수학 준킬러 미니 모의고사04

1) x에 대한 방정식 $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=x^7+x^6+x^5+x^4$의 세 근을 각각 α, β, γ라 할 때, $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$의 값은? [180314]

① 3
② 7
③ 11
④ 15
⑤ 19

2) 원 $C_1 : x^2+y^2=2$를 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 원을 C_2라 하자. 점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$에서 원 C_2에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 상수 k의 값은? (단, $k>2$) [190915]

① $1+\sqrt{2}$
② $2+\sqrt{2}$
③ $1+2\sqrt{2}$
④ $3+\sqrt{2}$
⑤ $2+2\sqrt{2}$

3) 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 4)$, $\mathrm{B}(6,\ 6)$이 있다. 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하자. 점 $\mathrm{C}(0,\ k)$가 다음 조건을 만족시킬 때, k의 값은? [190916]

가. $0<k<3$
나. 삼각형 $\mathrm{A'BC}$의 넓이는 삼각형 ACB의 넓이의 2배이다.

① $\frac{4}{5}$
② 1
③ $\frac{6}{5}$
④ $\frac{7}{5}$
⑤ $\frac{8}{5}$

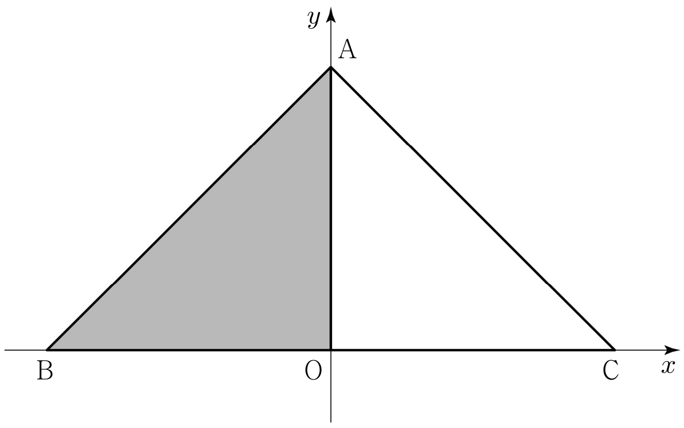
4) 양수 a에 대하여 $0\le x\le a$에서 이차함수

$$f(x)=x^2-8x+a+6$$

의 최솟값이 0이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은? [190917]

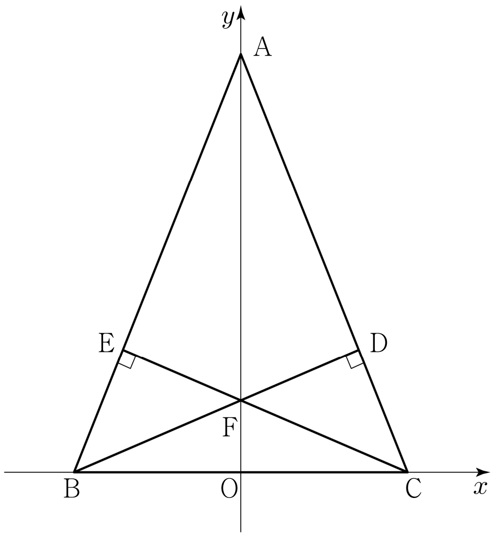
① 11
② 12
③ 13
④ 14
⑤ 15

5) 좌표평면 위에 세 점 $\mathrm{A}(0,\ 9)$, $\mathrm{B}(-9,\ 0)$, $\mathrm{C}(9,\ 0)$이 있다. 실수 $t\ (0<t<18)$에 대하여 세 점 O, A, B를 x축의 방향으로 t만큼 평행이동한 점을 각각 O', A', B'이라 하자. 삼각형 OCA의 내부와 삼각형 $\mathrm{O'A'B'}$의 내부의 공통부분의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $S(t)$의 최댓값은? (단, O는 원점이다.) [190919]



① 21
② 24
③ 27
④ 30
⑤ 33

6) 그림과 같이 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(0,\ 2+2\sqrt{2})$, $\mathrm{B}(-2,\ 0)$, $\mathrm{C}(2,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 D, 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 E, 선분 BD와 선분 CE가 만나는 점을 F라 할 때, 사각형 AEFD의 둘레의 길이를 l이라 하자. $l^2=a+b\sqrt{2}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 자연수이다.) [190929]



7) x에 대한 삼차식

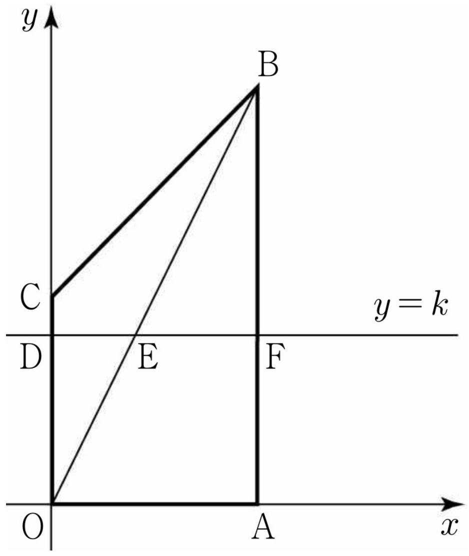
$$f(x)=x^3+(2a-1)x^2+(b^2-2a)x-b^2$$

에 대하여 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [190320]

ㄱ. $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다.
ㄴ. $a<b<0$인 어떤 두 실수 a, b에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
ㄷ. 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖고 세 근의 합이 7이 되도록 하는 두 정수 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 5이다.

① ㄱ
② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8) 그림과 같이 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(1,0)$, $\mathrm{B}(1,2)$, $\mathrm{C}(0,1)$을 꼭짓점으로 하는 사각형 OABC가 있다. 실수 k $(0<k<1)$에 대하여 직선 $y=k$가 세 선분 OC, OB, AB와 만나는 점을 각각 D, E, F라 하자. 삼각형 OED의 넓이를 S_1, 사각형 OAFE의 넓이를 S_2, 삼각형 EFB의 넓이를 S_3, 사각형 DEBC의 넓이를 S_4라 할 때, $(S_1-S_3)^2+(S_2-S_4)^2$의 최솟값은? [190620]



① $\frac{1}{8}$
② $\frac{3}{16}$
③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{5}{16}$
⑤ $\frac{3}{8}$

1) 답 : ①

$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=x^7+x^6+x^5+x^4$

좌변을 전개하면 $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7$ 이므로

$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7=x^7+x^6+x^5+x^4$

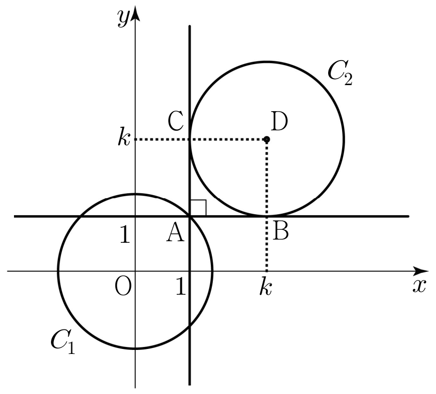
$1+x+x^2+x^3=0$, $(1+x)+x^2(1+x)=0$

$(1+x)(1+x^2)=0$, $x=-1$ 또는 $x^2=-1$

따라서 주어진 방정식의 세 근은 -1, i, $-i$ 이므로

$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=(-1)^4+i^4+(-i)^4=1+1+1=3$

2) 답 : ①



점 A(1, 1)에서 원 C_2에 그은 두 접선이 원 C_2와 만나는 점을 각각 B, C라 하고, 원 C_2의 중심을 D(k, k)라 하자. 사각형 ABDC는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 정사각형이다.

$k>2$ 이므로 $k=1+\sqrt{2}$

3) 답 : ③

직선 AB의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}x+3$

직선 AB를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선 A′B의 방정식은 $y=2x-6$ 이므로 점 C와 직선 A′B 사이의 거리는 점 C와 직선 AB 사이의 거리의 2배이다.

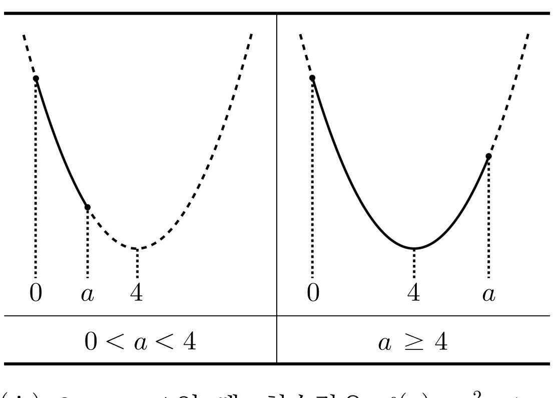
$$\frac{|-k-6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|-2k+6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\times 2$$

$0<k<3$ 이므로 $k+6=2(-2k+6)$, 따라서 $k=\dfrac{6}{5}$

4) 답 : ①

$f(x)=x^2-8x+a+6=(x-4)^2+a-10$

a의 값에 따른 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(ⅰ) $0<a<4$일 때, 최솟값은 $f(a)=a^2-7a+6=(a-1)(a-6)=0$

$a=1$ 또는 $a=6$, $0<a<4$ 이므로 $a=1$

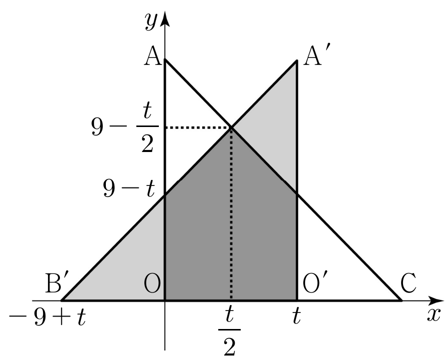
(ⅱ) $a\ge 4$일 때, 최솟값은 $f(4)=a-10=0$

$a=10$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(x)$의 최솟값이 0이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은 $1+10=11$

5) 답 : ③

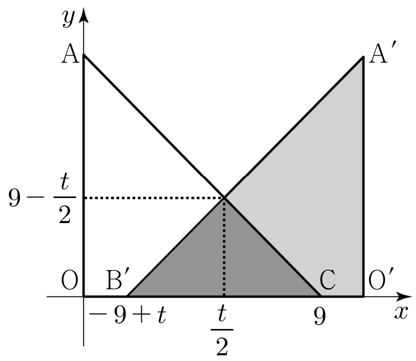
(ⅰ) $0<t<9$일 때,



$S(t)=2\times\dfrac{1}{2}\times\left(9-t+9-\dfrac{t}{2}\right)\times\dfrac{t}{2}=\dfrac{3}{4}t(12-t)=-\dfrac{3}{4}(t-6)^2+27$

따라서 $t=6$일 때, $S(t)$의 최댓값은 27

(ⅱ) $9\le t<18$일 때,



$S(t)=\dfrac{1}{2}\times(18-t)\times\left(9-\dfrac{t}{2}\right)=\dfrac{1}{4}(t-18)^2$

따라서 $t=9$일 때, $S(t)$의 최댓값은 $\dfrac{81}{4}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $S(t)$의 최댓값은 27

6) 답 : 96

직선 AC의 기울기는 $\dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2}=-1-\sqrt{2}$

직선 AC와 직선 BD는 서로 수직이므로

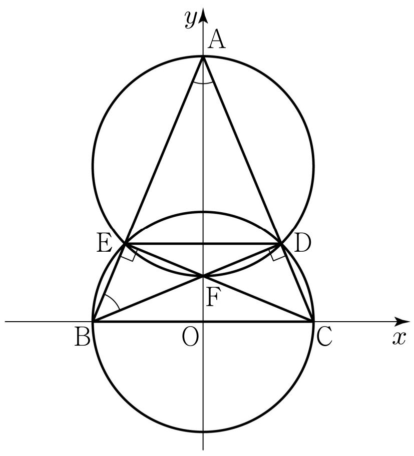
직선 BD의 기울기는 $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$

직선 BD의 방정식은 $y=(\sqrt{2}-1)(x+2)$

점 F의 좌표는 $\mathrm{F}(0,\ -2+2\sqrt{2})$

따라서 선분 AF의 길이는 4

사각형 AEFD는 지름이 $\overline{\mathrm{AF}}$인 원에 내접하고, 사각형 BCDE는 지름이 $\overline{\mathrm{BC}}$인 원에 내접한다. 두 원의 지름의 길이가 같으므로 호 ED에 대한 원주각의 크기가 같다. 그러므로 $\angle\mathrm{EAD}=\angle\mathrm{DBE}$



삼각형 ABD는 직각이등변삼각형이므로 삼각형 BFE도 직각이등변삼각형이다.

$\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{FE}}$ 이므로 $l=2\overline{\mathrm{AB}}$

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\{0-(-2)\}^2+\{(2+2\sqrt{2})-0\}^2=16+8\sqrt{2}$

$l^2=4\overline{\mathrm{AB}}^2=64+32\sqrt{2}$, $a=64$, $b=32$

따라서 $a+b=96$

7) 답 : ⑤

ㄱ. $f(1)=1+(2a-1)+(b^2-2a)-b^2=0$ 이므로 인수정리에 의하여 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다. (참)

ㄴ. $f(x)=x^3+(2a-1)x^2+(b^2-2a)x-b^2$ 이므로 조립제법에 의하여

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 2a-1 & b^2-2a & -b^2 \\ & & 1 & 2a & b^2 \\ \hline & 1 & 2a & b^2 & \boxed{0} \end{array}$$

따라서 $f(x)=(x-1)(x^2+2ax+b^2)$

이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ 이다.

이때 $a<b<0$ 이면 $a-b<0$, $a+b<0$ 이므로 $D>0$ 이 되어 이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$은 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다. 한편 삼차방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$ 이 $x=1$을 근으로 가져야 하고 $1+2a+b^2=0$ 이어야 한다.

예를 들어 $a=-2$, $b=-\sqrt{3}$ 이면

$a<b<0$ 이고 $1+2a+b^2=0$ 이며,

$f(x)=(x-1)(x^2-4x+3)=(x-1)^2(x-3)$ 이므로

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (참)

ㄷ. 방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지므로

이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$ 이 1이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$의 서로 다른 두 실근의 합이 $-2a$ 이므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 합은 $1+(-2a)=7$ 에서

$a=-3$

$x^2+2ax+b^2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-b^2>0$ 이어야 하므로 $b^2<a^2=9$

또, $x=1$ 이 방정식 $x^2+2ax+b^2=0$의 근이 아니어야 하므로

$1+2a+b^2\neq 0$, 즉 $b^2\neq 5$

그러므로 두 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(-3, -2)$, $(-3, -1)$, $(-3, 0)$, $(-3, 1)$, $(-3, 2)$ 이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

8) 답 : ①

사각형 OABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(1+2)\times 1=\frac{3}{2}$ 이다.

두 점 O, B를 지나는 직선의 방정식은 $y=2x$ 이다.

직선 $y=k$와 선분 OB의 교점 E는 두 직선 $y=k$, $y=2x$ 의 교점이다. 그러므로 점 E의 좌표는 $\left(\frac{k}{2}, k\right)$ 이다.

$S_1=\frac{1}{2}\times\frac{k}{2}\times k=\frac{k^2}{4}$, $S_3=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{k}{2}\right)\times(2-k)=\frac{(2-k)^2}{4}$ 이므로

$S_1-S_3=\frac{k^2}{4}-\frac{(2-k)^2}{4}=k-1$ 이다.

$S_1+S_2=k$ 이므로 $S_2=k-\frac{k^2}{4}$

$S_3+S_4=\frac{3}{2}-k$ 이므로 $S_4=\left(\frac{3}{2}-k\right)-\frac{(2-k)^2}{4}=\frac{2-k^2}{4}$ 이다.

그러므로 $S_2-S_4=\left(k-\frac{k^2}{4}\right)-\frac{2-k^2}{4}=k-\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $(S_1-S_3)^2+(S_2-S_4)^2=(k-1)^2+\left(k-\frac{1}{2}\right)^2=2k^2-3k+\frac{5}{4}$

$=2\left(k-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{8}\ (0<k<1)$ 이므로

$(S_1-S_3)^2+(S_2-S_4)^2$ 은 $k=\frac{3}{4}$ 일 때, 최솟값 $\frac{1}{8}$ 을 갖는다.