# 2. 여러 가지 함수의 미분 주요기출

1) $2\cos\alpha = 3\sin\alpha$이고 $\tan(\alpha+\beta)=1$일 때, $\tan\beta$의 값은? [2109 3점]

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{1}{5}$

③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{3}$

⑤ $\frac{1}{2}$

2) 좌표평면에서 두 직선 $x-y-1=0$, $ax-y+1=0$이 이루는 예각의 크기를 $\theta$라 하자. $\tan\theta=\frac{1}{6}$일 때, 상수 $a$의 값은? (단, $a>1$) [1509 3점]

① $\frac{11}{10}$

② $\frac{6}{5}$

③ $\frac{13}{10}$

④ $\frac{7}{5}$

⑤ $\frac{3}{2}$

3) 함수 $f(x)=\sin(x+\alpha)+2\cos(x+\alpha)$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$일 때, $\tan\alpha$의 값은? (단, $\alpha$는 상수이다.) [1906 3점]

① $-\frac{5}{6}$

② $-\frac{2}{3}$

③ $-\frac{1}{2}$

④ $-\frac{1}{3}$

⑤ $-\frac{1}{6}$

4) $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$라 하자. $\tan(\alpha+\beta)=-\frac{3}{2}$일 때, $\tan\alpha$의 값은? [1911 3점]

① $\frac{21}{10}$

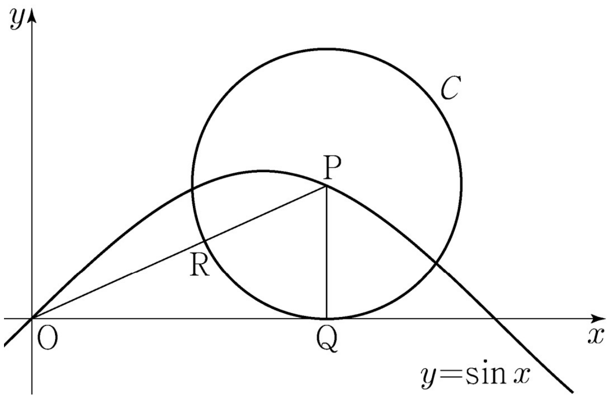
② $\frac{11}{5}$

③ $\frac{23}{10}$

④ $\frac{12}{5}$

⑤ $\frac{5}{2}$

5) 좌표평면에서 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$ $(0<t<\pi)$를 중심으로 하고 $x$축에 접하는 원을 $C$라 하자. 원 $C$가 $x$축에 접하는 점을 Q, 선분 OP와 만나는 점을 R라 하자. $\lim_{t\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\overline{\mathrm{OR}}}=a+b\sqrt{2}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, $a$, $b$는 정수이다.) [1911 3점]




6) 이차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\ln(x+1)} & (x\neq 0)\\ 8 & (x=0)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 구간 $(-1,\ \infty)$에서 연속일 때, $f(3)$의 값은? [1311 3점]

① 6
② 9
③ 12
④ 15
⑤ 18

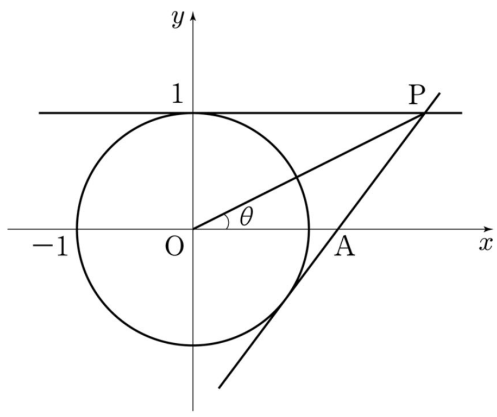
7) 함수

$$f(x)=\begin{cases}x+a & (x\leq 1)\\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{2x^{n+1}+3x^n}{x^n+1} & (x>1)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 $a$의 값은? [1306 3점]

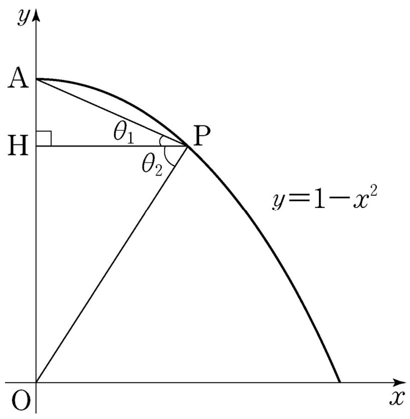
① 2
② 4
③ 6
④ 8
⑤ 10

8) 그림과 같이 직선 $y=1$ 위의 점 P에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 접선이 $x$축과 만나는 점을 A라 하고, $\angle\mathrm{AOP}=\theta$라 하자. $\overline{\mathrm{OA}}=\frac{5}{4}$일 때, $\tan 3\theta$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$이다.) [1205예비 4점]




① 4
② $\frac{9}{2}$
③ 5
④ $\frac{11}{2}$
⑤ 6

9) 곡선 $y=1-x^2$ $(0<x<1)$ 위의 점 P에서 $y$축에 내린 수선의 발을 H라 하고, 원점 O와 점 A$(0,1)$에 대하여 $\angle\mathrm{APH}=\theta_1$, $\angle\mathrm{HPO}=\theta_2$라 하자. $\tan\theta_1=\frac{1}{2}$일 때, $\tan(\theta_1+\theta_2)$의 값은? [1709 4점]




① 2
② 4
③ 6
④ 8
⑤ 10

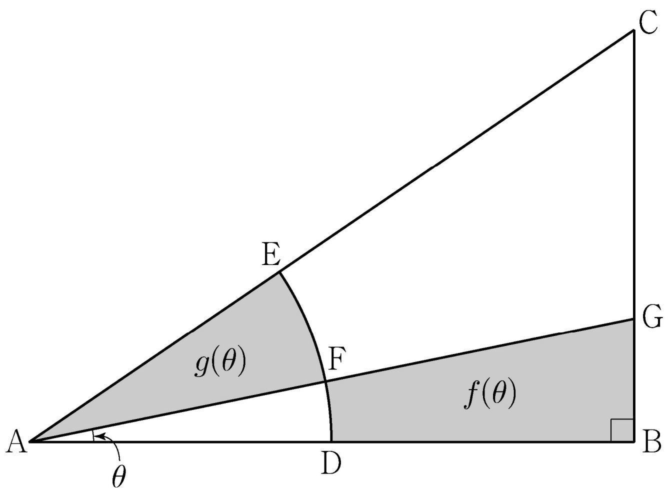
10) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{1-\sin x}-e^{1-\tan x}}{\tan x-\sin x}$ 의 값은? [0906 3점]

① $\frac{1}{e}$
② $\frac{2}{e}$
③ 1
④ $e$
⑤ $2e$

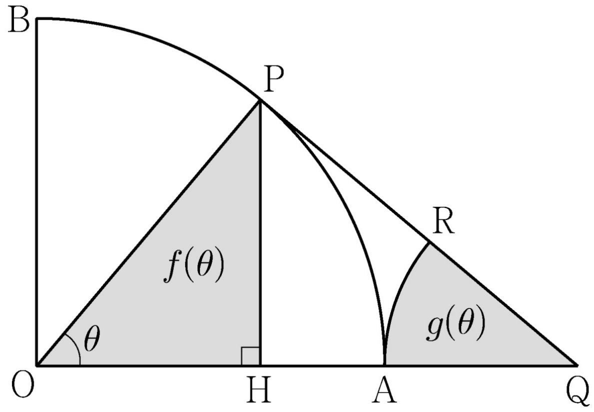
11) 세 양수 $a$, $b$, $c$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}x^a\ln\left(b+\frac{c}{x^2}\right)=2$일 때, $a+b+c$의 값은? [1006 4점]

① 5
② 6
③ 7
④ 8
⑤ 9

12) 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\angle \mathrm{B}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 중심이 A, 반지름의 길이가 1인 원이 두 선분 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E라 하자. 호 DE의 삼등분점 중 점 D에 가까운 점을 F라 하고, 직선 AF가 선분 BC와 만나는 점을 G라 하자.
$\angle \mathrm{BAG}=\theta$라 할 때, 삼각형 ABG의 내부와 부채꼴 ADF의 외부의 공통부분의 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 AFE의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $40\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}$의 값을 구하시오. [2011 3점]

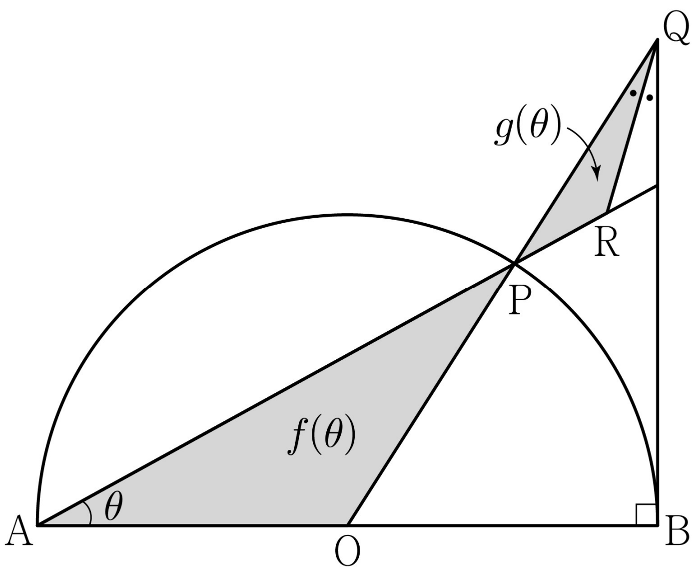



13) 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H, 점 P에서 호 AB에 접하는 직선과 직선 OA의 교점을 Q라 하자. 점 Q를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{QA}}$인 원과 선분 PQ의 교점을 R라 하자. $\angle \mathrm{POA}=\theta$일 때, 삼각형 OHP의 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 QRA의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sqrt{g(\theta)}}{\theta\times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [1909 4점]




① $\frac{\sqrt{\pi}}{5}$
② $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$
③ $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$
④ $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
⑤ $\sqrt{\pi}$

14) 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 OP와 만나는 점을 Q라 하고, $\angle$OQB의 이등분선이 직선 AP와 만나는 점을 R라 하자. $\angle \mathrm{OAP}=\theta$일 때, 삼각형 OAP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PQR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^4 \times f(\theta)}$의 값은? $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$ [2106 4점]




① 2

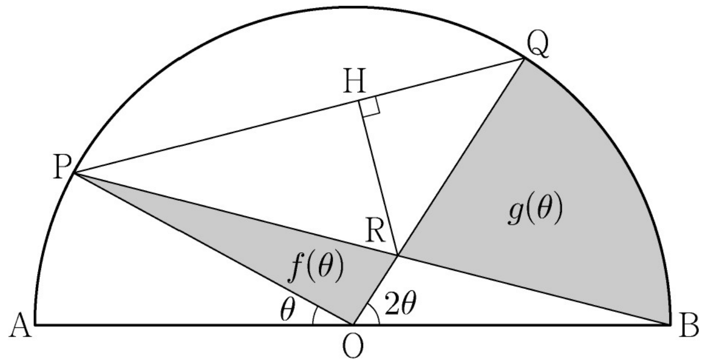
② $\frac{5}{2}$

③ 3

④ $\frac{7}{2}$

⑤ 4

15) 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle \mathrm{POA}=\theta$, $\angle \mathrm{QOB}=2\theta$가 되도록 잡는다. 두 선분 PB, OQ의 교점을 R라 하고, 점 R에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 POR의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 RQ, RB와 호 QB로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\mathrm{f}(\theta)+\mathrm{g}(\theta)}{\overline{\mathrm{RH}}}=\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{3}$이고, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [2009 4점]



1) 답 : ②

$2\cos\alpha = 3\sin\alpha$에서 $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{2}{3}$이므로 $\tan\alpha=\dfrac{2}{3}$

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{2}{3}+\tan\beta}{1-\frac{2}{3}\tan\beta}=\dfrac{2+3\tan\beta}{3-2\tan\beta}$이고,

$\tan(\alpha+\beta)=1$이므로 $\dfrac{2+3\tan\beta}{3-2\tan\beta}=1$

따라서 $\tan\beta=\dfrac{1}{5}$

2) 답 : ④

$x-y-1=0$의 기울기를 $m_1$, $ax-y+1=0$의 기울기를 $m_2$라 하면

$m_1=1$, $m_2=a$이고 $\tan\theta=\left|\dfrac{1-a}{1+a}\right|=\dfrac{a-1}{a+1}=\dfrac{1}{6}$ $(\because a>1)$

따라서 $6a-6=1+a$, $5a=7$, $\therefore a=\dfrac{7}{5}$

3) 답 : ④

$f'(x)=\cos(x+\alpha)-2\sin(x+\alpha)$이므로

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=0$

즉, $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$에서

$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{1}{2}$이므로 $\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\dfrac{1}{2}$

$2(1+\tan\alpha)=1-\tan\alpha$, $\tan\alpha=-\dfrac{1}{3}$

4) 답 : ④

$\angle C=\gamma$ 라 하면 $\tan\gamma=\tan(\pi-(\alpha+\beta))=-\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{3}{2}$

한편, 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$이므로 $\beta=\gamma$이다.

그러므로 $\tan\beta=\tan\gamma=\dfrac{3}{2}$

따라서, $\tan\alpha=\tan(\pi-(\beta+\gamma))=-\tan(\beta+\gamma)$

$$=-\tan(2\beta)=-\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=-\frac{2\times\frac{3}{2}}{1-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{12}{5}$$

5) 답 : 2

점 P의 좌표가 $(t,\ \sin t)$ $(0<t<\pi)$이므로 점 Q의 좌표는 $(t,\ 0)$다.

$\overline{PR}=\overline{PQ}=\sin t$

$\overline{OR}=\overline{OP}-\overline{PR}=\sqrt{t^2+\sin^2 t}-\sin t$

이므로

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\overline{OQ}}{\overline{OR}}=\lim_{t\to 0+}\frac{t}{\sqrt{t^2+\sin^2 t}-\sin t}=\lim_{t\to 0+}\frac{t\left(\sqrt{t^2+\sin^2 t}+\sin t\right)}{(t^2+\sin^2 t)-\sin^2 t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt{t^2+\sin^2 t}+\sin t}{t}=\lim_{t\to 0+}\left\{\sqrt{1+\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2}+\frac{\sin t}{t}\right\}$$

$=\sqrt{1+1^2}+1=1+\sqrt{2}$

이때, $1+\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}$에서 $a$, $b$가 정수이므로 $a=1$, $b=1$

따라서 $a+b=1+1=2$

6) 답 : ②

$f(x)$는 실수 전체에서 연속이고 $g(x)$는 구간 $(-1,\ \infty)$에서 $x\neq 0$인 모든 곳에서 연속이므로 $f(x)g(x)$가 구간 $(-1,\ \infty)$에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이면 된다.

$f(x)=x^2+ax+b$라 하면 $f(0)g(0)=8b$이고

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)}$이므로 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)}=8b$

$\lim\limits_{x\to 0}\ln(x+1)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+ax+b)=0$ $\therefore b=0$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+ax}{\ln(x+1)}=0$이므로 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\ln(x+1)}\times(x+a)\right)=0$ $\therefore a=0$

따라서 $f(x)=x^2$이고 $f(3)=9$

7) 답 : ②

함수 $f(x)=\begin{cases} x+a & (x\leq 1) \\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^{n+1}+3x^n}{x^n+1} & (x>1)\end{cases}$

실수 전체의 집합에서 연속이기 때문에 $x=1$ 에서도 연속

$\therefore f(1)=\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}f(x)$

$f(1)=\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=1+a\cdots$ ㉠

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^{n+1}+3x^n}{x^n+1}$ $(x>1)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2x^{n+1}+3x^n)(\frac{1}{x^n})}{(x^n+1)(\frac{1}{x^n})}=2x+3$$

$\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=5\cdots$ ㉡,  ㉠, ㉡에서 $a=4$

8) 답 : ④

점 P의 좌표를 $(a,\ 1)$이라 하자. $\overline{OA}=\dfrac{5}{4}$이므로 $A\left(\dfrac{5}{4},\ 0\right)$

원 $x^2+y^2=1$에 접하고 기울기가 $m$인 직선의 방정식은

$y=mx-\sqrt{m^2+1}$ $\left(\because\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ ㉠

점 A가 ㉠ 위의 점이므로 $0=\dfrac{5}{4}m-\sqrt{m^2+1}$

$\dfrac{25}{16}m^2=m^2+1$. $\therefore$ $m=\dfrac{4}{3}$ $(\because m>0)$

$\therefore$ $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{5}{3}$

점 P가 직선 $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{5}{3}$ 위의 점이므로 $1=\dfrac{4}{3}a-\dfrac{5}{3}$

$\therefore$ $a=2$

이때, $\tan\theta=\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{2}$이므로 $\tan 2\theta=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}$

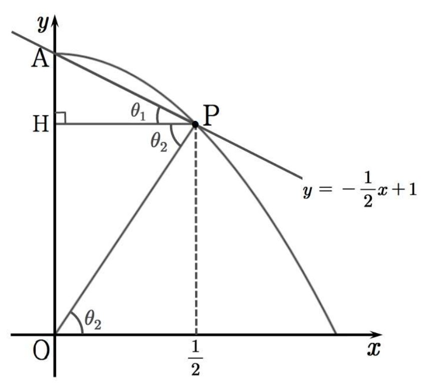
$$\therefore\ \tan 3\theta=\frac{\frac{1}{2}+\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}}=\frac{11}{2}$$

9) 답 : ④

$\tan\theta_1=\dfrac{1}{2}$ 이므로 직선 AP 의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$ 이고 $y$ 절편은 1 이므로 직선 AP 의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{2}x+1$ 이다.

직선 AP 와 곡선 $y=1-x^2$ 과의 교점을 구하면

$1-x^2=-\dfrac{1}{2}x+1$ 에서 $x=\dfrac{1}{2}$ 임을 알 수 있다.



$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right)$

한편 그림과 같이 $\theta_2$ 는 직선 OP 와 $x$ 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기와 같으므로 $\tan\theta_2 = \frac{3}{2}$

$$\tan(\theta_1+\theta_2) = \frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$$

10) 답 : ④

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{1-\sin x}-e^{1-\tan x}}{\tan x-\sin x} = \lim_{x\to 0}e^{1-\tan x}\times\frac{e^{\tan x-\sin x}-1}{\tan x-\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}e^{1-\tan x}\times\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x-\sin x}-1}{\tan x-\sin x}$$

(여기서 $\tan x-\sin x = t$ 라 하면)

$$= \lim_{x\to 0}e^{1-\tan x}\times\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t} = e$$

11) 답 : ①

$\lim\limits_{x\to\infty}x^a = \infty$이므로 주어진 등식이 성립하려면

$\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(b+\frac{c}{x^2}\right) = 0$이어야 한다.

따라서 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(b+\frac{c}{x^2}\right) = 1$이어야 하므로 $b=1$

이때, (주어진 식)$= \lim\limits_{x\to\infty}cx^{a-2}\ln\left(1+\frac{c}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{c}} = \lim\limits_{x\to\infty}cx^{a-2} = 2$이어야 하므로 $a-2=0,\ c=2$

$\therefore\ a=2,\ c=2$

$\therefore\ a+b+c = 2+1+2 = 5$

12) 답 : 60

$$f(\theta) = 2\tan\theta\times 2\times\frac{1}{2}-\frac{\theta}{2} = 2\tan\theta-\frac{\theta}{2}$$

$\angle\mathrm{CAB} = 3\theta$이므로, $g(\theta) = \frac{1}{2}(3\theta-\theta) = \theta$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)} = \lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{2\tan\theta}{\theta}-\frac{1}{2}\right) = 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$40\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)} = 60$$

13) 답 : ④

$\overline{\mathrm{OH}} = \cos\theta$, $\overline{\mathrm{PH}} = \sin\theta$이므로 $f(\theta) = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}\sin 2\theta$

$\angle\mathrm{OPQ} = \frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{\cos\theta}$이고, $\overline{\mathrm{AQ}} = \frac{1}{\cos\theta}-1 = \frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}$

이때 $\angle\mathrm{AQR} = \frac{\pi}{2}-\theta$이므로 $g(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$이다.

$$\frac{\sqrt{g(\theta)}}{\theta\times f(\theta)} = \frac{4}{\cos\theta}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\frac{1-\cos\theta}{\theta\sin 2\theta}}$$

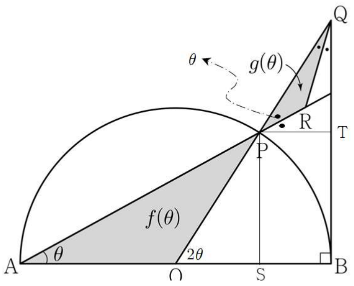
$= \frac{4}{\cos\theta}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}}\frac{\theta}{\sin 2\theta}$이므로 $\lim\limits_{\theta\to 0+}\frac{\sqrt{g(\theta)}}{\theta\times f(\theta)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

14) 답 : ①

$\overline{\mathrm{AP}} = 2\cos\theta$이므로 $f(\theta) = \cos\theta\sin\theta$

또는 $f(\theta) = \frac{1}{2}\times 1\times 1\times\sin(\pi-2\theta)$

$$= \frac{\sin 2\theta}{2}$$




또한 $\angle\mathrm{APO} = \angle\mathrm{QPR} = \theta$이므로 점 P에서 두 선분 AB, BQ에 내린 수선의 발을 각각 S, T라 하면 $\angle\mathrm{QPT} = 2\theta$

즉, 점 R은 삼각형 PTQ의 내심이다.

이때, $\overline{\mathrm{OS}} = \cos 2\theta$, $\overline{\mathrm{PS}} = \sin 2\theta$, $\overline{\mathrm{BQ}} = \tan 2\theta$이므로 $\overline{\mathrm{PT}} = 1-\cos 2\theta$

$\overline{\mathrm{QT}} = \tan 2\theta-\sin 2\theta = \tan 2\theta(1-2\cos 2\theta)$이고,

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sec 2\theta-1 = \frac{1-\cos 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta(1+\cos 2\theta)}$이므로

따라서 삼각형 PTQ의 내접원의 방지름의 길이를 $r$라 하면

$$\frac{1}{2}\times(1-\cos 2\theta)\times\tan 2\theta(1-\cos 2\theta)$$

$= \frac{1}{2}\times r\times\left\{\frac{1-\cos 2\theta}{\cos 2\theta}+1-\cos 2\theta+\tan 2\theta(1-\cos 2\theta)\right\}$에서

$r = \frac{(1-\cos 2\theta)\sin 2\theta}{1+\sin 2\theta+\cos 2\theta}$이다.

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^4\times f(\theta)}$$

$$= \lim_{\theta\to 0+}\left\{\left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\right)^4\times 16\times\frac{1}{\cos 2\theta(1+\sin 2\theta+\cos 2\theta)(1+\cos 2\theta)^2}\right\}$$

$$= 1^4\times 16\times\frac{1}{8} = 2$$

15) 답 : 23

중심각과 원주각의 성질에 의하여 $\angle\mathrm{AOP} = \theta$이므로 $\angle\mathrm{ABP} = \frac{\theta}{2}$

삼각형 OBR에서 $\angle\mathrm{BRO} = \pi-\left(2\theta+\frac{\theta}{2}\right) = \pi-\frac{5\theta}{2}$이므로

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\sin\left(\pi-\frac{5\theta}{2}\right)} = \frac{\overline{\mathrm{OR}}}{\sin\frac{\theta}{2}}$

$\frac{1}{\sin\frac{5\theta}{2}} = \frac{\overline{\mathrm{OR}}}{\sin\frac{\theta}{2}}$에서 $\overline{\mathrm{OR}} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}}$

(ⅰ) 삼각형 POR에서 $\angle\mathrm{POR} = \pi-3\theta$이므로

$f(\theta) = \frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{OR}}\times\sin(\pi-3\theta)$

$$= \frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}}\times\sin 3\theta = \frac{\sin\frac{\theta}{2}\sin 3\theta}{2\sin\frac{5\theta}{2}}$$

(ⅱ) $g(\theta)$는 부채꼴 QOB의 넓이에서 삼각형 OBR의 넓이를 뺀 것이므로 $g(\theta) = \frac{1}{2}\times 1^2\times 2\theta-\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{OR}}\times\sin 2\theta$

$$= \theta-\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}}\times\sin 2\theta = \theta-\frac{\sin\frac{\theta}{2}\sin 2\theta}{2\sin\frac{5\theta}{2}}$$

(ⅲ) 이등변삼각형 POQ에서 점 O에서 PQ에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 $\overline{\mathrm{OH'}} = \overline{\mathrm{OP}}\times\cos\left(\frac{\pi-3\theta}{2}\right) = 1\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\theta}{2}\right) = \sin\frac{3\theta}{2}$

두 삼각형 OQH′, ROH가 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{OH'}} : \overline{\mathrm{RH}} = \overline{\mathrm{OQ}} : \overline{\mathrm{RQ}} = 1 : (1-\overline{\mathrm{OR}})$

$$\overline{\mathrm{RH}} = \overline{\mathrm{OH'}}\times(1-\overline{\mathrm{OR}}) = \sin\frac{3\theta}{2}\times\left(1-\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}}\right)$$

(ⅰ),(ⅱ),(ⅲ)에서 $f(\theta)+g(\theta) = \theta+\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{5\theta}{2}}\times(\sin 3\theta-\sin 2\theta)$ 이고

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\theta}}{\frac{\sin\frac{5\theta}{2}}{\theta}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}}=\frac{1}{5}$$ 이므로

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta+g(\theta)}{\overline{RH}}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta+\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{5\theta}{2}}\times(\sin3\theta-\sin2\theta)}{\sin\frac{3\theta}{2}\times\left(1-\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}}\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{1+\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{5\theta}{2}}\times\left(\frac{\sin3\theta}{\theta}-\frac{\sin2\theta}{\theta}\right)}{\frac{\sin\frac{3\theta}{2}}{\theta}\times\left(1-\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}}\right)}$$

$$=\frac{1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times(3-2)}{\frac{3}{2}\times\left(1-\frac{1}{5}\right)}=\frac{\frac{11}{10}}{\frac{6}{5}}=\frac{11}{12}$$

따라서 $p+q=12+11=23$