1. 서로 다른 색의 색연필 5자루를 3명의 학생 A, B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 색연필을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

① 10 ② 35 ③ 60
④ 125 ⑤ 243

2. 네 자리 자연수 중에서 각 자리의 숫자가 홀수를 포함하지 않는 자연수의 개수는?

① 300 ② 350 ③ 400
④ 450 ⑤ 500

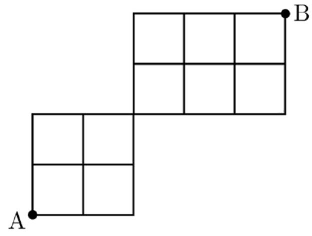
3. 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 A에서 B로의 함수 f의 개수를 m이라고 하자. 또 이 함수들 중에서 $f(1)+f(2)+f(3)=5$를 만족시키는 함수의 개수를 n이라고 하자. $m+n$의 값은?

① 87 ② 93 ③ 99
④ 105 ⑤ 111

4. A, B, C, D, E, F 6명이 달리기 시합을 한다. A가 B보다 먼저, B가 C보다 먼저 결승선을 통과하는 경우의 수는? (단, 어떤 두 사람도 동시에 결승선을 통과하지 않는다.)

① 80 ② 90 ③ 100
④ 110 ⑤ 120

5. 그림과 같이 정사각형을 이어서 만든 모양의 도로망이 있다. A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수는?

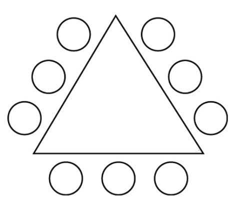


① 54 ② 56 ③ 58
④ 60 ⑤ 62

6. 1, 2, 3, 4, 5, 5를 일렬로 나열하여 만든 여섯 자리 자연수 중에서 짝수의 개수는?

① 100 ② 120 ③ 140
④ 160 ⑤ 180

7. 그림과 같은 정삼각형 모양의 탁자에 9명이 둘러앉는 방법의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



① $8!$ ② $2\cdot 8!$ ③ $3\cdot 8!$
④ $36\cdot 7!$ ⑤ $9!$

8. 여학생 4명과 남학생 3명이 간격이 일정한 7개의 의자가 배치된 원형의 탁자에 앉을 때, 2명의 남학생은 서로 이웃하고 남은 1명의 남학생은 다른 남학생과 서로 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

① 72 ② 108 ③ 144
④ 216 ⑤ 432

9. 방정식 $x+y+z=8$을 만족하는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는?

① 10 ② 15 ③ 20
④ 35 ⑤ 45

10. 카네이션 두 송이, 튤립 네 송이, 장미 한 송이를 서로 다른 꽃병 세 개에 남김없이 나누어 꽂는 방법의 수는? (단, 같은 종류의 꽃은 구분이 안 되고, 빈 꽃병이 있을 수 있다.)

① 210 ② 270 ③ 420
④ 630 ⑤ 840

11. 같은 종류의 선물 5개를 4명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 3명의 학생만 선물을 받는 경우의 수는?(단, 선물끼리는 서로 구별하지 않는다.)

① 20 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

12. 다음 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $2^{10}-1={}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_9$

ㄴ. ${}_{10}C_0-{}_{10}C_1+{}_{10}C_2-{}_{10}C_3+\cdots+{}_{10}C_{10}=0$

ㄷ. ${}_{n-1}C_{n-r}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r\ (1\le r<n)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 다항식 $(-x+a)^5$의 전개식에서 상수항을 포함한 모든 항의 계수의 합이 1일 때, x^3항의 계수는 b이다. 이 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 실수이다.)

① 34 ② 36 ③ 38
④ 40 ⑤ 42

14. 체육대회가 열리는 어느 고등학교에서 어떤 학급은 단체로 모자를 맞추어 착용하였다. 이 학급의 다섯 학생 A, B, C, D, E는 단체 줄넘기에 참여하기 위해 모자를 벗어 한 곳에 모아두었다가 경기가 끝난 뒤 놓여있던 모자를 임의로 하나씩 다시 쓰려고 한다. 학생 A가 처음부터 착용하고 있던 자신의 모자를 그대로 쓸 때, 나머지 4명의 학생은 모두 처음 착용하고 있던 모자가 아닌 다른 모자를 착용할 확률을 $\frac{q}{p}$라 하자. 서로소인 자연수 p, q에 대해 $q-p$의 값은? (단, 모자에는 처음 착용하고 있던 학생의 이름이 기재되어 있다.)

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

15. 과거 기상청 통계자료를 살펴보니 기온이나 습도, 바람, 구름의 양 등 기상조건이 오늘과 같았던 날 400일 중에서 80일이 비가 내렸다. 오늘 비가 올 확률은?

① 20% ② 30% ③ 40%
④ 60% ⑤ 80%

16. 두 사건 A, B에 대하여 $P(A \cup B)=\frac{2}{3}$, $P(A \cap B^C)=P(A^C \cap B)=\frac{1}{4}$일 때, $P(A \cap B)$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

17. 3개의 상자 A, B, C가 있다. A상자에는 검은 탁구공이 3개, 흰 탁구공이 2개 들어있고, B상자에는 검은 탁구공이 3개, 흰 탁구공이 1개 들어있고, C상자에는 검은 탁구공이 2개, 흰 탁구공이 3개 들어있다. 세 개의 상자 중에서 한 개의 상자를 택하고 그 상자에서 2개의 탁구공을 꺼내었더니 두 개 모두 흰 탁구공이었다. 이 상자가 C상자이었을 확률은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

18. 표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 $P(A^c)=\frac{1}{5}$, $P(B^c)=\frac{7}{10}$, $P(A^c \cap B^c)=\frac{1}{10}$일 때, $P(B|A)$의 값은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{8}{9}$

19. 좌표평면 위의 점 P는 동전 2개를 동시에 던져서 다음 규칙을 따른다고 한다.

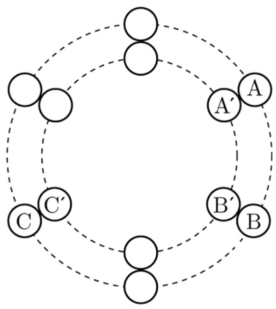
(가) 동전 2개가 모두 앞면이면 x축의 양의 방향으로 1만큼 이동한다.
(나) 동전 2개가 모두 앞면이 아니면 y축의 양의 방향으로 1만큼 이동한다.

원점에 있는 점 P가 이 시행을 10번 반복한 후 $x^2+(y-10)^2=9$의 내부에 있을 확률은?

① $6\times\left(\frac{3}{4}\right)^8$ ② $8\times\left(\frac{3}{4}\right)^9$ ③ $7\times\left(\frac{3}{4}\right)^9$
④ $9\times\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$ ⑤ $7\times\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$

서술형

20. 그림과 같이 A, B, C를 포함한 남자 6명은 바깥쪽에 원형으로 서고, A′, B′, C′을 포함한 여자 6명은 안쪽에 원형으로 서서 남녀가 마주보고 짝을 이루어 커플댄스를 배우려고 한다. A와 A′, B와 B′, C와 C′의 세 커플은 반드시 짝을 이루도록 12명을 세우는 경우의 수를 구하시오.



21. 0, 1, 2, 3, 4, 5 여섯 개의 숫자를 한번 씩만 이용하여 만든 네 자리의 자연수 중에서 3의 배수의 개수를 구하고 그 풀이과정을 서술하시오.

22. 1, 2, 3, 4, 5의 수가 각각 적힌 5장의 카드가 있다. 이 중에서 임의로 한 장씩 뽑아서 순서대로 늘어놓아 네 자리 자연수를 만들 때, 물음에 답하시오.

(1) 자연수가 4300보다 클 확률을 구하시오.

(2) 자연수가 홀수일 확률을 구하시오.

23. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=6x^2-4nx-n^2$과 직선 $y=nx-2n^2$은 서로 다른 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$에서 만난다. 집합 $\{n \mid 100 \le n \le 200,\ n$은 자연수$\}$에서 임의로 한 개의 원소 n을 택했을 때, 두 점 A, B의 x좌표 중 적어도 하나는 자연수가 될 확률을 구하시오. (단, $x_1 < x_2$)

24. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(3^x \text{의 일의 자리의 숫자})$$

라 하자. 1부터 10까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 10장의 카드가 들어 있는 상자에서 임의로 카드를 한 장씩 세 번 꺼내어 카드에 적힌 수를 차례대로 a, b, c라 할 때, $\{f(a)-7\}\{f(b)f(c)-9\}=0$일 확률을 구하시오.
(단, 꺼낸 카드는 다시 넣는다.)

25. 두 상자 A, B에는 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 카드가 각각 8장씩 들어 있다. 갑은 상자 A에서 임의로 카드 한 장을 꺼내고, 을은 상자 B에서 임의로 카드 한 장을 꺼내 수를 확인하여 더 큰 수가 나온 사람이 이기고, 같은 수가 나오면 비기는 것으로 하였다. 갑이 꺼낸 카드에 적혀 있는 수가 5보다 컸을 때, 을이 이겼을 확률은 p이다. $80p$의 값을 구하시오.

정답 및 풀이

1) ⑤
구하는 경우의 수는 서로 다른 A, B, C에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_5 = 3^5 = 243$

2) ⑤
각 자리의 숫자로 가능한 숫자는 0, 2, 4, 6, 8 이므로 구하는 네 자리 자연수의 개수는
$4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$

3) ③
A에서 B로의 함수의 개수는 $m = {}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$
$5=1+1+3=1+2+2$이므로 $f(1)+f(2)+f(3)=5$를 만족시키는 경우의 수는 6이 각각의 경우에 $f(4)$를 대응시키는 경우의 수는 3
$\therefore n = 6 \cdot 3 = 18$
$\therefore m+n = 81+18 = 99$

4) ⑤
A,B,C의 순서가 고정되어 있으므로 A,B,C를 모두 x로 생각하여 D,E,F,x,x,x를 일렬로 나열한 후 첫 번째 x는 A, 두 번째 x는 B, 세 번째 x는 C로 바꾸면 된다.
따라서 구하는 방법의 수는
$\frac{6!}{3!} = 120$

5) ④
A지점에서 B지점으로 가는 최단 경로의 수는
$\frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{5!}{3!2!} = 6 \cdot 10 = 60$

6) ②
(ⅰ) 일의 자리의 숫자가 2인 경우 여섯 자리 자연수의 개수는 $\frac{5!}{2!} = 60$
(ⅱ) 일의 자리의 숫자가 4인 경우 여섯 자리 자연수의 개수는 $\frac{5!}{2!} = 60$
따라서 구하는 짝수의 개수는
$60+60 = 120$

7) ③
9명을 원형으로 배열하는 방법의 수는
$(9-1)! = 8!$
이때 정삼각형 모양의 탁자에서는 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 서로 다른 경우가 3가지씩 존재한다.
따라서 구하는 방법의 수는
$3 \cdot 8!$

8) ⑤
여학생 4명을 원형 탁자에 앉히는 경우의 수는 $(4-1)! = 6$이다.
남학생 3명중 이웃하는 두 명의 학생을 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_2 = 3$이다.
2명의 이웃한 남학생과 다른 한명의 남학생은 서로 이웃하지 않도록 앉아야 하므로 여학생들 사이에 앉히면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는 $6 \times {}_4P_2 \times 3 \times 2 = 432$

9) ⑤
주어진 문제는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_8 = {}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = 45$

10) ②
서로 다른 꽃병 세 개에 각각 꽂는 카네이션의 수를 x_1, y_1, z_1이라 하면 $x_1+y_1+z_1 = 2, x_1, y_1, z_1 \geq 0$이다. 이를 만족하는 순서쌍 (x_1, y_1, z_1)은 ${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$개다. 또한 꽂는 튤립의 수를 x_2, y_2, z_2라 하면 마찬가지로 $x_2+y_2+z_2 = 4, x_2, y_2, z_2 \geq 0$이므로 ${}_3H_4 = {}_6C_4 = 15$가지 경우가 존재한다.
마지막으로 장미는 세 꽃병 중 한 곳에만 들어갈 수 있으므로 3가지 경우가 가능하다.
∴ 모든 꽃을 남김없이 나누어 꽂는 경우의 수는 $6 \times 15 \times 3 = 270$이다.

11) ②
먼저 선물을 받을 3명의 학생을 골라야 한다.
3명이 각각 받을 선물의 수를 x, y, z라 하면 $x+y+z = 5$이다. 또한 $x, y, z \geq 1$이므로 $X = x-1$, $Y = y-1, Z = z-1$이라 하면 $X+Y+Z = 2$이고 $X, Y, Z \geq 0$이다. 따라서 ${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$가지의 경우가 가능하다.
∴ 3명의 학생만 선물을 받는 경우의 수는 ${}_4C_3 \times 6 = 24$가지다.

12) ⑤
ㄱ. ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$ 이므로
$2^{10} - 1 = {}_{10}C_0 + {}_{10}C_1 + {}_{10}C_2 + \cdots + {}_{10}C_9$ (참)
ㄴ. ${}_{10}C_0 + {}_{10}C_2 + \cdots + {}_{10}C_{10} = {}_{10}C_1 + {}_{10}C_3 + \cdots + {}_{10}C_9$ 이므로 ${}_{10}C_0 - {}_{10}C_1 + {}_{10}C_2 - {}_{10}C_3 + \cdots + {}_{10}C_{10} = 0$ (참)
ㄷ. 파스칼의 삼각형에서 ${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$ (참)
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

13) ⑤
상수항을 포함한 모든 항의 계수의 합은 다항식에 $x=1$을 대입했을 때의 값과 같으므로
$(-1+a)^5 = 1 \quad \therefore a = 2$
$(-x+2)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5C_r(-x)^r 2^{5-r} = {}_5C_r(-1)^r 2^{5-r} x^r$

x^3의 계수는 $r=3$일 때 $_5C_3(-1)^3 2^2=-40$
따라서 $b=-40$이므로 $a-b=42$

14) ①
A만 제외하고 나머지 사람들은 다른 사람의 모자를 쓰는 경우는 B가 C를 쓰는 경우는 다음의 세 가지이니

$$\begin{array}{l} A\,B\,C\,D\,E \\ =\,=\,=\,=\,= \\ A\,C\,B\,E\,D \\ A\,C\,D\,E\,B \\ A\,C\,E\,B\,D \end{array}$$

전체는 9가지의 경우로 구하는 확률은 $\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$이다.

15) ①
$\frac{80}{400}=\frac{1}{5}=20\%$이다.

16) ①
$P(A\cap B)=P(A\cup B)-\{P(A\cap B^c)+P(A^c\cap B)\}$

$=\frac{4}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

이 된다.

17) ②

(ⅰ) A상자를 택한 후 2개의 탁구공을 꺼내었을 때, 2개 모두 흰 공이 나올 확률
$\frac{1}{3}\times\frac{_2C_2}{_5C_2}=\frac{1}{30}$
(ⅱ) B상자를 택한 후 2개의 탁구공을 꺼내었을 때, 2개 모두 흰 공이 나올 확률은 0
(ⅲ) C상자를 택한 후 2개의 탁구공을 꺼내었을 때, 2개 모두 흰 공이 나올 확률
$\frac{1}{3}\times\frac{_3C_2}{_5C_2}=\frac{1}{10}$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{30}+0+\frac{1}{10}}=\frac{3}{4}$$

18) ③

$P(A^C)=\frac{1}{5}$에서 $P(A)=\frac{4}{5}$

$P(B^C)=\frac{7}{10}$에서 $P(B)=\frac{3}{10}$

$P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)$ 이므로

$\frac{1}{10}=1-P(A\cup B) \Rightarrow P(A\cup B)=\frac{9}{10}$이다.

따라서 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$\frac{9}{10}=\frac{4}{5}+\frac{3}{10}-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{5}$

$$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{1}{4}$$

19) ③

동전 2개가 모두 앞면일 확률은 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이고, 모두 앞면이 아닐 확률은 $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$
점 P가 10번 이동 후 원의 내부에 있기 위해서는

(ⅰ) y축의 방향으로 10번 이동하는 경우 $\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$
(ⅱ) x축의 방향으로 1번, y축의 방향으로 9번 이동하는 경우
$_{10}C_1\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^9=\frac{10}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^9$
(ⅲ) x축의 방향으로 2번, y축의 방향으로 8번 이동하는 경우
$_{10}C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^8=\frac{15}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^9$
따라서 구하는 확률은
$\left(\frac{3}{4}\right)^{10}+\frac{10}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^9+\frac{15}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^9=7\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^9$

20) 720
커플 A, A'이 자리를 택하는 경우의 수는 1
두 커플 B, B'와 C, C'가 자리를 택하는 경우의 수는 $_5P_2=20$
남은 자리에 남자 3명과 여자 3명을 각각 자리를 택하는 경우의 수는 $3!\cdot 3!=36$
따라서 구하는 경우의 수는 $1\cdot 20\cdot 36=720$

21) 96
(ⅰ) 0이 1개, 3이 1개 포함되는 경우
1 또는 4 중에서 1개를 택하고 2 또는 5 중에서 1개를 택한 후, 일렬로 나열하면 되므로
$(_2C_1\cdot {_2C_1})\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot 1=72$
(ⅱ) 0과 3이 포함되지 않은 경우
1 또는 4 중에서 2개를 택하고 2 또는 5 중에서 2개를 택한 후, 일렬로 나열하면 되므로
$(_2C_2\cdot {_2C_2})\cdot 4!=24$
따라서 구하는 경우의 수는 $72+24=96$

22) (1) $\frac{3}{10}$ (2) $\frac{3}{5}$
(1) 4300보다 큰 경우는

앞의 두 자리가 43인 경우 $3\times2=6$
앞의 두 자리가 45인 경우 $3\times2=6$
앞의 첫 번째 자리가 5인 경우 $4\times3\times2=24$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{6+6+24}{5\times4\times3\times2}=\dfrac{36}{120}=\dfrac{3}{10}$이다.

(2) 홀수가 되려면 마지막 자릿수에 1,3,5가 와야 하니

구하는 확률은 $\dfrac{{}_4P_3\times3}{120}=\dfrac{3}{5}$이다.

23) $\dfrac{67}{101}$

곡선과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나니
방정식의 두 근은 다음과 같다.

$6x^2-5nx+n^2=0$

$(2x-n)(3x-n)=0$

$\therefore x=\dfrac{n}{2}\,,\ \dfrac{n}{3}$

여기서 적어도 하나는 자연수가 될 확률은
주어진 집합 즉, 자연수 101개에서
2의 배수 또는 3의 배수인 자연수 개수는
67개이므로

구하는 확률은 $\dfrac{67}{101}$이다.

24) $\dfrac{46}{125}$

$f(1)=f(5)=f(9)=3$, $f(2)=f(6)=f(10)=9$,
$f(3)=f(7)=7$, $f(4)=f(8)=1$

(i) $f(a)=7$일 확률은

$$\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

(ii) $f(b)f(c)=9$일 확률은

ⓘ $f(b)=1$, $f(c)=9$일 때

$$\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{10}=\frac{3}{50}$$

ⓘⓘ $f(b)=3$, $f(c)=3$일 때

$$\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10}=\frac{9}{100}$$

ⓘⓘⓘ $f(b)=9$, $f(c)=1$일 때

$$\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{10}=\frac{3}{50}$$

이므로 $\dfrac{3}{50}+\dfrac{9}{100}+\dfrac{3}{50}=\dfrac{21}{100}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{5}+\frac{21}{100}-\frac{1}{5}\cdot\frac{21}{100}=\frac{46}{125}$$

25) 10

갑이 꺼낸 카드에 적혀 있는 수가 5보다 큰 사건을 X, 을이 이기는 사건을 Y라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(Y|X)$이다.
A상자에는 5보다 큰 수가 적혀 있는 카드가 3장 있으므로

$\mathrm{P}(X)=\dfrac{3}{8}$

사건 $X\cap Y$는 갑이 꺼낸 카드에 적혀 있는 5보다 큰 수가 을이 꺼낸 카드에 적혀 있는 수보다 작을 때이므로

$P(X\cap Y)=\dfrac{1}{8}\times\dfrac{2}{8}+\dfrac{1}{8}\times\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}\times0=\dfrac{3}{64}$

따라서 $p=\mathrm{P}(Y|X)=\dfrac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\dfrac{\frac{3}{64}}{\frac{3}{8}}=\dfrac{1}{8}$이므로

$80p=80\times\dfrac{1}{8}=10$