}}^2=a^2+(-a+3)^2=2a^2-6a+9=2\left(a-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{2}$
$0<a<2$이므로 $a=\dfrac{3}{2}$에서 $\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}}$의 값은 최소이다.
$b=-a+2=\dfrac{1}{2}$, 따라서 $a^2+b^2=\dfrac{9}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{2}$

3) 답 : ①

조건 (가)에 의하여 $f(0)=2ab=6$이므로 $ab=3$
$a,\ b$가 자연수이므로 $a=1,\ b=3$ 또는 $a=3,\ b=1$
(i) $a=1,\ b=3$ 일 때 : $f(x)=(x-2)(x-3)$

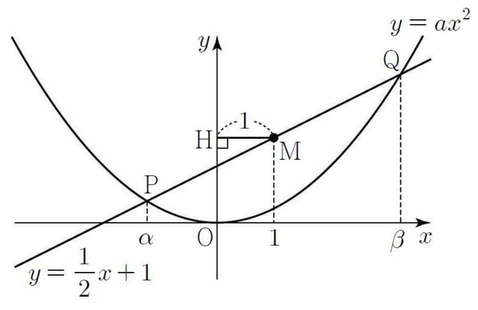


$2<x\le 3$ 일 때 $f(x)\le 0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(ii) $a=3,\ b=1$일 때 : $f(x)=3(x-2)(x-1)$



x의 값의 범위가 $x>2$일 때, $f(x)>0$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.
(i), (ii)에 의하여 $a=3,\ b=1$이고 $f(x)=3(x-2)(x-1)$
따라서 $f(4)=18$

4) 답 : ③

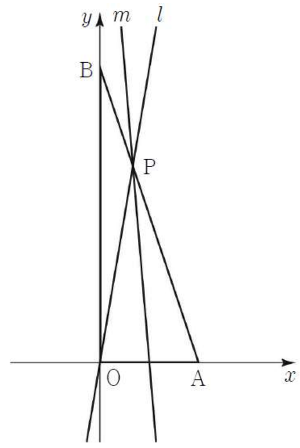


$ax^2=\dfrac{1}{2}x+1$에서 $2ax^2-x-2=0$
두 점 P, Q의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에서 $\alpha+\beta=\dfrac{1}{2a}$, $\alpha\beta=-\dfrac{1}{a}$ …… ㉠
점 M의 x좌표는 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{1}{4a}=1$, $a=\dfrac{1}{4}$

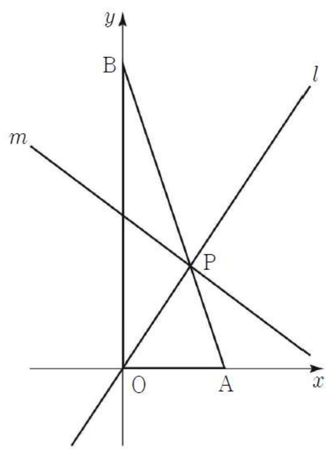
㉠에 의하여 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-4$
$\mathrm{P}\left(\alpha,\ \dfrac{\alpha}{2}+1\right)$, $\mathrm{Q}\left(\beta,\ \dfrac{\beta}{2}+1\right)$이므로
$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\dfrac{1}{4}(\beta-\alpha)^2}=\dfrac{\sqrt{5}\sqrt{(\beta-\alpha)^2}}{2}$
$=\dfrac{\sqrt{5}\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}}{2}=5$

5) 답 : ①

조건 (가)에서 직선 l이 삼각형 OAB의 점 B를 지나므로 조건 (나), (다)에서 점 P는 선분 AB를 $2:1$ 또는 $1:2$로 내분하는 점이어야 한다.
ⅰ) 점 P가 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점일 때



점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{2}{3},\ 4\right)$이므로 직선 l의 기울기는 $\dfrac{4-0}{\dfrac{2}{3}-0}=6$
조건 (다)에서 직선 m은 삼각형 OAP의 넓이를 이등분하여야 하므로 선분 OA의 중점 $(1,\ 0)$을 지난다.
직선 m의 기울기는 $\dfrac{4-0}{\dfrac{2}{3}-1}=-12$
두 직선 $l,\ m$의 기울기의 합은 -6
ⅱ) 점 P가 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점일 때



점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{4}{3},\ 2\right)$이므로 직선 l의 기울기는 $\dfrac{2-0}{\dfrac{4}{3}-0}=\dfrac{3}{2}$
조건 (다)에서 직선 m은 삼각형 OPB의 넓이를 이등분하여야 하므로 선분 OB의 중점 $(0,\ 3)$을 지난다.
직선 m의 기울기는 $\dfrac{2-3}{\dfrac{4}{3}-0}=-\dfrac{3}{4}$
두 직선 $l,\ m$의 기울기의 합은 $\dfrac{3}{4}$
ⅰ), ⅱ)에 의하여 두 직선 $l,\ m$의 기울기의 합의 최댓값은 $\dfrac{3}{4}$

6) 답 : ②

$\angle \mathrm{HPI}=90°$이므로 $\overline{\mathrm{HI}}=\overline{\mathrm{OP}}$에서 $\overline{\mathrm{HI}}=4$이다.
$\overline{\mathrm{PH}}=x$, $\overline{\mathrm{PI}}=y$라 하면 삼각형 PIH에서 $x^2+y^2=16$…… ㉠
삼각형 PIH의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\pi r^2 = \frac{\pi}{4}$에서 $r = \frac{1}{2}$

삼각형 PIH의 넓이는 $\frac{1}{2}xy = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (x+y+4)$

$xy = \frac{1}{2}(x+y+4)$에서 $x+y = 2(xy-2)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $4(xy-2)^2 - 2xy = 16$, $xy(2xy-9) = 0$

$xy \neq 0$이므로 $xy = \frac{9}{2}$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $x+y = 5$

$\overline{\mathrm{PH}}^3 + \overline{\mathrm{PI}}^3 = x^3 + y^3$

$= (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 5^3 - 3 \times \frac{9}{2} \times 5 = \frac{115}{2}$

7) 답 : ④

점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 원 C 위의 점 P에서의 접선의 방정식은 $x_1x + y_1y = 4$이므로 점 B의 좌표는 $\left(\frac{4}{x_1},\ 0\right)$

점 H의 x좌표는 x_1이고 $2\overline{\mathrm{AH}} = \overline{\mathrm{HB}}$에서

$2(x_1+2) = \frac{4}{x_1} - x_1$

$3{x_1}^2 + 4x_1 - 4 = 0$

$(x_1+2)(3x_1-2) = 0$

$x_1 > 0$이므로 $x_1 = \frac{2}{3}$에서 B(6, 0)

점 P는 원 C 위의 점이므로 ${x_1}^2 + {y_2}^2 = 4$에서 $\mathrm{P}\left(\frac{2}{3},\ \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$

따라서 삼각형 PAB의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 8 \times \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$

8) 답 : ⑤

ㄱ. $t = 2$이므로 P(2, 1)

직선 PQ의 방정식은 $y = (x-2)+1 = x-1$

점 Q의 x좌표는 1 (참)

ㄴ. 직선 PQ의 방정식은 $y - \frac{t^2}{4} = \frac{t}{2}(x-t)$

$y = \frac{t}{2}x - \frac{t^2}{4}$에서 $\mathrm{Q}\left(\frac{t}{2},\ 0\right)$

직선 PQ의 기울기는 $\frac{t}{2}$이고,

직선 AQ의 기울기는 $\dfrac{0-1}{\frac{t}{2}-0} = -\frac{2}{t}$

$\frac{t}{2} \times \left(-\frac{2}{t}\right) = -1$이므로

두 직선 PQ와 AQ는 서로 수직이다. (참)

ㄷ. 점 R는 선분 QA를 3 : 2 로 외분하는 점이므로

점 R의 x좌표는 $\dfrac{3 \times 0 - 2 \times \frac{t}{2}}{3-2} = -t$

점 R의 y좌표는 $\dfrac{3 \times 1 - 2 \times 0}{3-2} = 3$

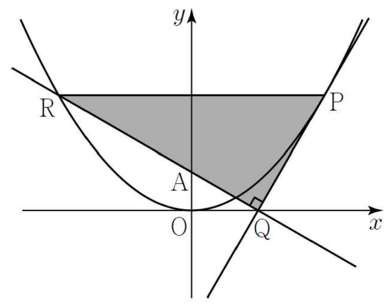
$\mathrm{R}(-t,\ 3)$이고, 점 R가 이차함수 $y = \frac{1}{4}x^2$의 그래프 위의 점이므로 $3 = \frac{1}{4} \times (-t)^2$

$t^2 = 12$에서 $t > 0$이므로 $t = 2\sqrt{3}$

$\mathrm{R}(-2\sqrt{3},\ 3)$, $\mathrm{Q}(\sqrt{3},\ 0)$, $\mathrm{P}(2\sqrt{3},\ 3)$

삼각형 RQP의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{RQ}} \times \overline{\mathrm{QP}} = \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ