<전국연합학력평가 기출 16회>

1. 답 29 **정답률 29%**

[출제의도] 두 점 사이의 거리를 계산한다.

$\overline{AB} = \sqrt{(4+1)^2+(1-3)^2} = \sqrt{29}$

선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는

$\overline{AB}^2 = 29$

2. 답 18 **정답률 78%**

[출제의도] 좌표평면 위에서 외분점의 좌표 계산하기

두 점 $A(2, 4)$, $B(-2, 5)$를 잇는 선분 AB를

$1:2$로 외분하는 점의 좌표는

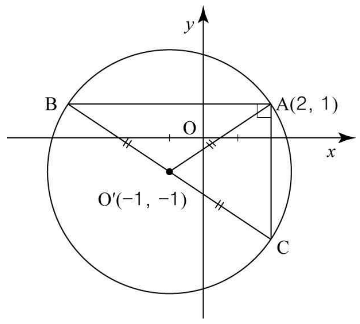
$(x, y) = \left(\dfrac{1\times(-2)-2\times 2}{1-2},\ \dfrac{1\times 5-2\times 4}{1-2}\right) = (6,\ 3)$

$\therefore\ xy = 18$

3. 답 ② **정답률 79%**

[출제의도] 두 점 사이의 거리를 구하여 수학내적문제 해결하기

삼각형 ABC의 외심을 O′라 하면, 외심 O′에서 각 꼭짓점까지의 거리가 같으므로 O′는 변 BC의 중점이다. 따라서 외심의 성질에 의해 삼각형 ABC는 변 BC를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.



그러므로 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$이고 $\overline{BC} = 2\overline{O'A}$이므로

$\overline{BC}^2 = 4\overline{O'A}^2 = 4(3^2+2^2) = 52$

$\therefore\ \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 52$

4. 답 30 **정답률 47%**

[출제의도] 점과 직선 사이의 거리 이해하기

점 $P(a, b)$가 직선 $2x+3y=12$ 위의 점이므로

$2a+3b=12$ ……㉠

$\overline{PA} = \overline{PB}$이므로 $(a-4)^2+b^2 = a^2+(b-2)^2$

정리하면 $2a-b=3$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = \dfrac{21}{8}$, $b = \dfrac{9}{4}$이다.

$\therefore\ 8a+4b = 30$

5. 답 ④ **정답률 61%**

[출제의도] 삼각형의 무게중심과 관련된 문제를 해결한다.

두 점 A, B의 좌표를 각각

$(a_1,\ b_1)$, $(a_2,\ b_2)$

라 하면 삼각형 OAB의 무게중심의 좌표가 $(5,\ 4)$이므로

$\dfrac{0+a_1+a_2}{3} = 5$, $\dfrac{0+b_1+b_2}{3} = 4$

$a_1+a_2 = 15$, $b_1+b_2 = 12$ …… ㉠

선분 OA를 $2:1$로 외분하는 점 C의 좌표는

$\left(\dfrac{2a_1-0}{2-1},\ \dfrac{2b_1-0}{2-1}\right)$, 즉 $(2a_1,\ 2b_1)$

마찬가지로 선분 OB를 $2:1$로 외분하는 점 D의 좌표는

$(2a_2,\ 2b_2)$

이때 두 선분 AD, BC는 모두 삼각형 OCD의 중선이므로 교점 E는 삼각형 OCD의 무게중심이다.

따라서 점 E의 좌표는

$\left(\dfrac{0+2a_1+2a_2}{3},\ \dfrac{0+2b_1+2b_2}{3}\right)$

㉠에 의하여

$\dfrac{2a_1+2a_2}{3} = \dfrac{2(a_1+a_2)}{3} = \dfrac{2\times 15}{3} = 10$,

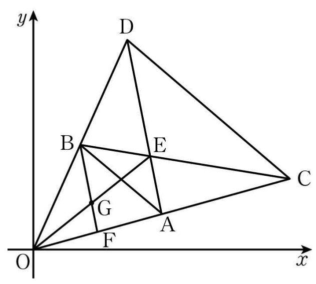
$\dfrac{2b_1+2b_2}{3} = \dfrac{2(b_1+b_2)}{3} = \dfrac{2\times 12}{3} = 8$

이므로 점 E의 좌표는 $(10,\ 8)$이다.

따라서 $p=10$, $q=8$이므로

$p+q=18$

[다른 풀이]



점 E는 삼각형 OCD의 무게중심이므로 점 E는 선분 DA를 $2:1$로 내분하는 점이다.

선분 OA의 중점을 F라 하고, 삼각형 OAB의 무게중심을 G라 하면 점 G는 선분 BF를 $2:1$로 내분하는 점이므로 세 점 O, G, E는 한 직선 위에 있다.

이때 $\overline{OF}:\overline{OA} = 1:2$이므로 두 삼각형 OFG, OAE는 닮음비가 $1:2$인 닮은 도형이다.

즉 $\overline{OG}:\overline{OE} = 1:2$이고 점 G의 좌표가 $(5,\ 4)$이므로

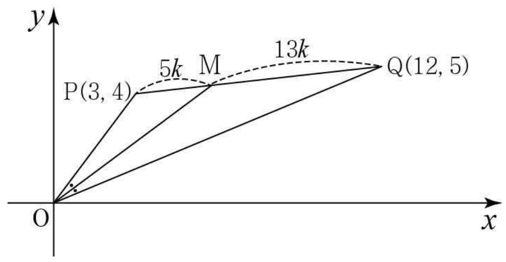
$p = 2\times 5 = 10$, $q = 2\times 4 = 8$

따라서 $p+q = 18$

6. 답 ②

7. 답 13 **정답률 23%**

[출제의도] 선분의 내분점을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기



$\overline{OP} = 5$, $\overline{OQ} = 13$

$\angle POQ$의 이등분선과 $\overline{PQ}$의 교점을 M이라 하면 각의 이등분선의 성질에 의해

$\overline{PM} : \overline{MQ} = 5 : 13$

점 M은 선분 PQ를 $5:13$으로 내분하므로

점 M의 x좌표 $\dfrac{b}{a} = \dfrac{11}{2}$

따라서 $a+b=13$

8. 답 16 **정답률 22%**

[출제의도] 선분의 내분과 외분을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

삼각형 ABC에서 점 D는 선분 BC를 $1:3$으로 내분하므로

$\overline{BD} : \overline{DC} = 1:3$

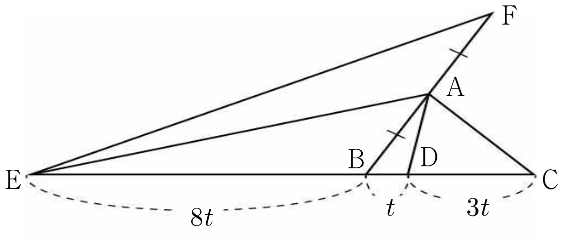
점 E는 선분 BC를 $2:3$으로 외분하므로

$\overline{EB} = 2\overline{BC}$이고, 점 F는 선분 AB를 $1:2$로 외분하므로 $\overline{BF} = 2\overline{AB}$이다.

$\overline{BD}:\overline{EB} = 1:8$이므로 삼각형 AEB의 넓이는 삼각형 ABD의 넓이의 8

배이다. 또한 $\overline{BF}=2\overline{AB}$이므로 삼각형 FEB의 넓이는 삼각형 ABD의 넓이의 16배이다.

따라서 $k=16$



(단, t는 실수)

<전국연합학력평가 기출 17회>

1. 답 ⑤ 정답률 72%

[출제의도] 내분점의 좌표를 구한다.

두 점 O(0, 0), A(8, 0)을 $3:1$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{3\times 8+1\times 0}{3+1},\ \dfrac{3\times 0+1\times 0}{3+1}\right)$이므로 $(6,\ 0)$

2. 답 14 정답률 78%

[출제의도] 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리 계산하기

두 점 $A\ (a-1, 4)$, $B\ (5, a-4)$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$\overline{AB}^2=(a-6)^2+(8-a)^2=10$

$\therefore\ a^2-14a+45=0$ 이다.

따라서 모든 a의 값의 합은 14

3. 답 ④ 정답률 81%

[출제의도] 좌표평면에서 외분점의 좌표를 계산한다.

두 점 $A(-2,\ 0)$, $B(a,\ b)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times a-1\times(-2)}{2-1},\ \dfrac{2\times b-1\times 0}{2-1}\right)$

즉 $(2a+2,\ 2b)$

이 점의 좌표가 $(10,\ 0)$이므로

$2a+2=10,\ 2b=0$

$a=4,\ b=0$

따라서 $a+b=4$

[다른 풀이]

$P(10,\ 0)$이라 하자.

점 P가 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점이므로 점 B는 선분 AP의 중점이다.

$A(-2,\ 0)$, $B(a,\ b)$, $P(10,\ 0)$에서 선분 AP의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-2+10}{2},\ \dfrac{0+0}{2}\right)$

즉 $(4,\ 0)$

이 점의 좌표와 점 B의 좌표가 같으므로 $a=4,\ b=0$

따라서 $a+b=4$

4. 답 ③ 정답률 80%

[출제의도] 삼각형의 무게중심 구하기

꼭짓점 B, C의 좌표를 각각

$(a_1,\ b_1)$, $(a_2,\ b_2)$라 하자.

두 점 M, N은 두 변 AB, AC의 중점이므로

$1+a_1=2x_1$, $1+a_2=2x_2$이고

$6+b_1=2y_1$, $6+b_2=2y_2$

그런데 $x_1+x_2=2,\ y_1+y_2=4$이므로

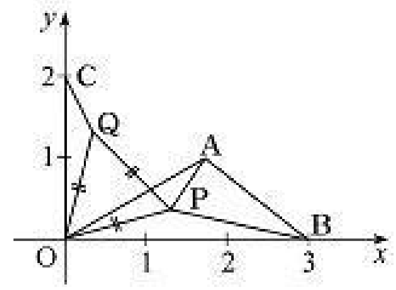
$a_1+a_2=2,\ b_1+b_2=-4$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{1+a_1+a_2}{3},\ \dfrac{6+b_1+b_2}{3}\right)=\left(1,\ \dfrac{2}{3}\right)$

5. 답 ③ 정답률 72%

[출제의도] 좌표평면에서 세 선분의 길이의 합의 최소값을 구하는 방법을 이해하고 있는지를 묻는 문제이다.



$\angle AOB=30°$이므로

$\angle AOC=90°-30°=60°$

그런데 $\angle AOP=\angle COQ$이므로

$\angle QOP=60°$

$\triangle AOP\equiv\triangle COQ$이므로 $\overline{AP}=\overline{CQ}$

$\triangle QOP$가 정삼각형이므로 $\overline{OP}=\overline{QP}$

$\therefore\ \overline{AP}+\overline{OP}+\overline{BP}=\overline{CQ}+\overline{QP}+\overline{BP}\geq\overline{CB}$

따라서 점 P에서 세 꼭지점에 이르는 거리의 합의 최소값은

$\overline{CB}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$이다.

6. 답 ⑤ 정답률 74%

[출제의도] 좌표평면에서 삼각형의 무게중심을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

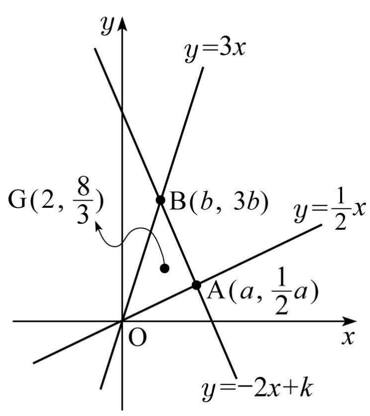
$A\left(a,\ \dfrac{1}{2}a\right)$, $B(b,\ 3b)$라 놓으면 삼각형 OAB의 무게중심 G의 좌표가 $G\left(2,\ \dfrac{8}{3}\right)$에서

$\dfrac{a+b}{3}=2,\ \dfrac{\frac{1}{2}a+3b}{3}=\dfrac{8}{3}$

두 식을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=2$

$\therefore A(4,\ 2),\ B(2,\ 6)$

점 A는 직선 $y=-2x+k$ 위의 점이므로 $k=10$



[다른풀이]

직선 $y=-2x+k$과 두 직선 $y=\dfrac{1}{2}x$, $y=3x$의 교점 A, B의 좌표를 구하면 각각

$A\left(\dfrac{2}{5}k,\ \dfrac{1}{5}k\right)$, $B\left(\dfrac{1}{5}k,\ \dfrac{3}{5}k\right)$

무게중심의 x 좌표가 2에서 $\dfrac{\frac{1}{5}k+\frac{2}{5}k}{3}=2$

$\therefore\ k=10$

7. 답 ⑤ **정답률 43%**

[출제의도] 선분의 외분점을 이용하여 수학내적문제 해결하기

$\overline{AC} = \sqrt{16+9} = 5$

$\overline{AB} = \sqrt{25+144} = 13$

선분 AP와 선분 DC가 평행하므로 평행선의 성질에 의하여

$\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{PB} : \overline{PC}$

그런데 $\overline{AC} = \overline{AD}$이므로 $\overline{AD} = 5$

$\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{PB} : \overline{PC} = 13 : 5$이므로

점 P는 $\overline{BC}$를 $13 : 5$로 외분하는 점

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{77}{8}, \frac{45}{8}\right)$

8. 답 116 **정답률 42%**

[출제의도] 평면좌표를 이용하여 수학내적문제 해결하기

정사각형 $A_3A_4B_4C_4$는 한 변의 길이가 18이므로 점 A_3의 좌표는 $(12, 0)$

정사각형 $OA_1B_1C_1$, $A_1A_2B_2C_2$, $A_2A_3B_3C_3$의 넓이의 비가 $1:4:9$이므로 정사각형의 한 변의 길이의 비는

$\overline{OA_1} : \overline{A_1A_2} : \overline{A_2A_3} = 1 : 2 : 3$

$\overline{OA_3} = 12$이므로

$\overline{OA_1} = 2$, $\overline{A_1A_2} = 4$, $\overline{A_2A_3} = 6$

그러므로 $B_1(2, 2)$, $B_3(12, 6)$

따라서 $\overline{B_1B_3}^2 = \left(\sqrt{100+16}\right)^2 = 116$

<전국연합학력평가 기출 18회>

1. 답 3 **정답률 86%**

[출제의도] 직선의 방정식 이해하기

두 점 $(-2, -3)$, $(2, 5)$를 지나는 직선의 방정식은 기울기가 $\frac{5-(-3)}{2-(-2)} = 2$이므로

$y-5 = 2(x-2)$

$y = 2x+1$

이 직선이 점 $(a, 7)$을 지나므로 $7 = 2a+1$

따라서 $a = 3$

2. 답 ④ **정답률 82%**

[출제의도] 두 점을 지나는 직선의 y절편 이해하기

주어진 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$x = 2$, $y = 2$

두 점 $(2, 2)$, $(4, 0)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{0-2}{4-2} = -1$이므로

$y = -(x-4)$

즉 $y = -x+4$

따라서 y절편은 4

(별해)

주어진 두 직선이 만나는 점을 지나는 직선의 방정식은 상수 k에 대하여

$x-2y+2+k(2x+y-6) = 0$ ……㉠

이 직선이 $(4, 0)$을 지나므로 ㉠에 대입하면

$k = -3$

구하는 직선의 방정식은 $x+y-4 = 0$

따라서 y절편은 4

3. 답 ② **정답률 62%**

[출제의도] 직선의 수직조건 이해하기

직선 $(3k+2)x-y+2 = 0$의 기울기가 $3k+2$

y절편이 2이므로 직선 $(3k+2)x-y+2 = 0$과 y축에서 수직으로 만나는 직선은

$y = -\frac{1}{3k+2}x+2$

이 직선이 $(1, 0)$을 지나므로 $-\frac{1}{3k+2}+2 = 0$

따라서 $k = -\frac{1}{2}$

4. 답 ④ **정답률 71%**

[출제의도] 직선의 기울기를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

점 B의 좌표를 $(\alpha, 0)$이라 할 때

점 A가 이차함수의 그래프의 꼭짓점이므로

$2 = \frac{0+\alpha}{2}$, 즉 $\alpha = 4$

삼각형 OAB의 넓이를 이등분하기 위해서는

직선 $y = mx$는 선분 AB의 중점을 지나야 한다.

선분 AB의 중점의 좌표는 $(3, -2)$이므로

$-2 = 3m$

따라서 $m = -\frac{2}{3}$

5. 답 15 **정답률 17%**

[출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 거리의 최솟값을 구한다.

직선 $y = 2x+k$와 평행하고 곡선 $y = -x^2+4$에 접하는 직선의 방정식을 $y = 2x+k'$이라 하자.

곡선 $y = -x^2+4$와 직선 $y = 2x+k'$의 방정식을 연립하면

$-x^2+4 = 2x+k'$

$x^2+2x+k'-4 = 0$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = 1-(k'-4) = 0$

$\therefore\ k' = 5$

따라서 직선 $y = 2x+k$와 평행하고 곡선 $y = -x^2+4$에 접하는 직선의 방정식은 $y = 2x+5$이다.

이 직선 위의 한 점 $(0, 5)$와 직선 $y = 2x+k$ 사이의 거리가 곡선 $y = -x^2+4$ 위의 점과 직선 $y = 2x+k$ 사이의 거리의 최솟값과 같으므로

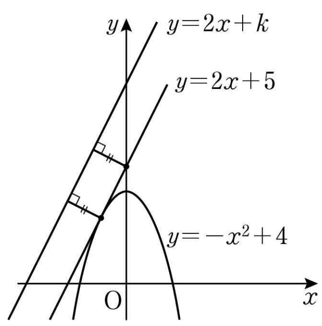
$\frac{|-5+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = 2\sqrt{5}$

$|k-5| = 10$

$\therefore\ k = 15$ 또는 $k = -5$

$k = -5$이면 곡선 $y = -x^2+4$와 직선 $y = 2x-5$가 만나므로 조건을 만족하지 않는다.

$\therefore\ k = 15$



[참고]

(1) 직선과 곡선이 만나는 경우

곡선 위의 점과 직선 사이의 거리의 최솟값은 0이다.

(2) 직선과 곡선이 만나지 않는 경우

직선 l에 평행하고 곡선 위의 한 점 P에서 접하는 직선을 m이라 하자. 곡선 위의 점과 직선 l 사이의 거리의 최솟값은 점 P와 직선 l 사이의 거리와 같다.

한편, 두 직선 l, m이 평행하면 직선 m 위의 임의의 점과 직선 l 사이의 거리는 항상 같다.

6. 답 ④ **정답률 65%**

[출제의도] 선분의 내분을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

조건 (가)에 의해 $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$

조건 (나)에 의해

삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 넓이의 비가

$1:9$이므로 두 삼각형의 닮음비는 $1:3$

점 E는 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점이므로 $E(4,\ 3)$

직선 BE의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x+1$

따라서 $k=\frac{1}{2}$

7. 답 ③ **정답률 58%**

[출제의도] 두 직선의 위치관계 추론하기

ㄱ. $a=0$ 일 때 $l : y=2, m : x=-2$

두 직선 l과 m은 서로 수직이다. (참)

ㄴ. a에 관하여 정리하면 $a(x+1)-y+2=0$ 이므로 직선 l은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 2)$를 지난다. (거짓)

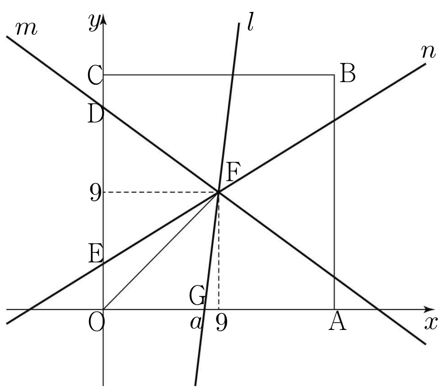
ㄷ. $a=0$일 때, ㄱ에서 두 직선은 서로 수직

$a\neq 0$일 때, 두 직선 l, m의 기울기는 각각 a, $-\frac{4}{a}$이다.

$a=-\frac{4}{a}$를 만족하는 실수 a의 값은 존재하지 않으므로 평행이 되기 위한 a의 값은 존재하지 않는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

8. 답 106 **정답률 9%**



직선 m, n이 y축과 만나는 점을 각각 D, E라 하고 점 $(9,\ 9)$를 F라 하자. 정사각형 OABC의 넓이가 324이므로 삼각형 DEF의 넓이는 54

$\therefore\ \overline{DE}=12$

직선 l이 x축과 만나는 점을 G라 하면

사각형 OGFE의 넓이 54는 삼각형 OGF와 삼각형 OEF의 넓이의 합과 같으므로

$\overline{OE}+\overline{OG}=12$이다.

$\overline{OG}=a$이므로 $\overline{OE}=12-a$, $\overline{OD}=24-a$

$\therefore\ D(0,\ 24-a)$, $E(0,\ 12-a)$

직선 m은 두 점 D, F를 지나므로

직선 m의 기울기는 $\frac{a-15}{9}$

직선 n은 두 점 E, F를 지나므로

직선 n의 기울기는 $\frac{a-3}{9}$

두 직선 m과 n의 기울기의 곱은

$\frac{a-15}{9}\times\frac{a-3}{9}$이므로

$\frac{1}{81}(a^2-18a+45)=\frac{1}{81}(a-9)^2-\frac{4}{9}$

$6\leq a\leq 10$이므로 $a=6$일 때 최댓값 $-\frac{1}{3}$

$a=9$일 때 최솟값 $-\frac{4}{9}$를 갖는다.

<전국연합학력평가 기출 19회>

1. 답 ④ **정답률 83%**

두 점 $(-1,\ 2)$, $(2,\ a)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{a-2}{2+1}(x+1)$, $y=\frac{a-2}{3}x+\frac{a+4}{3}$

y축과 만나는 점의 좌표가 $(0,\ 5)$이므로 $\frac{a+4}{3}=5$

따라서 $a=11$

2. 답 ② **정답률 86%**

[출제의도] 두 직선의 수직 조건을 이용하여 상수의 값을 구한다.

직선 $x+y+2=0$의 기울기는 -1이고,

직선 $(a+2)x-3y+1=0$의 기울기는 $\frac{a+2}{3}$이다.

두 직선 $x+y+2=0$, $(a+2)x-3y+1=0$이 서로 수직이므로 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

따라서 $(-1)\times\frac{a+2}{3}=-1$이므로

$a=1$

3. 답 ④ **정답률 79%**

[출제의도] 직선의 수직 조건 이해하기

두 직선의 방정식 $x-2y+2=0$,

$2x+y-6=0$을 연립하여 풀면

$x=2$, $y=2$이므로

두 직선의 교점의 좌표는 $(2,\ 2)$이고

직선 $x-3y+6=0$와 수직인 직선의 기울기는 -3이다.

기울기가 -3이고 점 $(2,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=-3(x-2)$

따라서 y절편은 8

(별해)

두 직선 $x-2y+2=0$, $2x+y-6=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x-2y+2+k(2x+y-6)=0$ (단, k는 실수)

즉, $(1+2k)x+(-2+k)y+2-6k=0$ …… ㉠

직선 ㉠과 직선 $x-3y+6=0$이 수직이므로

$(1+2k)-3(-2+k)=0$에서 $k=7$

구하는 직선의 방정식은 $3x+y-8=0$

따라서 y절편은 8

4. 답 ② **정답률 61%**

[출제의도] 직선의 방정식 이해하기

이차함수 $f(x)=x^2+px+p$

$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+p-\frac{p^2}{4}$이므로

꼭짓점 $A\left(-\frac{p}{2},\ p-\frac{p^2}{4}\right)$, 점 $B(0,\ p)$이다.

두 점 A, B를 지나는 직선 l의 기울기는

$$\frac{p-\left(p-\frac{p^2}{4}\right)}{0-\left(-\frac{p}{2}\right)}=\frac{p}{2}$$ 이고 y절편은 p이므로

직선 l의 방정식은 $y=\frac{p}{2}x+p$

따라서 직선 l의 x절편은 -2

5. 답 ⑤ 정답률 41%

[출제의도] 두 직선이 수직일 조건을 이용하여 추론하기

ㄱ. 직선 AP의 기울기는 $\frac{1-0}{0-1}=-1$이므로

직선 l의 기울기는 1이다. (참)

ㄴ. 직선 AP 의 기울기는 $-\frac{1}{t}$ 이므로

직선 l의 기울기는 t이다.

따라서 직선 l의 방정식은 $y=t(x-t)$ ⋯㉠

㉠에 점 $(3,2)$를 대입하여 정리하면

$t^2-3t+2=0$이므로

t의 값은 1 또는 2

따라서 직선 l의 개수는 2이다. (참)

ㄷ. 주어진 부등식에 ㉠을 대입하면

$t(x-t)\le ax^2$

즉 $ax^2-tx+t^2\ge 0$ ⋯⋯㉡

㉡이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a>0$이고

$ax^2-tx+t^2=0$의 판별식을 D라 할 때

$D=t^2-4at^2=t^2(1-4a)\le 0$

$t^2>0$이므로 $1-4a\le 0$ 즉 $a\ge\frac{1}{4}$

따라서 a의 최솟값은 $\frac{1}{4}$이다. (참)

6. 답 ② 정답률 58%

[출제의도] 점과 직선사이의 거리를 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

레이더의 위치를 원점으로 하고 동서를 x축, 남북을 y축으로 하면 본부는 $(-30,\ 20)$,

A지점은 $(-30,\ -40)$, B지점은 $(50,\ 0)$

물체가 지나간 경로의 직선의 방정식은

$x-2y-50=0$이므로

이 물체가 본부와 가장 가까워졌을 때의 거리는

$$\frac{|-30-40-50|}{\sqrt{5}}=24\sqrt{5}$$

7. 답 ④ 정답률 56%

[출제의도] 이등변삼각형의 성질과 두 직선의 위치 관계를 이용하여 문제를 해결한다.

선분 AB의 중점을 M이라 하면

$\mathrm{M}\left(\frac{0+18}{2},\ \frac{6+0}{2}\right)$

즉 $\mathrm{M}(9,\ 3)$

삼각형 ABC가 이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{CM}}$

따라서 두 직선 AB, CM의 기울기의 곱은 -1이다.

이때 직선 AB의 기울기가

$\frac{0-6}{18-0}=-\frac{1}{3}$

이므로 직선 CM의 기울기는 3이다.

직선 CM이 점 $\mathrm{M}(9,\ 3)$을 지나므로 그 방정식은

$y=3(x-9)+3$

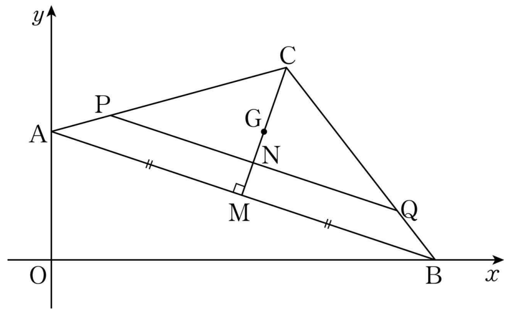
즉 $y=3x-24$

이때 점 $\mathrm{C}(a,\ b)$는 직선 $y=3x-24$ 위의 점이므로

$b=3a-24$ ⋯⋯㉠

두 선분 CM, PQ의 교점을 N이라 하자.

점 G는 삼각형 CPQ의 무게중심이므로



$\overline{\mathrm{CG}}=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{CN}}$

$\overline{\mathrm{MN}}:\overline{\mathrm{NC}}=\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PC}}=1:3$이므로

$\overline{\mathrm{CN}}=\frac{3}{4}\overline{\mathrm{CM}}$

따라서

$\overline{\mathrm{CG}}=\frac{2}{3}\times\overline{\mathrm{CN}}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\overline{\mathrm{CM}}$

$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CM}}$

$\overline{\mathrm{CM}}=2\overline{\mathrm{CG}}=2\sqrt{10}$이므로

$\sqrt{(a-9)^2+(b-3)^2}=2\sqrt{10}$ ⋯⋯㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$(a-9)^2+(3a-24-3)^2=40$

$(a-9)^2=4$

$a=7$ 또는 $a=11$

따라서 점 $(a,\ b)$는

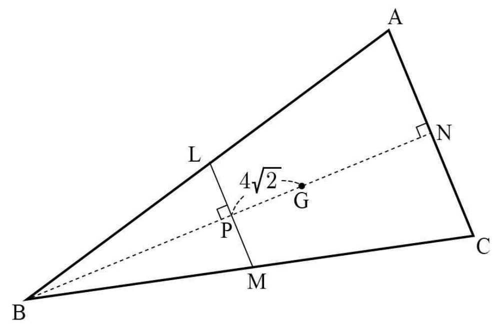
$(7,\ -3)$ 또는 $(11,\ 9)$

점 C는 제1사분면 위의 점이므로 $\mathrm{C}(11,\ 9)$

$a+b=11+9=20$

8. 답 ⑤ 정답률 38%

[출제의도] 선분의 내분점과 직선의 수직 조건을 활용한 수학 내적 문제 해결하기



직선 BN과 직선 LM의 교점을 P라 할 때 직선 BN이 선분 AC의 수직이등분선이므로 점 P는 선분 LM의 중점이다. 따라서 점 P의 좌표는

$\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{1-1}{2}\right)=(3,0)$

$\triangle$ABC의 무게중심 G에 대하여

$\overline{\mathrm{BG}}=2\overline{\mathrm{GN}}$ 이고 $\overline{\mathrm{NP}}=\overline{\mathrm{BP}}$이므로

$(\overline{\mathrm{NP}}+4\sqrt{2}):(\overline{\mathrm{NP}}-4\sqrt{2})=2:1$

$\overline{\mathrm{NP}}=12\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{NP}}^2=(a-3)^2+b^2=(12\sqrt{2})^2$ ⋯⋯㉠

한편 직선 LM과 직선 NP는 서로 수직이므로

$\frac{b}{a-3}=1,\ b=a-3$ ⋯⋯㉡

무게중심 G가 제 1사분면에 있으므로

㉠, ㉡에서 $a=15,\ b=12$

따라서 $ab=180$

<전국연합학력평가 기출 20회>

1. 답 2 　　**정답률 78%**

[출제의도] 원의 방정식 이해하기

주어진 원의 방정식을 변형하면

$(x-2)^2+(y-1)^2=2k-3$

원의 반지름의 길이가 1이므로

$2k-3=1^2$

따라서 $k=2$

2. 답 ④ 　　**정답률 87%**

[출제의도] 원과 직선의 위치 관계 이해하기

직선 $y=\sqrt{2}x+k$가 원 $x^2+y^2=4$에 접하므로

원의 중심 $(0,0)$에서 직선 $\sqrt{2}x-y+k=0$에

이르는 거리는 2이다.

$\dfrac{|k|}{\sqrt{2+1}}=2$

$\therefore\ k=2\sqrt{3}$ 또는 $k=-2\sqrt{3}$

따라서 $k>0$이므로 $k=2\sqrt{3}$

3. 답 ① 　　**정답률 57%**

[출제의도] 원의 성질 이해하기

선분 AB의 수직이등분선을 l이라 하면 직선 l은 선분 AB의 중점 $\mathrm{M}\left(2,\ \dfrac{a+1}{2}\right)$을 지나고, 주어진 원의 넓이를 이등분하므로 원의 중심 $(-2,\ 5)$를 지난다.

직선 l의 기울기는 $\dfrac{a-9}{8}$

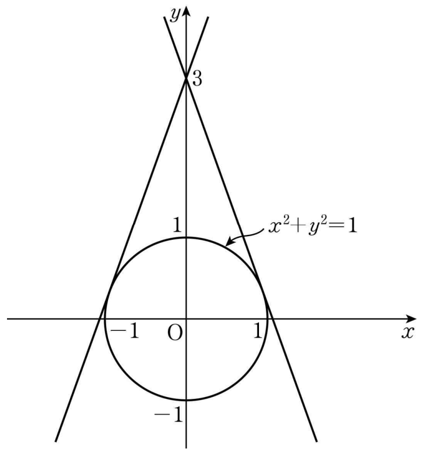
직선 AB의 기울기는 $\dfrac{a-1}{2}$

두 직선이 서로 수직이므로 $\dfrac{a-9}{8}\times\dfrac{a-1}{2}=-1$

따라서 $a=5$

4. 답 18 　　**정답률 45%**

[출제의도] 원의 접선의 방정식을 이해하여 점의 좌표를 구한다.



점 $(0,3)$을 지나고 원 $x^2+y^2=1$에 접하는 직선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y=mx+3$ 즉, $mx-y+3=0$

원의 중심 $(0,0)$에서 직선 $mx-y+3=0$까지의 거리는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$\dfrac{|m\times 0-0+3|}{\sqrt{m^2+1}}=1$

$3=\sqrt{m^2+1}$, $m^2=8$

$m=2\sqrt{2}$, $m=-2\sqrt{2}$

(ⅰ) $m=2\sqrt{2}$일 때

접선의 방정식이 $y=2\sqrt{2}x+3$이므로

x축과 만나는 점의 x좌표 k는

$k=-\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$에서 $k^2=\dfrac{9}{8}$

(ⅱ) $m=-2\sqrt{2}$일 때

접선의 방정식이 $y=-2\sqrt{2}x+3$이므로

x축과 만나는 점의 x좌표 k는

$k=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$에서 $k^2=\dfrac{9}{8}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $16k^2=16\times\dfrac{9}{8}=18$

5. 답 ⑤ 　　**정답률 59%**

[출제의도] 원과 직선의 위치관계를 이용하여 추론하기

> 직선 l의 방정식은 $y=\sqrt{3}x$이고
>
> 직선 m의 방정식은 $y=\boxed{-\sqrt{3}}x$이다.
>
> 원 위의 제1사분면에 있는 점을 $\mathrm{P}(a,b)$라 하면 $a>0$, $b>0$이고 $a^2+b^2=r^2$이다.
>
> 점 P에서 x축과 두 직선 l, m에 내린 수선의 발이 각각 A, B, C이므로
>
> $\overline{\mathrm{PA}}=b$
>
> $\overline{\mathrm{PB}}=\dfrac{|\sqrt{3}a-b|}{\boxed{2}}$
>
> $\overline{\mathrm{PC}}=\dfrac{|\sqrt{3}a+b|}{\boxed{2}}$
>
> 따라서 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2=\boxed{\dfrac{3}{2}r^2}$

$s=-\sqrt{3}$, $t=2$, $f(r)=\dfrac{3}{2}r^2$

따라서 $f(s\times t)=f(-2\sqrt{3})=18$

6. 답 25 　　**정답률 43%**

[출제의도] 원과 직선의 위치 관계 이해하기

$f(x)=ax+b$라 하자.

직선 $y=ax+b$와 원 $x^2+y^2=25$가 접하므로

방정식 $x^2+(ax+b)^2=25$는 중근을 갖는다.

이차방정식 $(a^2+1)x^2+2abx+b^2-25=0$의

판별식을 D라 하면

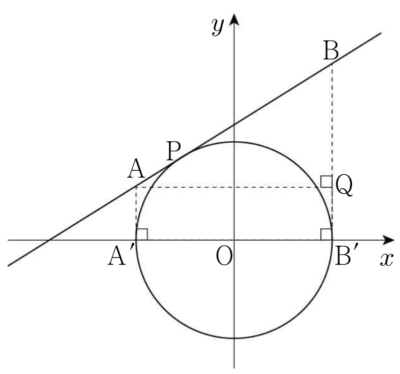
$\dfrac{D}{4}=a^2b^2-(a^2+1)(b^2-25)$

$\quad=25a^2-b^2+25=0$ …… ㉠

$f(-5)f(5)=(-5a+b)(5a+b)=b^2-25a^2$

따라서 ㉠에 의해 $f(-5)f(5)=25$

(별해)



두 점 $(-5,\ 0)$, $(5,\ 0)$을 각각 A′, B′이라 하고 두 직선 $x=-5$, $x=5$와 직선 $y=f(x)$의 교점을 각각 A, B라 하면 두 점 A, B의

좌표는 각각 $\mathrm{A}(-5,\ f(-5))$, $\mathrm{B}(5,\ f(5))$ 이고

$\overline{\mathrm{AA'}}=f(-5)$, $\overline{\mathrm{BB'}}=f(5)$

점 A 를 지나고 x 축에 평행한 직선이 선분 $\mathrm{BB'}$ 과 만나는 점을 Q 라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=f(-5)+f(5)$, $\overline{\mathrm{BQ}}=f(5)-f(-5)$,

$\overline{\mathrm{AQ}}=10$ 이므로 직각삼각형 AQB 에서

$\{f(-5)+f(5)\}^2=\{f(5)-f(-5)\}^2+10^2$

$\{f(-5)\}^2+2f(-5)f(5)+\{f(5)\}^2$

$=\{f(-5)\}^2-2f(-5)f(5)+\{f(5)\}^2+100$ 이므로

$4f(-5)f(5)=100$

따라서 $f(-5)f(5)=25$

7. 답 ⑤ **정답률 50%**

[출제의도] 원과 직선의 위치 관계와 관련된 문제를 해결한다.

조건 (가)에서 원 $C : x^2+y^2-4x-2ay+a^2-9=0$ 이 원점을 지나므로 $x=0,\ y=0$ 을 대입하면

$a^2-9=0$, $a^2=9$

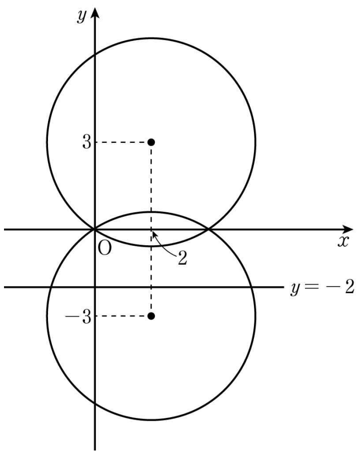
$a=-3$ 또는 $a=3$

$a=-3$ 일 때, 원 C 의 방정식은

$x^2+y^2-4x+6y=0$, $(x-2)^2+(y+3)^2=13$

$a=3$ 일 때, 원 C 의 방정식은

$x^2+y^2-4x-6y=0$, $(x-2)^2+(y-3)^2=13$



이때 $a=3$ 이면 원 C 는 직선 $y=-2$ 와 만나지 않으므로 조건 (나)에 의하여 $a=-3$ 이다.

$(x-2)^2+(y+3)^2=13,\ y=-2$ 를 연립하면

$(x-2)^2+(-2+3)^2=13$

$(x-2)^2=12$

$x=2\pm2\sqrt{3}$

따라서 원 C 와 직선 $y=-2$ 가 만나는 두 점의 좌표는 각각 $(2-2\sqrt{3},\ -2)$, $(2+2\sqrt{3},\ -2)$ 이므로 두 점 사이의 거리는

$(2+2\sqrt{3})-(2-2\sqrt{3})=4\sqrt{3}$

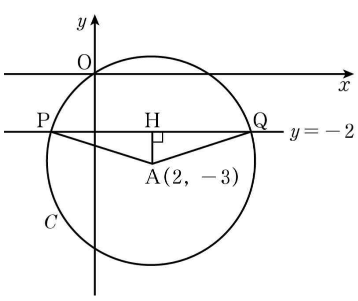
[다른 풀이]

$a=-3$ 일 때, 원 C 의 방정식은

$x^2+y^2-4x+6y=0$

$(x-2)^2+(y+3)^2=13$

따라서 원 C 의 중심은 $\mathrm{A}(2,\ -3)$ 이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{13}$ 이다.



원의 중심 $\mathrm{A}(2,-3)$ 에서 직선 $y=-2$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하고,

원 C 와 직선 $y=-2$ 가 만나는 두 점을 각각 P , Q 라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{13}$, $\overline{\mathrm{AH}}=1$ 이므로

$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{(\sqrt{13})^2-1^2}=2\sqrt{3}$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{PH}}=4\sqrt{3}$

8. 답 25 **정답률 6%**

[출제의도] 원과 직선의 위치관계를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

주어진 조건 (가)에 의해 $x_2=-2x_1+6$ 이므로 점 $\mathrm{Q}(-2x_1+6,\ y_2)$ 라 하고 이를 원 C_2 에 대입하면

$(-2x_1)^2+(y_2-4+6\sqrt{3})^2=16$ ⋯ ㉠

점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ 가 원 C_1 위의 점이므로 대입하면

${x_1}^2+(y_1-4)^2=4$ ⋯ ㉡

㉠ 과 ㉡ 을 연립하여 정리하면 $(y_1-4)^2=\left(\dfrac{y_2}{2}-2+3\sqrt{3}\right)^2$

조건 (나)에 의해 $y_1-4\le0$, $\dfrac{y_2}{2}-2+3\sqrt{3}\ge0$ 이므로

$-y_1+4=\dfrac{y_2}{2}-2+3\sqrt{3}$

이를 정리하면 $2y_1+y_2=12-6\sqrt{3}$

양변을 3 으로 나누면 $\dfrac{2y_1+y_2}{3}=4-2\sqrt{3}$

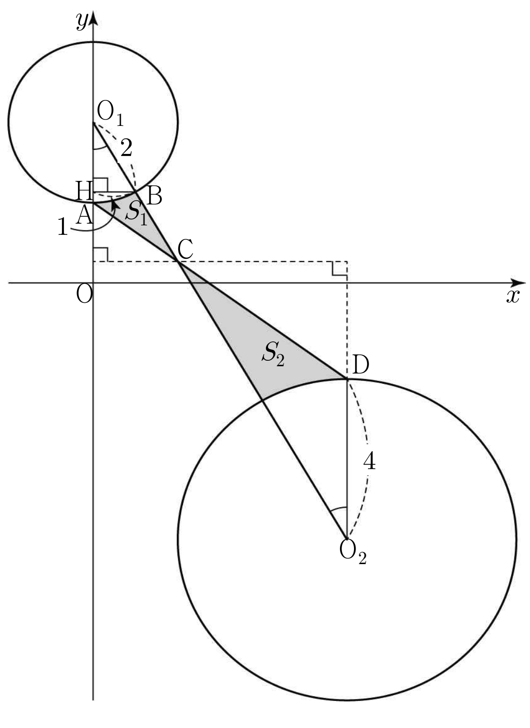
그러므로 점$(2,\ 4-2\sqrt{3})$은 선분 PQ 를 $1:2$ 로 내분하는 점이다.

$x_1=0$ 일 때, $\mathrm{P}(0,\ 2)$, $\mathrm{Q}(6,\ 8-6\sqrt{3})$

$x_1=1$ 일 때, $\mathrm{P}(1,\ 4-\sqrt{3})$, $\mathrm{Q}(4,\ 4-4\sqrt{3})$ 이고

이때 직선 PQ 의 방정식은 $y=-\sqrt{3}x+4$ 이므로 두 원 C_1, C_2 의 중심을 지난다.

$0\le x_1\le1$ 이므로 선분 PQ 가 지나간 부분은 그림의 어두운 부분과 같다.



원 C_1 의 중심을 $\mathrm{O_1}(0,\ 4)$, 원 C_2 의 중심을 $\mathrm{O_2}(6,\ 4-6\sqrt{3})$, $\mathrm{A}(0,\ 2)$, $\mathrm{B}(1,\ 4-\sqrt{3})$, $\mathrm{C}(2,\ 4-2\sqrt{3})$, $\mathrm{D}(6,\ 8-6\sqrt{3})$ 이라 하자. 점 B 에서 y 축에 내린 수선의 발을 H 라 하면 삼각형 $\mathrm{O_1HB}$ 는 직각삼각형이고 $\overline{\mathrm{BH}}=1$, $\overline{\mathrm{O_1H}}=\sqrt{3}$

그러므로 $\angle\mathrm{HO_1B}=30^\circ$

S_1 의 넓이는 삼각형 $\mathrm{O_1AC}$ 의 넓이에서 부채꼴 $\mathrm{O_1AB}$ 의 넓이를 뺀 값과 같다. 삼각형 $\mathrm{O_1AC}$ 의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times2\times2=2$ 이고 부채꼴 $\mathrm{O_1AB}$ 의 넓이는 $\pi\times2^2\times\dfrac{30^\circ}{360^\circ}=\dfrac{\pi}{3}$

즉, S_1 의 넓이는 $2-\frac{\pi}{3}$

삼각형 $\mathrm{O_1AC}$ 와 삼각형 $\mathrm{O_2DC}$ 는 닮음이다.

닮음비가 $1:2$ 이므로 S_1 과 S_2 의 넓이의 비는 $1:4$

그러므로 S_2 의 넓이는 $8-\frac{4}{3}\pi$

선분 PQ 가 그리는 도형의 넓이는 $10-\frac{5}{3}\pi$

따라서 $a=10$, $b=\frac{5}{3}$ 이므로 $a+9b=25$

<전국연합학력평가 기출 21회>

1. 답 18 정답률 61%

직선 $y=x+2$와 평행하고

y절편이 k인 직선의 방정식은 $y=x+k$

직선 $y=x+k$가 원 $x^2+y^2=9$에 접하므로

원의 방정식 $x^2+y^2=9$에 $y=x+k$를 대입하면

$x^2+(x+k)^2=9$

$2x^2+2kx+k^2-9=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-2k^2+18=0$

따라서 $k^2=18$

2. 답 ② 정답률 69%

[출제의도] 원의 방정식 이해하기

선분 AB를 외분하는 점 C의 좌표를 (x, y)라고 하면

$x=\frac{3\times2-2\times1}{3-2}=4$

$y=\frac{3\times1-2\times3}{3-2}=-3$

즉 $\mathrm{C}(4, -3)$

원의 중심은 선분 BC의 중점이므로

$a=\frac{2+4}{2}=3$

$b=\frac{1+(-3)}{2}=-1$

즉 원의 중심의 좌표는 $(3, -1)$

따라서 $a+b=3+(-1)=2$

3. 답 ⑤ 정답률 67%

[출제의도] 세 점을 지나는 원의 방정식 이해하기

원의 방정식 $x^2+y^2+ax+by+c=0$에 주어진 세 점의 좌표를 대입하면

$$\begin{cases} 4-2a+c=0 \\ 16+4a+c=0 \\ 5+a+2b+c=0 \end{cases}$$

위 식을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=\frac{5}{2}$, $c=-8$

$x^2+y^2-2x+\frac{5}{2}y-8=0$

$(x-1)^2+\left(y+\frac{5}{4}\right)^2=\left(\frac{13}{4}\right)^2$

따라서 $p=1$, $q=-\frac{5}{4}$이므로 $p+q=-\frac{1}{4}$

4. 답 ① 정답률 45%

[출제의도] 피타고라스정리와 원과 직선 사이의 관계를 이용하여 문제를 해결한다.

원 $x^2+y^2-2x-4y+k=0$ 의 방정식을 변형하면

$(x-1)^2+(y-2)^2=5-k$

원의 중심을 C, 반지름을 r라 하면

$\mathrm{C}(1, 2)$ 이고, $r^2=5-k$ 이다.

그림과 같이 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=4$ 이므로

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{BH}}=2$

점 $\mathrm{C}(1, 2)$ 와 직선 $2x-y+5=0$ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{|2\times1-2+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$

$=\frac{5}{\sqrt{5}}$

$=\sqrt{5}$

직각삼각형 CAH 에서

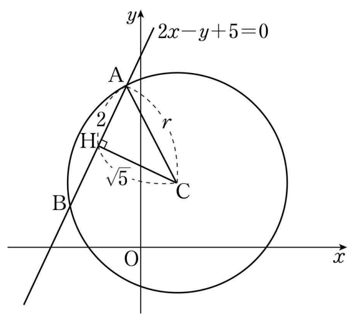
$r^2=(\sqrt{5})^2+2^2$

$=5+4$

$=9$

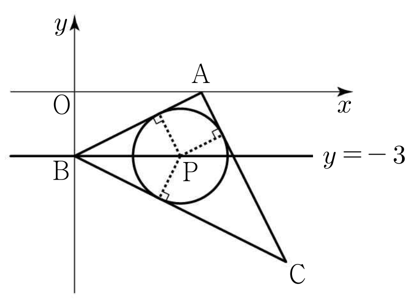
$r^2=5-k$ 이므로 $9=5-k$

$k=-4$



5. 답 ④ 정답률 52%

[출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제 해결하기



직선 AB를 l이라 하면 $l: y=\frac{1}{2}x-3$

직선 BC를 m이라 하면 $m: y=-\frac{1}{2}x-3$

직선 CA를 n이라 하면 $n: y=-2x+12$

삼각형 ABC에 내접하는 원의 중심 P의 좌표를

$\mathrm{P}(a, b)$라 하자. (단, $0<a<10$)

점 P와 직선 l 사이의 거리와

점 P와 직선 m 사이의 거리가 같으므로

$\frac{|a-2b-6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|a+2b+6|}{\sqrt{1^2+2^2}}$

$|a-2b-6|=|a+2b+6|$

$a=0$ 또는 $b=-3$

$0<a<10$ 이므로 $b=-3$ $\cdots$ ㉠

또한 점 P와 직선 m 사이의 거리와

점 P와 직선 n 사이의 거리가 같으므로

$\frac{|a+2b+6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|2a+b-12|}{\sqrt{2^2+1^2}}$

㉠을 대입하면 $|a| = |2a-15|$

$a=15$ 또는 $a=5$

$0<a<10$ 이므로 $a=5$

그러므로 $\mathrm{P}(5,\ -3)$

따라서 선분 OP 의 길이는

$\sqrt{5^2+(-3)^2}=\sqrt{34}$

6. 답 22 **정답률 27%**

[출제의도] 원과 직선 사이의 거리를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

원점에서의 거리가 최대인 직선 l은 원점과 점 $(3,4)$를 연결한 직선과 수직으로 만나야 한다.

점 $(3,4)$를 지나는 직선의 방정식을

$y=a(x-3)+4$ 라 할 때

원점과 점 $(3,4)$를 연결한 직선의 기울기는 $\frac{4}{3}$

이므로 $a=-\frac{3}{4}$

따라서 직선 l의 방정식을 정리하면

$3x+4y-25=0$

원의 중심 $(7,5)$와 직선 l 사이의 거리는

$\frac{|21+20-25|}{\sqrt{9+16}}=\frac{16}{5}$

이고 원의 반지름의 길이가 1이므로

원 위의 점 P와 직선 l 사이의 거리의 최솟값은

$m=\frac{16}{5}-1=\frac{11}{5}$

따라서 $10m=22$

7. 답 80 **정답률 9%**

[출제의도] 역함수의 그래프의 성질을 이용하여 사각형의 넓이를 구한다.

원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

원의 중심으로부터 두 직선까지의 거리가 같으므로

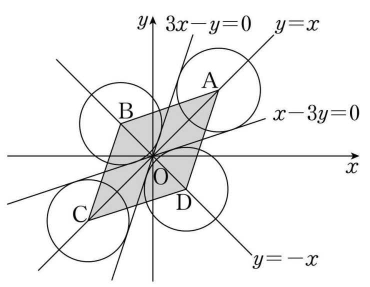
$\frac{|a-3b|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|3a-b|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}$

$a-3b=\pm(3a-b)$

$a-3b=3a-b$ 에서 $b=-a$

$a-3b=-(3a-b)$에서 $b=a$

따라서 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$ 위에 있다.



(ⅰ) 원의 중심이 직선 $y=x$ 위에 있는 경우

원의 중심인 점 $(a,\ a)$와 직선 $3x-y=0$ 사이의 거리는 4이므로

$4=\frac{|3a-a|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|2a|}{\sqrt{10}}$

$|2a|=4\sqrt{10}$

$a=\pm 2\sqrt{10}$

따라서 점 A와 점 C의 좌표는

$\mathrm{A}(2\sqrt{10},\ 2\sqrt{10}),\ \mathrm{C}(-2\sqrt{10},\ -2\sqrt{10})$

(ⅱ) 원의 중심이 직선 $y=-x$ 위에 있는 경우

원의 중심인 점 $(a,\ -a)$와 직선 $3x-y=0$ 사이의 거리는 4이므로

$4=\frac{|3a-(-a)|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|4a|}{\sqrt{10}}$

$|4a|=4\sqrt{10}$

$a=\pm\sqrt{10}$

따라서 점 B와 점 D의 좌표는

$\mathrm{B}(-\sqrt{10},\ \sqrt{10}),\ \mathrm{D}(\sqrt{10},\ -\sqrt{10})$

네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 사각형은 두 선분 AC, BD를 대각선으로 하는 마름모이다.

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(-2\sqrt{10}-2\sqrt{10})^2+(-2\sqrt{10}-2\sqrt{10})^2}=8\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{\{\sqrt{10}-(-\sqrt{10})\}^2+(-\sqrt{10}-\sqrt{10})^2}=4\sqrt{5}$

사각형 ABCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 8\sqrt{5}\times 4\sqrt{5}=80$

8. 답 180 **정답률 15%**

[출제의도] 선분을 내분하는 점의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$\overline{\mathrm{AO}}=2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{BO}}=3\sqrt{5}$ 이므로

각의 이등분선의 성질에 의해

$\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AO}}:\overline{\mathrm{BO}}=2:3$

$3\overline{\mathrm{AC}}=2\overline{\mathrm{BC}}$

$3\sqrt{(a+2)^2+(b-4)^2}=2\sqrt{(a-3)^2+(b+6)^2}$

$5a^2+60a+5b^2-120b=0$

$(a+6)^2+(b-12)^2=180$

즉 점 $\mathrm{C}(a,b)$는 원 $(x+6)^2+(y-12)^2=180$

위의 점이다. (단, 점 $\mathrm{C}(a,b)$는 직선 AB 위에 있지 않다.)

직선 AB는 $y=-2x$ 이므로

원의 중심 $(-6,12)$가 직선 AB 위에 있다.

따라서 점 C와 직선 AB 사이의 거리의 최댓값은 원 $(x+6)^2+(y-12)^2=180$ 의

반지름의 길이와 같으므로 $m^2=180$

<전국연합학력평가 기출 22회>

1. 답 ② **정답률 84%**

[출제의도] 도형의 평행이동 이해하기

직선 $y=kx+1$을 x축의 방향으로 2만큼,

y축의 방향으로 -3만큼 평행이동시킨

직선의 방정식은

$y+3=k(x-2)+1$

$y=kx-2k-2$

이 직선이 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$의

중심 $(3,\ 2)$를 지나므로

$2=3k-2k-2$

따라서 $k=4$

2. 답 5 **정답률 81%**

직선 $y=3x-5$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $2a$만큼 평행이동한 직선은

$y-2a=3(x-a)-5$이고

$y=3x-a-5$가 $y=3x-10$과 일치하므로

$-a-5=-10$

따라서 $a=5$

3. 답 ② **정답률 81%**

[출제의도] 도형의 평행이동 이해하기

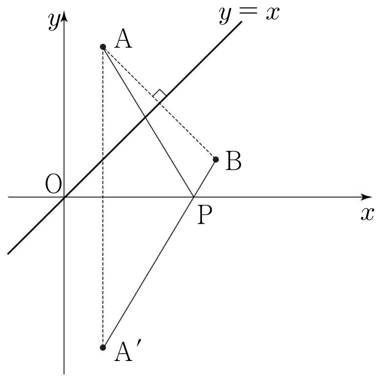
원 $x^2+y^2+2x-4y-3=0$ 은

$(x+1)^2+(y-2)^2=8$ 로 나타낼 수 있고 이를 x축의 방향으로 a만큼 y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 원의 중심은 $(-1+a,\ 2+b)$이고 반지름의 길이는 변함이 없다. 평행이동한 도형이 원

$(x-3)^2+(y+4)^2=c$ 이므로 $-1+a=3$, $2+b=-4$, $c=8$ 이다.
따라서 $a=4$, $b=-6$, $c=8$ 이므로
$a+b+c=6$

4. 답 10 **정답률 55%**

[출제의도] 대칭이동을 활용하여 문제해결하기



점 A의 좌표를 (a, b)라 하면 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점 B의 좌표는 (b, a)이고,
점 A를 x축에 대하여 대칭이동시킨 점을 A′이라 하면 $\mathrm{A}'(a, -b)$이다. $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PB}}$이고
x축 위의 점 P가 선분 A′B 위에 있을 때
최솟값 $\overline{\mathrm{A'B}}=10\sqrt{2}$를 갖는다.
$\therefore\ \overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{(a-b)^2+(a+b)^2}=\sqrt{2(a^2+b^2)}=10\sqrt{2}$
따라서 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{a^2+b^2}=10$

5. 답 ① **정답률 74%**

[출제의도] 도형의 대칭이동을 활용한 수학 내적 문제 해결하기

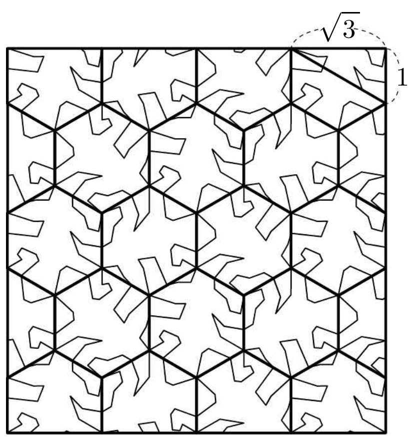
직선 $x-2y=9$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선 $y-2x=9$가 원 $(x-3)^2+(y+5)^2=k$에 접하므로

$$\frac{|-2\times3+(-5)-9|}{\sqrt{(-2)^2+1^2}}=\sqrt{k}$$

따라서 $k=80$

6. 답 ④ **정답률 51%**

[출제의도] 도형의 대칭이동을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



정육각형은 6개의 정삼각형으로 이루어져 있고 [그림 1]에 있는 직사각형의 가로의 길이가 $4\sqrt{3}$ 이므로 정육각형의 한 변의 길이는 1이고 도마뱀 모양 한 개의 넓이는 한 변의 길이가 1인 정육각형의 넓이와 같다.

따라서 도마뱀 모양 한 개의 넓이는 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

7. 답 ③ **정답률 66%**

[출제의도] 원의 평행이동의 성질을 이용하여 명제의 참, 거짓을 추측하여 판단한다.

ㄱ. 원 $x^2+(y-1)^2=9$를 평행이동하여도 원의 반지름의 길이는 변하지 않으므로 원 C의 반지름의 길이는 3이다. (참)
ㄴ. 원 $x^2+(y-1)^2=9$의 중심의 좌표가 $(0,\ 1)$이므로 원 C의 중심의 좌표는 $(m,\ n+1)$이다.
원 C가 x축과 접하므로 $|n+1|=3$
$n=-4$ 또는 $n=2$
따라서 n의 값은 2개이다. (거짓)
ㄷ. $m\neq0$일 때, 직선 $y=\dfrac{n+1}{m}x$가 원 C의 중심 $(m,\ n+1)$을 지나므로 원 C의 넓이를 이등분한다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

8. 답 ④ **정답률 35%**

[출제의도] 점의 대칭이동과 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 점의 좌표를 구한다.

점 B가 곡선 $y=\dfrac{2}{x}$ 위의 점이므로

$\beta=\dfrac{2}{\alpha}$, 즉 $\alpha\beta=2$ …… ㉠

$\alpha>\sqrt{2}$ 이므로 $0<\beta<\sqrt{2}$, 즉 $0<\beta<\alpha$
두 점 B, C가 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로 $\mathrm{C}(\beta,\ \alpha)$
$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{2}(\alpha-\beta)\ (\because \alpha>\beta)$
직선 BC와 직선 $y=x$가 서로 수직이므로 직선 BC의 기울기는 -1이다.
또한 이 직선이 점 B를 지나므로 직선 BC의 방정식은
$y-\beta=-(x-\alpha)$, 즉 $x+y-(\alpha+\beta)=0$
점 A와 직선 BC 사이의 거리를 h라 하면

$$h=\frac{|-2+2-(\alpha+\beta)|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha+\beta)\ \ (\because \alpha>0,\ \beta>0)$$

삼각형 ABC의 넓이가 $2\sqrt{3}$ 이므로

$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times h$

$=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}(\alpha-\beta)\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\alpha+\beta)$

$=\dfrac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2)=2\sqrt{3}$

$\alpha^2-\beta^2=4\sqrt{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $(\alpha^2+\beta^2)^2=(\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2=(4\sqrt{3})^2+4\times2^2=64$
$\alpha^2+\beta^2>0$이므로 $\alpha^2+\beta^2=8$

<전국연합학력평가 기출 23회>

1. 답 ③ **정답률 88%**

[출제의도] 평행이동한 점의 좌표 계산하기

점 $(2, 3)$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 점 $(1, 5)$이므로 $a=1$, $b=5$
따라서 $a+b=6$

2. 답 ① **정답률 84%**

[출제의도] 점의 대칭이동 이해하기

$\mathrm{A}(2, 3)$, $\mathrm{B}(-2, -3)$이므로
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-2-2)^2+(-3-3)^2}=2\sqrt{13}$

3. 답 ③ **정답률 76%**

[출제의도] 점의 평행이동을 활용한 수학 내적 문제 해결하기

점 $\mathrm{A}(-2, 1)$을 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 점은
$\mathrm{B}(-2+m, 1)$
점 $\mathrm{B}(-2+m, 1)$을 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점은
$\mathrm{C}(-2+m, 1+n)$
세 점 A, B, C를 지나는 원은 중심의 좌표가 $(3, 2)$이고 반지름의 길이가
$\sqrt{\{3-(-2)\}^2+(2-1)^2}=\sqrt{26}$ 이므로
$(x-3)^2+(y-2)^2=26$

점 B는 원 위의 점이므로 $(-2+m-3)^2+(1-2)^2=26$

$m=10$ $(m>0)$

점 C는 원 위의 점이므로 $(-2+m-3)^2+(1+n-2)^2=26$

$n=2$ $(n>0)$

따라서 $mn=20$

(다른 풀이) $\triangle ABC$는 각 B가 직각이므로 변 AC가 원의 지름이고, 변 AC의 중점이 원의 중심이다.

$\left(\dfrac{-2+(-2)+m}{2},\ \dfrac{1+1+n}{2}\right)=(3,2)$

$m=10,\ n=2$

따라서 $mn=20$

4. 답 ① **정답률 59%**

[출제의도] 도형의 이동을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

직선 $y=-\dfrac{1}{2}x-3$을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 직선은 $y=-\dfrac{1}{2}(x-a)-3$이고 이를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선 l은 $x=-\dfrac{1}{2}(y-a)-3$, 즉 $2x+y-a+6=0$

직선 l이 원에 접하므로 원의 중심 $(-1,\ 3)$에서 직선 l까지의 거리

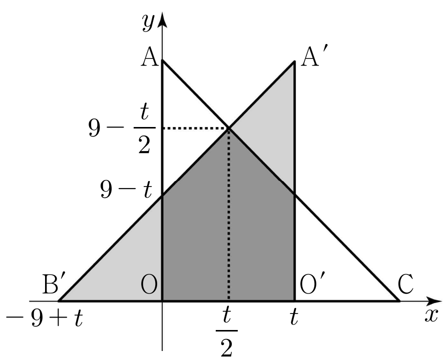
$d=\dfrac{|-2+3-a+6|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

따라서 $a=2,\ 12$이므로 모든 a값의 합은 14

5. 답 ③ **정답률 49%**

[출제의도] 점의 평행이동을 활용하여 문제 해결하기

(ⅰ) $0<t<9$일 때,

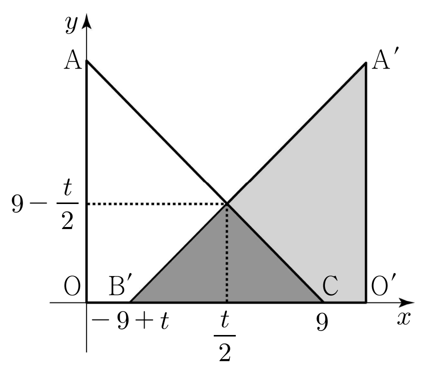


$S(t)=2\times\dfrac{1}{2}\times\left(9-t+9-\dfrac{t}{2}\right)\times\dfrac{t}{2}$

$=\dfrac{3}{4}t(12-t)=-\dfrac{3}{4}(t-6)^2+27$

따라서 $t=6$일 때, $S(t)$의 최댓값은 27

(ⅱ) $9\le t<18$일 때,



$S(t)=\dfrac{1}{2}\times(18-t)\times\left(9-\dfrac{t}{2}\right)=\dfrac{1}{4}(t-18)^2$

따라서 $t=9$일 때, $S(t)$의 최댓값은 $\dfrac{81}{4}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $S(t)$의 최댓값은 27

6. 답 23 **정답률 47%**

[출제의도] 대칭이동을 이용하여 추론하기

주어진 규칙에 따라 점 P_2, P_3, P_4, $\cdots$을 구하면

$P_1(3,\ 2)\to P_2(2,\ 3)\to P_3(2,\ -3)\to P_4(-2,\ -3)\to$

$P_5(-3,\ -2)\to P_6(-3,\ 2)\to P_7(3,\ 2)\to P_8(2,\ 3)\to P_9(2,\ -3)$

$\to\cdots$

과 같으므로 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표와 점 P_{n+6}의 좌표가 같다.

$50=6\times8+2$이므로 점 P_{50}의 좌표는 점 P_2의 좌표와 같다. 점 P_{50}의 좌표는 $(2,\ 3)$이다.

따라서 $10x_{50}+y_{50}=23$

7. 답 16 **정답률 13%**

[출제의도] 평행이동을 이용하여 색칠된 부분의 넓이를 구한다.

점 A를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점이 C이므로 직선 AC의 기울기는 $-\dfrac{3}{4}$이다.

즉, 두 직선 AB, AC가 서로 수직이므로 사각형 ABDC는 직사각형이다.

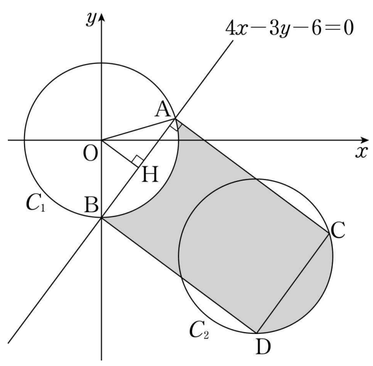
$\overline{AC}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$

또, 원점에서 직선 $4x-3y-6=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH}=\dfrac{|-6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{6}{5}$

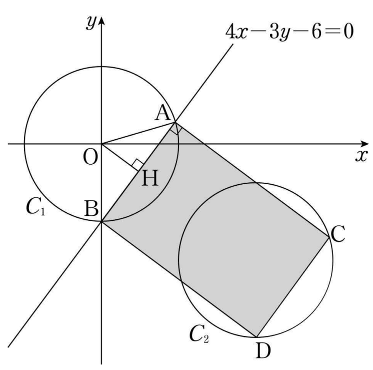
$\overline{AH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OH}^2}=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{6}{5}\right)^2}=\dfrac{8}{5}$

$\overline{AB}=2\overline{AH}=\dfrac{16}{5}$



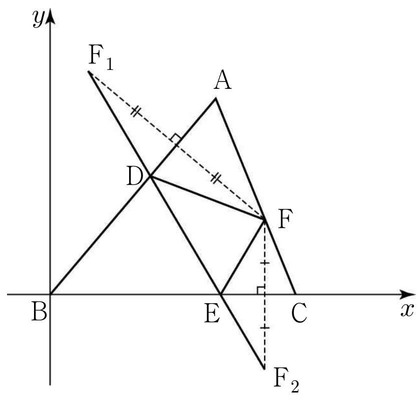
선분 AC, 선분 BD, 호 AB 및 호 CD로 둘러싸인 색칠된 부분의 넓이는 직사각형 ABDC의 넓이와 같으므로

$\overline{AB}\times\overline{AC}=\dfrac{16}{5}\times5=16$



8. 답 17 **정답률 10%**

[출제의도] 두 점 사이의 거리의 최솟값을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



$B(0,0)$, $C(4,0)$이 되도록

좌표평면 위에 삼각형 ABC를 나타내고

제1사분면 위의 점 A의 좌표를 $(\alpha,\ \beta)$라 할 때

$\overline{AB}^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 18$

$\overline{AC}^2 = (\alpha - 4)^2 + \beta^2 = 10$

이므로 $A(3,3)$

직선 AC의 방정식은 $y = -3x + 12$

점 F의 좌표를 (a, b)라 할 때 $b = -3a + 12$

직선 AB의 방정식은 $y = x$이므로

점 F를 직선 AB와 x축에 대하여 대칭이동한 점을 각각 F_1, F_2라 하면

$F_1(b, a)$, $F_2(a, -b)$이다.

이때 $\overline{DF} = \overline{DF_1}$, $\overline{EF} = \overline{EF_2}$이므로

삼각형 DEF의 둘레의 길이는

$\overline{DF_1} + \overline{DE} + \overline{EF_2}$의 값과 같다.

$\overline{DF_1} + \overline{DE} + \overline{EF_2} \geq \overline{F_1F_2}$

$\overline{F_1F_2} = \sqrt{(a-b)^2 + (-b-a)^2}$

$= \sqrt{2a^2 + 2b^2}$

$= \sqrt{2a^2 + 2(-3a+12)^2}$

$= \sqrt{20\left(a - \frac{18}{5}\right)^2 + \frac{144}{5}}$ $(3 < a < 4)$

삼각형 DEF의 둘레의 길이의 최솟값은 $\frac{12}{5}\sqrt{5}$

따라서 $p + q = 17$

<전국연합학력평가 기출 24회>

1. 답 ⑤ **정답률 88%**

[출제의도] 두 점 사이의 거리 계산하기

$\sqrt{(a-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}$

양변을 제곱하면

$a^2 - 4a - 5 = 0$

$(a+1)(a-5) = 0$

$a > 0$이므로 $a = 5$

2. 답 12 **정답률 61%**

점 $(0,\ 1)$과 직선 $\sqrt{3}x + y + 23 = 0$ 사이의 거리는

$\frac{|\sqrt{3} \times 0 + 1 + 23|}{\sqrt{3+1}} = \frac{24}{2} = 12$

3. 답 ⑤ **정답률 93%**

[출제의도] 원의 평행이동과 원의 성질을 이용하여 상수의 값을 구한다.

원 C의 방정식은

$\{(x-3)+1\}^2 + \{(y-a)+2\}^2 = 9$

$(x-2)^2 + (y-a+2)^2 = 9$

원 C의 넓이가 직선 $3x + 4y - 7 = 0$에 의하여 이등분되려면 원 C의 중심이 직선 $3x + 4y - 7 = 0$ 위에 있어야 한다.

원 C의 중심의 좌표가 $(2,\ a-2)$이므로

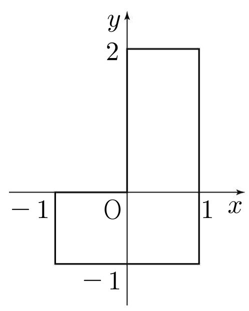
$3 \times 2 + 4(a-2) - 7 = 0$에서 $a = \frac{9}{4}$

4. 답 ② **정답률 61%**

[출제의도] 도형의 이동을 이용하여 추론하기

방정식 $f(x+1,\ -(y-2)) = 0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y) = 0$이 나타내는 도형을 x축에

대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 -1, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 도형이므로 그림과 같다.



(별해) 방정식 $f(x+1,\ -y+2) = 0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y) = 0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -1, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 도형이다.

5. 답 ④ **정답률 63%**

[출제의도] 원의 방정식을 활용한 원의 성질 추론하기

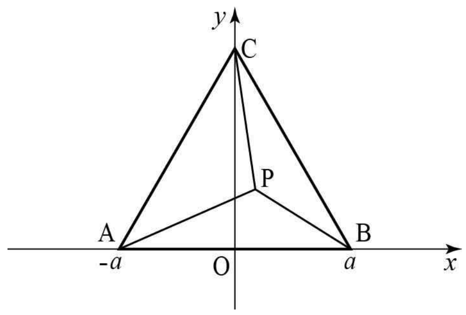
그림과 같이 변 AB를 x축 위에 놓고

변 AB의 중점을 원점 O라 하면

점 A의 좌표는 $(-a, 0)$,

점 B의 좌표는 $(a, 0)$,

점 C의 좌표는 $(0,\ \boxed{\sqrt{3}a})$이다.



정삼각형 ABC의 내부의 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = \overline{CP}^2$을 만족하므로

$\{(x+a)^2 + y^2\} + \{(x-a)^2 + y^2\} = x^2 + (y - \boxed{\sqrt{3}a})^2$이다.

위 식을 정리하면

$x^2 + (y + \sqrt{3}a)^2 = 4a^2$

점 P는 중심이 점 $(0,\ \boxed{-\sqrt{3}a})$이고

반지름의 길이가 $\boxed{2a}$인 원 위의 점이다.

점 $(0,\ \boxed{-\sqrt{3}a})$에서 두 점 A, B까지의 거리가 각각 반지름의 길이 $\boxed{2a}$로 같다.

따라서 점 P가 호 AB위의 점이므로

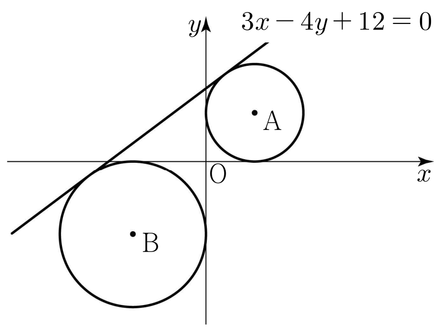
$\angle APB = 150°$이다.

$f(a) = \sqrt{3}a$, $g(a) = -\sqrt{3}a$, $h(a) = 2a$

따라서 $f(3) + g(3) + h(7) = 14$

6. 답 50 **정답률 42%**

[출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제 해결하기



원의 중심을 $(a,\ a)$라 하면

점 $(a,\ a)$와 직선 $3x-4y+12=0$ 사이의

거리는 반지름의 길이 $|a|$와 같으므로

$$\frac{|3a-4a+12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=|a|$$

$|-a+12|=5|a|$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2+a-6=0$

$a=-3$ 또는 $a=2$

제1사분면 위의 점을 A, 제3사분면 위의

점을 B라 하면 $\mathrm{A}(2,\ 2)$, $\mathrm{B}(-3,\ -3)$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}^2=\{2-(-3)\}^2+\{2-(-3)\}^2=50$

7. 답 ① **정답률 25%**

[출제의도] 삼각형의 무게중심의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

점 $\mathrm{D}(0,\ 0)$, 점 $\mathrm{B}(-1,\ 0)$, 점 $\mathrm{C}(1,\ 0)$,

점 $\mathrm{A}(a,\ b)$라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{7}$이므로

$(a+1)^2+b^2=(2\sqrt{3})^2$, $a^2+b^2=(\sqrt{7})^2$을 연립하여 풀면 점 A의 좌표는 $(2,\ \sqrt{3})$

$\overline{\mathrm{AC}}=2$이므로 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다. 이등변삼각형의 성질에 의해 선분 CE는 선분 AB의 수직이등분선이다. 따라서 $\overline{\mathrm{CE}}=1$이고 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이다.

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PD}}=2:1$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}=\frac{2\sqrt{7}}{3}$, $\overline{\mathrm{PD}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$ $\overline{\mathrm{CP}}:\overline{\mathrm{PE}}=2:1$이므로 $\overline{\mathrm{CP}}=\frac{2}{3}$, $\overline{\mathrm{PE}}=\frac{1}{3}$

삼각형 EPA에서 선분 PR이 각 APE의 이등분선이므로 각의 이등분선의 성질에 의해

$\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PE}}=\overline{\mathrm{AR}}:\overline{\mathrm{ER}}=2\sqrt{7}:1$

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면 삼각형 EPA의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{6}$이므로

$$S_1=S\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2\sqrt{7}+1}$$

같은 방법으로 삼각형 CPD에서

$\overline{\mathrm{PD}}:\overline{\mathrm{PC}}=\overline{\mathrm{DQ}}:\overline{\mathrm{CQ}}=\sqrt{7}:2$

삼각형 CPD의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{6}$이므로

$$S_2=S\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{\sqrt{7}+2}$$

$\frac{S_2}{S_1}=8-2\sqrt{7}$이므로 $a=8$, $b=-2$

따라서 $ab=-16$

(별해) 점 D가 선분 BC의 중점이므로 $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2\left(\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{CD}}^2\right)$이 성립한다. 따라서 $\overline{\mathrm{AC}}=2$이고 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다.

8. 답 ① **정답률 29%**

$3<a<7$일 때, 이차함수 $y=x^2-2ax-20$의 그래프와 직선 $y=2x-12a$가 만나지 않으므로 기울기가 2인 직선이 이차함수 $y=x^2-2ax-20$에 접할 때의 접점이 점 P일 때, 점 P와 직선 $y=2x-12a$ 사이의 거리가 최소가 된다.

$y=x^2-2ax-20$에 접하고 기울기가 2인 직선을 $y=2x+b$라 하면

$x^2-2ax-20=2x+b$

$x^2-2(a+1)x-20-b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=4(a+1)^2+4(20+b)=0$

$b=-(a+1)^2-20=-a^2-2a-21$이므로

접선의 방정식은 $y=2x-a^2-2a-21$

$f(a)$는 두 직선 $y=2x-12a$와 $y=2x-a^2-2a-21$ 사이의 거리와 같으므로

직선 $y=2x-12a$ 위의 점 $(6a,\ 0)$과

직선 $y=2x-a^2-2a-21$ 사이의 거리를 구하면

$$f(a)=\frac{|12a-a^2-2a-21|}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{|-a^2+10a-21|}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{|-(a-5)^2+4|}{\sqrt{5}}\quad(3<a<7)$$

따라서 $f(a)$의 최댓값은 $f(5)=\frac{4\sqrt{5}}{5}$