평가원 기출 - 수열의 극한, 무한급수

1) 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sqrt{9n^2+4} < \sqrt{na_n} < 3n+2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은? [1909 3점]

① 6
② 7
③ 8
④ 9
⑤ 10

2) 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=3$, $a_2=1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$의 값은? [1411 3점]

① $\frac{81}{8}$
② $\frac{83}{8}$
③ $\frac{85}{8}$
④ $\frac{87}{8}$
⑤ $\frac{89}{8}$

3) 수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-3)=2$를 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty}a_n=r$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+2}-1}{r^n+1}$의 값은? [1906 3점]

① $\frac{7}{4}$
② 2
③ $\frac{9}{4}$
④ $\frac{5}{2}$
⑤ $\frac{11}{4}$

4) 자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식

$$x^2+2nx-4n=0$$

의 양의 실근을 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오. [1509 3점]

5) 수열 $\{a_n\}$에 대하여 곡선 $y=x^2-(n+1)x+a_n$은 x축과 만나고, 곡선 $y=x^2-nx+a_n$은 x축과 만나지 않는다. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값은? [1511 3점]

① $\frac{1}{20}$
② $\frac{1}{10}$
③ $\frac{3}{20}$
④ $\frac{1}{5}$
⑤ $\frac{1}{4}$

6) 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=4$, $a_4-a_2=4$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{na_n}$의 값은? [1509 3점]

① 1
② $\frac{3}{2}$
③ 2
④ $\frac{5}{2}$
⑤ 3

7) 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{3^n}=5$$

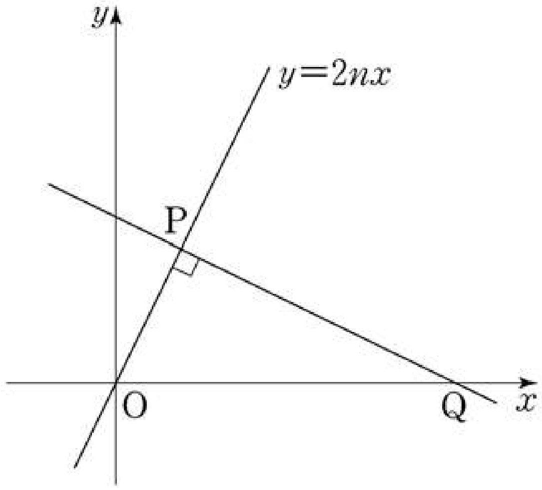
를 만족시킬 때, 첫째항 a_1의 값은? [1506 3점]

① 8
② 10
③ 12
④ 14
⑤ 16

8) 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 $\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n=2$, $\lim_{n\to\infty}(n^2+1)b_n=7$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(10n+1)b_n}{a_n}$의 값을 구하시오. (단, $a_n\neq 0$) [1109 3점]

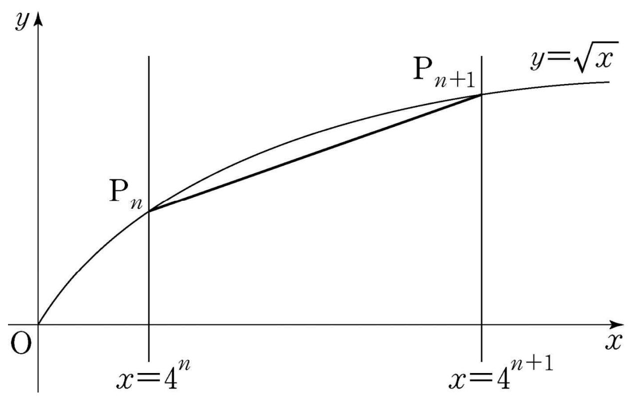
9) 첫째항이 1이고 공비가 $r\,(r>1)$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\frac{3}{4}$이다. r의 값을 구하시오. [1511 3점]

10) 자연수 n에 대하여 직선 $y=2nx$ 위의 점 $\mathrm{P}(n,\ 2n^2)$을 지나고 이 직선과 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 Q라 할 때, 선분 OQ의 길이를 l_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n^3}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [1506 3점]

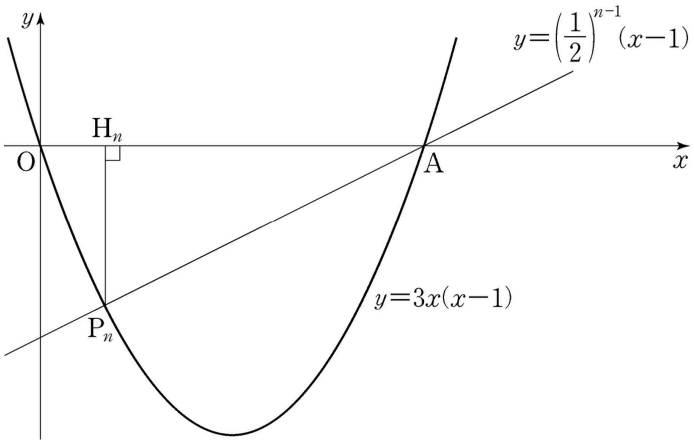


① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

11) 자연수 n에 대하여 직선 $x=4^n$이 곡선 $y=\sqrt{x}$와 만나는 점을 P_n이라 하자. 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 길이를 L_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2$의 값을 구하시오. [1611 4점]



12) 자연수 n에 대하여 직선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x-1)$과 이차함수 $y=3x(x-1)$의 그래프가 만나는 두 점을 $\mathrm{A}(1,\ 0)$과 P_n이라 하자. 점 P_n에서 x축에 내린 수선의 발을 H_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n}$의 값은? [1509 4점]



① $\frac{3}{2}$

② $\frac{14}{9}$

③ $\frac{29}{18}$

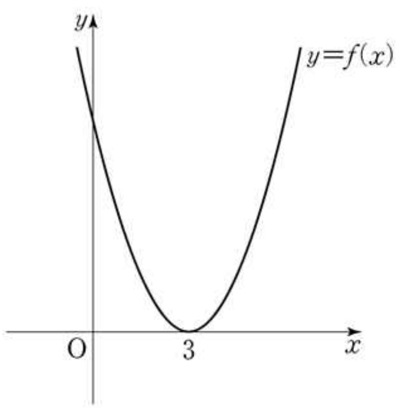
④ $\frac{5}{3}$

⑤ $\frac{31}{18}$

13) 함수 $f(x)$가

$$f(x)=(x-3)^2$$

일 때, 자연수 n에 대하여 방정식 $f(x)=n$의 두 근이 α, β일 때 $h(n)=|\alpha-\beta|$라 하자. $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\{h(n+1)-h(n)\}$의 값은? [1506 4점]



① $\frac{1}{2}$

② 1

③ $\frac{3}{2}$

④ 2

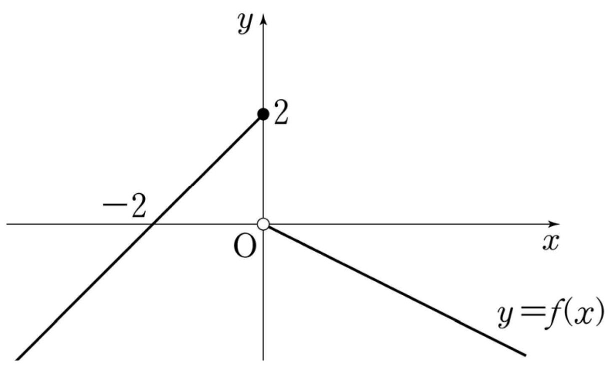
⑤ $\frac{5}{2}$

14) 자연수 k에 대하여

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^{n}+1}$$

이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10}ka_k$의 값을 구하시오. [1411 4점]

15) $f(x)=\begin{cases} x+2 & (x\le 0) \\ -\frac{1}{2}x & (x>0)\end{cases}$의 그래프가 그림과 같다.



수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고 $a_{n+1}=f(f(a_n))$ $(n\ge 1)$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은? [1306 4점]

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{2}{3}$

③ 1

④ $\frac{4}{3}$

⑤ $\frac{5}{3}$

16) 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n \cdot a_n - \frac{n^2+1}{2n+1}\right) = 3$$

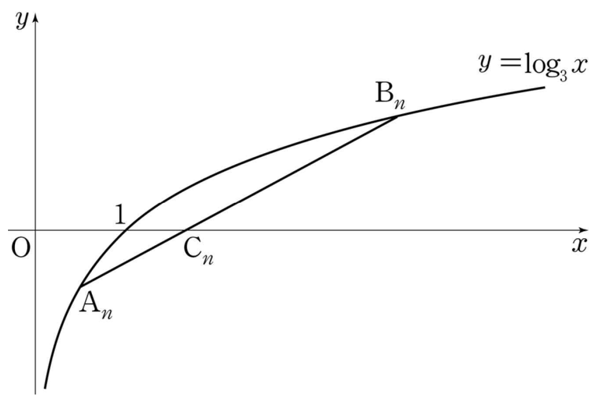
일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(a_n^2 + 2a_n + 2\right)$의 값은? [1211 4점]

① $\frac{13}{4}$
② 3
③ $\frac{11}{4}$
④ $\frac{5}{2}$
⑤ $\frac{9}{4}$

17) 2 이상의 자연수 n에 대하여 함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위의 x좌표가 $\frac{1}{n}$인 점을 A_n이라 하자. 그래프 위의 점 B_n과 x축 위의 점 C_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 C_n은 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$과 x축의 교점이다.
(나) $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n} : \overline{\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n} = 1 : 2$

점 C_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^2}$의 값은? [1209 4점]



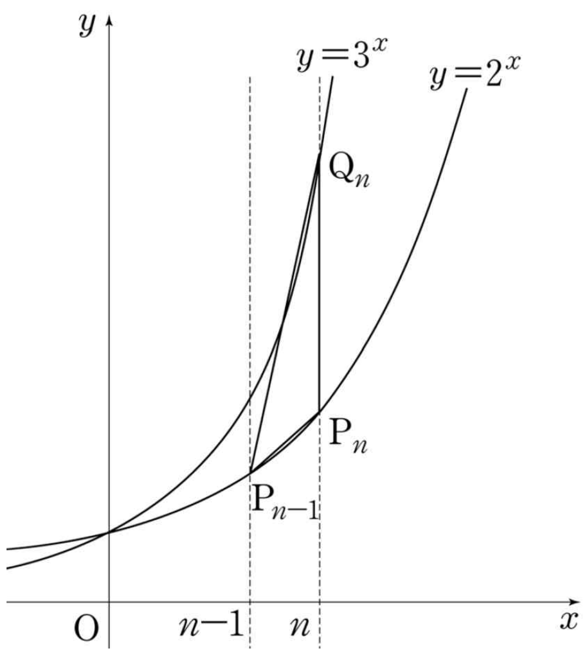
① $\frac{1}{3}$
② $\frac{1}{2}$
③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{5}{6}$
⑤ 1

18) 첫째항이 10인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n < a_{n+1}, \quad \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2 = 2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$$

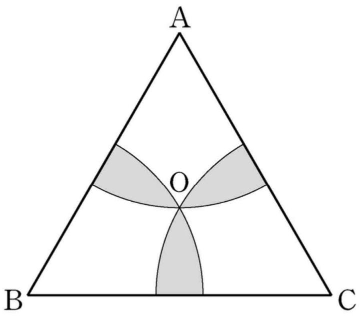
을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오. [1209 4점]

19) 자연수 n에 대하여 직선 $x=n$이 두 곡선 $y=2^x$, $y=3^x$과 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n-1}$의 넓이를 S_n이라 하고, $T_n=\sum_{k=1}^{n}S_k$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{3^n}$의 값은? (단, 점 P_0의 좌표는 $(0,\ 1)$이다.) [1106 4점]

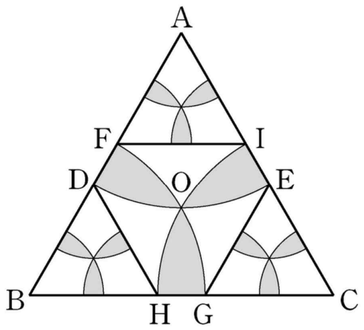


① $\frac{5}{8}$
② $\frac{11}{16}$
③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{13}{16}$
⑤ $\frac{7}{8}$

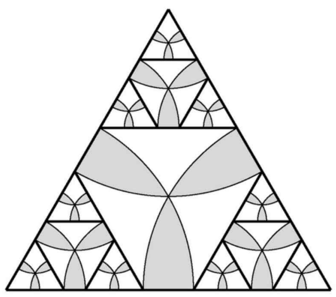
20) 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC가 있다. 정삼각형 ABC의 외심을 O라 할 때, 중심이 A 이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AO}}$인 원을 O_A, 중심이 B이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{BO}}$인 원을 O_B, 중심이 C이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{CO}}$인 원을 O_c라 하자.
원 O_A와 원 O_B의 내부의 공통부분, 원 O_A와 원 O_c의 내부의 공통부분, 원 O_B와 원 O_c의 내부의 공통부분 중 삼각형 ABC내부에 있는 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 원 O_A가 두 선분 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E, 원 O_B가 두 선분 AB, BC와 만나는 점을 각각 F, G, O_C가 두 선분 BC, AC와 만나는 점을 각각 H, I라 하고, 세 정삼각형 AFI, BHD, CEG에서 R_1을 얻는 과정과 같은 방법으로 각각 만들어지는 모양의 도형 3개에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에 새로 만들어진 세 개의 정삼각형에 각각 R_1에서 R_2를 얻는 과정과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 도형 9개에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [1509 4점]



R_1



R_2

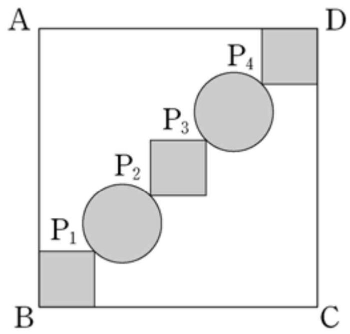


R_3

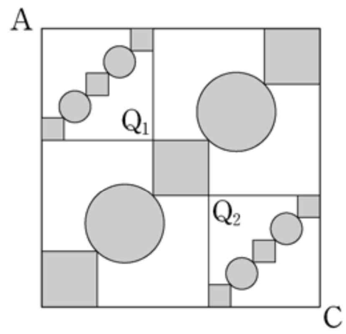
$\cdots$

① $(2\pi-3\sqrt{3})(\sqrt{3}+3)$
② $(\pi-\sqrt{3})(\sqrt{3}+3)$
③ $(2\pi-3\sqrt{3})(2\sqrt{3}+3)$
④ $(\pi-\sqrt{3})(2\sqrt{3}+3)$
⑤ $(2\pi-2\sqrt{3})(\sqrt{3}+3)$

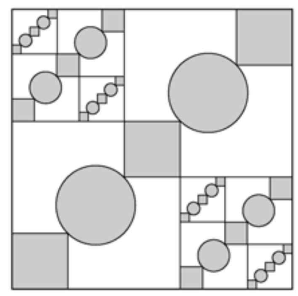
21) 그림과 같이 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD의 대각선 BD의 5등분점을 점 B에서 가까운 순서대로 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{P_3}$, $\mathrm{P_4}$라 하고, 선분 $\mathrm{BP_1}$, $\mathrm{P_2P_3}$, $\mathrm{P_4D}$를 각각 대각선으로 하는 정사각형과 선분 $\mathrm{P_1P_2}$, $\mathrm{P_2P_3}$를 각각 지름으로 하는 원을 그린 후, 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 $\mathrm{P_2P_3}$을 대각선으로 하는 정사각형의 꼭짓점 중 점 A와 가장 가까운 점을 $\mathrm{Q_1}$, 점 C와 가장 가까운 점을 $\mathrm{Q_2}$라 하자. 선분 $\mathrm{AQ_1}$을 대각선으로 하는 정사각형과 선분 $\mathrm{CQ_2}$를 대각선으로 하는 정사각형을 그리고, 새로 그려진 2개의 정사각형 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 모양의 도형을 각각 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에서 선분 $\mathrm{AQ_1}$을 대각선으로 하는 정사각형과 선분 $\mathrm{CQ_2}$를 대각선으로 하는 정사각형에 그림 R_1에서 그림 R_2를 얻는 것과 같은 방법으로 모양의 도형을 각각 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?[1511 3점]



R_1



R_2

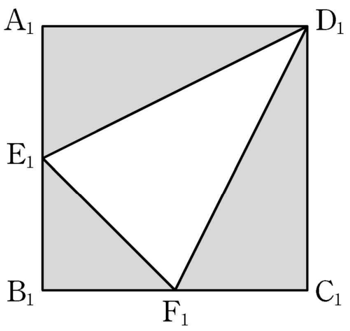


R_3

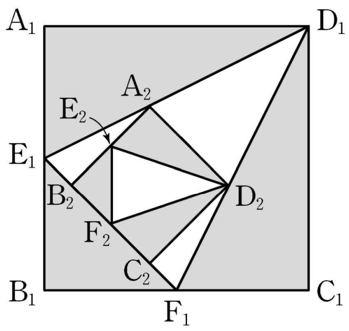
$\cdots$

① $\frac{24}{17}(\pi+3)$
② $\frac{25}{17}(\pi+3)$
③ $\frac{26}{17}(\pi+3)$
④ $\frac{24}{17}(2\pi+1)$
⑤ $\frac{27}{17}(2\pi+1)$

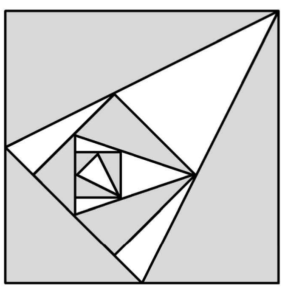
22) 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 선분 A_1B_1과 선분 B_1C_1의 중점을 각각 E_1, F_1이라 하자.
정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부와 삼각형 $E_1F_1D_1$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 D_1E_1 위의 점 A_2, 선분 D_1F_1 위의 점 D_2와 선분 E_1F_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 삼각형 $E_2F_2D_2$를 그리고 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부와 삼각형 $E_2F_2D_2$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [1606 4점]



R_1



R_2



…

R_3 …

① $\frac{125}{37}$

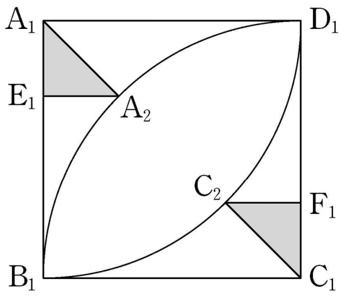
② $\frac{125}{38}$

③ $\frac{125}{39}$

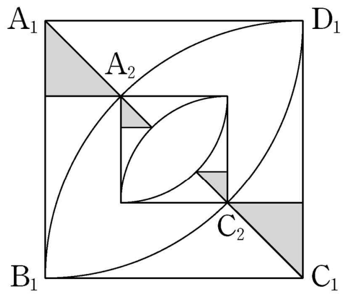
④ $\frac{25}{8}$

⑤ $\frac{125}{41}$

23) 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 안에 꼭짓점 A_1, C_1을 중심으로 하고 선분 A_1B_1, C_1D_1을 반지름으로 하는 사분원을 각각 그린다. 선분 A_1C_1이 두 사분원과 만나는 점 중 점 A_1과 가까운 점을 A_2, 점 C_1과 가까운 점을 C_2라 하자. 선분 A_1D_1에 평행하고 점 A_2를 지나는 직선이 선분 A_1B_1과 만나는 점을 E_1, 선분 B_1C_1에 평행하고 점 C_2를 지나는 직선이 선분 C_1D_1과 만나는 점을 F_1이라 하자. 삼각형 $A_1E_1A_2$와 삼각형 $C_1F_1C_2$를 그린 후 두 삼각형의 내부에 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 A_2C_2를 대각선으로 하는 정사각형을 그리고, 새로 그려진 정사각형 안에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 개의 사분원과 두 개의 삼각형을 그리고 두 삼각형의 내부에 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [1609 4점]



R_1



R_2 …

…

① $\frac{1}{12}(\sqrt{2}-1)$

② $\frac{1}{6}(\sqrt{2}-1)$

③ $\frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)$

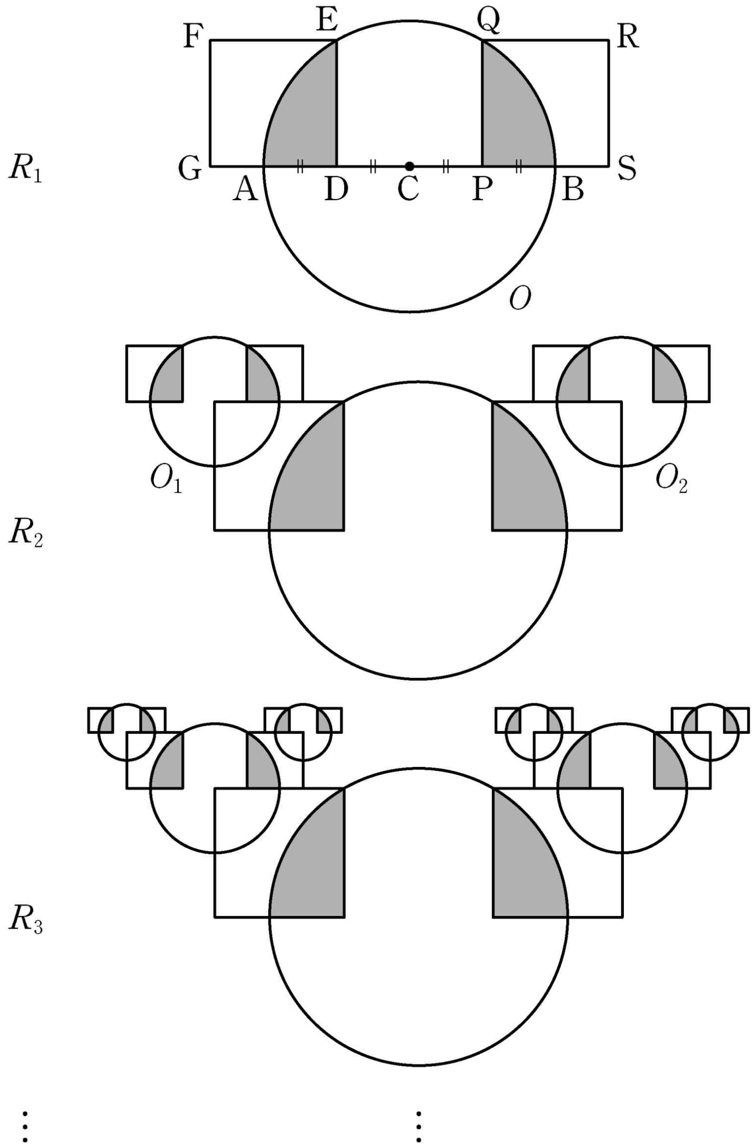
④ $\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$

⑤ $\frac{5}{12}(\sqrt{2}-1)$

24) 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. 원의 중심을 C라 하고, 선분 AC의 중점과 선분 BC의 중점을 각각 D, P라 하자. 선분 AC의 수직이등분선과 선분 BC의 수직이등분선이 원 O의 위쪽 반원과 만나는 점을 각각 E, Q라 하자. 선분 DE를 한 변으로 하고 원 O와 점 A에서 만나며 선분 DF가 대각선인 정사각형 DEFG를 그리고, 선분 PQ를 한 변으로 하고 원 O와 점 B에서 만나며 선분 PR가 대각선인 정사각형 PQRS를 그린다. 원 O의 내부와 정사각형 DEFG의 내부의 공통부분인 모양의 도형과 원 O의 내부와 정사각형 PQRS의 내부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 F를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{DE}$인 원 O_1, 점 R를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{PQ}$인 원 O_2를 그린다. 두 원 O_1, O_2에 각각 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 2개의 도형과 모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [1611 4점]



① $\frac{12\pi - 9\sqrt{3}}{10}$

② $\frac{8\pi - 6\sqrt{3}}{5}$

③ $\frac{32\pi - 24\sqrt{3}}{15}$

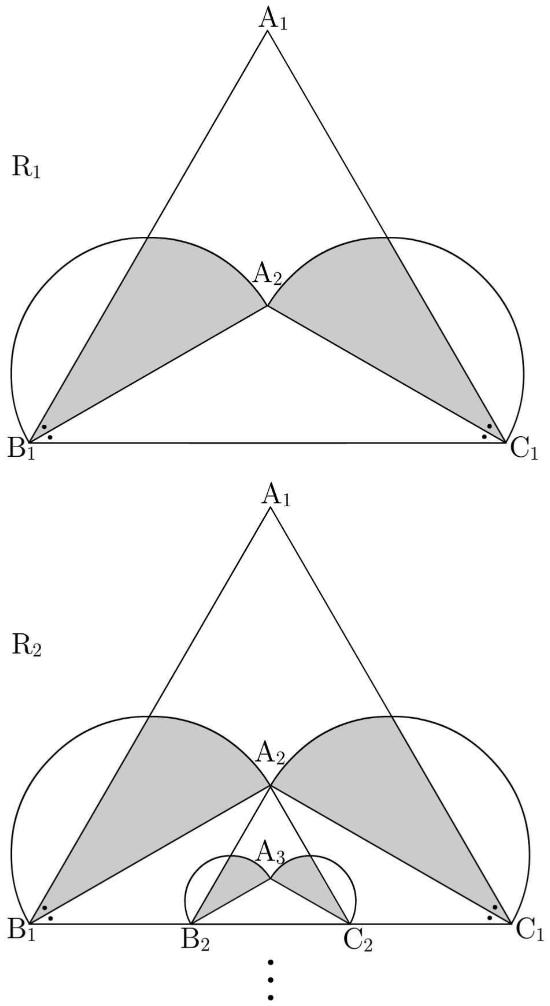
④ $\frac{28\pi - 21\sqrt{3}}{10}$

⑤ $\frac{16\pi - 12\sqrt{3}}{5}$

25) 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 그림과 같이 $\angle A_1B_1C_1$의 이등분선과 $\angle A_1C_1B_1$의 이등분선이 만나는 점을 A_2라 하자. 두 선분 B_1A_2, C_1A_2를 각각 지름으로 하는 반원의 내부와 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 내부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 A_2를 지나고 선분 A_1B_1에 평행한 직선이 선분 B_1C_1과 만나는 점을 B_2, 점 A_2를 지나고 선분 A_1C_1에 평행한 직선이 선분 B_1C_1과 만나는 점을 C_2라 하자. 그림 R_1에 정삼각형 $A_2B_2C_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 정삼각형 $A_2B_2C_2$의 내부에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [1706 4점]



① $\frac{9\sqrt{3}+6\pi}{16}$

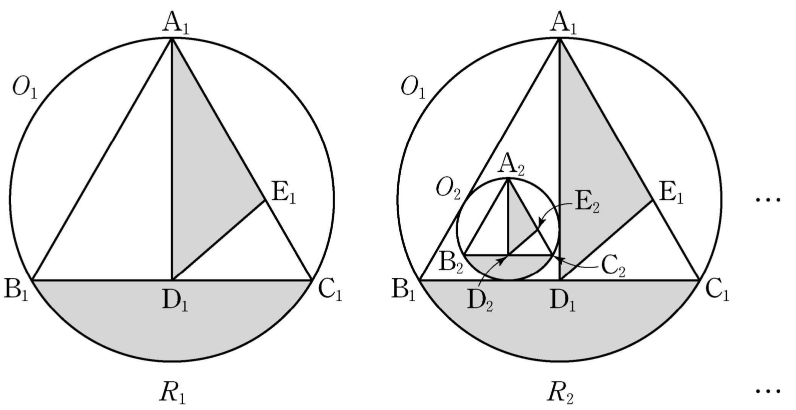
② $\frac{3\sqrt{3}+4\pi}{8}$

③ $\frac{9\sqrt{3}+8\pi}{16}$

④ $\frac{3\sqrt{3}+2\pi}{4}$

⑤ $\frac{3\sqrt{3}+6\pi}{8}$

26) 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 원 O_1에 내접하는 정삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$이 있다. 점 $\mathrm{A_1}$에서 선분 $\mathrm{B_1C_1}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{D_1}$이라 하고, 선분 $\mathrm{A_1C_1}$을 $2:1$로 내분하는 점을 $\mathrm{E_1}$이라 하자. 점 $\mathrm{A_1}$을 포함하지 않는 호 $\mathrm{B_1C_1}$과 선분 $\mathrm{B_1C_1}$로 둘러싸인 도형의 내부와 삼각형 $\mathrm{A_1D_1E_1}$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 삼각형 $\mathrm{A_1B_1D_1}$에 내접하는 원 O_2와 원 O_2에 내접하는 정삼각형 $\mathrm{A_2B_2C_2}$를 그리고, 점 $\mathrm{A_2}$에서 선분 $\mathrm{B_2C_2}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{D_2}$, 선분 $\mathrm{A_2C_2}$를 $2:1$로 내분하는 점을 $\mathrm{E_2}$라 하자. 점 $\mathrm{A_2}$를 포함하지 않는 호 $\mathrm{B_2C_2}$와 선분 $\mathrm{B_2C_2}$로 둘러싸인 도형의 내부와 삼각형 $\mathrm{A_2D_2E_2}$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [1709 4점]



① $\dfrac{16(3\sqrt{3}-2)\pi}{69}$

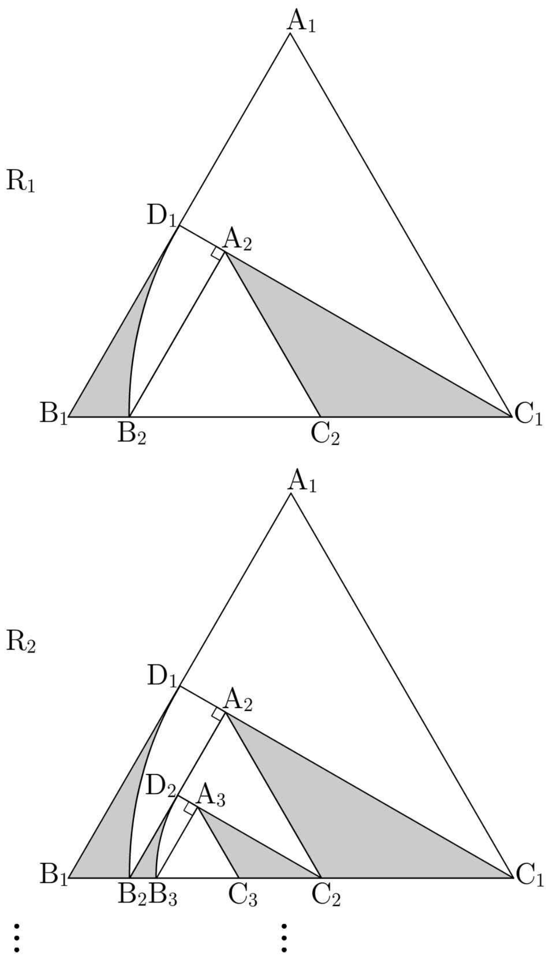
② $\dfrac{16(3\sqrt{3}-1)\pi}{65}$

③ $\dfrac{32(3\sqrt{3}-2)\pi}{69}$

④ $\dfrac{32(3\sqrt{3}-1)\pi}{69}$

⑤ $\dfrac{32(3\sqrt{3}-1)\pi}{65}$

27) 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$이 있다. 선분 $\mathrm{A_1B_1}$의 중점을 $\mathrm{D_1}$이라 하고, 선분 $\mathrm{B_1C_1}$ 위의 $\overline{\mathrm{C_1D_1}}=\overline{\mathrm{C_1B_2}}$인 점 $\mathrm{B_2}$에 대하여 중심이 $\mathrm{C_1}$인 부채꼴 $\mathrm{C_1D_1B_2}$를 그린다. 점 $\mathrm{B_2}$에서 선분 $\mathrm{C_1D_1}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{A_2}$, 선분 $\mathrm{C_1B_2}$의 중점을 $\mathrm{C_2}$라 하자. 두 선분 $\mathrm{B_1B_2}$, $\mathrm{B_1D_1}$과 호 $\mathrm{D_1B_2}$로 둘러싸인 영역과 삼각형 $\mathrm{C_1A_2C_2}$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 $\mathrm{A_2B_2}$의 중점을 $\mathrm{D_2}$라 하고, 선분 $\mathrm{B_2C_2}$ 위의 $\overline{\mathrm{C_2D_2}}=\overline{\mathrm{C_2B_3}}$인 점 $\mathrm{B_3}$에 대하여 중심이 $\mathrm{C_2}$인 부채꼴 $\mathrm{C_2D_2B_3}$을 그린다. 점 $\mathrm{B_3}$에서 선분 $\mathrm{C_2D_2}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{A_3}$, 선분 $\mathrm{C_2B_3}$의 중점을 $\mathrm{C_3}$이라 하자. 두 선분 $\mathrm{B_2B_3}$, $\mathrm{B_2D_2}$와 호 $\mathrm{D_2B_3}$으로 둘러싸인 영역과 삼각형 $\mathrm{C_2A_3C_3}$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [1711 4점]



① $\dfrac{11\sqrt{3}-4\pi}{56}$

② $\dfrac{11\sqrt{3}-4\pi}{52}$

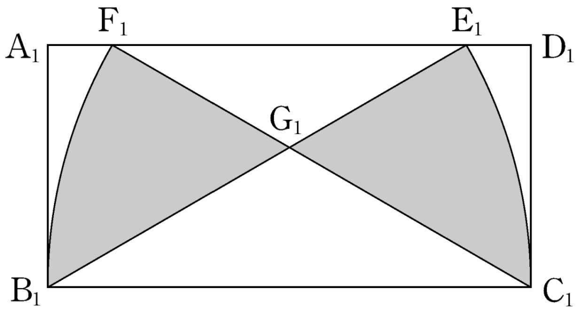
③ $\dfrac{15\sqrt{3}-6\pi}{56}$

④ $\dfrac{15\sqrt{3}-6\pi}{52}$

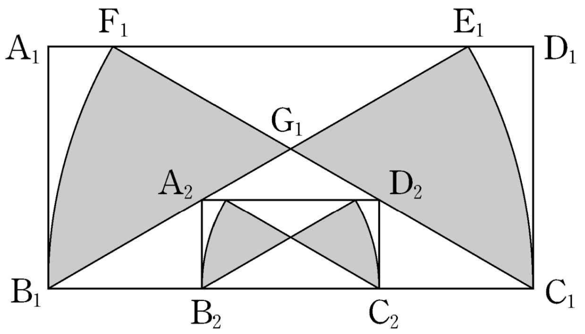
⑤ $\dfrac{15\sqrt{3}-4\pi}{52}$

28) 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{A_1D_1}=2$ 인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 이 있다. 선분 A_1D_1 위의 $\overline{B_1C_1}=\overline{B_1E_1}$, $\overline{C_1B_1}=\overline{C_1F_1}$ 인 두 점 E_1, F_1 에 대하여 중심이 B_1 인 부채꼴 $B_1E_1C_1$ 과 중심이 C_1 인 부채꼴 $C_1F_1B_1$ 을 각각 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 내부에 그리고, 선분 B_1E_1 과 C_1F_1 의 교점을 G_1 이라 하자.
두 선분 G_1F_1, G_1B_1 과 호 F_1B_1 로 둘러싸인 부분과 두 선분 G_1E_1, G_1C_1 과 호 E_1C_1 로 둘러싸인 부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.
그림 R_1 에서 선분 B_1G_1 위의 점 A_2, 선분 C_1G_1 위의 점 D_2 와 선분 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2 를 꼭짓점으로 하고,
$\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=1:2$ 인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 를 그리고, 그림 R_1 을 얻는것과 같은 방법으로 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 내부에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은? [1806 4점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{3\sqrt{3}\pi-7}{9}$

② $\frac{4\sqrt{3}\pi-12}{9}$

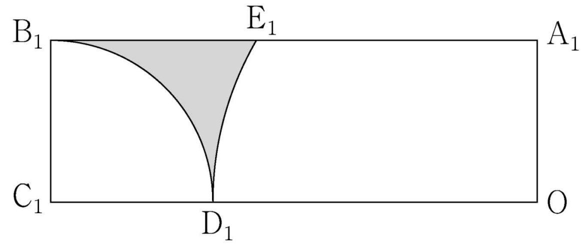
③ $\frac{3\sqrt{3}\pi-5}{9}$

④ $\frac{4\sqrt{3}\pi-10}{9}$

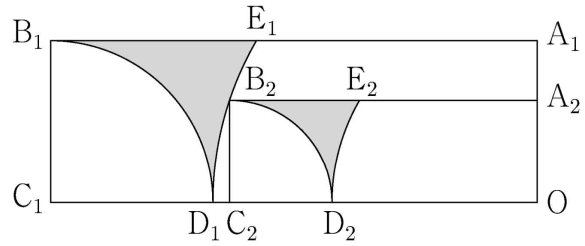
⑤ $\frac{4\sqrt{3}\pi-8}{9}$

29) 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=3$, $\overline{B_1C_1}=1$ 인 직사각형 $OA_1B_1C_1$ 이 있다. 중심이 C_1 이고 반지름의 길이가 $\overline{B_1C_1}$ 인 원과 선분 OC_1 의 교점을 D_1, 중심이 O 이고 반지름의 길이가 $\overline{OD_1}$ 인 원과 선분 A_1B_1 의 교점을 E_1 이라 하자. 직사각형 $OA_1B_1C_1$ 에 호 B_1D_1, 호 D_1E_1, 선분 B_1E_1 로 둘러싸인 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.
그림 R_1 에 선분 OA_1 위의 점 A_2 와 호 D_1E_1 위의 점 B_2, 선분 OD_1 위의 점 C_2 와 점 O 를 꼭짓점으로 하고
$\overline{A_2B_2}$: $\overline{B_2C_2}$ = 3 : 1 인 직사각형 $OA_2B_2C_2$ 를 그리고, 그림 R_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $OA_2B_2C_2$ 에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은? [1809 4점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $4-\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{7}{9}\pi$

② $5-\frac{5\sqrt{3}}{6}-\frac{35}{36}\pi$

③ $6-\sqrt{3}-\frac{7}{6}\pi$

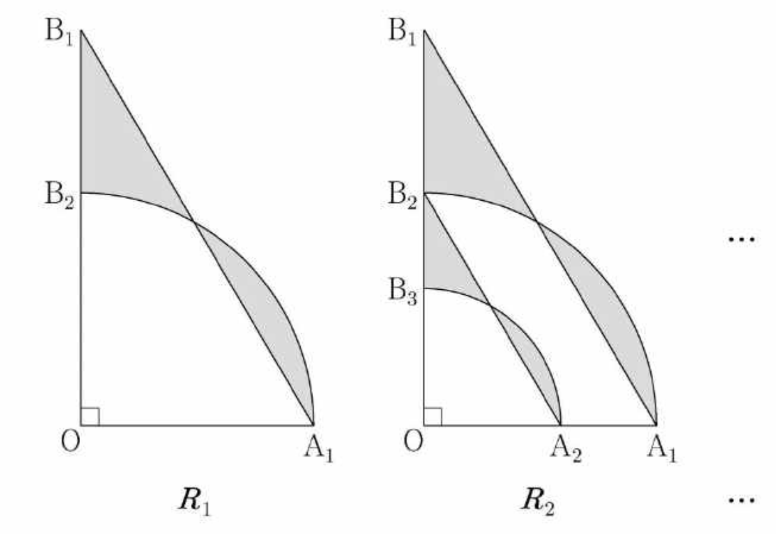
④ $7-\frac{7\sqrt{3}}{6}-\frac{49}{36}\pi$

⑤ $8-\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{14}{9}\pi$

30) 그림과 같이 $\overline{\mathrm{OA_1}}=4$, $\overline{\mathrm{OB_1}}=4\sqrt{3}$인 직각삼각형 $\mathrm{OA_1B_1}$이 있다. 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{OA_1}}$인 원이 선분 $\mathrm{OB_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{B_2}$라 하자. 삼각형 $\mathrm{OA_1B_1}$의 내부와 부채꼴 $\mathrm{OA_1B_2}$의 내부에서 공통된 부분을 제외한 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 $\mathrm{B_2}$를 지나고 선분 $\mathrm{A_1B_1}$에 평행한 직선이 선분 $\mathrm{OA_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{A_2}$, 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{OA_2}}$인 원이 선분 $\mathrm{OB_2}$와 만나는 점을 $\mathrm{B_3}$이라 하자. 삼각형 $\mathrm{OA_2B_2}$의 내부와 부채꼴 $\mathrm{OA_2B_3}$의 내부에서 공통된 부분을 제외한 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [1811 4점]



① $\frac{3}{2}\pi$

② $\frac{5}{3}\pi$

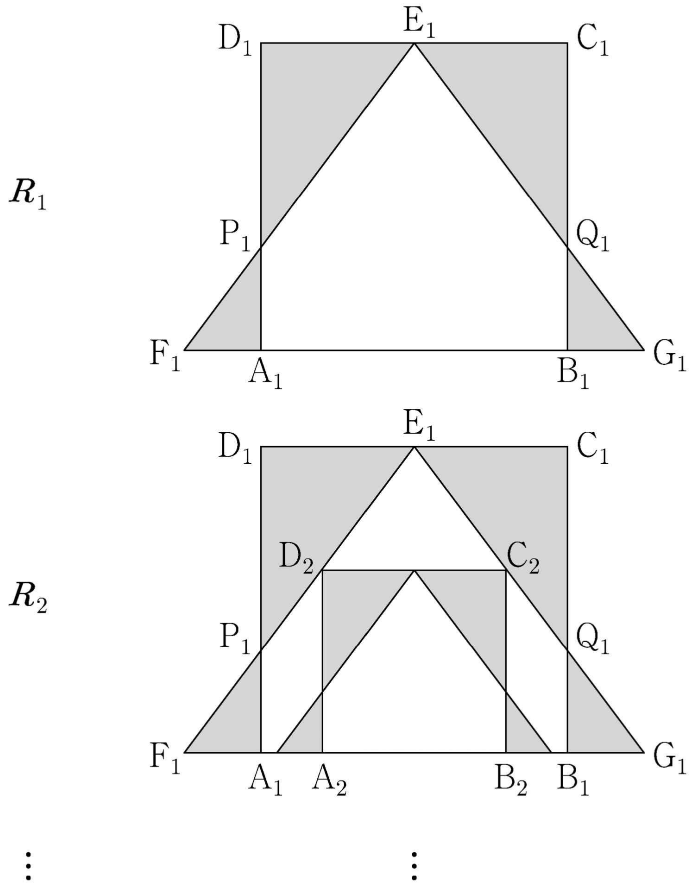
③ $\frac{11}{6}\pi$

④ 2π

⑤ $\frac{13}{6}\pi$

31) 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$이 있다. 선분 $\mathrm{C_1D_1}$의 중점을 $\mathrm{E_1}$이라 하고, 직선 $\mathrm{A_1B_1}$ 위에 두 점 $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{G_1}$을 $\overline{\mathrm{E_1F_1}}=\overline{\mathrm{E_1G_1}}$, $\overline{\mathrm{E_1F_1}}:\overline{\mathrm{F_1G_1}}=5:6$이 되도록 잡고 이등변삼각형 $\mathrm{E_1F_1G_1}$을 그린다. 선분 $\mathrm{D_1A_1}$과 선분 $\mathrm{E_1F_1}$의 교점을 $\mathrm{P_1}$, 선분 $\mathrm{B_1C_1}$과 선분 $\mathrm{G_1E_1}$의 교점을 $\mathrm{Q_1}$이라 할 때, 네 삼각형 $\mathrm{E_1D_1P_1}$, $\mathrm{P_1F_1A_1}$, $\mathrm{Q_1B_1G_1}$, $\mathrm{E_1Q_1C_1}$로 만들어진 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 선분 $\mathrm{F_1G_1}$ 위의 두 점 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_2}$와 선분 $\mathrm{G_1E_1}$ 위의 점 $\mathrm{C_2}$, 선분 $\mathrm{E_1F_1}$ 위의 점 $\mathrm{D_2}$를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$를 그리고, 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [1906 4점]



① $\frac{61}{6}$

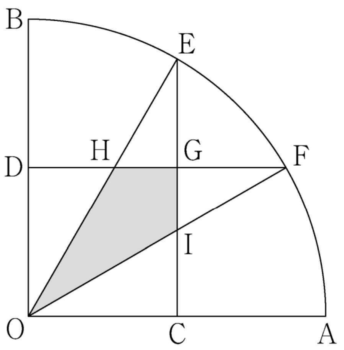
② $\frac{125}{12}$

③ $\frac{32}{3}$

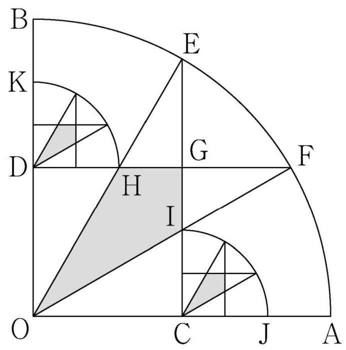
④ $\frac{131}{12}$

⑤ $\frac{67}{6}$

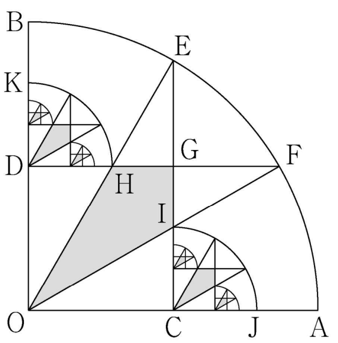
32) 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 OAB가있다. 선분 OA의 중점을 C, 선분 OB의 중점을 D라 하자. 점 C를 지나고 선분 OB와 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점을 E, 점 D를 지나고 선분 OA와 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점을 F라 하자.
선분 CE와 선분 DF가 만나는 점을 G, 선분 OE와 선분 DG가 만나는 점을 H, 선분 OF와 선분 CG가 만나는 점을 I라 하자. 사각형 OIGH를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 중심이 C, 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{CI}}$, 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 CJI와 중심이 D, 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{DH}}$, 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 DHK를 그린다. 두 부채꼴 CJI, DHK에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 두 개의 사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값은? [1909 4점]



R_1



R_2



R_3 …

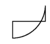
① $\frac{2(3-\sqrt{3})}{5}$

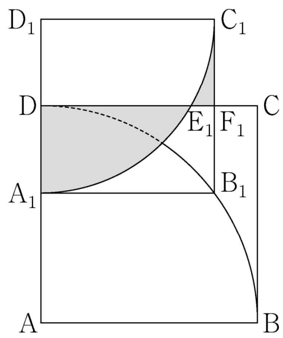
② $\frac{7(3-\sqrt{3})}{15}$

③ $\frac{8(3-\sqrt{3})}{15}$

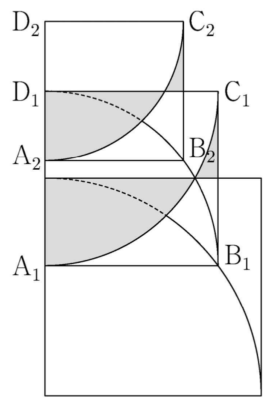
④ $\frac{3(3-\sqrt{3})}{5}$

⑤ $\frac{2(3-\sqrt{3})}{3}$

33) 그림과 같이 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD에 중심이 A이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 ABD를 그린다. 선분 AD를 $3:2$로 내분하는 점을 A_1, 점 A_1을 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 BD와 만나는 점을 B_1이라 하자.
선분 A_1B_1을 한 변으로 하고 선분 DC와 만나도록 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$을 그린 후, 중심이 D_1이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 $D_1A_1C_1$을 그린다. 선분 DC가 호 A_1C_1, 선분 B_1C_1과 만나는 점을 각각 E_1, F_1이라 하고, 두 선분 DA_1, DE_1과 호 A_1E_1로 둘러싸인 부분과 두 선분 E_1F_1, F_1C_1과 호 E_1C_1로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$에 중심이 A_1이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 $A_1B_1D_1$을 그린다. 선분 A_1D_1을 $3:2$로 내분하는 점을 A_2, 점 A_2를 지나고 선분 A_1B_1에 평행한 직선이 호 B_1D_1과 만나는 점을 B_2라 하자. 선분 A_2B_2를 한 변으로 하고 선분 D_1C_1과 만나도록 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린 후, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에  모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값은? [1911 4점]



R_1



R_2 …

① $\frac{50}{3}\left(3-\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}\right)$

② $\frac{100}{9}\left(3-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$

③ $\frac{50}{3}\left(2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$

④ $\frac{100}{9}\left(3-\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}\right)$

⑤ $\frac{100}{9}\left(2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$

1) 답 : ④

문제에 주어진 식의 양변을 제곱하고 n^2으로 나누면

$\dfrac{9n^2+4}{n^2} < \dfrac{a_n}{n} < \dfrac{9n^2+12n+4}{n^2}$이 된다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2+4}{n^2} \le \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} \le \lim_{n\to\infty}\frac{9n^2+12n+4}{n^2}$$

$$9 \le \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} \le 9 \quad \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = 9$$

2) 답 : ①

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면 $r = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{1}{3}$이므로

$$a_n = 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{9\times\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right\} = \frac{9}{1-\frac{1}{9}} = \frac{81}{8}$$

3) 답 : ③

급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-3)$가 수렴하므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2a_n-3)=0$이다.

$2a_n-3=b_n$이라 하면

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=0$이고, $a_n=\dfrac{1}{2}(b_n+3)$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(b_n+3) = \frac{1}{2}\times(0+3) = \frac{3}{2}$$

즉, $r=\dfrac{3}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+2}-1}{r^n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+2}-1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{9}{4}-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{\frac{9}{4}-0}{1+0} = \frac{9}{4}$$

4) 답 : 2

주어진 이차방정식의 양의 실근 a_n 을 구하면

$a_n = -n+\sqrt{n^2+4n}$ 이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}(-n+\sqrt{n^2+4n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n+\sqrt{n^2+4n}} = 2$$

5) 답 : ⑤

이차방정식 $x^2-(n+1)x+a_n=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(n+1)^2-4a_n \ge 0$에서 $a_n \le \dfrac{(n+1)^2}{4}$

또 이차방정식 $x^2-nx+a_n=0$의 판별식을 D_2이라 하면

$D_2=n^2-4a_n<0$에서 $a_n > \dfrac{n^2}{4}$

즉 $\dfrac{n^2}{4} < a_n \le \dfrac{(n+1)^2}{4}$, $\dfrac{n^2}{4n^2} < \dfrac{a_n}{n^2} \le \dfrac{(n+1)^2}{4n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4n^2} < \lim_{n\to}\frac{a_n}{n^2} \le \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{4n^2}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4}$이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2} = \frac{1}{4}$

6) 답 : ①

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_4-a_2=2d=4 \Leftrightarrow d=2$

$\therefore\ a_n=2n+2$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{na_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(2n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$$

7) 답 : ②

$S_n = \dfrac{a_1(3^n-1)}{3-1} = \dfrac{a_1(3^n-1)}{2}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{3^n} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{a_1(3^n-1)}{2}}{3^n} = \lim_{x\to\infty}\frac{a_1(3^n-1)}{2\cdot 3^n} = \frac{a_1}{2} = 5$$

$a_1 = 10$

8) 답 : 35

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(10n+1)b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(10n+1)(n^2+1)b_n}{(n+1)a_n}\times\frac{(n+1)}{(n^2+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(10n+1)\cdot 7\cdot(n+1)}{2\cdot(n^2+1)} = \frac{70}{2} = 35$$

9) 답 : 4

첫째항이 1, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은 $a_n=r^{n-1}$

$S_n = \dfrac{r^n-1}{r-1}$

그러므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{r^{n-1}}{\frac{r^n-1}{r-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{r^n-r^{n-1}}{r^n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{r-1}{r-\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}}$$

$$= \frac{r-1}{r} = 1-\frac{1}{r} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore\ \frac{1}{r} = \frac{1}{4} \quad \therefore\ r=4$$

10) 답 : ④

직선 $y=2nx$ 위의 점 P $(n,\ 2n^2)$을 지나고 이 직선과 수직인 직선은 $y=-\dfrac{1}{2n}(x-n)+2n^2$ 이다.

점 Q는 이 직선의 x축과 만나는 교점이므로

선분 OQ길이 $l_n=4n^3+n$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+n}{n^3} = 4$$

11) 답 : 16

$\mathrm{P}_n(4^n,\ 2^n)$, $\mathrm{P}_{n+1}(4^{n+1},\ 2^{n+1})$

$$L_n = \sqrt{(4^{n+1}-4^n)^2+(2^{n+1}-2^n)^2}$$

$$= \sqrt{(3\times 4^n)^2+(2^n)^2} = \sqrt{9\times 16^n+4^n}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{9\times 16^{n+1}+4^{n+1}}}{\sqrt{9\times 16^n+4^n}}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{9\times 16^{n+1}+4^{n+1}}{9\times 16^n+4^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{9\times 16+4\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}{9+\left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{9\times 16+4\times 0}{9+0} = 16$$

12) 답 : ②

$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}(x-1)$과 $y=3x(x-1)$의 교점 A_n, P_n의 좌표는

$$(1,\ 0),\ \left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

따라서 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{4}} = 2-\frac{4}{9} = \frac{14}{9}$$

13) 답 : ②

$f(x)=n \Leftrightarrow (x-3)^2=n \ \Leftrightarrow \ x^2-6x+9-n=0$

의 두 근이 α, β이므로 근과 계수와의 관계에 의해 다음이 성립한다.

$\alpha+\beta=6, \quad \alpha\beta=9-n$

그런데 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$|\alpha-\beta|=\sqrt{4n}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\{h(n+1)-h(n)\}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\{2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$=1$$

14) 답 : 33

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^n+1} \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\text{에서}$$

i) $k<6$일 때, $\frac{6}{k}>1$이므로 분모, 분자를 $\left(\frac{6}{k}\right)^n$으로 나누면

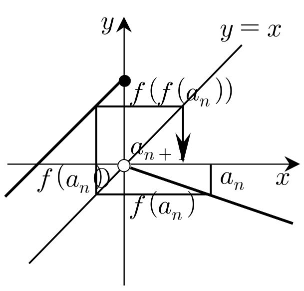
$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6}{k}}{1+\left(\frac{k}{6}\right)^n}=\frac{6}{k} \quad \left(\because\ 0<\frac{k}{6}<1\right)$$

ii) $k=6$일 때, $a_k=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

iii) $k>6$일 때, $0<\frac{6}{k}<1$이므로 $a_k=\frac{0}{0+1}=0$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}ka_k=\sum_{k=1}^{5}\left(k\times\frac{6}{k}\right)+\sum_{k=6}^{6}\left(k\times\frac{1}{2}\right)+\sum_{k=7}^{10}(k\times 0)$$
$$=6\times5+6\times\frac{1}{2}=33$$

15) 답 : ④



위의 그래프에서 $a_n>0$이면 항상 $a_{n+1}>0$이므로

$f(a_n)=-\frac{1}{2}a_n<0$이므로

$a_{n+1}=f(f(a_n))=f\left(-\frac{1}{2}a_n\right)=-\frac{1}{2}a_n+2$가 성립한다.

$$a_{n+1}-\frac{4}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{4}{3}\right)$$
$$\therefore\ a_n-\frac{4}{3}=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\therefore\ a_n=\frac{4}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{4}{3}$$

16) 답 : ①

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n-\frac{n^2+1}{2n+1}\right)=3$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(na_n-\frac{n^2+1}{2n+1}\right)=0$이다.

즉, $\lim_{n\to\infty}n\left(a_n-\frac{n+\frac{1}{n}}{2n+1}\right)=0$에서 $\lim_{n\to\infty}n\neq0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{n+\frac{1}{n}}{2n+1}\right)=0$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{n+\frac{1}{n}}{2n+1}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{n+\frac{1}{n}}{2n+1}$$
$$=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}(a_n^2+2a_n+2)=\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)^2+2\lim_{n\to\infty}a_n+2$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\frac{1}{2}+2=\frac{13}{4}$$

17) 답 : ①

A_n의 x좌표가 $\frac{1}{n}$이므로 $\mathrm{A}_n\left(\frac{1}{n},\ \log_3\frac{1}{n}\right)$

한편, B_n의 좌표를 $(b_n,\ \log_3 b_n)$이라 하면 점 C_n은 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$을 $1:2$로 내분하는 점이므로 $\mathrm{C}_n\left(\frac{b_n+2\times\frac{1}{n}}{1+2},\ \frac{\log_3 b_n+2\log_3\frac{1}{n}}{1+2}\right)$

즉, $\mathrm{C}_n\left(\frac{b_n+\frac{2}{n}}{3},\ \frac{\log_3 b_n+2\log_3\frac{1}{n}}{3}\right)$

이때, 점 C_n의 y좌표가 0이므로 $\log_3 b_n+2\log_3\frac{1}{n}=0$

$\log_3 b_n=\log_3 n^2$

$\therefore\ b_n=n^2$

따라서, $x_n=\frac{b_n+\frac{2}{n}}{3}=\frac{n^2+\frac{2}{n}}{3}=\frac{n^3+2}{3n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2}{3n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n^3}}{3}=\frac{1}{3}$$

18) 답 : 12

$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2=2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$에서

$$(a_{n+1}-a_n)^2=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)^2$$
$$=2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)-2\left(1-\frac{1}{9^{n-1}}\right)=\frac{16}{9^n}\ (n\geq2)$$

이때, $n=1$이면

$(a_2-a_1)^2=2(1-\frac{1}{9})=\frac{16}{9}$이므로

$(a_{n+1}-a_n)^2=\frac{16}{9^n}\ \ (n\geq1)$

한편, $a_{n+1}>a_n$이므로

$$a_{n+1}-a_n=\frac{4}{3^n}$$
$$\therefore\ a_{n+1}=a_n+\frac{4}{3^n}$$

이때, $a_1=10$이므로

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4}{3^k}$$
$$=10+\frac{\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{3}}$$
$$=10+2\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}(n\geq2)$$

따라서, $\lim_{n\to\infty}a_n=12$

19) 답 : ③

$P_n(n,\ 2^n)$, $Q_n(n,\ 3^n)$, $P_{n-1}(n-1,\ 2^{n-1})$이므로 $\overline{Q_nP_n}=3^n-2^n$

$S_n=\triangle P_nQ_nP_{n-1}=\frac{1}{2}(3^n-2^n)$

$T_n=\sum_{k=1}^{n}S_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(3^k-2^k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k}{2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{2}$

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{3(3^n-1)}{3-1}-\frac{2(2^n-1)}{2-1}\right\}$

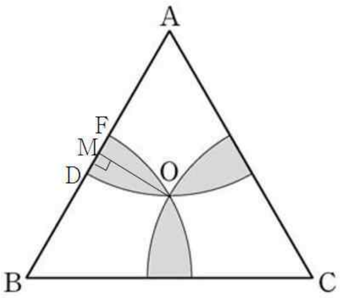
$=\frac{1}{2}\left\{\frac{3}{2}(3^n-1)-2(2^n-1)\right\}$

$=\frac{1}{4}(3^{n+1}-2^{n+2}+1)$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\cdot\frac{3^{n+1}-2^{n+2}+1}{3^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\cdot\left\{3-4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{3^n}\right\}=\frac{3}{4}$

20) 답 : ③



O가 정삼각형의 외심이므로 무게중심과 일치한다.

$\overline{DF}$의 중점을 M이라 하자.

$S_1=6\times($부채꼴$AOD-$삼각형$AOM)$

부채꼴$AOD-$삼각형$AOM=a$ 라 하면

$\overline{AO}=2\sqrt{3}$, $\overline{AM}=3$

$a=\frac{1}{2}(2\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{3}=\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}$

$\therefore S_1=6(\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3})$

$\overline{AF}=6-\overline{BF}=6-2\sqrt{3}$이므로

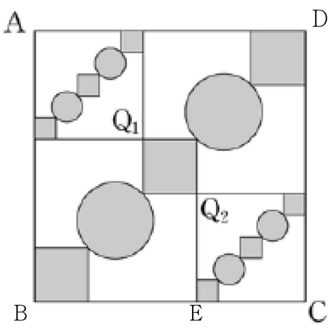
한 변의 길이가 6인 정삼각형ABC가 삼각형 AFI 로 축소되므로

길이의 비는 $\frac{6-2\sqrt{3}}{6}$, 넓이의 비는 $(\frac{6-2\sqrt{3}}{6})^2$,

개수는 3배로 증가하므로,

$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{6(\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3})}{1-3(\frac{6-2\sqrt{3}}{6})^2}=(2\pi-3\sqrt{3})(2\sqrt{3}+3)$

21) 답 : ②



$\overline{BE}$: $\overline{EC}=3$: 2이므로 닮음비는 $\frac{2}{5}$이다.

따라서 넓이의 비는 $\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$이고 도형의 개수는 2배씩 늘어나므로 무한등비급수의 공비는 $\frac{4}{25}\times2=\frac{8}{25}$

또한, 그림 R_1에서 $\overline{BD}=5\sqrt{2}$이므로

$S_1=3\times1+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\pi=3+\pi$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3+\pi}{1-\frac{8}{25}}=\frac{25}{17}(\pi+3)$

22) 답 : ⑤

$S_1=(\triangle A_1E_1D_1$의 넓이$)+(\triangle E_1B_1F_1$의 넓이$)+(\triangle D_1F_1C_1$의 넓이$)$

$=1+\frac{1}{2}+1=\frac{5}{2}$

$\triangle E_1F_2D_1$으로부터 $\overline{E_1F_2}$: $\overline{D_1F_2}=1$: 3이므로

정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 한 변의 길이를 x라 두면

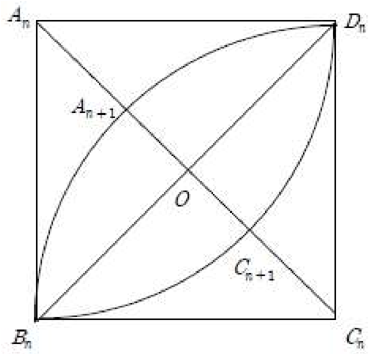
$\triangle A_2E_1B_2$로부터 $\overline{E_1B_2}$: $\overline{A_2B_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{x}{2}$: $x=1$: 3

따라서 $x=\frac{3\sqrt{2}}{5}$

$\square A_1B_1C_1D_1$과 $\square A_2B_2C_2D_2$의 길이 비는 1 : $\frac{3\sqrt{2}}{10}$

$\lim_{x\to\infty}S_n=\frac{\frac{5}{2}}{1-\left(\frac{3\sqrt{2}}{10}\right)^2}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{82}{100}}=\frac{125}{41}$

23) 답 : ③



정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 한 변의 길이를 x_n, 두 대각선의 교점을 O라 하면 $\overline{OA_n}=\frac{\sqrt{2}}{2}x_n$

따라서, $\overline{A_nC_{n+1}}=x_n$이므로

$\overline{OC_{n+1}}=x_n-\frac{\sqrt{2}}{2}x_n=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x_n$

따라서,

$\overline{A_nC_n}$: $\overline{A_{n+1}C_{n+1}}=\sqrt{2}x_n$: $2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x_n=\sqrt{2}$: $(2-\sqrt{2})$

이므로 닮음비는 $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-2}{2}=\sqrt{2}-1$ 이고,

공비는 $(\sqrt{2}-1)^2$이다.

또한, $x_1=1$이므로

$\overline{A_1A_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}-1$ 이므로

$S_1=2\times\frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)^2=\frac{1}{2}(3-2\sqrt{2})$

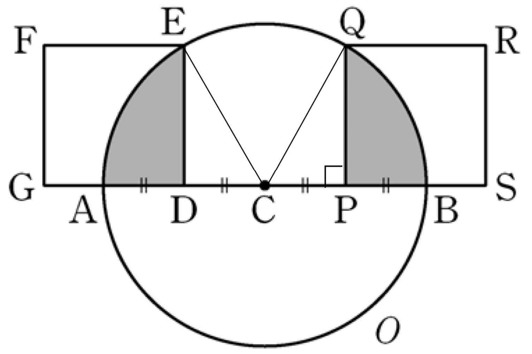
따라서,

$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{1}{2}(3-2\sqrt{2})}{1-(\sqrt{2}-1)^2}=\frac{\frac{1}{2}(3-2\sqrt{2})}{2\sqrt{2}-2}=\frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)$

24) 답 : ③

그림 R_1에서 아래 그림과 같이 두 점 C, Q를 연결하여 직각삼각형

QCP를 만든다.



직각삼각형 QCP에서 $\overline{CQ}=2$, $\overline{CP}=1$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{CQ}^2-\overline{CP}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

이때, $\angle QCP=60^\circ$ 이다.

그러므로 도형 R_1에 색칠된 부분의 넓이는

2{(부채꼴 QCB의 넓이)−(△QCP의 넓이)}

$=2\left\{2^2\pi\times\frac{60^\circ}{360^\circ}-\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\right\}$

$=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$ ·· ㉠

한편 그림 R_2에서 새로 그려진 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{PQ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

그러므로 그림 R_1에 있는 원과 그림 R_2에 있는 원의 반지름의 길이의 비는 $2:\frac{\sqrt{3}}{2}$ 즉, $1:\frac{\sqrt{3}}{4}$이다.

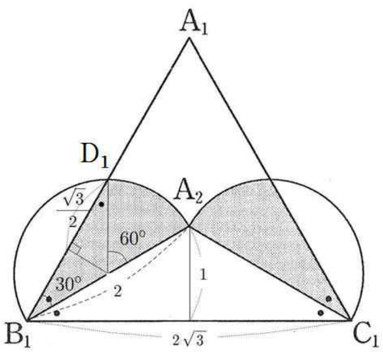
이때 넓이의 비는 $1:\frac{3}{16}$이다.

한편, 그림 R_1의 원의 개수와 그림 R_2의 원의 개수의 비는 $2:4$ 즉, $1:2$이므로 공비는 $\frac{3}{16}\times2=\frac{3}{8}$

이다. 따라서, 구하는 극한값은

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}}{1-\frac{3}{8}}=\frac{32\pi-24\sqrt{3}}{15}$$

25) 답 : ①



R_1

$\triangle A_1B_1C_1$의 높이를 h_1, $\triangle A_2B_2C_2$의 높이를 h_2라 하면

$h_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot2\sqrt{3}=3$, $h_2=1$이므로

$\triangle A_1B_1C_1$과 $\triangle A_2B_2C_2$의 높이 비는 $3:1$

따라서 두 삼각형의 길이 비는 $3:1$이고 넓이 비는 $9:1$이다.

그러므로 $R_1:R_2$의 넓이 비도 $9:1$이다. ··· ㉠

선분 $\overline{B_1A_2}$를 지름으로 하는 반원과 $\overline{A_1B_1}$과의 교점을 D_1. $\overline{B_1A_2}$의 중점을 O_1이라 하면 $\triangle O_1D_1B_1$은 $\overline{O_1D_1}=\overline{O_1B_1}$인 이등변삼각형이고, $\angle D_1O_1B_1=60°$, $\angle D_1O_1A_2=60°$이다.

따라서 칠해진 부분의 넓이는

$\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}+\pi1^2\times\frac{1}{6}\right)\times2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}$ ··· ㉡

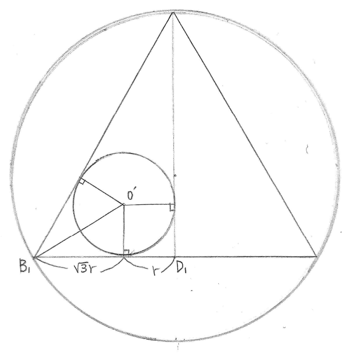
㉠, ㉡에 의해

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9\sqrt{3}+6\pi}{16}$$

26) 답 : ③

$\triangle A_1D_1E_1=\frac{2}{3}\times\triangle A_1C_1D_1=\sqrt{3}$

$\therefore R_1=\sqrt{3}+(\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3})=\frac{4}{3}\pi$



$\angle O'B_1D_1=30°$ 이므로 $B_1D_1=(1+\sqrt{3})r$

$\sqrt{3}=(1+\sqrt{3})r$에서 $r=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

O_1와 O_2 의 길이 비는 $2:\frac{3-\sqrt{3}}{2}=1:\frac{3-\sqrt{3}}{4}$ 이므로

넓이비는 $1:\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2$

넓이에 대한 공비는 $\frac{6-3\sqrt{3}}{8}$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{6-3\sqrt{3}}{8}}=\frac{32(3\sqrt{3}-2)\pi}{69}$$

27) 답 : ②

$\angle B_1C_1D_1=30^\circ$, $\angle C_1D_1B_1=90^\circ$ 이므로 직각삼각형 $B_1C_1D_1$에서

$\overline{C_1D_1}=\overline{B_1C_1}\cos30^\circ=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

한편, 두 선분 B_1B_2와 B_1D_1과 호 D_1B_2로 둘러싸인 영역의 넓이는

$\triangle B_1C_1D_1-$ 부채꼴$B_2C_1D_1$

$=\frac{1}{2}\times\overline{C_1D_1}\times\overline{D_1B_1}-\overline{C_1D_1}^2\times\pi\times\frac{30^\circ}{360^\circ}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\pi\times\frac{1}{12}$

$=\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{16}=\frac{2\sqrt{3}-\pi}{16}$ ······ ㉠

또, 삼각형 $C_1A_2C_2$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{C_2C_1}\times\overline{C_1A_2}\times\sin30^\circ$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\overline{B_2C_1}\right)\times\left(\overline{B_2C_1}\cos30^\circ\right)\times\sin30^\circ$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{64}$ ······ ㉡

따라서 R_1의 넓이 S_1은 ㉠과 ㉡에 의해

$S_1=\frac{2\sqrt{3}-\pi}{16}+\frac{3\sqrt{3}}{64}=\frac{11\sqrt{3}-4\pi}{64}$

한편, 직각삼각형 $A_2B_2C_1$에서

$\angle B_2C_1A_2=30^\circ$ 이므로 $\angle A_2B_2C_1=60^\circ$

또, $\overline{A_2B_2} = \overline{B_2C_1}\sin 30^\circ = \frac{1}{2}\overline{B_2C_1} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

그러므로 삼각형 $A_2B_2C_2$에서

$\angle A_2B_2C_2 = 60^\circ$ 이고 $\overline{A_2B_2} = \overline{B_2C_2}$

즉, 삼각형 $A_2B_2C_2$는 한 변의 길이가 $\frac{\sqrt{3}}{4}$인 정삼각형이다.

그러므로 길이의 비가 $1 : \frac{\sqrt{3}}{4}$이므로 넓이의 비는 $1 : \frac{3}{16}$이다.

따라서

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{11\sqrt{3}-4\pi}{64}}{1-\frac{3}{16}} = \frac{11\sqrt{3}-4\pi}{52}$$

28) 답 : ②

도형 R_1의 색칠된 부분의 넓이 S_1은

S_1 = (부채꼴 $F_1C_1B_1$의 넓이) + (부채꼴 $E_1B_1C_1$의 넓이)

$-2\times(\triangle G_1B_1C_1)$의 넓이이다.

점 F_1와 G_1에서에서 $\overline{B_1C_1}$에 내린 수선의 발을 각각 H, M라고 하자.

$\overline{F_1C_1} : \overline{F_1H} = 2 : 1$ 이므로 $\angle F_1C_1H = 30^\circ$ 이다.

따라서 부채꼴 $F_1C_1B_1$의 넓이$= \frac{30}{360} \times 4\pi = \frac{\pi}{3}$이고

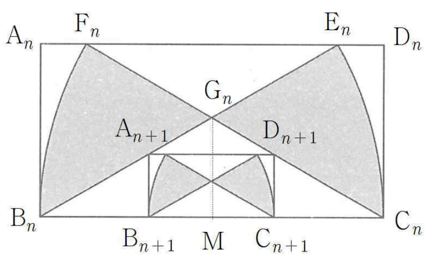
부채꼴 $F_1C_1B_1$과 부채꼴 $E_1B_1C_1$는 합동이므로

부채꼴 $E_1B_1C_1$의 넓이$= \frac{\pi}{3}$

$\overline{C_1M} = 1$ 이고, $\angle G_1C_1M = 30^\circ$ 이므로 $\overline{G_1M} = \frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

따라서 ($\triangle G_1B_1C_1$의 넓이)$= \frac{\sqrt{3}}{3}$

즉, $S_1 = \frac{2\pi - 2\sqrt{3}}{3}$



직사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 한 변의 길이를 x_n이라 하고, 직사각형 $A_nB_nC_nD_n$에서 새로 그려진 직사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 한 변의 길이를 x_{n+1}이라고 하면

$\overline{B_nB_{n+1}} : \overline{B_{n+1}A_{n+1}} = \sqrt{3} : 1$ 이므로

$(x_n - x_{n+1}) : x_{n+1} = \sqrt{3} : 1$ 이다. 비례식을 정리하여 풀면

$x_{n+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}x_n$이 되어

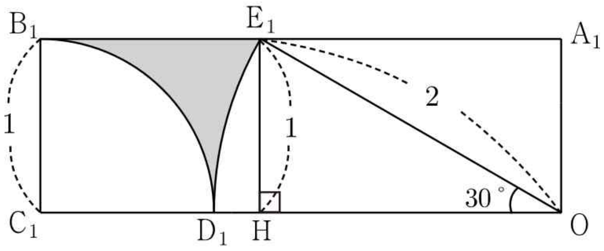
직사각형 $A_nB_nC_nD_n$ 내부에 그려진 도형의 넓이와 직사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 내부에 새로 그려진 도형의 넓이의 비는

$1 : \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$ 이 되어 S_n은 초항이 $\frac{2\pi - 2\sqrt{3}}{3}$이고

공비가 $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$인 등비수열의 합이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{2\pi - 2\sqrt{3}}{3}}{1-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}\pi - 12}{9}$$

29) 답 : ②

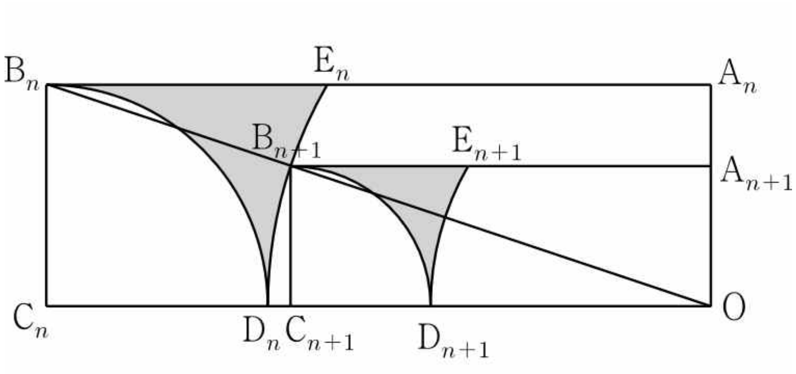


점 E_1에서 선분 C_1O에 내린 수선의 발을 H라 하면

직각삼각형 E_1HO에서 $\overline{E_1H} = 1$, $\overline{E_1O} = 2$이므로 $\angle E_1OH = 30^\circ$ 이다.

S_1은 직사각형 $OA_1B_1C_1$에서 부채꼴 $C_1B_1D_1$, 부채꼴OE_1D_1, 삼각형 E_1OA_1을 제외한 부분의 넓이이므로

$S_1 = 3 - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$이다.



두 직사각형 $OA_nB_nC_n$과 $OA_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$서로 닮은 사각형이다.

닮음비가 $\overline{OB_n} : \overline{OB_{n+1}} = \sqrt{10} \times \overline{B_nC_n} : 2 \times \overline{B_nC_n} = \sqrt{10} : 2$이므로

넓이의 비는 $10 : 4 = 5 : 2$가 된다.

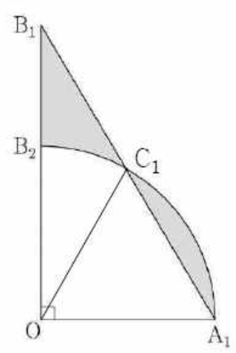
따라서 S_n은 첫째항이 $S_1 = 3 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{12}\pi$이고

공비가 $\frac{2}{5}$인 등비수열이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{12}\pi}{1 - \frac{2}{5}} = 5 - 5\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{35}{36}\pi$$

30) 답 : ④

그림 R_1에서 부채꼴 OA_1B_2의 호 A_1B_2와 선분 A_1B_1이 만나는 점을 C_1이라 하자.



$\angle C_1OA_1 = 60^\circ$ 이므로

부채꼴 C_1OA_1의 넓이와 삼각형 C_1OA_1의 넓이의 차는

$16\pi \times \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 16 = \frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3}$ … ㉠

또, $\angle C_1OB_1 = 30^\circ$ 이므로

삼각형 C_1OB_1의 넓이와 부채꼴 C_1OB_1의 넓이의 차는

$\frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 2 - 16\pi \times \frac{1}{12} = 4\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi$ … ㉡

㉠, ㉡에서

$S_1 = \left(\frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3}\right) + \left(4\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi\right) = \frac{4}{3}\pi$

한편, 삼각형 OA_1B_1과 삼각형 OA_2B_2의 닮음비는

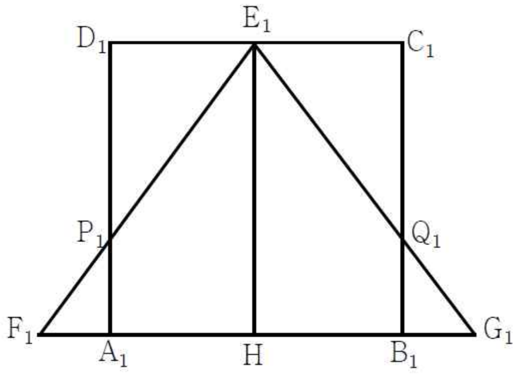
$\overline{OB_1} : \overline{OB_2} = 4\sqrt{3} : 4 = \sqrt{3} : 1$

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_n$은 첫째항이 $\frac{4}{3}\pi$이고, 공비가 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$인 등비급수이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{1}{3}} = 2\pi$$

31) 답 : ②

그림 R_1의 점 E_1에서 변 A_1B_1에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{E_1D_1} = \frac{1}{2}\overline{D_1C_1} = \frac{1}{2}\times 4 = 2$

$\overline{E_1H} = \overline{D_1A_1} = 4$

$\overline{E_1F_1} = 5a$라 놓으면 $\overline{E_1F_1} : \overline{F_1G_1} = 5:6$이므로 $\overline{F_1G_1} = 6a$

즉, $\overline{F_1H} = \frac{1}{2}\overline{F_1G_1} = 3a$

직각삼각형 E_1F_1H에서 $(5a)^2 = 4^2 + (3a)^2$

즉, $16a^2 = 16$에서 $a > 0$이므로 $a = 1$

$\overline{F_1H} = 3$이고, $\overline{A_1H} = 2$이므로

$\overline{F_1A_1} = 3 - 2 = 1$

삼각형 $D_1P_1E_1$과 삼각형 $A_1P_1F_1$이 닮음이고 $\overline{D_1E_1} = 2$, $\overline{A_1F_1} = 1$이므로

닮음비는 $2:1$

즉, $\overline{D_1P_1} = \frac{2}{3}\times 4 = \frac{8}{3}$, $\overline{A_1P_1} = \frac{1}{3}\times 4 = \frac{4}{3}$

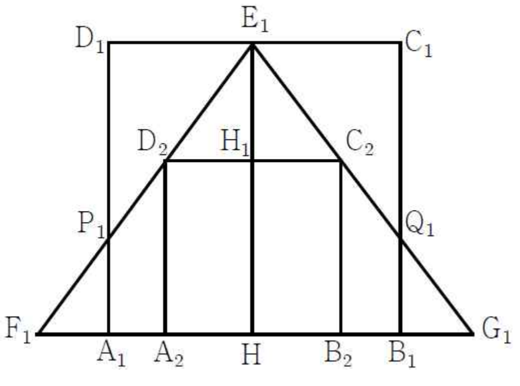
$\overline{E_1F_1} = \overline{E_1G_1}$이므로

삼각형 $D_1P_1E_1$과 삼각형 $C_1Q_1E_1$이 합동이고

삼각형 $A_1P_1F_1$과 삼각형 $B_1Q_1G_1$이 합동이므로

$S_1 = 2\times\frac{1}{2}\times 2\times\frac{8}{3} + 2\times\frac{1}{2}\times 1\times\frac{4}{3} = \frac{20}{3}$

그림 R_2의 점 E_1에서 변 D_2C_2에 내린 수선의 발을 H_1이라 하자.



정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 한 변의 길이를 x라 놓으면

$\overline{D_2H_1} = \frac{x}{2}$, $\overline{E_1H_1} = 4 - x$

삼각형 E_1F_1H와 삼각형 $E_1D_2H_1$은 닮음이므로

$3 : 4 = \frac{x}{2} : 4 - x$ 즉, $2x = 12 - 3x$에서 $x = \frac{12}{5}$

정사각형 $A_1B_1C_1D_1$과 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비는

$4 : \frac{12}{5} = 1 : \frac{3}{5}$

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_n$은 첫째항이 $\frac{20}{3}$이고, 공비가 $\left(\frac{3}{5}\right)^2$인 등비급수이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{20}{3}}{1-\frac{9}{25}} = \frac{125}{12}$$

32) 답 : ①

R_1에서 $\overline{OC} = \overline{OD} = 1$이므로 $\angle COD = \angle DOF = \frac{\pi}{3}$

따라서 $\angle COI = \angle DOH = \frac{\pi}{6}$이고 $S_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$이다.

R_2에서 사분의 일 원은 모두 닮음이고 R_1에서 새로 그려진 두개의 사분의 일 원은 반지름의 길이가 $\overline{CI} = \frac{1}{\sqrt{3}}$이 된다. 따라서 큰 사분의 일 원과 작은 사분의 일 원의 길이의 비는 $2 : \frac{1}{\sqrt{3}}$, 즉 $\frac{1}{2\sqrt{3}}$배가 되었다. 길이의 비가 $\frac{1}{2\sqrt{3}}$배이므로 넓이의 비는 $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{12}$이다. 또한 개수는 2개가 되었으므로 S_2는 다음과 같이 구할 수 있다.

$S_2 = S_1 + \frac{1}{6}S_1$

마찬가지로 $S_2 = S_1 + \frac{1}{6}S_1 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 S_1$이므로

$S_n = S_1\left\{1 + \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{6S_1}{5} = \frac{2(3-\sqrt{3})}{5}$

33) 답 : ⑤

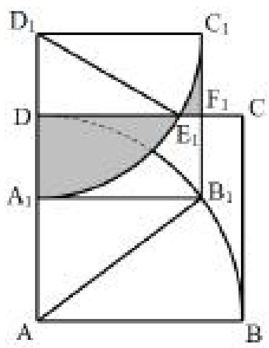


그림 R_1에서 $\overline{AA_1} = 3$, $\overline{AB_1} = 5$이므로 $\overline{A_1B_1} = 4$

즉, $\overline{D_1E_1} = 4$, $\overline{D_1D} = 2$이므로

$\angle DD_1E_1 = 60^\circ$, $\angle C_1D_1E_1 = 30^\circ$

따라서 $S_1 = \left(\frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}\right) + \left(8 - 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi\right) = 8 - 4\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$

한편, 정사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 한 변의 길이는 $A_nB_nC_nD_n$의 한 변의 길이의 $\frac{4}{5}$이므로 그림 R_{n+1}에서 새로 칠한 부분의 넓이는 그림 R_n에서 새로 색칠한 부분의 넓이의 $\frac{16}{25}$이다.

따라서

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{8-4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{16}{25}} = \frac{25}{9}\left(8-4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi\right) = \frac{100}{9}\left(2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$$