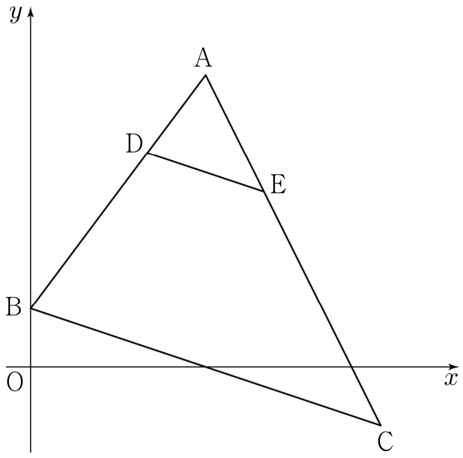
수학 준킬러 미니 모의고사07

1) 그림과 같이 좌표평면 위의 세 점 A$(3,\ 5)$, B$(0,\ 1)$, C$(6,\ -1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에 대하여 선분 AB 위의 한 점 D와 선분 AC 위의 한 점 E가 다음 조건을 만족시킨다.

가. 선분 DE와 선분 BC는 평행하다.
나. 삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 넓이의 비는 $1:9$이다.

직선 BE의 방정식이 $y=kx+1$일 때, 상수 k의 값은? [180916]



① $\frac{1}{8}$
② $\frac{1}{4}$
③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{1}{2}$
⑤ $\frac{5}{8}$

2) 좌표평면에서 원 $x^2+(y-1)^2=9$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원을 C라 할 때, 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [170317]

ㄱ. 원 C의 반지름의 길이가 3이다.
ㄴ. 원 C가 x축에 접하도록 하는 실수 n의 값은 1개이다.
ㄷ. $m\neq 0$일 때, 직선 $y=\frac{n+1}{m}x$는 원 C의 넓이를 이등분한다.

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3) 함수 $f(x)=x^2-(k+1)x+2k$ (k는 2가 아닌 실수)에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(f\circ f)(x)$$

라 하자. 다음은 다항식 $g(x)-x$는 다항식 $f(x)-x$로 나누어떨어짐을 보이는 과정이다.

모든 실수 x에 대하여

$$f(x)-x=(x-k)\left(\boxed{\text{(가)}}\right)$$

이다. 함수 $g(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$에 대하여

$$g(k)=f(f(k))=\boxed{\text{(나)}}$$

$$g(2)=f(f(2))=\boxed{\text{(다)}}$$

다항식 $g(x)-x$는 $x-k$와 $\boxed{\text{(가)}}$(을/를) 인수로 가지므로 다항식 $g(x)-x$는 다항식 $f(x)-x$로 나누어떨어진다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $p(x)$, $q(k)$라 하고, (다)에 알맞은 수를 a라 할 때, $p(5)+q(4)+a$의 값은? [190316]

① 9
② 10
③ 11
④ 12
⑤ 13

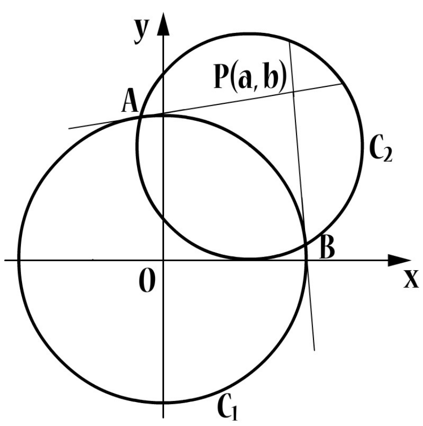
4) 음이 아닌 정수 전체의 집합을 A라고 할 때, 함수 $f:A\to A$가 $f(0)=1$, $f(1)=1$이고, 집합 A의 임의의 원소 m, n에 대하여 $f\left(\frac{m+n}{2}\right)=\frac{f(m)+f(n)}{2}$을 만족한다. 이 때, $f(x)$의 치역의 원소의 개수는? [051118]

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 무수히 많다.

5) 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)=2x-1$, $g(x)=px+q$가 있다. 임의의 실수 x에 대하여 $(f \circ g)(x)=(g \circ f)(x)$가 성립할 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프가 항상 지나는 점의 x좌표와 y좌표의 곱을 구하면? (단, p, q는 상수이다.) [061118]

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

6) 오른쪽 그림과 같이 두 원 C_1 : $x^2+y^2=25$, C_2 : $(x-3)^2+(y-4)^2=16$의 두 교점을 A, B라 하자. 두 점 A, B에서 각각 C_1에 접하는 두 접선의 교점을 $P(a,\ b)$라 할 때, $\dfrac{b}{a}$의 값을 구하면? [051118]

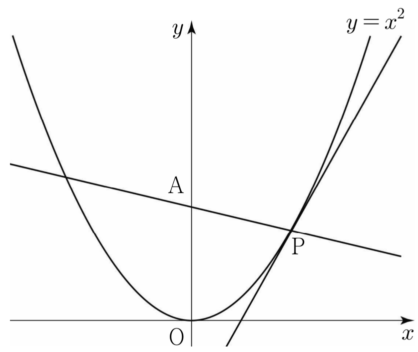


① $\dfrac{1}{3}$
② $\dfrac{2}{3}$
③ $\dfrac{4}{5}$
④ 1
⑤ $\dfrac{4}{3}$

7) 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$에서의 접선의 기울기를 m_1이라 하고, 점 P와 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$을 지나는 직선의 기울기를 m_2라 하자. 다음은 m_1-m_2의 최솟값을 구하는 과정이다. (단, $a>0$)

> 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$에서의 접선의 방정식은
> $y=m_1(x-a)+a^2$이므로
> 이차방정식 $x^2=m_1(x-a)+a^2$이 중근을 갖는다.
> 이차방정식 $x^2-m_1x+am_1-a^2=0$의 판별식을 D라 하면
> $D=0$이므로
> $$m_1=\boxed{\text{(가)}}$$
> 직선 $y=m_2(x-a)+a^2$이 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$을 지나므로
> $$m_2=\boxed{\text{(나)}}$$
> 따라서 m_1-m_2의 최솟값은 $\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(a)$, $g(a)$라 하고 (다)에 알맞은 값을 k라 할 때, $f(k)\times g(k)$의 값은? [171117]



① 5
② 6
③ 7
④ 8
⑤ 9

8) 좌표평면에서 원 $x^2+(y-1)^2=1$과 직선 $y=mx-m+1$이 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 선분 PQ와 호 PQ로 둘러싸인 도형 중 넓이가 작은 도형의 넓이를 S_1, 선분 OQ와 호 OQ로 둘러싸인 도형 중 넓이가 작은 도형의 넓이를 S_2라 하자. $S_1=S_2$를 만족시키는 모든 실수 m의 값의 합을 구하시오. (단, O는 원점이고, 점 P의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 크다.) [180929]

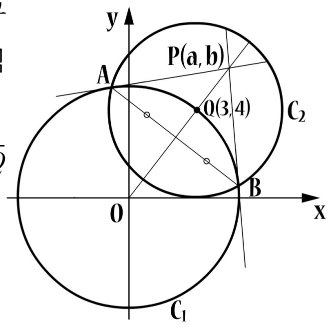
1) 답 : ④
조건 (가)에 의해 $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$
조건 (나)에 의해 삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 넓이의 비가 $1:9$이므로 두 삼각형의 닮음비는 $1:3$
점 E는 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점이므로 $E(4,\ 3)$
직선 BE의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x+1$
따라서 $k=\frac{1}{2}$

2) 답 : ③
ㄱ. 원 $x^2+(y-1)^2=9$를 평행이동하여도 원의 반지름의 길이는 변하지 않으므로 원 C의 반지름의 길이는 3이다. (참)
ㄴ. 원 $x^2+(y-1)^2=9$의 중심의 좌표가 $(0,\ 1)$이므로 원 C의 중심의 좌표는 $(m,\ n+1)$이다.
원 C가 x축과 접하므로 $|n+1|=3$에서 $n=-4$ 또는 $n=2$
따라서 n의 값은 2개이다. (거짓)
ㄷ. $m\neq 0$일 때, 직선 $y=\frac{n+1}{m}x$가 원 C의 중심 $(m,\ n+1)$을 지나므로 원 C의 넓이를 이등분한다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

3) 답 : ①
함수 $f(x)=x^2-(k+1)x+2k$ (k는 2가 아닌 실수)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)-x=x^2-(k+2)x+2k=(x-k)(\boxed{x-2})$이다.
이때 $f(k)-k=0,\ f(2)-2=0$에서 $f(k)=k,\ f(2)=2$
함수 $g(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$에 대하여
$g(k)=f(f(k))=f(k)=\boxed{k}$
$g(2)=f(f(2))=f(2)=\boxed{2}$
$g(k)-k=0,\quad g(2)-2=0$에서 다항식 $g(x)-x$는 $x-k$와 $\boxed{x-2}$를 인수로 가지므로 다항식 $g(x)-x$는 다항식 $(x-k)(x-2)$, 즉 $f(x)-x$로 나누어떨어진다.
$p(x)=x-2,\ q(k)=k,\ a=2$이므로 $p(5)+q(4)+a=3+4+2=9$

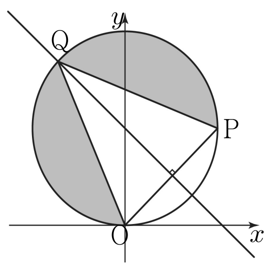
4) 답 : ①
$f\left(\frac{m+n}{2}\right)=\frac{f(m)+f(n)}{2}$에 $m=0,\quad n=2$를 대입하면
$f\left(\frac{0+2}{2}\right)=\frac{f(0)+f(2)}{2},\ 1=\frac{1+f(3)}{2}$
$\therefore\ f(2)=1$
$f\left(\frac{m+n}{2}\right)=\frac{f(m)+f(n)}{2}$에 $m=1,\quad n=3$를 대입하면
$f\left(\frac{1+3}{2}\right)=\frac{f(1)+f(3)}{2},\ 1=\frac{1+f(3)}{2}$
$\therefore\ f(3)=1$
이와 같은 과정을 반복하면 집합 A의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=1$이므로 구하는 치역의 원소의 개수는 1개다.

5) 답 : ①
$f(x)=2x-1,\ g(x)=px+q$에 대하여
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=2(px+q)-1=2px+2q-1$
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=p(2x-1)+q=2px-p+q$
$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$이므로 $2px+2q-1=2px-p+q$
이 등식이 임의의 실수 x에 대하여 성립하므로
$2q-1=-p+q$
$\therefore\ q=1-p$
이 때, 함수 $y=g(x)=px+(1-p)$이므로 $p(x-1)+(1-y)=0$
이 식이 p의 값에 관계없이 항상 성립하려면 $x-1=0,\ 1-y=0$
$\therefore\ x=1,\ y=1$
따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프가 항상 지나는 점의 좌표는 $(1,\ 1)$이므로 구하는 좌표의 곱은 1이다.

6) 답 : ⑤


오른쪽 그림과 같이 $\overline{AP}=\overline{BP}$이므로 공통현 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 두 원의 중심 O와 $Q(3,\ 4)$ 및 점 P를 지난다.
따라서 $\frac{b}{a}$는 $\overline{OP}$의 기울기이고 이는 $\overline{OQ}$의 기울기와 같으므로
$\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$

7) 답 : ②
양수 a에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $P(a,\ a^2)$에서의 접선의 방정식은 $y=m_1(x-a)+a^2$이다.
곡선 $y=x^2$과 직선 $y=m_1(x-a)+a^2$이 접하므로
이차방정식 $x^2=m_1(x-a)+a^2$이 중근을 갖는다.
이차방정식 $x^2-m_1x+am_1-a^2=0$의 판별식을 D라 하면
$D=m_1^2-4am_1+4a^2=0$
$m_1=\boxed{2a}$
$y=m_2(x-a)+a^2$이 점 $A(0,\ 1)$을 지나므로 $1=-am_2+a^2$
$m_2=\boxed{a-\frac{1}{a}}$
$m_1-m_2=2a-\left(a-\frac{1}{a}\right)=a+\frac{1}{a}\geq 2$
(단, 등호는 $a=1$일 때 성립한다.)
따라서 m_1-m_2의 최솟값은 $\boxed{2}$이다.
$\therefore\ f(a)=2a,\ g(a)=a-\frac{1}{a},\ k=2$
따라서 $f(k)\times g(k)=4\times\left(2-\frac{1}{2}\right)=6$

8) 답 : 2


직선 $y=mx-m+1=m(x-1)+1$은 m의 값에 관계없이 점 $(1,\ 1)$을 지난다.
점 P의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 크므로 $P(1,\ 1)$
$S_1=S_2$이므로 $\overline{PQ}=\overline{OQ}$
삼각형 PQO가 이등변삼각형이므로 선분 OP의 수직이등분선은 점 Q를 지난다. 선분 OP를 수직이등분하는 직선의 방정식은
$y-\frac{1}{2}=-\left(x-\frac{1}{2}\right)$
즉, $y=-x+1\ \cdots$ ㉠
㉠을 $x^2+(y-1)^2=1$에 대입하여 정리하면 $x^2+(-x+1-1)^2=1$
즉, $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 또는 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$
$Q\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 또는 $Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
m은 직선 PQ의 기울기이므로 $m=1-\sqrt{2}$ 또는 $m=1+\sqrt{2}$
따라서 모든 실수 m의 값의 합은 2