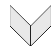
수학 준킬러 미니 모의고사05

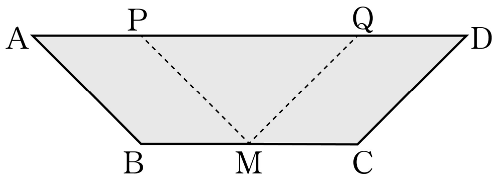
1) 좌표평면에서 직선 $3x+4y+17=0$을 x축의 방향으로 n만큼 평행이동한 직선이 원 $x^2+y^2=1$에 접할 때, 자연수 n의 값은? [181115]

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

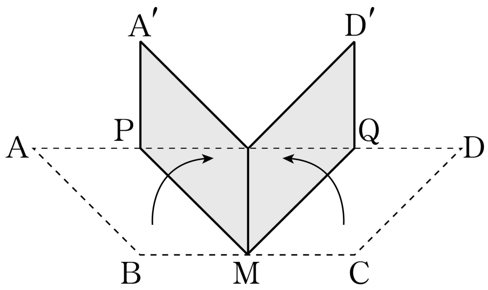
2) 좌표평면에서 원 $x^2+y^2-4x-6y=0$에 내접하는 직사각형 OABC가 있다. 이 때, 직선 OB의 기울기는? (단, O는 원점이고 선분 OB는 직사각형의 대각선이다.) [171114]

① $\frac{1}{2}$
② 1
③ $\frac{3}{2}$
④ 2
⑤ $\frac{5}{2}$

3) [그림 1]과 같이 $\overline{\mathrm{AD}}=8$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$이고 높이가 2인 등변사다리꼴 모양의 종이를 접어  모양을 만들려고 한다. 선분 BC의 중점을 M이라 하고, 선분 AD를 $1:3$으로 내분하는 점을 P, 선분 AD를 $3:1$로 내분하는 점을 Q라 하자. 선분 PM과 선분 QM을 접는 선으로 하여 두 점 B, C가 선분 AD의 중점에 오도록 종이를 접으면 [그림 2]와 같이 두 점 A, D는 각각 점 A$'$, D$'$으로 옮겨진다. 점 D$'$과 직선 A$'$M 사이의 거리를 d라 할 때, $50d^2$의 값을 구하시오. (단, 모든 점은 같은 평면 위에 있고, 종이의 두께는 무시한다.) [180327]



[그림 1]



[그림 2]

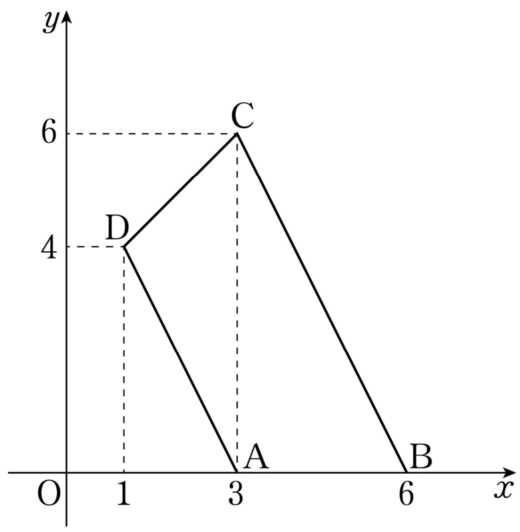
4) 다항식 $f(x)=(x^2-7x+11)(x^2+3x+3)$에 대하여 두 집합 A, B를

$$A=\{f(n)\mid n\text{은 20 이하의 자연수}\},$$
$$B=\{m\mid m\text{은 100 이하의 소수}\}$$

라 할 때, $n(A\cap B)$의 값은? [180318]

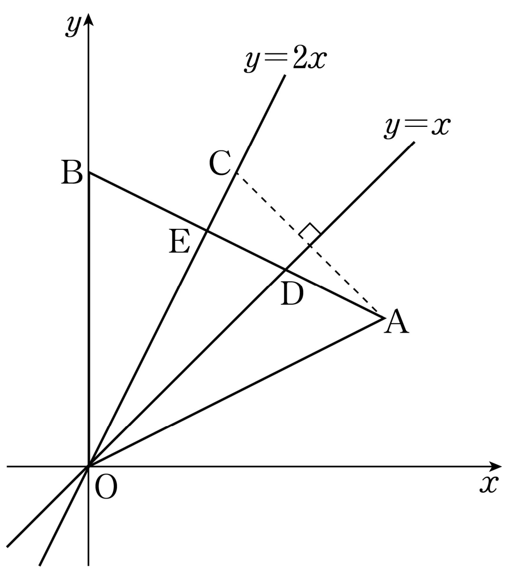
① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

5) 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{A}(3,0)$, $\mathrm{B}(6,0)$, $\mathrm{C}(3,6)$, $\mathrm{D}(1,4)$를 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD에서 선분 AD를 $1:3$으로 내분하는 점을 지나는 직선 l이 사각형 ABCD의 넓이를 이등분한다. 직선 l이 선분 BC와 만나는 점의 좌표가 (a,b)일 때, $a+b$의 값은? [180319가]



① $\frac{13}{2}$
② 7
③ $\frac{15}{2}$
④ 8
⑤ $\frac{17}{2}$

6) 그림과 같이 좌표평면 위에 제1사분면의 점 A와 y축 위의 점 B에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AO}}=2\sqrt{5}$인 이등변삼각형 OAB가 있다. 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 C라 하면 점 C는 직선 $y=2x$ 위의 점이다. 선분 AB가 두 직선 $y=x$, $y=2x$와 만나는 점을 각각 D, E라 할 때, 삼각형 ODE의 외접원의 둘레의 길이를 $k\pi$라 하자. $9k^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [180328]



7) 실수 x에 대한 부등식

$$x^2-9 \le 2k(x-a)$$

에 대하여 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, k는 상수이다.) [180320]

ㄱ. $a=3$일 때, 부등식의 해는 $x \le 2k-3$이다.
ㄴ. $a=5$일 때, 부등식의 해가 존재하지 않도록 하는 정수 k의 개수는 7이다.
ㄷ. $-3 \le a \le 3$일 때, 모든 실수 k에 대하여 부등식을 만족시키는 정수 x의 값은 항상 존재한다.

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1) 답 : ④

직선 $3x+4y+17=0$을 x축의 방향으로 n만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $3(x-n)+4y+17=0$

직선 $3x+4y-3n+17=0$이 원 $x^2+y^2=1$에 접하므로

원의 중심 $(0,0)$과 $3x+4y-3n+17=0$ 사이의 거리가 1이다.

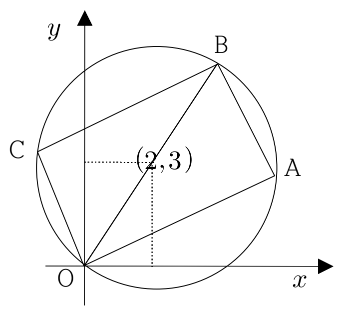
$\dfrac{|-3n+17|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$에서 $-3n+17=5$ 또는 $-3n+17=-5$

$\therefore\ n=4$ 또는 $n=\dfrac{22}{3}$

n은 자연수이므로 $n=4$

2) 답 : ③

$x^2+y^2-4x-6y=0$에서 원은 원점 O를 지나고 $(x-2)^2+(y-3)^2=13$이므로 중심이 $(2,3)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{13}$인 원이다. 오른쪽 그림에서 원에 내접하는 직사각형 OABC의 대각선 OB는 원의 중심을 지나므로 직선 OB의 기울기는 두 점 $(0,0)$, $(2,3)$을 지나는 직선의 기울기와 같다.

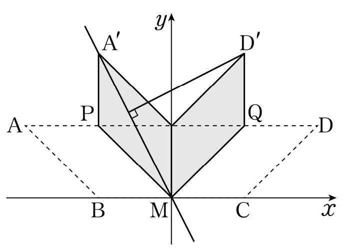


$\therefore$ (직선OB의 기울기)$=\dfrac{3}{2}$

3) 답 : 640

직선 BC를 x축, 점 M을 원점으로 하면

$\mathrm{A}(-4,2)$, $\mathrm{B}(-2,0)$, $\mathrm{C}(2,0)$, $\mathrm{D}(4,2)$이다.



선분 AD를 $1:3$으로 내분하는 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(-2,2)$

선분 AD를 $3:1$로 내분하는 점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(2,2)$

점 D′은 점 D를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 D′의 좌표는 $\mathrm{D}'(2,4)$

점 A′은 점 D′과 y축에 대하여 대칭인 점이므로 점 A′의 좌표는 $\mathrm{A}'(-2,4)$

직선 A′M의 방정식은 $2x+y=0$이므로 점 $\mathrm{D}'(2,4)$와 직선 $2x+y=0$ 사이의 거리 d는 $d=\dfrac{|2\times2+4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$

따라서 $50d^2=50\times\dfrac{64}{5}=640$

4) 답 : ②

집합 A의 원소는 20 이하의 자연수 n에 대하여

$f(n)=(n^2-7n+11)(n^2+3n+3)$

이고 집합 B의 원소가 100 이하의 소수이므로 집합 $A\cap B$의 원소는 $f(n)=(n^2-7n+11)(n^2+3n+3)$ 중에서 100 이하의 소수이다.

집합 $A\cap B$의 원소는 두 수 $n^2-7n+11$, n^2+3n+3의 곱으로 나타낼 수 있고, n^2+3n+3이 1보다 큰 자연수이므로

$n^2-7n+11=1$, $n^2+3n+3=p$(p는 소수)

가 되어야 한다.

$n^2-7n+11=1$, $(n-2)(n-5)=0$, $n=2$ 또는 $n=5$

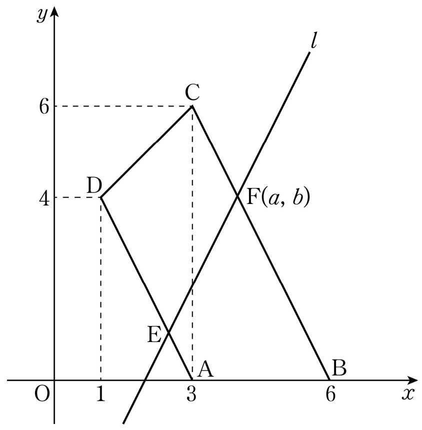
(ⅰ) $n=2$일 때, $f(2)=1\times(2^2+3\times2+3)=13$

(ⅱ) $n=5$일 때, $f(5)=1\times(5^2+3\times5+3)=43$

(ⅰ), (ⅱ)에서 13과 43이 모두 100 이하의 소수이므로 $A\cap B=\{13,43\}$

따라서 $n(A\cap B)=2$

5) 답 : ④



직선 AD의 기울기는 $\dfrac{4-0}{1-3}=-2$

직선 BC의 기울기는 $\dfrac{6-0}{3-6}=-2$

에서 두 직선 AD, BC는 평행이므로 사각형 ABCD는 사다리꼴이다. 두 밑변의 길이가 각각 a, b이고 높이가 h인 사다리꼴의 넓이를 S라 하면 $S=\dfrac{1}{2}\times(a+b)\times h$

이다. 직선 l이 사다리꼴 ABCD의 넓이를 이등분하려면 나누어진 두 개의 사다리꼴의 두 밑변의 길이의 합이 서로 같아야 한다.

선분 AD를 $1:3$으로 내분하는 점을 E라 하고 점 E를 지나는 직선 l이 사다리꼴 ABCD의 넓이를 이등분할 때, 선분 BC와 만나는 점 F에 대하여 점 F가 선분 BC를 $m:n$으로 내분한다고 하자.

$\overline{\mathrm{AD}}=2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{BC}}=3\sqrt{5}$이고 $\overline{\mathrm{AE}}+\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{DE}}+\overline{\mathrm{CF}}$이므로

$\dfrac{1}{4}\times2\sqrt{5}+\dfrac{m}{m+n}\times3\sqrt{5}=\dfrac{3}{4}\times2\sqrt{5}+\dfrac{n}{m+n}\times3\sqrt{5}$

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{3m}{m+n}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3n}{m+n}$, $\dfrac{3(m-n)}{m+n}=1$에서

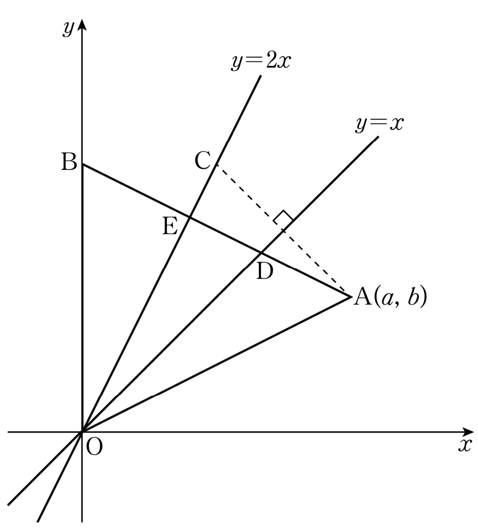
$3m-3n=m+n$, $2m=4n$, $m=2n$

따라서 $m:n=2:1$이므로 점 F의 좌표는

$\mathrm{F}\left(\dfrac{2\times3+1\times6}{3},\dfrac{2\times6+1\times0}{3}\right)$에서 $\mathrm{F}(4,4)$이다.

따라서 $a=4$, $b=4$이므로 $a+b=8$

6) 답 : 128



두 상수 a, b에 대하여 점 A의 좌표를 (a,b)라 하면 점 C는 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 C의 좌표는 (b,a)이다.

점 C는 직선 $y=2x$ 위의 점이므로 $a=2b$이다.

따라서 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(2b,b)$이다.

$\overline{\mathrm{OA}}=2\sqrt{5}$이므로 $\overline{\mathrm{OA}}^2=(2\sqrt{5})^2=20$

$(2b)^2+b^2=20$, $5b^2=20$

$b^2=4$에서 $b=2$ 따라서 두 점 A, C의 좌표는 $\mathrm{A}(4,2)$, $\mathrm{C}(2,4)$

y축 위의 점 B의 좌표를 $(0,c)$라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{OA}}=2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{AB}}^2=(2\sqrt{5})^2=20$

$(4-0)^2+(2-c)^2=20$, $16+4-4c+c^2=20$

$-4c+c^2=0$, $c(c-4)=0$, $c>0$이므로 $c=4$

따라서 점 B의 좌표는 $(0,\,4)$이다.

점 D는 직선 AB와 직선 $y=x$의 교점이므로

$x=-\dfrac{1}{2}x+4$, $\dfrac{3}{2}x=4$, $x=\dfrac{8}{3}$, $y=\dfrac{8}{3}$

따라서 $\mathrm{D}\left(\dfrac{8}{3},\,\dfrac{8}{3}\right)$

한편, 직선 AB의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이고 직선 $y=2x$의 기울기는 2이므로 두 직선은 서로 수직이다.

따라서 삼각형 ODE는 $\angle\mathrm{OED}=90^\circ$인 직각삼각형이고, 삼각형 ODE의 외접원의 지름의 길이는 선분 OD의 길이와 같다.

$\overline{\mathrm{OD}}=\sqrt{\left(\dfrac{8}{3}\right)^2+\left(\dfrac{8}{3}\right)^2}=\dfrac{8}{3}\sqrt{2}$

삼각형 ODE의 외접원의 둘레의 길이는 $k\pi=\dfrac{8}{3}\sqrt{2}\,\pi$, $k=\dfrac{8}{3}\sqrt{2}$

따라서 $9k^2=9\times\left(\dfrac{8}{3}\sqrt{2}\right)^2=9\times\dfrac{128}{9}=128$

7) 답 : ④

$x^2-9\le 2k(x-a)$, $(x+3)(x-3)\le 2k(x-a)$

ㄱ. $a=3$일 때, $(x+3)(x-3)\le 2k(x-3)$

$x>3$이면 $x+3\le 2k$, $x\le 2k-3$

$x=3$은 k의 값에 관계없이 해가 된다.

$x<3$이면 $x+3\ge 2k$, $x\ge 2k-3$

따라서 $x\le 3$이면 부등식의 해가 $x\le 2k-3$이 아니다. (거짓)

ㄴ. $a=5$일 때, $(x+3)(x-3)\le 2k(x-5)$

$x^2-2kx+10k-9\le 0$이므로 부등식 $x^2-2kx+10k-9\le 0$의 해가 존재하지 않으려면 이차방정식 $x^2-2kx+10k-9=0$이 서로 다른 두 허근을 가져야 한다. 따라서 이차방정식 $x^2-2kx+10k-9=0$의 판별식을 D라 하면 $\dfrac{D}{4}=k^2-10k+9<0$, $(k-1)(k-9)<0$

$1<k<9$에서 이를 만족시키는 정수 k는 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8이므로 정수 k의 개수는 7 (참)

ㄷ. 부등식 $(x+3)(x-3)\le 2k(x-a)$ …… $(*)$의 해는

함수 $y=(x+3)(x-3)$의 그래프가 직선 $y=2k(x-a)$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이다.

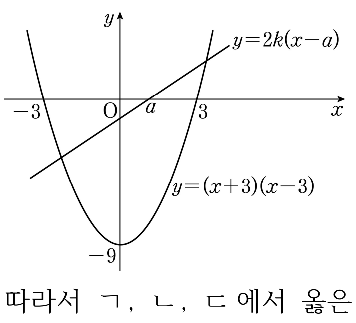
함수 $y=(x+3)(x-3)$의 그래프는 두 점 $(-3,\,0)$과 $(3,\,0)$을 지나는 곡선이고, 함수 $y=2k(x-a)$의 그래프는 점 $(a,\,0)$을 지나고 기울기가 $2k$인 직선이다.

$-3\le a\le 3$일 때,

$k\ge 0$이면 $x=3$이 부등식 $(*)$을 만족시키고

$k<0$이면 $x=-3$이 부등식 $(*)$을 만족시키므로

k의 값에 관계없이 부등식 $(*)$을 만족시키는 정수 x의 값은 항상 존재한다. (참)



따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.