ETOOS 학력평가원

2015년 9월 2일 (수) 시행

9월 모의평가
수학 영역 해설

http://exam.etoos.com

수학 영역 (A형)

정 답

1. ①	2. ⑤	3. ②	4. ③	5. ③
6. ⑤	7. ④	8. ⑤	9. ①	10. ④
11. ②	12. ③	13. ⑤	14. ④	15. ④
16. ②	17. ①	18. ③	19. ①	20. ②
21. ④	22. 12	23. 8	24. 16	25. 4
26. 72	27. 110	28. 13	29. 35	30. 65

해 설

1. 지수함수와 로그함수
정답 ①

$$2\times 27^{\frac{1}{3}}=2\times(3^3)^{\frac{1}{3}}=2\times3=6$$

2. 행렬과 그래프
정답 ⑤

$$2A+B=2\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\4&a\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}5&2\\4&2+a\end{pmatrix}$$
$\therefore\ 2+a=7$

$\therefore\ a=5$

3. 수열의 극한
정답 ②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\times2^{n+1}+1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times2+\dfrac{1}{2^n}}{1}=6$$

4. 행렬과 그래프
정답 ③

주어진 그래프의 변의 개수가 5이므로 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합은 $5\times2=10$이다.

5. 함수의 극한과 연속
정답 ③

$$\lim_{x\to7}\frac{(x-7)(x+3)}{x-7}=\lim_{x\to7}(x+3)=7+3=10$$

6. 통계
정답 ⑤

$$\mathrm{E}(X)=(-4)\times\frac{1}{5}+0\times\frac{1}{10}+4\times\frac{1}{5}+8\times\frac{1}{2}=4$$
$\therefore\ \mathrm{E}(3X)=3\mathrm{E}(X)=12$

7. 수열
정답 ④

$a_n=n^2+2$이므로

$$b_n=a_{n+1}-a_n=(n+1)^2+2-(n^2+2)$$
$$=2n+1$$
$$\therefore\ \sum_{n=1}^{6}b_n=\sum_{n=1}^{6}(2n+1)=2\times\frac{6\times7}{2}+6=48$$

8. 함수의 극한과 연속
정답 ⑤

$\lim\limits_{x\to-0}f(x)=2,\ \lim\limits_{x\to+0}f(x)=3$이므로

$$\lim_{x\to-0}f(x)+\lim_{x\to+0}f(x)=2+3=5$$

9. 수열의 극한
정답 ①

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_4-a_2=2d=4$

$\therefore\ d=2$

따라서, $a_n=4+(n-1)\times2=2n+2$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{na_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n \to \infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

10. 다항함수의 적분법

정답 ④

$$f(x)=\int\left(\frac{1}{2}x^3+2x+1\right)dx-\int\left(\frac{1}{2}x^3+x\right)dx$$

$$=\frac{1}{8}x^4+x^2+x-\left(\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{2}x^2\right)+C$$

(단, C는 적분상수)

$$=\frac{1}{2}x^2+x+C$$

이때, $f(0)=1$이므로 $f(0)=C=1$

$\therefore\ f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1$

$\therefore\ f(4)=8+4+1=13$

11. 통계

정답 ②

1인 가구의 월 식료품 구입비를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(45,\ 8^2)$을 따르므로 $n=16$일 때의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(45,\ 2^2)$을 따른다.

$$\therefore \mathrm{P}(44 \le \overline{X} \le 47)=\mathrm{P}(-0.5 \le z \le 1)$$

$$=\mathrm{P}(0 \le z \le 0.5)+\mathrm{P}(0 \le z \le 1)$$

$$=0.1915+0.3413=0.5328$$

12. 지수함수와 로그함수

정답 ③

$\mathrm{A}(1,\ 0),\ \mathrm{B}(3,\ 0)$ ······································ ㉠

$\mathrm{P}(k,\ \log_2 k),\ \mathrm{Q}(k,\ \log_2(k-2)),\ \mathrm{R}(k,\ 0)$이고 점 Q가 선분 PR의 중점이므로

$$\frac{\log_2 k}{2}=\log_2(k-2),\ \log_2 k=2\log_2(k-2)$$

$$\log_2 k=\log(k-2)^2$$

$$\therefore\ k=(k-2)^2$$

즉, $k^2-5k+4=0$이므로 $(k-1)(k-4)=0$에서

$k=4(\because\ k>3)$

$\therefore \mathrm{P}(4,\ 2),\ \mathrm{Q}(4,\ 1),\ \mathrm{R}(4,\ 0)$ ······················ ㉡

㉠, ㉡에서 사각형 ABQP의 넓이는

$\triangle\mathrm{ARP}-\triangle\mathrm{BRQ}$

$$=\frac{1}{2}\times(4-1)\times2-\frac{1}{2}\times(4-3)\times1=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

13. 다항함수의 미분법

정답 ⑤

$g(x)=f(x)-kx$에서

$g'(x)=f'(x)-k=x^2-1-k$이고

함수 $g(x)$가 $x=-3$에서 극값을 가지므로

$g'(-3)=9-1-k=0$

$\therefore\ k=8$

14. 다항함수의 적분법

정답 ④

$f'(x)=x^2-1$에서

$$f(x)=\int(x^2-1)dx=\frac{1}{3}x^3-x+C$$

(단, C는 적분상수)

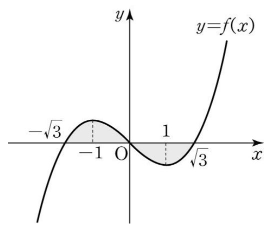
$f(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x=0$에서

$x^3-3x=0,\ x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$

$\therefore\ x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$



따라서, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=2\int_{-\sqrt{3}}^{0}\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-\sqrt{3}}^{0}$$

$$=-2\times\left(\frac{9}{12}-\frac{3}{2}\right)$$

$$=-2\times\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{2}$$

15. 확률 정답 ④

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A-B)-\mathrm{P}(B-A)$$
$$=\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A\cap B^C)-\mathrm{P}(B\cap A^C)$$
$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

16. 지수함수와 로그함수 정답 ②

열차 B가 지점 P를 통과할 때의 속력을 v라 하면
열차 A가 지점 P를 통과할 때의 속력은 $0.9v$이므로

$$L_{\mathrm{B}}=80+28\log\frac{v}{100}-14\log\frac{75}{25}$$
$$L_{\mathrm{A}}=80+28\log\frac{0.9v}{100}-14\log\frac{75}{25}$$

위의 두 식을 변끼리 빼면

$$L_{\mathrm{B}}-L_{\mathrm{A}}=28\log\frac{v}{100}-28\log\frac{0.9v}{100}$$
$$=28\log\frac{1}{0.9}=28(1-2\log 3)$$
$$=28-56\log 3$$

17. 수열 정답 ①

$S_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$라 하면

$$S_{n+1}=S_n+b_{n+1}=S_n+\frac{b_1+b_2+\cdots b_n}{n}$$
$$=S_n+\frac{S_n}{n}$$
$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\times S_n=\boxed{\frac{n+1}{n}}\times S_n$$
$$\therefore \frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{n+1}{n}$$
$$\therefore S_n=S_1\times\frac{S_2}{S_1}\times\frac{S_3}{S_2}\times\cdots\times\frac{S_n}{S_{n-1}}(n\geq 2)$$
$$=10\times\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{n}{n-1}\quad(\because S_1=10)$$
$$=\boxed{10n}$$

따라서, $f(n)=\frac{n+1}{n}$, $g(n)=10n$이므로

$$f(5)\times g(6)=\frac{6}{5}\times 60=72$$

18. 행렬과 그래프 정답 ③

ㄱ. (참) $AB-B^2=E$에서 $AB=B^2+E$이므로
$AB^2=ABB=(B^2+E)B=B^3+B=E$

ㄴ. (참) $AB-B^2=E$에서 $(A-B)B=E$이므로
$B^{-1}=A-B$
$\therefore (A-B)B=B(A-B)=E$
즉, $AB-B^2=BA-B^2$이므로
$AB=BA$

ㄷ. (거짓) $B^3+B=E$의 양변에 B^{-1}를 곱하면
$B^2+E=B^{-1}$
즉, $B^2=B^{-1}-E$이므로

$$A-B^2=A-(B^{-1}-E)=A-B^{-1}+E$$
$$=A-(A-B)+E\ (\because B^{-1}=A-B)$$
$$=B+E$$

19. 확률 정답 ①

조건 (나)에서 $a+b+c\leq 5$이므로 조건 (가)에서 $d=2$ 또는 $d=3$이다.

(ⅰ) $d=2$일 때,
$a+b+c=4$이므로 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{H}_4={}_{3+4-1}\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$이다.

(ⅱ) $d=3$일 때,
$a+b+c=1$이므로 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 서로 다른 3개에서 1개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{H}_1={}_{3+1-1}\mathrm{C}_1={}_3\mathrm{C}_1=3$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 $15+3=18$이다.

20. 수열의 극한 정답 ②

직선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x-1)$과 이차함수 $y=3x(x-1)$의 그래프의 교점의 x좌표를 구하면

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x-1)=3x(x-1)$에서

$(x-1)\left\{3x-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=0$이므로

$x=1$ 또는 $x=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n}=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1\right\}\right|$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$

$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{4}}$

$=2-\frac{4}{9}=\frac{14}{9}$

21. 다항함수의 미분법 정답 ④

$\mathrm{A}(t,\ t^4-4t^3+10t-30)$, $\mathrm{B}(t,\ 2t+2)$이므로

$f(t)=|t^4-4t^3+10t-30-2t-2|$

$=|t^4-4t^3+8t-32|$

$=|(t+2)(t-4)(t^2-2t+4)|$

$g(t)=t^4-4t^3+8t-32$라 하면

$g'(t)=4t^3-12t^2+8=4(t-1)(t^2-2t-2)$

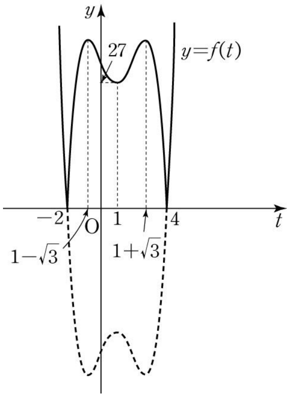
이므로 $g'(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=1\pm\sqrt{3}$

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

t	$\cdots$	$1-\sqrt{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$1+\sqrt{3}$	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

이때, $g(1)=1-4+8-32=-27$,

$g(-2)=g(4)=0$이므로 함수 $y=f(t)=|g(t)|$의 그래프는 그림과 같다.



한편,

$\lim_{h\to+0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to-0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\leq 0$

에서 $\lim_{h\to+0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$는 함수 $f(x)$의 $x=t$에서의 우미분계수이고, $\lim_{h\to-0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$는 함수 $f(x)$의 $x=t$에서의 좌미분계수이므로 $x=t$에서의 우미분계수와 좌미분계수의 부호가 다르거나 0인 t의 값을 구하면 된다.

따라서, $t=-2,\ 1-\sqrt{3},\ 1,\ 1+\sqrt{3},\ 4$이므로 그 합은 $(-2)+(1-\sqrt{3})+1+(1+\sqrt{3})+4=5$이다.

22. 수열 정답 12

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 $3a_5=a_7$에서

$\frac{a_7}{a_5}=r^2=3$

$\therefore\ a_3=a_1r^2=4\times3=12$

23. 다항함수의 미분법 정답 8

$f(x)=x^2-2x-12$에서 $f'(x)=2x-2$이므로

$f'(5)=2\times5-2=8$

24. 행렬과 그래프 정답 16

$\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

이 해가 연립일차방정식 $\begin{pmatrix}3&-1\\-4&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$의 해이므로 $\begin{pmatrix}3&-1\\-4&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$에서 $-12+a=4$, 즉 $a=16$이다.

25. 다항함수의 적분법 정답 4

$f(x)=\int_0^x(2at+1)dt$에서 $f'(x)=2ax+1$이므로

$f'(2)=4a+1=17$

$\therefore\ a=4$

26. 확률

정답 72

도서관 이용자 300명 중에서 30대가 차지하는 비율이 12 %이므로

$$\frac{60-a+b}{300}=\frac{12}{100}$$

$\therefore\ a-b=24$ ……… ㉠

도서관 이용자 300명 중에서 임의로 선택한 1명이 남성인 사건을 M, 여성인 사건을 W, 20대인 사건을 A, 30대인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(M)=\frac{2}{3},\ \mathrm{P}(W)=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P}(M\cap A)=\frac{a}{300},\ \mathrm{P}(W\cap B)=\frac{b}{300}$$

$\mathrm{P}(A|M)=\mathrm{P}(B|W)$이므로

$\dfrac{\mathrm{P}(M\cap A)}{\mathrm{P}(M)}=\dfrac{\mathrm{P}(W\cap B)}{\mathrm{P}(W)}$에서

$$\frac{\frac{a}{300}}{\frac{2}{3}}=\frac{\frac{b}{300}}{\frac{1}{3}},\ \frac{a}{200}=\frac{b}{100}$$

$\therefore\ a=2b$ ……… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$2b-b=24$

$\therefore\ b=24,\ a=48$

$\therefore\ a+b=72$

27. 수열의 극한

정답 110

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{an^2+4n}-bn)=\lim_{n\to\infty}\frac{(an^2+4n-b^2n^2)}{\sqrt{an^2+4n}+bn}$$

이고, 이 극한이 수렴하므로 $a=b^2$이어야 한다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(\sqrt{an^2+4n}-bn)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{b^2n^2+4n}+bn}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{b^2+\frac{4}{n}}+b}$$

$$=\frac{4}{|b|+b}=\frac{1}{5}$$

$\dfrac{4}{|b|+b}=\dfrac{1}{5}$에서 $|b|+b=20$

$|b|=20-b$의 양변을 제곱하면

$b^2=400-40b+b^2,\ 40b=400$

$\therefore\ b=10$

$\therefore\ a=b^2=100$

$\therefore\ a+b=110$

28. 함수의 극한과 연속

정답 13

조건 (가)에 의하여 $f(x)=x^3+6x+a$(a는 상수)로 놓을 수 있다. 조건 (나)에 의하여

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(x^3+6x+a)=a=-7$$

$\therefore\ f(x)=x^3+6x-7$

$\therefore\ f(2)=8+12-7=13$

29. 통계

정답 35

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(4,\ 3^2)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(X\le n)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{n-4}{3}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{4-n}{3}\right)$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{7}\mathrm{P}(X\le n)&=\mathrm{P}(X\le1)+\mathrm{P}(X\le2)+\mathrm{P}(X\le3)\\&\quad+\mathrm{P}(X\le4)+\mathrm{P}(X\le5)\\&\quad+\mathrm{P}(X\le6)+\mathrm{P}(X\le7)\\&=\mathrm{P}(Z\le-1)+\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{2}{3}\right)+\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{1}{3}\right)\\&\quad+\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}\left(Z\ge-\frac{1}{3}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge-\frac{2}{3}\right)\\&\quad+\mathrm{P}(Z\ge-1)\\&=\{\mathrm{P}(Z\le-1)+\mathrm{P}(Z\ge-1)\}\\&\quad+\left\{\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{2}{3}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge-\frac{2}{3}\right)\right\}\\&\quad+\left\{\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{1}{3}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge-\frac{1}{3}\right)\right\}+\mathrm{P}(Z\ge0)\\&=1+1+1+0.5=3.5\end{aligned}$$

$\therefore\ a=3.5$

$\therefore\ 10a=35$

30. 지수함수와 로그함수 　　정답 65

(ⅰ) $k=1,\ 2,\ 3,\ 4$, 즉 $x=2k=2,\ 4,\ 6,\ 8$일 때,

$f(2k)=0,\ g(2k)=\log 2k$이므로

$f(m)\le f(2k)=0$에서 $f(m)=0$ ……………… ㉠

$\therefore\ h(m)=m+5f(m)=m$

$g(h(m))\le g(2k)$에서 $g(m)\le \log 2k$ ………… ㉡

㉠, ㉡을 만족시키는 자연수 m은 $1,\ 2,\ \cdots,\ 2k$이므로

$p(2k)=2k$

$$\therefore \sum_{k=1}^{4}p(2k)=\sum_{k=1}^{4}2k=2\times\frac{4\times 5}{2}=20$$

(ⅱ) $k=5$, 즉 $x=2k=10$일 때,

$f(2k)=1,\ g(2k)=1$이므로

$f(m)\le f(2k)=1$에서 $f(m)=0$ 또는 $f(m)=1$

① $f(m)=0$일 때, $h(m)=m+5f(m)=m$이므로

$g(h(m))\le g(2k)$에서 $g(m)\le 0$

$\therefore\ g(m)=0$

$\therefore\ m=1$

② $f(m)=1$일 때, $h(m)=m+5f(m)=m+5$이므로

$g(h(m))\le g(2k)$에서 $g(m+5)\le 0$

$\therefore\ g(m+5)=0$

$\therefore\ m=95$

①, ②에 의하여 $p(10)=2$

(ⅲ) $k=6,\ 7,\ 8,\ 9$, 즉 $x=2k=12,\ 14,\ 16,\ 18$일 때,

$f(2k)=1,\ g(2k)=\log 2k-1$이므로

$f(m)\le f(2k)=1$에서 $f(m)=0$ 또는 $f(m)=1$

① $f(m)=0$일 때, $h(m)=m+5f(m)=m$이므로

$g(h(m))\le g(2k)$에서 $g(m)\le \log 2k-1$

$\therefore\ m=1$

② $f(m)=1$일 때, $h(m)=m+5f(m)=m+5$이므로

$g(h(m))\le g(2k)$에서 $g(m+5)\le \log 2k-1$

$k=6$일 때, $\log 2k-1=\log 1.2$이므로

$m=95,\ 96,\ \cdots,\ 99$

$k=7$일 때, $\log 2k-1=\log 1.4$이므로

$m=95,\ 96,\ \cdots,\ 99$

$k=8$일 때, $\log 2k-1=\log 1.6$이므로

$m=10,\ 11,\ 95,\ 96,\ \cdots,\ 99$

$k=9$일 때, $\log 2k-1=\log 1.8$이므로

$m=10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 95,\ 96,\ \cdots,\ 99$

①, ②에 의하여

$$\sum_{k=6}^{9}p(2k)=1\times 4+(5+5+7+9)=30$$

(ⅳ) $k=10$ 즉 $x=2k=20$일 때,

$f(2k)=1,\ g(2k)=\log 2$이므로

$f(m)\le f(2k)=1$에서 $f(m)=0$ 또는 $f(m)=1$

① $f(m)=0$일 때, $h(m)=m+5f(m)=m$이므로

$g(h(m))\le g(2k)$에서 $g(m)\le \log 2$

$\therefore\ m=1,\ 2$

② $f(m)=1$일 때, $h(m)=m+5f(m)=m+5$이므로 $g(h(m))\le g(2k)$에서 $g(m+5)\le \log 2$

$\therefore\ m=10,\ 11,\ \cdots,\ 15,\ 95,\ 96,\ \cdots,\ 99$

①, ②에 의하여

$p(20)=2+6+5=13$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에 의하여

$$\sum_{k=1}^{10}p(2k)=20+2+30+13=65$$

수학 영역 (B형)

정 답

1. ⑤	2. ①	3. ③	4. ④	5. ③
6. ⑤	7. ⑤	8. ②	9. ②	10. ④
11. ④	12. ②	13. ①	14. ④	15. ①
16. ①	17. ③	18. ②	19. ⑤	20. ③
21. ①	22. 6	23. 4	24. 2	25. 84
26. 162	27. 32	28. 80	29. 40	30. 15

해 설

1. 행렬과 그래프 정답 ⑤

$$2A+B=2\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\4&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&2\\4&4+a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&2\\4&7\end{pmatrix}$$

$2+a=7$

$\therefore\ a=5$

2. 함수의 극한과 연속 정답 ①

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x}$$

$$=1\times\frac{1}{1}=1$$

3. 수열 정답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 $3a_5=a_7$에서

$$\frac{a_7}{a_5}=r^2=3$$

$\therefore\ a_3=a_1r^2=4\times 3=12$

4. 공간도형과 공간좌표 정답 ④

점 $\mathrm{P}(2,\ 2,\ 3)$을 yz평면에 대하여 대칭이동 시킨 점 Q의 좌표는 $(-2,\ 2,\ 3)$이므로

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(-2-2)^2+(2-2)^2+(3-3)^2}=4$$

5. 미분법 정답 ③

$f(x)=(2e^x+1)^3$에서

$f'(x)=3(2e^x+1)^2\times 2e^x$

$f'(0)=3\times(2+1)^2\times 2=54$

6. 벡터 정답 ⑤

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(4-0,\ 2-0)=(4,\ 2)$

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(2-0,\ 0-2)=(2,\ -2)$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(4,\ 2)\cdot(2,\ -2)$

$=8-4=4$

7. 일차변환과 행렬 정답 ⑤

회전변환 g를 나타내는 행렬은

$$\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4}&-\sin\frac{\pi}{4}\\\sin\frac{\pi}{4}&\cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

이므로 합성변환 $f\circ g$를 나타내는 행렬은

$$f\circ g=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\2&2\end{pmatrix}$$

이때,

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}0\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

따라서, 점 P의 좌표는 $(0,\ 6\sqrt{2})$이므로 선분 OP의 길이는 $6\sqrt{2}$이다.

8. 지수함수와 로그함수 정답 ②

$\log_2(4+x)+\log_2(4-x)=3$에서

$(4+x)(4-x)=8$

$16-x^2=8$

$x^2-8=0$

$\therefore\ x=\pm 2\sqrt{2}$

로그의 진수 조건에서

$4+x>0,\ 4-x>0$

$\therefore\ -4<x<4$

따라서, 주어진 로그방정식을 만족시키는 x의 값은 $2\sqrt{2},\ -2\sqrt{2}$이고, 그 곱은 $2\sqrt{2}\times(-2\sqrt{2})=-8$이다.

9. 확률 정답 ②

$\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\dfrac{1}{3}$에서

$\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{3}$ ……………………………… ㉠

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\dfrac{1}{3}+\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{6}+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$ ($\because$ ㉠)

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{6}\mathrm{P}(B)$

따라서,

$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{6}+\mathrm{P}(B)-\dfrac{1}{6}\mathrm{P}(B)$

$\dfrac{2}{3}\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{4}$

10. 미분법 정답 ④

$y=\ln 5x$에서

$y'=\dfrac{5}{5x}=\dfrac{1}{x}$

점 $\left(\dfrac{1}{5},\ 0\right)$에서 접선의 기울기는 5이므로 곡선 $y=\ln 5x$ 위의 점 $\left(\dfrac{1}{5},\ 0\right)$에서의 접선의 방정식은

$y=5\left(x-\dfrac{1}{5}\right)+0$, 즉 $y=5x-1$이다.

따라서, 구하는 접선의 y절편은 -1이다.

11. 삼각함수 정답 ④

직선 $y=x-1$이 x축과 이루는 예각의 크기를 α라 하고, 직선 $y=ax+1$이 x축과 이루는 예각의 크기를 β라 하면 $\theta=\beta-\alpha$ ($\because\ a>0$)이고, $\tan\alpha=1$, $\tan\beta=a$이다.

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{a-1}{1+a}=\frac{1}{6}$$

$6a-6=1+a$에서

$5a=7$

$\therefore\ a=\dfrac{7}{5}$

12. 이차곡선 정답 ②

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $yy_1=2(x+x_1)$이다.

이 접선의 방정식이 $(-2,\ 0)$을 지나므로

$0=2(-2+x_1)$

$\therefore\ x_1=2$

$\therefore \mathrm{P}(2,\ \sqrt{8})$

원점 O와 점 P 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{2^2+(\sqrt{8})^2}=\sqrt{12}$

이고, 포물선의 정의에 의하여 초점 F의 좌표는 (1, 0)이므로

$\overline{\mathrm{FP}}=\sqrt{(1-2)^2+(0-\sqrt{8})^2}=3$

$\overline{\mathrm{OF}}=1$

$$\therefore\ \cos(\angle\mathrm{PFO})=\frac{\overline{\mathrm{OF}}^2+\overline{\mathrm{FP}}^2-\overline{\mathrm{OP}}^2}{2\overline{\mathrm{OF}}\times\overline{\mathrm{FP}}}=\frac{1+9-12}{2\times1\times3}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}$$

13. 통계 정답 ①

표본평균이 $\overline{x}$이면 표본의 크기가 n, 모표준편차가 10이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\left[\overline{x}-1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}},\ \overline{x}+1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}\right]=[38.08,\ 45.92]$$

이다.

$\overline{x}-1.96\times\dfrac{10}{\sqrt{n}}=\alpha$, $\overline{x}+1.96\times\dfrac{10}{\sqrt{n}}=\beta$라 하면

$\alpha+\beta=2\overline{x}=84$

$\therefore\ \overline{x}=42$

$\beta-\alpha=2\left(1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}\right)=7.84$

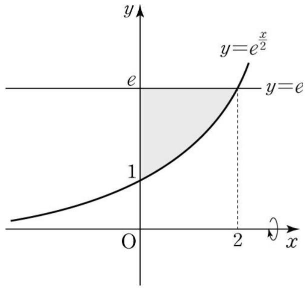
$1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}=3.92$

$\frac{10}{\sqrt{n}}=2,\ \sqrt{n}=5$

$\therefore\ \ n=25$

14. 미분법

정답 ④



$V=\pi\int_0^2 e^2dx-\int_0^2 (e^{\frac{x}{2}})^2dx$

$=\pi\left[e^2x\right]_0^2-\pi\left[e^x\right]_0^2$

$=2e^2\pi-(e^2-1)\pi$

$=(e^2+1)\pi$

15. 순열과 조합

정답 ①

이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열하는 경우의 수는

(i) 1이 적힌 공을 2개 모두 꺼낸 경우

$_2C_2\times{}_3C_2\times\frac{4!}{2!}=36$

(ii) 1이 적힌 공을 1개만 꺼낸 경우

$4!=24$

이므로 (i), (ii)에 의하여 $36+24=60$이다.

이때, 나열된 순서대로 공에 적혀 있는 수를 $a,\ b,\ c,\ d$라 하면 $a\le b\le c\le d$일 경우의 수는

$(1,\ 1,\ 2,\ 3)$, $(1,\ 1,\ 2,\ 4)$, $(1,\ 1,\ 3,\ 4)$, $(1,\ 2,\ 3,\ 4)$

로 4(가지)이다.

따라서, 구하는 확률은 $\frac{4}{60}=\frac{1}{15}$이다.

16. 수열

정답 ①

$S_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$라 하면

$S_{n+1}=S_n+b_{n+1}=S_n+\frac{b_1+b_2+\cdots b_n}{n}$

$=S_n+\frac{S_n}{n}$

$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\times S_n=\boxed{\frac{n+1}{n}}\times S_n$

$\therefore\ \frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{n+1}{n}$

$\therefore\ S_n=S_1\times\frac{S_2}{S_1}\times\frac{S_3}{S_2}\times\cdots\times\frac{S_n}{S_{n-1}}(n\ge 2)$

$=10\times\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{n}{n-1}\quad(\because\ S_1=10)$

$=\boxed{10n}$

따라서, $f(n)=\frac{n+1}{n}$, $g(n)=10n$이므로

$f(5)\times g(6)=\frac{6}{5}\times 60=72$

17. 행렬과 그래프

정답 ③

ㄱ. (참) $B^2+AB=E$에서 $(B+A)B=E$이므로

$B^{-1}=B+A$

$\therefore\ (B+A)B=B(B+A)=E$

즉, $B^2+AB=B^2+BA$이므로 $AB=BA$

ㄴ. (참) $B^2+AB=E$에서 $B^2=E-AB$

$B^2=B-E$에서

$E-AB=B-E$

$2E=AB+B$의 양변에 B^{-1}을 곱하면

$2B^{-1}=A+E$

$2(B+A)=A+E\,(\because\ B^{-1}=B+A)$

$\therefore\ A+2B=E$

ㄷ. (거짓) $A+2B=E$에서 $A=E-2B$

$A^2=A-2AB$

$=(E-2B)-2(E-2B)B$

$=E-2B-2B+4B^2$

$= E-4B+4(B-E)\,(\because\ B^2=B-E)$

$=-3E$

$\therefore\ A^2=-3E,\ A^3=-A$

$\therefore\ A^3+A^2+3A=-3A-3E+3A=-3E$

18. 통계

정답 ②

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 4^2)$을 따르고, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따른다. 두 확률변수 X, Y의 표준편차가 같고, $f(12)=g(26)$이므로

$\mathrm{P}(X\le 12)=\mathrm{P}(Y\le 26)$

$\mathrm{P}(X\le 12)=\mathrm{P}\left(Z\le \dfrac{12-10}{4}\right)=\mathrm{P}(Z\le 0.5)$

$\mathrm{P}(Y\le 26)=\mathrm{P}\left(Z\le \dfrac{26-m}{4}\right)$

이때, $\mathrm{P}(Y\ge 26)\ge 0.5$에서 $m\ge 26$이므로

$-\dfrac{26-m}{4}=0.5$

$-26+m=2$

$\therefore\ m=28$

따라서, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(28,\ 4^2)$을 따르므로

$\mathrm{P}(Y\le 20)=\mathrm{P}\left(Z\le \dfrac{20-28}{4}\right)=\mathrm{P}(Z\le -2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.5-0.4772$

$=0.0228$

19. 이차곡선

정답 ⑤

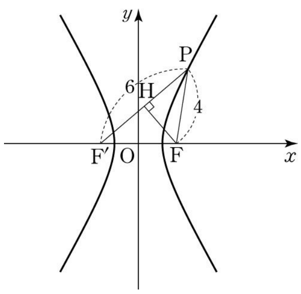
쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$의 두 초점 F, F′의 좌표를 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)\,(c>0)$이라 하면

$c^2=1+3=4$

$\therefore\ c=2$

$\therefore\ \mathrm{F}(2,\ 0),\ \mathrm{F}'(-2,0)$

(ⅰ) $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{FF'}}$인 경우



$\overline{\mathrm{FF'}}=4$이므로 $\overline{\mathrm{PF}}=4$

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2$에서

$\overline{\mathrm{PF'}}=6$

이때, 점 F에서 선분 PF′에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 PHF에서

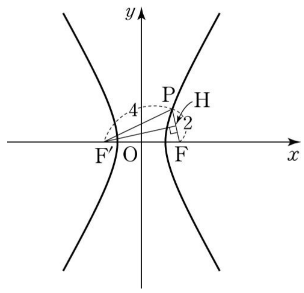
$\overline{\mathrm{HF}}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

따라서, 삼각형 PF′F의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 6\times\sqrt{7}=3\sqrt{7}$

$\therefore\ a=3\sqrt{7}$

(ⅱ) $\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{FF'}}$인 경우



$\overline{\mathrm{FF'}}=4$이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=4$

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2$에서

$\overline{\mathrm{PF}}=2$

이때, 점 F′에서 선분 PF에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 PF′H에서

$\overline{\mathrm{HF'}}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$

따라서, 삼각형 PF′F의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 2\times\sqrt{15}=\sqrt{15}$

$\therefore\ a=\sqrt{15}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 모든 a의 값의 곱은

$3\sqrt{7}\times\sqrt{15}=3\sqrt{105}$

20. 수열의 극한

정답 ③

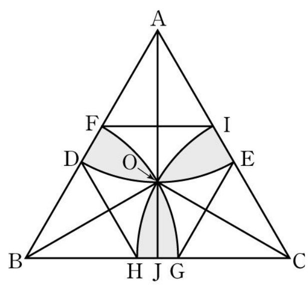


그림 R_1에서 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 J라 하면 삼각형 ABC의 한 변의 길이가 6이므로

$\overline{\mathrm{AJ}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 6=3\sqrt{3}$

정삼각형의 외심은 정삼각형의 무게중심과 일치하므로 점 O는 정삼각형 ABC의 무게중심이고,

$\overline{\mathrm{OJ}}=\dfrac{1}{3}\overline{\mathrm{AJ}}=\sqrt{3},\ \overline{\mathrm{AO}}=\dfrac{2}{3}\overline{\mathrm{AJ}}=2\sqrt{3}$

(도형 OJG의 넓이)

=(부채꼴 OBG의 넓이)−(삼각형 OBJ의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6} \times (2\sqrt{3})^2 - \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{3}$$

$$= \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \ S_1 = \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \times 6 = 6\pi - 9\sqrt{3}$$

한편, $\overline{\mathrm{HJ}} = \overline{\mathrm{GJ}} = \overline{\mathrm{BG}} - \overline{\mathrm{BJ}} = 2\sqrt{3} - 3$이므로

$$\overline{\mathrm{BH}} = \overline{\mathrm{BJ}} - \overline{\mathrm{HJ}} = 3 - (2\sqrt{3} - 3) = 6 - 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \ \overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BH}} = 6 : (6 - 2\sqrt{3}) = 1 : \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

그림 R_n에서 새로 생긴 모양의 도형의 개수는 3^{n-1}개이고, 그림 R_n에서 새로 생긴 모양의 도형에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 A_n이라 하면 수열 $\{A_n\}$는 첫째항이 $6\pi - 9\sqrt{3}$이고, 공비가 $\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right)^2 \times 3 = 4 - 2\sqrt{3}$인 등비수열이므로

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{6\pi - 9\sqrt{3}}{1 - (4 - 2\sqrt{3})}$$

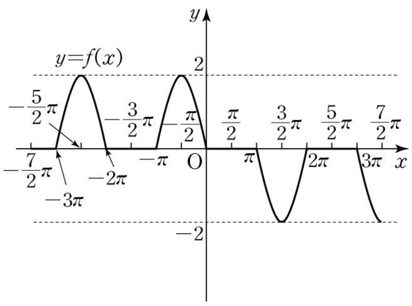
$$= \frac{3(2\pi - 3\sqrt{3})(2\sqrt{3} + 3)}{(2\sqrt{3} - 3)(2\sqrt{3} + 3)}$$

$$= (2\pi - 3\sqrt{3})(2\sqrt{3} + 3)$$

21. 적분법

정답 ①

함수 $y = f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(ⅰ) $a \geq 0$일 때,

$x > 0$에서 $\int_a^x f(t)dt \leq 0$

(ⅱ) $-\frac{5}{2}\pi < a < 0$일 때,

$x = \frac{7}{2}\pi$이면 $\int_a^x f(t)dt < 0$

(ⅲ) $-3\pi < a \leq -\frac{5}{2}\pi$일 때,

$-\frac{7}{2}\pi < x < -\frac{5}{2}\pi$이면 $\int_a^x f(t)dt < 0$

(ⅳ) $-\frac{7}{2}\pi \leq a \leq -3\pi$일 때,

닫힌구간 $\left[-\frac{7}{2}\pi, \ \frac{7}{2}\pi\right]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $\int_a^x f(t)dt \geq 0$

따라서, 구하는 실수 a의 최솟값은 $-\frac{7}{2}\pi$, 최댓값은 -3π이므로

$$\alpha = -\frac{7}{2}\pi, \ \beta = -3\pi$$

$$\therefore \ \beta - \alpha = -3\pi - \left(-\frac{7}{2}\pi\right) = \frac{\pi}{2}$$

22. 적분법

정답 6

$$\int_1^{16} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^{16} x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^{16}$$

$$= 2 \times 16^{\frac{1}{2}} - 2$$

$$= 8 - 2 = 6$$

23. 방정식과 부등식

정답 4

$\sqrt{-x^2 + 7x} = -x^2 + 7x - 2$에서

$-x^2 + 7x = t \ (t > 0)$라 하면

$\sqrt{t} = t - 2$ ……………………………………… ㉠

㉠의 양변을 제곱하여 정리하면

$t^2 - 5t + 4 = 0$

$(t - 1)(t - 4) = 0$

$\therefore \ t = 4 \ (\because \ t = 1$은 무연근$)$

따라서, 주어진 무리방정식의 실근은 $-x^2 + 7x = 4$, 즉 $x^2 - 7x + 4 = 0$ 의 실근과 같으므로 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실근의 곱은 4이다.

24. 수열의 극한

정답 2

$x^2+2nx-4n=0$에서

$x=\frac{-2n\pm\sqrt{4n^2+16n}}{2}=-n\pm\sqrt{n^2+4n}$이므로

$a_n=\sqrt{n^2+4n}-n$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n}-n)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+4n}-n)(\sqrt{n^2+4n}+n)}{\sqrt{n^2+4n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1}=2$

25. 지수함수와 로그함수

정답 84

열차 B가 지점 P를 통과할 때의 속력을 v라 하면 열차 A가 지점 P를 통과할 때의 속력은 $0.9v$이므로

$L_{\mathrm{B}}=80+28\log\frac{v}{100}-14\log\frac{75}{25}$

$L_{\mathrm{A}}=80+28\log\frac{0.9v}{100}-14\log\frac{75}{25}$

위의 두 식을 변끼리 빼면

$L_{\mathrm{B}}-L_{\mathrm{A}}=28\log\frac{v}{100}-28\log\frac{0.9v}{100}$

$=28\log\frac{1}{0.9}=28(1-2\log 3)$

$=28-56\log 3$

$\therefore\ a=28,\ b=-56$

$\therefore\ a-b=84$

26. 공간도형과 공간좌표

정답 162

$\cos(\angle\mathrm{ABC})=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$\sin(\angle\mathrm{ABC})=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 9\times 12\times\frac{\sqrt{6}}{3}=18\sqrt{6}$

한편, $\overline{\mathrm{AQ}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이고, $\overline{\mathrm{AP}}\perp$(평면 BCD)이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{PQ}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$

따라서, 삼각형 BCP는 삼각형 ABC의 평면 BCD 위로의 정사영이므로

$k=18\sqrt{6}\times\cos(\angle\mathrm{AQP})$

$=18\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{6}=9\sqrt{2}$

$\therefore\ k^2=(9\sqrt{2})^2=162$

[다른 풀이]

$\cos(\angle\mathrm{ABC})=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$\frac{\overline{\mathrm{BQ}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\overline{\mathrm{BQ}}}{9}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BQ}}=3\sqrt{3}$

직각삼각형 ABQ에서

$\overline{\mathrm{AQ}}=\sqrt{9^2-(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{81-27}=\sqrt{54}$

$=3\sqrt{6}$

$\cos(\angle\mathrm{AQP})=\frac{\sqrt{3}}{6}$이므로

$\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{AQ}}}=\frac{\sqrt{3}}{6},\ \frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{3\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

이때, $\overline{\mathrm{AQ}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이고, $\overline{\mathrm{AP}}\perp$(평면 BCD)이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{PQ}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$

따라서, 삼각형 BCP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 12\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=9\sqrt{2}$

$\therefore\ k=9\sqrt{2}$

$\therefore\ k^2=(9\sqrt{2})^2=162$

27. 순열과 조합

정답 32

$a=a'd,\ b=b'd,\ c=c'd\,(a'\geq 1,\ b'\geq 1,\ c'\geq 1)$라 하면 $a+b+c+d=20$에서

$(a'+b'+c'+1)d=20$

(ⅰ) $d=2$인 경우

$a'+b'+c'+1=10$에서

$a'+b'+c'=9$

이때, $a'\geq 1,\ b'\geq 1,\ c'\geq 1$이므로

순서쌍 $(a',\ b',\ c',\ 2)$의 경우의 수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_6 = {}_{3+6-1}\mathrm{C}_6 = {}_8\mathrm{C}_6 = {}_8\mathrm{C}_2 = \frac{8\times 7}{2} = 28$$

(ii) $d=4$인 경우

$a'+b'+c'+1=5$에서

$a'+b'+c'=4$

(i)과 같은 방법으로 순서쌍 $(a',\ b',\ c',\ 4)$의 경우의 수는

$${}_3\mathrm{H}_1 = {}_{3+1-1}\mathrm{C}_1 = {}_3\mathrm{C}_1 = 3$$

(iii) $d=5$인 경우

$a'+b'+c'+1=4$에서

$a'+b'+c'=3$

이때, 순서쌍 $(a',\ b',\ c',\ 5)$는 $(1,\ 1,\ 1,\ 5)$로 1개이다.

따라서, 구하는 경우의 수는 $28+3+1=32$이다.

28. 함수의 극한과 연속

정답 80

삼각형 PBC에서 $\angle\mathrm{BPC}=60°$이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{PC}}}{\sin\theta} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin 60°}$$

$$\overline{\mathrm{PC}} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sin\theta = 4\sin\theta$$

선분 PC를 한 변으로 하는 정삼각형에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하면

$$\left\{\frac{1}{2}\times 4\sin\theta \times r(\theta)\right\}\times 3 = \frac{\sqrt{3}}{4}(4\sin\theta)^2$$

$$r(\theta) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta$$

$$\therefore\ S(\theta) = \pi\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right)^2 = \frac{4\pi}{3}\sin^2\theta$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta\to+0}\frac{\frac{4\pi}{3}\sin^2\theta}{\theta^2} = \frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore\ a = \frac{4}{3}$$

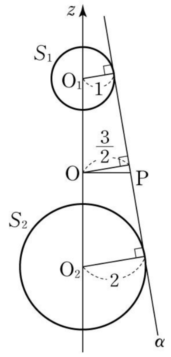
$$\therefore\ 60a = 80$$

29. 공간도형과 공간좌표

정답 40

좌표공간에서 점 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{6},\ 0\right)$을 포함하고 구 S_1과 S_2에 동시에 접하는 평면 α는 다음과 같다.

(i)



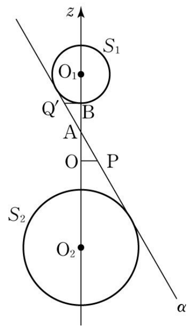
구 S_1의 중심을 O_1, 구 S_2의 중심을 O_2라 하면, 점 O_1에서 평면 α까지의 거리는 1이고, 점 O_2에서 평면 α까지의 거리는 2이므로 $\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2}$의 중심인 원점 O에서 평면 α까지의 거리는 $\frac{3}{2}$이다.

이때,

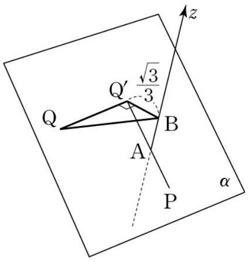
$$\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

이므로 원점 O에서 평면 α까지의 거리인 $\frac{3}{2}$보다 작으므로 모순이다.

(ii)



평면 α는 점 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$을 지나고, 삼각형 AOP와 삼각형 ABQ′이 합동이 되도록 z축 위의 점 $\mathrm{B}(0,\ 0,\ 2)$와 평면 α 위의 점 Q′을 잡으면 점 Q′의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{6},\ 2\right)$이다.



위의 그림과 같이 $\overline{\mathrm{BQ}}^2-\overline{\mathrm{BQ'}}^2=\overline{\mathrm{QQ'}}^2$이므로

$$k^2+3-\frac{1}{3}=\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{5\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

$(\because\ \overline{\mathrm{BQ'}}=\overline{\mathrm{OP}})$

$\therefore\ k=\frac{1}{3}$

$\therefore\ 120k=40$

【다른 풀이】

평면 α가 두 구 S_1, S_2에 동시에 접하고 점 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{6},\ 0\right)$을 포함하므로 평면 α의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$이라 놓고, 점과 평면 사이의 거리의 식을 이용하자.

평면 α와 구 S_1 사이의 거리는 1, 평면 α와 구 S_2 사이의 거리는 2이므로

$$\frac{|3c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=1 \cdots\cdots ㉠$$

$$\frac{|-3c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=2 \cdots\cdots ㉡$$

또한, 평면 α가 점 P를 포함하므로

$$\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{6}b+d=0 \cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉡에서

$|3c+d|=\frac{1}{2}|-3c+d|$

$2|3c+d|=|-3c+d|$

이때, $-2(3c+d)=-3c+d$인 경우와 $2(3c+d)=-3c+d$인 경우가 있다.

(ⅰ) $-2(3c+d)=-3c+d$인 경우

$-6c-2d=-3c+d$

$d=-c$

$d=-c$를 ㉠에 대입하면

$\frac{|2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=1$

$|2c|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$4c^2=a^2+b^2+c^2$

$b^2=3c^2-a^2 \cdots\cdots ㉣$

$d=-c$를 ㉢에 대입하면

$\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{6}b-c=0$

$\sqrt{3}b=6c-3a$

$3b^2=3bc^2-36ac+9a^2 \cdots\cdots ㉤$

㉣, ㉤에서

$9c^2-3a^2=36c^2-36ac+9a^2$

$4a^2-12ac+9c^2=0$

$(2a-3c)^2=0$

$\therefore\ a=\frac{3}{2}c$

$a=\frac{3}{2}c$, $d=-c$를 ㉢에 대입하면

$\frac{3}{4}c+\frac{\sqrt{3}}{6}b-c=0$

$b=\frac{\sqrt{3}}{2}c$

따라서, 평면 α의 방정식은

$\frac{3}{2}cx+\frac{\sqrt{3}}{2}cy+cz-c=0$

$\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+z-1=0$

점 $\mathrm{Q}(k,\ -\sqrt{3},\ 2)$가 평면 α 위의 점이므로

$\frac{3}{2}k-\frac{3}{2}+2-1=0$

$\therefore\ k=\frac{1}{3}$

$\therefore 120k=40$

(ⅱ) $2(3c+d)=-3c+d$인 경우

$6c+2d=-3c+d$

$d=-9c$

$d=-9c$를 ㉠에 대입하면

$\frac{|-6c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=1$

$|-6c|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$36c^2=a^2+b^2+c^2$

$b^2=35c^2-a^2 \cdots\cdots ㉥$

$d=-9c$를 ㉢에 대입하면

$\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{6}b-9c=0$

$\sqrt{3}b=54c-3a$

$3b^2=2916c^2-324ac+9a^2 \cdots\cdots ㉦$

㉥, ㉦에서

$12a^2-324ac+2811c^2=0$

이때, 위의 방정식에서 a 또는 c가 허근이므로 모순이다.
따라서, (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $120k=40$이다.

30. 미분법

정답 15

$f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$에서

$$f'(x)=(2ax+b)e^x+(ax^2+bx+c)e^x$$
$$=\{ax^2+(2a+b)x+b+c\}e^x$$

조건 (가)에 의하여 $\sqrt{3},\ -\sqrt{3}$은 $f'(x)=0$의 두 근이다. 이때, $e^x>0$이므로 $\sqrt{3},\ -\sqrt{3}$은 $ax^2+(2a+b)x+b+c=0$의 두 근이다.
근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{2a+b}{a}=0,\ \frac{b+c}{a}=-3$$

$\therefore\ b=-2a,\ c=-a$ ……… ㉠

조건 (나)에서 $x_1=a,\ x_2=a+h\,(h>0)$라 하면

$$f(a+h)-f(a)+(a+h)-a\ge 0$$
$$f(a+h)-f(a)\ge -h$$
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ge -1$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ge \lim_{h\to 0}(-1)$$
$$f'(a)\ge -1$$

즉, $x>0$인 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge -1$이므로 $f'(x)$의 최솟값은 -1이다.

$f'(x)=a(x^2-3)e^x\ (\because$ ㉠$)$에서

$$f''(x)=a\{2xe^x+(x^2-3)e^x\}$$
$$=a(x^2+2x-3)e^x$$
$$=a(x+3)(x-1)e^x$$

$f''(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

이때, $x>0$이므로 함수 $f'(x)$는 $x=1$에서 최솟값 -1을 가지므로

$$f'(1)\ge -1$$
$$-2ae\ge -1,\ a\le\frac{1}{2e}$$

이때,

$$abc=a\times(-2a)\times(-a)=2a^3\le\frac{2}{8e^3}=\frac{1}{4e^3}$$

이므로, abc의 최댓값은 $\frac{1}{4e^3}$이다.

$\therefore\ k=\frac{1}{4}$

$\therefore\ 60k=15$