1. 수열의 극한 주요기출

1) 수열 $\{a_n\}$에 대하여 곡선 $y=x^2-(n+1)x+a_n$은 x축과 만나고, 곡선 $y=x^2-nx+a_n$은 x축과 만나지 않는다. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값은? [1511 3점]

① $\frac{1}{20}$

② $\frac{1}{10}$

③ $\frac{3}{20}$

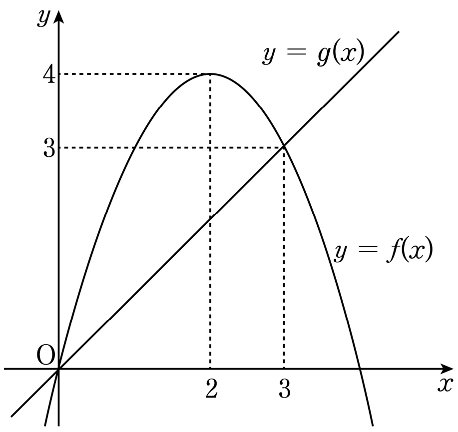
④ $\frac{1}{5}$

⑤ $\frac{1}{4}$

2) 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 원점과 점 $(3,3)$에서 만난다.

$$h(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(x)\}^{n+1}+5\{g(x)\}^n}{\{f(x)\}^n+\{g(x)\}^n}$$

일 때, $h(2)+h(3)$의 값은? [1603 3점]



① 6
② 7
③ 8
④ 9
⑤ 10

3) 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2-\left(4+\frac{1}{n}\right)x+\frac{4}{n}$와 직선 $y=\frac{1}{n}x+1$이 만나는 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. 삼각형 OP_nQ_n의 무게중심의 y좌표를 a_n이라 할 때, $30\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [1603 4점]

4) 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3n}=2,\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{b_n}=6$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$의 값은? (단, $b_n\neq 0$) [1704 3점]

① 10
② 12
③ 14
④ 16
⑤ 18

5) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{m}{5}\right)^{n+1}+2}{\left(\dfrac{m}{5}\right)^{n}+1}=2$가 되도록 하는 자연수 m의 개수는? [1903 3점]

① 5
② 6
③ 7
④ 8
⑤ 9

6) 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\dfrac{x}{4}\right)^{2n+1}-1}{\left(\dfrac{x}{4}\right)^{2n}+3}$$

에 대하여 $f(k)=-\dfrac{1}{3}$을 만족시키는 정수 k의 개수는? [2006 3점]

① 5
② 7
③ 9
④ 11
⑤ 13

7) 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$2n^2-3<a_n<2n^2+4$$

를 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n^3}$의 값은? [2103 3점]

① $\dfrac{1}{2}$
② $\dfrac{2}{3}$
③ $\dfrac{5}{6}$
④ 1
⑤ $\dfrac{7}{6}$

8) 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{5n^2+1}{2n+3}\right) = 4$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n}{n+1}$ 의 값은? [1503 3점]

① 3

② $\frac{7}{2}$

③ 4

④ $\frac{9}{2}$

⑤ 5

9) 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} - a_{2n}) = 3,\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\,2} = 6$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은? [2111 3점]

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

10) 2 보다 큰 자연수 n 에 대하여 $(-3)^{n-1}$ 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$ 의 값은? [1206 4점]

① $\frac{1}{6}$

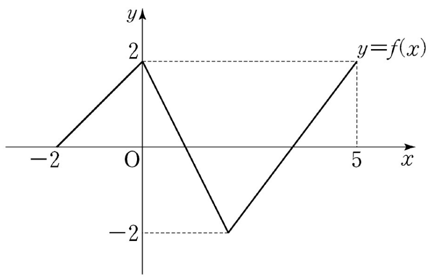
② $\frac{1}{4}$

③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{5}{12}$

⑤ $\frac{1}{2}$

11) 닫힌 구간 $[-2,\ 5]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$$\lim_{n\to\infty}\frac{|nf(a)-1|-nf(a)}{2n+3}=1$$

을 만족시키는 상수 a의 개수는? [1206 4점]

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

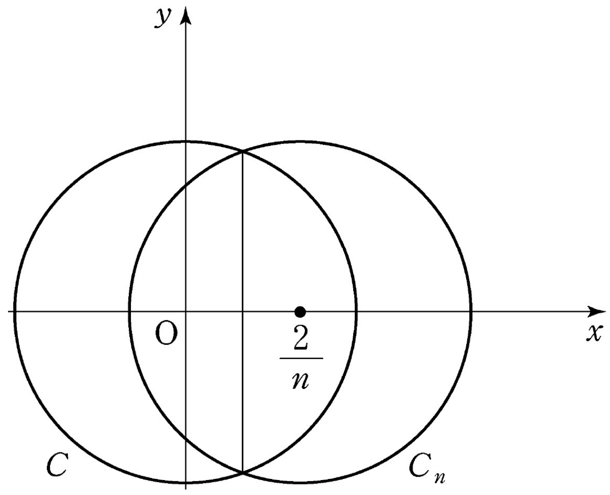
12) 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n-\frac{n^2+1}{2n+1}\right)=3$$

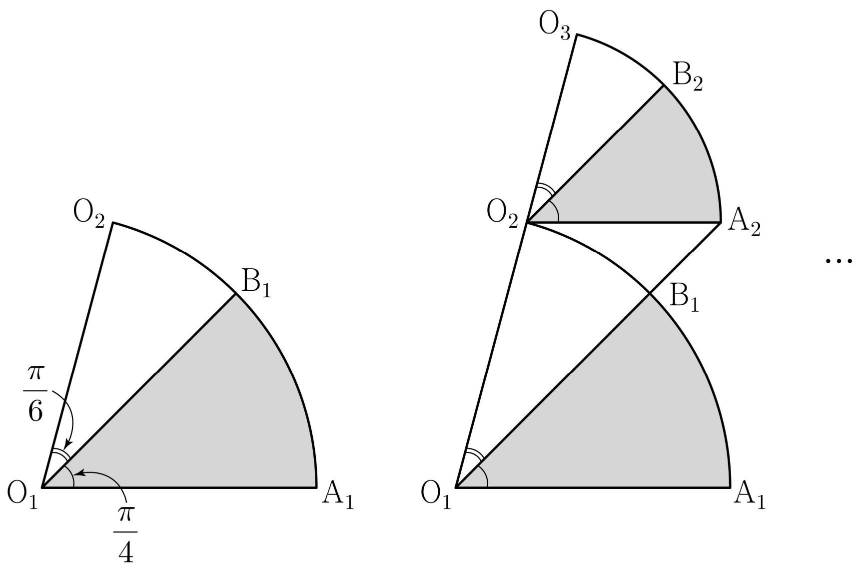
일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(a_n^2+2a_n+2\right)$의 값은? [1211 4점]

① $\frac{13}{4}$
② 3
③ $\frac{11}{4}$
④ $\frac{5}{2}$
⑤ $\frac{9}{4}$

13) $n\geq 2$인 자연수 n에 대하여 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원 C를 x축 방향으로 $\frac{2}{n}$만큼 평행이동시킨 원을 C_n이라 하자. 원 C와 원 C_n의 공통현의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(nl_n)^2}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [0711 4점]



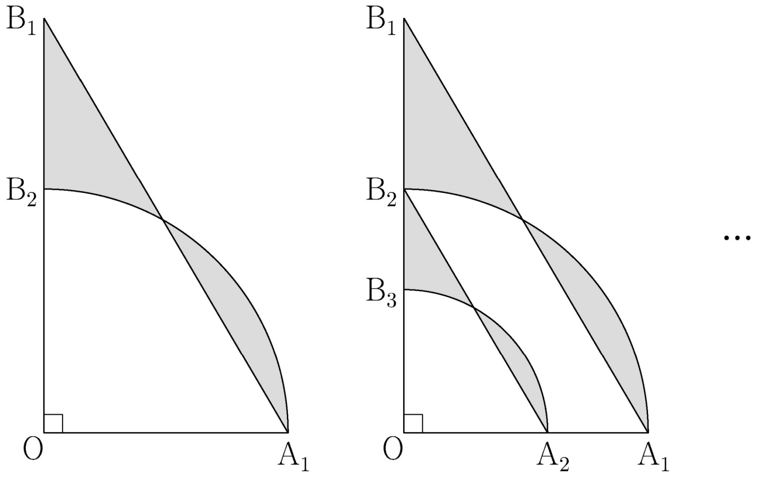
14) 그림과 같이 중심이 O_1, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $O_1A_1O_2$가 있다. 호 A_1O_2 위에 점 B_1을 $\angle A_1O_1B_1 = \frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $O_1A_1B_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 O_2를 지나고 선분 O_1A_1에 평행한 직선이 직선 O_1B_1과 만나는 점을 A_2라 하자. 중심이 O_2이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $O_2A_2O_3$을 부채꼴 $O_1A_1B_1$과 겹치지 않도록 그린다. 호 A_2O_3 위에 점 B_2를 $\angle A_2O_2B_2 = \frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $O_2A_2B_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [2106 3점]



R_1 R_2 $\cdots$

① $\frac{3\pi}{16}$
② $\frac{7\pi}{32}$
③ $\frac{\pi}{4}$
④ $\frac{9\pi}{32}$
⑤ $\frac{5\pi}{16}$

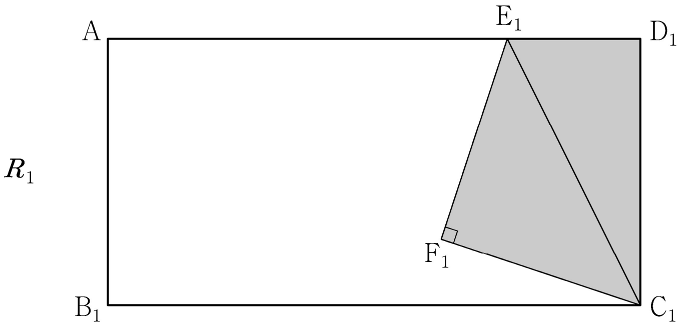
15) 그림과 같이 $\overline{OA_1} = 4$, $\overline{OB_1} = 4\sqrt{3}$인 직각삼각형 OA_1B_1이 있다. 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{OA_1}$인 원이 선분 OB_1과 만나는 점을 B_2라 하자. 삼각형 OA_1B_1의 내부와 부채꼴 OA_1B_2의 내부에서 공통된 부분을 제외한 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 선분 A_1B_1에 평행한 직선이 선분 OA_1과 만나는 점을 A_2, 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{OA_2}$인 원이 선분 OB_2와 만나는 점을 B_3이라 하자. 삼각형 OA_2B_2의 내부와 부채꼴 OA_2B_3의 내부에서 공통된 부분을 제외한 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [1811 4점]

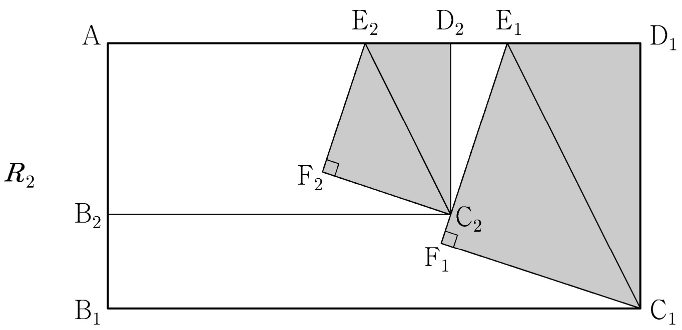


R_1 R_2 $\cdots$

① $\frac{3}{2}\pi$
② $\frac{5}{3}\pi$
③ $\frac{11}{6}\pi$
④ 2π
⑤ $\frac{13}{6}\pi$

16) 그림과 같이 $\overline{AB_1}=2$, $\overline{AD_1}=4$인 직사각형 $AB_1C_1D_1$이 있다. 선분 AD_1을 $3:1$로 내분하는 점을 E_1이라 하고, 직사각형 $AB_1C_1D_1$의 내부에 점 F_1을 $\overline{F_1E_1}=\overline{F_1C_1}$, $\angle E_1F_1C_1=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고 삼각형 $E_1F_1C_1$을 그린다. 사각형 $E_1F_1C_1D_1$을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 AB_1위의 점 B_2, 선분 E_1F_1 위의 점 C_2, 선분 AE_1 위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2}:\overline{AD_2}=1:2$인 직사각형 $AB_2C_2D_2$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $AB_2C_2D_2$에 삼각형 $E_2F_2C_2$를 그리고 사각형 $E_2F_2C_2D_2$를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [2011 4점]





⋮ ⋮

① $\frac{441}{103}$

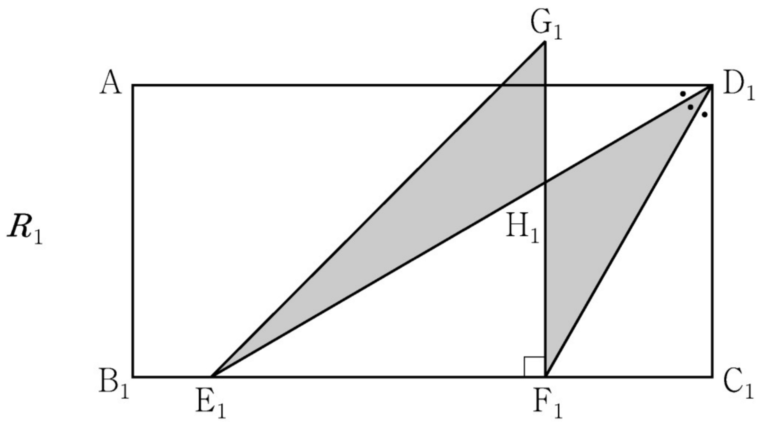
② $\frac{441}{109}$

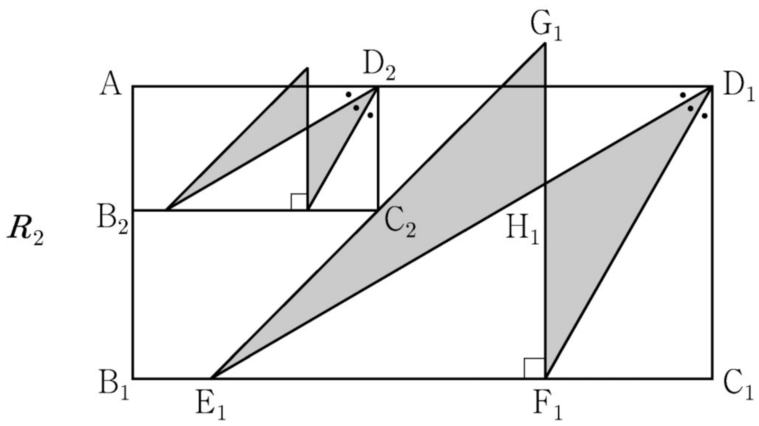
③ $\frac{441}{115}$

④ $\frac{441}{121}$

⑤ $\frac{441}{127}$

17) 그림과 같이 $\overline{AB_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$인 직사각형 $AB_1C_1D_1$이 있다. $\angle AD_1C_1$을 삼등분하는 두 직선이 선분 B_1C_1과 만나는 점 중 점 B_1에 가까운 점을 E_1, 점 C_1에 가까운 점을 F_1이라 하자. $\overline{E_1F_1}=\overline{F_1G_1}$, $\angle E_1F_1G_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 AD_1과 선분 F_1G_1이 만나도록 점 G_1을 잡아 삼각형 $E_1F_1G_1$을 그린다.
선분 E_1D_1과 선분 F_1G_1이 만나는 점을 H_1이라 할 때, 두 삼각형 $G_1E_1H_1$, $H_1F_1D_1$로 만들어진 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 E_1G_1 위의 점 C_2, 선분 AD_1 위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2}:\overline{B_2C_2}=1:2$인 직사각형 $AB_2C_2D_2$를 그린다. 직사각형 $AB_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [2109 3점]





⋮ ⋮

① $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

② $\frac{5\sqrt{3}}{18}$

③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

④ $\frac{7\sqrt{3}}{18}$

⑤ $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

1) 답 : ⑤

이차방정식 $x^2-(n+1)x+a_n=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(n+1)^2-4a_n\ \geq 0$에서 $a_n\ \leq \dfrac{(n+1)^2}{4}$

또 이차방정식 $x^2-nx+a_n=0$의 판별식을 D_2이라 하면

$D_2=n^2-4a_n<0$에서

$a_n>\dfrac{n^2}{4}$

즉 $\dfrac{n^2}{4}<a_n\ \leq \dfrac{(n+1)^2}{4}$, $\dfrac{n^2}{4n^2}<\dfrac{a_n}{n^2}\leq \dfrac{(n+1)^2}{4n^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{4n^2}<\lim\limits_{n\to}\dfrac{a_n}{n^2}\leq \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{4n^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{4n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{4n^2}=\dfrac{1}{4}$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2}=\dfrac{1}{4}$

2) 답 : ③

직선 $y=g(x)$는 원점과 점 $(3,\ 3)$을 지나므로 직선의 방정식은 $y=x$이다.

문제에서 $f(2)=4$, $g(2)=2$이므로

$h(2)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\{f(2)\}^{n+1}+5\{g(2)\}^n}{\{f(2)\}^n+\{g(2)\}^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{n+1}+5\times 2^n}{4^n+2^n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4+5\times\left(\dfrac{2}{4}\right)^n}{1+\left(\dfrac{2}{4}\right)^n}=4$

마찬가지로 문제에서 $f(3)=3$, $g(3)=3$이므로

$h(3)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\{f(3)\}^{n+1}+5\{g(3)\}^n}{\{f(3)\}^n+\{g(3)\}^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}+5\times 3^n}{3^n+3^n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8\times 3^n}{2\times 3^n}=4$

따라서 $h(2)+h(3)=8$

3) 답 : 20

두 실수 α, β에 대해 $\mathrm{P}_n\left(\alpha,\ \dfrac{\alpha}{n}+1\right)$, $\mathrm{Q}_n\left(\beta,\ \dfrac{\beta}{n}+1\right)$이라 하면

α, β는 방정식 $x^2-\left(4+\dfrac{1}{n}\right)x+\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{n}x+1$의 두 근이다.

$x^2-\left(4+\dfrac{2}{n}\right)x+\dfrac{4}{n}-1=0$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=4+\dfrac{2}{n}$이다.

한편 삼각형 OP_nQ_n의 무게중심의 y좌표

$a_n=\dfrac{1}{3}\left(0+\dfrac{\alpha}{n}+1+\dfrac{\beta}{n}+1\right)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{n}+2\right)$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4+\dfrac{2}{n}}{n}+2\right)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4}{n}+\dfrac{2}{n^2}+2\right)$

따라서 $30\lim\limits_{n\to\infty}a_n=30\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4}{n}+\dfrac{2}{n^2}+2\right)=10(0+0+2)=20$이다.

4) 답 : ⑤

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{3n}\times\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{3n}\times\dfrac{2n+3}{b_n}\right)=12$

$\dfrac{a_n}{3n}\times\dfrac{2n+3}{b_n}=c_n$이라 하면 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=12$

$\dfrac{a_n}{b_n}=c_n\times\dfrac{3n}{2n+3}$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(c_n\times\dfrac{3n}{2n+3}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}c_n\times\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{2n+3}=12\times\dfrac{3}{2}=18$

5) 답 : ①

(ⅰ) $0<\dfrac{m}{5}<1$, 즉 $0<m<5$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{m}{5}\right)^n=0$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{m}{5}\right)^{n+1}+2}{\left(\dfrac{m}{5}\right)^n+1}=\dfrac{0+2}{0+1}=2$

그러므로 자연수 m의 값은 1, 2, 3, 4

(ⅱ) $\dfrac{m}{5}=1$, 즉 $m=5$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{m}{5}\right)^n=1$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{m}{5}\right)^{n+1}+2}{\left(\dfrac{m}{5}\right)^n+1}=\dfrac{1+2}{1+1}=\dfrac{3}{2}$

그러므로 $m\neq 5$

(ⅲ) $\dfrac{m}{5}>1$, 즉 $m>5$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{m}{5}\right)^n=\infty$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{m}{5}\right)^{n+1}+2}{\left(\dfrac{m}{5}\right)^n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{m}{5}+2\times\dfrac{1}{\left(\dfrac{m}{5}\right)^n}}{1+\dfrac{1}{\left(\dfrac{m}{5}\right)^n}}=\dfrac{\dfrac{m}{5}+0}{1+0}=\dfrac{m}{5}$

즉, $\dfrac{m}{5}=2$에서 $m=10$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{m}{5}\right)^{n+1}+2}{\left(\dfrac{m}{5}\right)^n+1}=2$가 되도록 하는 자연수 m의 개수는 5

6) 답 : ②

함수 $f(x)$는 다음의 네 가지로 나누어 계산할 수 있다.

(ⅰ) $-4<x<4$인 경우 : $-1<\dfrac{x}{4}<1$이므로 $\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x}{4}\right)^{2n}=0$

따라서 $f(x)=\dfrac{2\times 0-1}{0+3}=-\dfrac{1}{3}$

(ⅱ) $x=-4$인 경우 : $f(x)=\dfrac{2\times(-1)-1}{1+3}=-\dfrac{3}{4}$

(ⅲ) $x=4$이면 : $f(x)=\dfrac{2\times 1-1}{1+3}=\dfrac{1}{4}$

(ⅳ) $x<-4$ 또는 $x>4$인 경우 : $\dfrac{x}{4}<-1$ 또는 $\dfrac{x}{4}>1$이므로

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\times\left(\dfrac{x}{4}\right)^{2n+1}-1}{\left(\dfrac{x}{4}\right)^{2n}+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\times\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{\left(\dfrac{x}{4}\right)^{2n}}}{1+\dfrac{3}{\left(\dfrac{x}{4}\right)^{2n}}}=\dfrac{\dfrac{x}{2}-0}{1+0}=\dfrac{x}{2}$

$f(k)=\dfrac{k}{2}=-\dfrac{1}{3}$에서 $k=-\dfrac{2}{3}$이고 이는 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 $f(k)=-\dfrac{1}{3}$을 만족시키는 정수 k의 개수는 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$의 7이다.

7) 답 : ②

$2n^2-3<a_n<2n^2+4$에서 $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k^2-3)<S_n<\sum\limits_{k=1}^{n}(2k^2+4)$

이때 $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k^2-3)=2\times\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}-3n=\dfrac{n(2n^2+3n-8)}{3}$

$\sum\limits_{k=1}^{n}(2k^2+4)=2\times\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4n=\dfrac{n(2n^2+3n+13)}{3}$

$$\frac{n(2n^2+3n-8)}{3n^3} < \frac{S_n}{n^3} < \frac{n(2n^2+3n+13)}{3n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n^2+3n-8)}{3n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(2n^2+3n+13)}{3n^3} = \frac{2}{3}$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^3} = \frac{2}{3}$

8) 답 : ⑤

$b_n = a_n - \frac{5n^2+1}{2n+3}$ 이라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 4$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

$a_n = b_n + \frac{5n^2+1}{2n+3}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2b_n}{n+1} + \frac{2(5n^2+1)}{(2n+3)(n+1)}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2b_n}{n+1} + \lim_{n\to\infty}\frac{2(5n^2+1)}{(2n+3)(n+1)} = 0+5=5$$

9) 답 : ②

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면 $a_n = ar^{n-1}$

이때, $a_{2n-1} - a_{2n} = ar^{2n-2} - ar^{2n-1}$

$$= ar^{2n-2}(1-r) = a(1-r)(r^2)^{n-1}$$

이므로, 수열 $\{a_{2n-1} - a_{2n}\}$ 은 첫째항이 $a(1-r)$ 이고, 공비가 r^2 인 등비수열이다.

따라서, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} - a_{2n}) = 3$ 에서

$-1 < r < 1$ 이고, $\frac{a(1-r)}{1-r^2} = 3$ 이고, $r \neq 1$ 이므로,

$\frac{a}{1+r} = 3$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a^2 r^{2n-2} = 6$ 이므로, $\frac{a^2}{1-r^2} = \frac{a}{1-r} \times \frac{a}{1+r} = 6$

따라서, ㉠에서 $\frac{a}{1-r} \times 3 = 6$ 이므로, $\frac{a}{1-r} = 2$

따라서, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} = 2$

10) 답 : ①

$n \geq 3$ 에서 $(-3)^{\frac{n-1}{n}} = (-3)\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{-3}}$ 이 실수이므로

$n = 2k+1$ 일 때, $a_n = 1$

$n = 2k+2$ 일 때, $a_n = 0$ (단, k 는 자연수)

$$\therefore \sum_{n=3}^{\infty}\frac{a_n}{2^n} = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{6}$$

11) 답 : ②

i) $nf(a) \geq 1$ 일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{2n+3} = 0 \neq 1$ 이므로 모순

ii) $nf(a) < 1$ 일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{-2nf(a)+1}{2n+3} = -f(a) = 1$ 에서 $f(a) = -1$

따라서 $f(a) = -1$ 인 a 는 2 개다.

12) 답 : ①

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n - \frac{n^2+1}{2n+1}\right) = 3$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(na_n - \frac{n^2+1}{2n+1}\right) = 0$이다.

즉, $\lim_{n\to\infty} n\left(a_n - \frac{n+\frac{1}{n}}{2n+1}\right) = 0$에서 $\lim_{n\to\infty} n \neq 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n - \frac{n+\frac{1}{n}}{2n+1}\right) = 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(a_n - \frac{n+\frac{1}{n}}{2n+1}\right) + \lim_{n\to\infty}\frac{n+\frac{1}{n}}{2n+1}$$

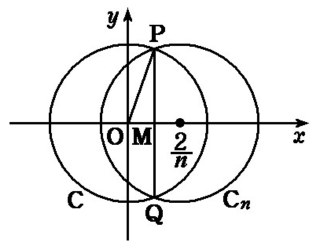
$$= 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n^2 + 2a_n + 2) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^2 + 2\lim_{n\to\infty} a_n + 2$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\times\frac{1}{2} + 2 = \frac{13}{4}$$

13) 답 : 19

삼각형 POM 은 직각삼각형이고



$\overline{OP} = 1$, $\overline{OM} = \frac{1}{n}$ 이므로

$$\overline{PM} = \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$$

$$\therefore\ l_n = 2\overline{PM} = 2\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$$

$$\therefore\ (nl_n)^2 = n^2 l_n^2 = 4n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = 4(n^2-1)$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(nl_n)^2} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4(n^2-1)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{4(k^2-1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{16}$$

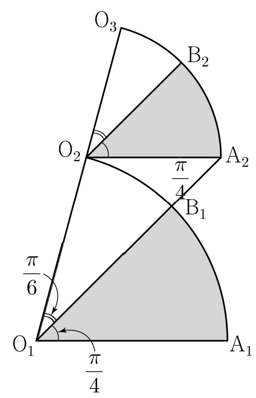
$$\therefore\ p+q = 16+3 = 19$$

14) 답 : ③

$S_1 = \frac{1}{2}\times 1^2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$

삼각형 $O_1O_2A_2$에 사인법칙

$$\overline{O_2A_2} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



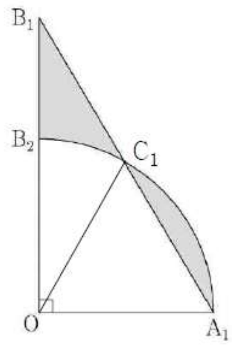
닮음비가 $1 : \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로 넓이의 비는 $1 : \frac{1}{2}$ 이다.

첫째항이 $\frac{\pi}{8}$ 이고, 공비 $r = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{8}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

15) 답 : ④

그림 R_1에서 부채꼴 OA_1B_2의 호 A_1B_2와 선분 A_1B_1이 만나는 점을 C_1이라 하자.



$\angle C_1OA_1 = 60^\circ$ 이므로

부채꼴 C_1OA_1의 넓이와 삼각형 C_1OA_1의 넓이의 차는

$16\pi\times\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\times 16 = \frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3}$ … ㉠

또, $\angle C_1OB_1 = 30^\circ$ 이므로

삼각형 C_1OB_1의 넓이와 부채꼴 C_1OB_1의 넓이의 차는

$\frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times 2 - 16\pi\times\frac{1}{12} = 4\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$ … ㉡

㉠, ㉡에서

$S_1 = \left(\frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3}\right)+\left(4\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right) = \frac{4}{3}\pi$

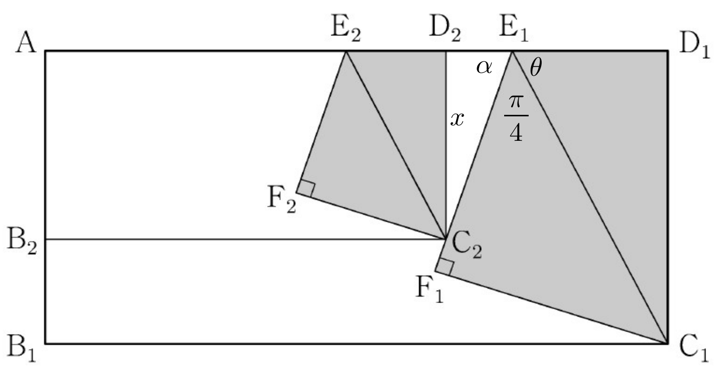
한편, 삼각형 OA_1B_1과 삼각형 OA_2B_2의 닮음비는

$\overline{OB_1} : \overline{OB_2} = 4\sqrt{3} : 4 = \sqrt{3} : 1$

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_n$은 첫째항이 $\frac{4}{3}\pi$이고, 공비가 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$인 등비급수이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{1}{3}} = 2\pi$$

16) 답 : ③



사각형 $E_1F_1C_1D_1$의 넓이는 삼각형 $C_1D_1E_1$의 넓이와 직각이등변삼각형 $C_1E_1F_1$의 넓이의 합과 같으므로 $1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$

그림에서 $\overline{E_1D_1}=1$, $\overline{C_1D_1}=2$ 이므로 $\tan\theta = 2$

삼각형 $E_1F_1C_1$은 직각이등변삼각형이므로 $\angle C_1E_1F_1 = \frac{\pi}{4}$

$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2+1}{1-2\cdot 1} = -3$이므로 $\tan\alpha = 3$이고

$\overline{C_2D_2} = x$라 하면 $\overline{D_2E_1} = \frac{x}{3}$

$\overline{AD_1} = 2x+\frac{x}{3}+1 = 4$ 이므로 $x = \frac{9}{7}$

따라서 사각형 $E_1F_1C_1D_1$과 사각형 $E_2F_2C_2D_2$의 닮음비는

$2 : \frac{9}{7} = 1 : \frac{9}{14}$이고 넓이의 비는 $1 : \frac{81}{196}$

$\lim_{n\to\infty} S_n$은 첫째항 $\frac{7}{2}$이고 공비가 $\frac{81}{196}$인 등비급수이므로

$$\frac{\frac{9}{4}}{1-\frac{81}{196}} = \frac{441}{115}$$

17) 답 : ③

직각삼각형 $C_1D_1F_1$에서 $\angle C_1D_1F_1 = \frac{\pi}{6}$, $\overline{C_1D_1} = 1$이므로

$\overline{C_1F_1} = \overline{C_1D_1}\times\tan\frac{\pi}{6} = 1\times\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

직각삼각형 $C_1D_1E_1$에서 $\angle C_1D_1E_1 = \frac{\pi}{3}$이므로

$\overline{C_1E_1} = \overline{C_1D_1}\times\tan\frac{\pi}{3} = 1\times\sqrt{3} = \sqrt{3}$

이때, $\overline{E_1F_1} = \overline{C_1E_1} - \overline{C_1F_1} = \sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

직각삼각형 $\overline{E_1F_1H_1}$에서 $\angle H_1E_1F_1 = \frac{\pi}{6}$이므로

$\overline{F_1H_1} = \overline{E_1F_1}\times\tan\frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}$

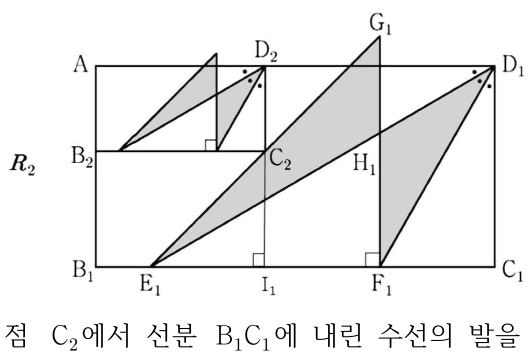
$S_1 = \triangle E_1F_1G_1 + \triangle E_1F_1D_1 - 2\times\triangle E_1F_1H_1$

$= \frac{1}{2}\times\overline{E_1F_1}\times\overline{F_1G_1} + \frac{1}{2}\times\overline{E_1F_1}\times\overline{C_1D_1} - 2\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{E_1F_1}\times\overline{F_1H_1}\right)$

$= \frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times 1 - 2\left(\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{2}{3}\right)$

$= \frac{6-\sqrt{3}}{9}$

$\overline{AB_2} : \overline{B_2C_2} = 1 : 2$이므로 $\overline{AB_2} = k$, $\overline{B_2C_2} = 2k$ $(k>0)$이라 하자.



점 C_2에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 I_1이라 하면

$\overline{E_1I_1} = \overline{C_2I_1} = 1-k$, $\overline{I_1C_1} = 2-2k$이므로

$(1-k)+(2-2k) = \sqrt{3}$, $k = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$

그림 R_1에 색칠되어 있는 도형과 그림 R_2에 새로 색칠되어 있는 도형의 닮음비가 $1 : \frac{3-\sqrt{3}}{3}$이므로 넓이의 비는 $1 : \frac{4-2\sqrt{3}}{3}$이다.

따라서 구하는 극한값은 첫째항이 $\frac{6-\sqrt{3}}{9}$이고, 공비가 $\frac{4-2\sqrt{3}}{3}$인 등비급수의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{6-\sqrt{3}}{9}}{1-\frac{4-2\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$