수학 영역(가형)

1. 계산 능력 - 평면벡터 정답 ①

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(1,\ 3)\cdot(-1,\ 1)$
$=1\times(-1)+3\times1=2$

2. 계산 능력 - 미분법 정답 ④

$f(x)=e^{3x-2}$에서 $f'(x)=3e^{3x-2}$이므로
$f'(1)=3e$

3. 계산 능력 - 적분법 정답 ⑤

$\int_0^{\pi}(\cos x+2\sin x)dx$
$=[\sin x-2\cos x]_0^{\pi}$
$=(\sin\pi-2\cos\pi)-(\sin0-2\cos0)$
$=(0+2)-(0-2)=2+2=4$

4. 이해 능력 - 확률 정답 ⑤

두 사건 A, B가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$\frac{5}{8}=\mathrm{P}(A)+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\mathrm{P}(A)$
$\frac{3}{4}\mathrm{P}(A)=\frac{3}{8}$
따라서 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$

5. 이해 능력 - 삼각함수 정답 ③

$\cos\theta=\frac{2}{3}$이므로 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서
$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$
따라서 $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$ $\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$이므로
$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}$
$=\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$
$=\frac{\sqrt{10}+2\sqrt{2}}{6}$

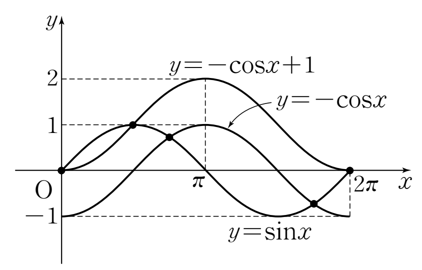
6. 이해 능력 - 순열과 조합 정답 ④

같은 종류의 꽃 9송이를 같은 종류의 꽃병 3개에 빈 꽃병이 없도록 나누어 꽂는 경우의 수는 자연수 9를 3개의 자연수로 분할하는 경우의 수와 같으므로 $P(9,\ 3)$이다.
$9=7+1+1$
$=6+2+1$
$=5+3+1$
$=5+2+2$
$=4+4+1$
$=4+3+2$
$=3+3+3$
따라서 구하는 경우의 수는 7이다.

7. 이해 능력 - 평면곡선 정답 ②

$x=t^2+2t$, $y=t^3-\ln t$에서
$\frac{dx}{dt}=2t+2$, $\frac{dy}{dt}=3t^2-\frac{1}{t}$
$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2-\frac{1}{t}}{2t+2}$
따라서 주어진 곡선 위의 $t=1$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는
$\frac{3-1}{2+2}=\frac{1}{2}$

8. 이해 능력 - 삼각함수 정답 ③



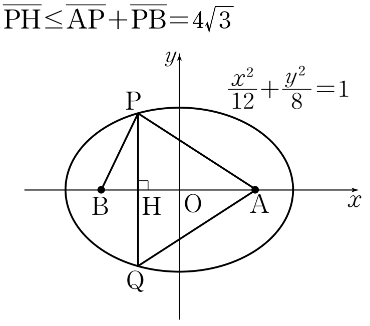
(i) $t=0$일 때,
$0\le x\le2\pi$에서 두 함수 $f(x)=\sin x$와 $g(x)=-\cos x$의 그래프가 만나는 점의 개수는 2이다. 따라서 $h(0)=2$
(ii) $t=1$일 때,
$0\le x\le2\pi$에서 두 함수 $f(x)=\sin x$와 $g(x)=-\cos x+1$의 그래프가 만나는 점의 개수는 3이다. 따라서 $h(1)=3$
(i), (ii)에서 $h(0)+h(1)=2+3=5$

9. 수학 외적 문제 해결 능력 - 지수함수와 로그함수 정답 ④

M_2-M_1
$=(-2.81\log P_2-1.43)-(-2.81\log P_1-1.43)$
$=2.81(\log P_1-\log P_2)$
$=5.62$
따라서 $\log P_1-\log P_2=2$이므로
$\log\frac{P_1}{P_2}=2$, $\frac{P_1}{P_2}=10^2=100$

10. 이해 능력 - 평면곡선 정답 ③

타원 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$의 초점이 $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$이다. 따라서 점 A는 초점이고 점$(-2,\ 0)$을 점 B, 선분 $\overline{\mathrm{PQ}}$와 x축의 교점을 H라 하면
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PH}}\le\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}=4\sqrt{3}$



따라서 삼각형 APQ의 둘레의 길이 $2(\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PH}})$는
$2(\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PH}})\le2(\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}})=8\sqrt{3}$
단, 등호는 점 B를 지나고, x축에 수직인 직선이 타원과 만나는 점이 P, Q일 때 성립한다.
따라서 △APQ의 둘레의 길이의 최댓값은 $8\sqrt{3}$이다.

11. 수학 내적 문제 해결 능력 - 확률 정답 ②

집합 X의 원소의 개수가 3이고, 집합 Y의 원소의 개수가 4이므로 집합 X에서 집합 Y로의 함수 f의 개수는 $4\times4\times4=64$이다.이 함수 중에서 $f(1)\times f(2)=f(3)$을 만족시키는 경우는 다음과 같다.
(i) $f(3)=1$일 때,
$f(1)=1$, $f(2)=1$의 1가지
(ii) $f(3)=2$일 때,
$f(1)=1$, $f(2)=2$ 또는
$f(1)=2$, $f(2)=1$의 2가지
(iii) $f(3)=4$일 때,
$f(1)=1$, $f(2)=4$ 또는
$f(1)=2$, $f(2)=2$ 또는
$f(1)=4$, $f(2)=1$의 3가지
(iv) $f(3)=8$일 때,
$f(1)=1$, $f(2)=8$ 또는
$f(1)=2$, $f(2)=4$ 또는
$f(1)=4$, $f(2)=2$ 또는
$f(1)=8$, $f(2)=1$의 4가지
(i), (ii), (iii), (iv)에서 $f(1)\times f(2)=f(3)$을 만족시키는 함수의 개수는 $1+2+3+4=10$이므로 구하는 확률은 $\frac{10}{64}=\frac{5}{32}$

12. 이해 능력 - 삼각함수 정답 ④

직선 $x+2y+1=0$, 즉 직선 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 할 때
$\tan\theta=-\frac{1}{2}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로 $\cos\theta=-2\sin\theta$
$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$이고
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=5\sin^2\theta=1$이므로
$\sin^2\theta=\frac{1}{5}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$
따라서
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos(\pi+\theta)$
$=-\sin\theta-\cos\theta$
$=-\frac{\sqrt{5}}{5}-\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$
$=-\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

13. 이해 능력 - 지수함수와 로그함수 정답 ①

$\mathrm{P}(t,\ \log_a t)$라 하면 점 P의 y좌표가 2이므로
$\log_a t=2$, $t=a^2$
$\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{Q}(t,\ 0)$이므로 $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}$에서
$t-1=2$, $t=3$
$a^2=3$이므로 $a=\sqrt{3}$ $(\because\ a>1)$

14. 이해 능력 - 적분법 정답 ②

구하는 입체도형의 부피는
$\int_1^2\{f(x)\}^2dx$
$=\int_1^2(\ln x)^2dx$
$=[x(\ln x)^2]_1^2-2\int_1^2\ln x dx$
$=[x(\ln x)^2]_1^2-2\left([x\ln x]_1^2-\int_1^2 1dx\right)$
$=[x(\ln x)^2]_1^2-2[x\ln x]_1^2+2[x]_1^2$
$=2(\ln2)^2-4\ln2+2$
$=2\{(\ln2)^2-2\ln2+1\}$
$=2(\ln2-1)^2$

15. 이해 능력 - 미분법 정답 ①

$\lim_{x\to3}\frac{g(x^2)-1}{x-3}=3$이고 $x\to3$일 때,

(분모) → 0이므로 (분자) → 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to3}\{g(x^2)-1\}=g(9)-1=0$

따라서 $g(9)=1$ …… ㉠

$\lim_{x\to3}\frac{g(x^2)-1}{x-3}$

$=\lim_{x\to3}\left\{\frac{g(x^2)-g(9)}{x^2-9}\times(x+3)\right\}$

$=g'(9)\times6=3$

이므로 $g'(9)=\frac{1}{2}$

이때, 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

㉠에서 $f(1)=9$

따라서 역함수의 미분법에 의하여

$f'(1)=\frac{1}{g'(9)}=2$

16. 연역적 추론 능력(증명) - 순열과 조합 정답 ②

${}_{m-1}C_k+{}_{m-1}C_{k-1}$

$=\frac{(m-1)!}{(m-k-1)!k!}+\frac{(m-1)!}{(m-k)!(k-1)!}$

$=\frac{(m-1)!(m-k)+(m-1)!\times\boxed{k}}{(m-k)!k!}$

$=\frac{(m-1)!m}{(m-k)!k!}=\frac{m!}{(m-k)!k!}={}_mC_k$

따라서

${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$

$={}_{n+r-2}C_r+{}_{n+r-2}C_{r-1}$

$={}_{(n-1)+r-1}C_r+{}_{n+(r-1)-1}C_{r-1}$

$={}_{\boxed{n-1}}H_r+{}_nH_{r-1}$

이상에서 $f(n)=n-1$, $g(k)=k$이므로

$f(10)+g(10)=9+10=19$

17. 이해 능력 - 확률 정답 ⑤

주머니에서 2개의 구슬을 임의로 동시에 꺼낼 때 꺼낸 두 구슬의 색이 서로 다른 사건을 A, 꺼낸 2개의 구슬에 적힌 수의 곱이 짝수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

주머니에 들어있는 6개의 구슬 중에서 2개의 구슬을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$(가지)

흰 구슬 1개와 검은 구슬 1개를 꺼내는 경우의 수는

${}_4C_1\times{}_2C_1=8$(가지)이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{8}{15}$

$A\cap B$인 경우는 사건 A 중에서 2개의 구슬에 적힌 수의 곱이 짝수인 경우이므로 적혀 있는 숫자가 각각 1, 4 또는 2, 4 또는 2, 5 또는 3, 4 또는 6, 4 또는 6, 5의 6가지 경우이다.

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{8}{15}}=\frac{3}{4}$

18. 이해 능력 - 평면벡터 정답 ④

점 P가 나타내는 직선 l의 방향벡터는 $\vec{u}=(3,\ 1)$

직선 OA의 방향벡터는 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\ a)$

이때, 직선 l과 직선 OA가 이루는 예각의 크기가 60°이어야 하므로

$|\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\vec{u}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cos60°$

$|6+a|=\sqrt{9+1}\times\sqrt{4+a^2}\times\frac{1}{2}$

$=\sqrt{10(4+a^2)}\times\frac{1}{2}$

위 등식의 양변을 각각 제곱하면

$(6+a)^2=10(4+a^2)\times\frac{1}{4}$

$2(6+a)^2=5(4+a^2)$, $3a^2-24a-52=0$

이차방정식 $3a^2-24a-52=0$의 판별식을 D라 하면, $\frac{D}{4}=12^2-3\times(-52)>0$이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 a의 값의 합은 8이다.

19. 이해 능력 - 순열과 조합 정답 ⑤

(가)에서 1부터 9까지의 자연수 중에서 3개를 선택하는 경우의 수는

${}_9C_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

선택된 3개의 수들은 대소 관계가 정해지므로 a_1, a_4, a_7로 정하는 경우의 수는 1

(나)에서 1부터 9까지의 자연수 중 (가)에서 선택한 수들을 제외한 나머지 6개의 자연수 중에서 3개를 선택하는 경우의 수는

${}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

선택된 3개의 수들은 대소 관계가 정해지므로 a_2, a_5, a_8로 정하는 경우의 수는 1

(다)에서 나머지 3개의 자연수들을 a_3, a_6, a_9로 정하는 경우의 수는 1

따라서 주어진 조건을 만족시키도록 1부터 9까지의 자연수를 나열하는 경우의 수는

$84\times20\times1=1680$

20. 수학 내적 문제 해결 능력 - 적분법 정답 ③

$\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$

$=\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{0}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}+\left\{f\left(\frac{2}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\frac{2}{n}$

$+\left\{f\left(\frac{3}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right)\right\}\frac{3}{n}+\cdots$

$+\left\{f\left(\frac{n}{n}\right)-f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}\frac{n}{n}$

$=-\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right.$

$\left.+f\left(\frac{n}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}-\frac{1}{n}f(0)+f(1)+\frac{1}{n}f(1)$

$=-\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}-\frac{1}{n}f(0)+\frac{n+1}{n}f(1)$

이고, $f(0)=0$, $f(1)=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{-\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}+\frac{n+1}{n}\right\}$

$=-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}+1$

$=-\int_0^1 f(x)dx+1$

$=-\int_0^1 xe^{x^2-1}dx+1$

$x^2-1=t$(t는 실수)로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=-1$, $x=1$일 때 $t=0$이므로

(주어진 식)$=-\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}e^t dt+1=-\frac{1}{2}[e^t]_{-1}^{0}+1$

$=-\frac{1}{2}(1-e^{-1})+1$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{e}\right)$

21. 연역적 추론 능력(증명) - 미분법 정답 ⑤

ㄱ. (참) $f(x)=t$(t는 실수)로 놓으면

$x\to1+$일 때, $t\to1+$이므로

$\lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{x\to1+}f(f(x))=\lim_{t\to1+}f(t)=1$

$x\to1-$일 때, $t\to-1+$이므로

$\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1-}f(f(x))=\lim_{t\to-1+}f(t)=1$

$g(1)=f(f(1))=f(-1)=1$

따라서 $\lim_{x\to1}g(x)=g(1)$이므로

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ. (참) ㄱ에서와 같은 방법으로 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서도 연속임을 보일 수 있다.

$g(0)=0$, $g(1)=1$이고, 함수 $g(x)$는 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$\frac{g(1)-g(0)}{1-0}=g'(c_1)$

즉, $g'(c_1)=1$인 c_1이 열린 구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

$g(-1)=-1$, $g(0)=0$이고, 함수 $g(x)$는 닫힌 구간 $[-1,\ 0]$에서 연속이고 열린 구간 $(-1,\ 0)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$\frac{g(0)-g(-1)}{0-(-1)}=g'(c_2)$

즉, $g'(c_2)=1$인 c_2가 열린 구간 $(-1,\ 0)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 $g'(x)=1$을 만족시키는 실수 x가 열린 구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 2개 존재한다.

ㄷ. (참) $g(x)=(f\circ f)(x)$에서

$g'(x)=f'(f(x))f'(x)$이므로

$g''(x)=f''(f(x))\{f'(x)\}^2+f'(f(x))f''(x)$

$0<x<1$에서 $-1<f(x)<0$이므로

$f''(f(x))>0$, $f'(f(x))<0$, $f''(x)<0$

따라서 $f''(f(x))\{f'(x)\}^2>0$이고

$f'(f(x))f''(x)>0$이므로

$g''(x)>0$이다. 따라서 함수 $g(x)$의 그래프는 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 아래로 볼록하다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

22. 이해 능력 - 미분법 정답 2

$f(x)=\frac{1}{x^2}+6$이라 하면

$f'(x)=-\frac{2}{x^3}$이므로 점 $(-1,\ 7)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=-\frac{2}{-1}=2$이다.

23. 이해 능력 - 지수함수와 로그함수 정답 8

함수 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수의 식은 $y-a=3^{x-2}$이다.

$\therefore f(x)=3^{x-2}+a$

$f(2)=3^0+a=1+a=9$이므로 $a=8$이다.

24. 이해 능력 - 지수함수와 로그함수 정답 80

$(\log_3 x)(\log_3 9x)<24$

$(\log_3 x)(\log_3 9+\log_3 x)<24$

$(\log_3 x)(2+\log_3 x)<24$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t(t+2)<24$, $t^2+2t-24<0$

$(t+6)(t-4)<0$

따라서 $-6<t<4$이므로

$-6<\log_3 x<4$, $3^{-6}<x<3^4$

$\dfrac{1}{729}<x<81$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 최댓값은 80이다.

25. 이해 능력 - 평면벡터 정답 28

$f(x)=\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{2x}$이라 하면

$f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)$

따라서 $1\le x\le 3$에서 곡선의 길이는

$\displaystyle\int_1^3 \sqrt{1+\frac{1}{4}\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx$

$\displaystyle=\int_1^3 \sqrt{\frac{1}{4}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx$

$\displaystyle=\int_1^3 \frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{x}\right]_1^3$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(9-\dfrac{1}{3}\right)-\left(\dfrac{1}{3}-1\right)\right\}$

$=\dfrac{14}{3}$

이므로 $a=\dfrac{14}{3}$, $6a=6\times\dfrac{14}{3}=28$

26. 수학 내적 문제 해결 능력 - 평면곡선 정답 91

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$의 두 초점의 좌표를

$\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=9+16=25$이므로 $\mathrm{F}(5,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-5,\ 0)$

이고, 주축의 길이는 $2\times3=6$이다.

$\overline{\mathrm{FF'}}=10$이고, $\overline{\mathrm{PF}}$, $\overline{\mathrm{FF'}}$, $\overline{\mathrm{PF'}}$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 d라 하면

$\overline{\mathrm{PF}}=10-d$, $\overline{\mathrm{PF'}}=10+d$

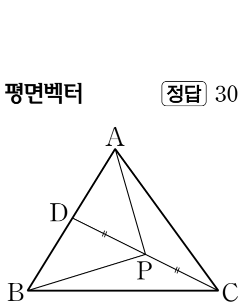
쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2d=6$

이므로 $d=3$

따라서 $\overline{\mathrm{PF}}=7$, $\overline{\mathrm{PF'}}=13$이므로

$\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}=91$

27. 수학 내적 문제 해결 능력 - 평면벡터 정답 30



$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$에서

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=-2\overrightarrow{\mathrm{PC}}$

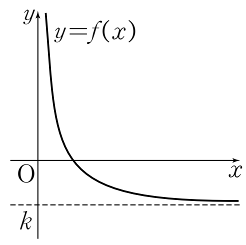
$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{2}$

선분 AB의 중점을 D라 하면

$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{2}=\overrightarrow{\mathrm{PD}}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{PD}}$이다. 따라서 점 P는 선분 CD의 중점이다. 두 삼각형 ADP, APC의 넓이가 서로 같고 두 삼각형 BPD, BCP의 넓이도 서로 같으므로 두 삼각형 PAB, ABC의 넓이의 비는 1 : 2이다. 따라서 삼각형 ABC의 넓이가 60이므로 삼각형 PAB의 넓이는 30이다.

28. 수학 내적 문제 해결 능력 - 적분법 정답 6

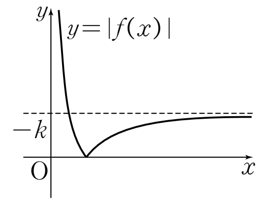


함수 $f(x)=\dfrac{3}{x}+k$ $(x>0)$의 그래프는 곡선 $y=\dfrac{3}{x}$을 y축의 방향으로 $k(k<0)$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

$g(x)=mx+\displaystyle\int_1^x |f(t)|dt$에서

$g'(x)=m+|f(x)|$이므로 $g'(x)=0$에서

$|f(x)|=-m$



함수 $|f(x)|$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $g(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면 $-m\ge -k$, 즉 $m\le k$이어야 한다.

이때, 실수 m의 최댓값이 -3이므로 $k=-3$이다.

따라서 $f(x)=\dfrac{3}{x}-3$이므로

$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=9-3=6$

29. 수학 내적 문제 해결 능력 - 확률 정답 33

1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적힌 5장의 카드에서 한 번에 한 장씩 임의로 2장의 카드를 뽑을 때, 나오는 모든 경우의 수는 $5\times4=20$(가지)

부등식 $5^{2x}\ge 2(a-1)5^x-b-4$에서

$5^x=t(t>0)$로 놓으면 $t^2-2(a-1)t+b+4\ge0$

$f(t)=t^2-2(a-1)t+b+4$라 하면 t에 대한 이차부등식 $t^2-2(a-1)t+b+4\ge0$이 $t>0$인 모든 t에 대하여 항상 성립하는 경우를 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $a>1$일 때, $f(t)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(a-1)^2-b-4\le0$

즉, $(a-1)^2\le b+4$이어야 한다.

① $a=2$일 때,

$(2-1)^2=1\le b+4$, $-3\le b$이므로

b는 1, 3, 4, 5의 4가지($\because$ $b\ne a$)

② $a=3$일 때,

$(3-1)^2=4\le b+4$, $0\le b$이므로

b는 1, 2, 4, 5의 4가지($\because$ $b\ne a$)

③ $a=4$일 때,

$(4-1)^2=9\le b+4$, $5\le b$이므로

b는 5의 1가지

④ $a=5$일 때,

$(5-1)^2=16\le b+4$, $12\le b$이므로

주어진 부등식을 만족시키는 b의 값은 존재하지 않는다.

따라서 모든 경우의 수는

$4+4+1+0=9$(가지)이다.

(ii) $a=1$일 때, $t>0$인 모든 실수 t에 대하여

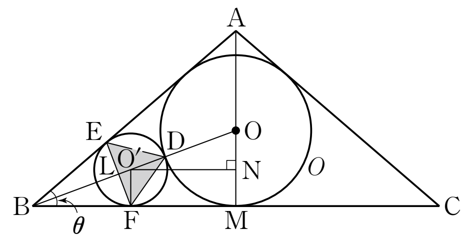
$f(t)=t^2+b+4>b+4>0$이므로 b는

2, 3, 4, 5의 4가지이다.

(i), (ii)에서 모든 경우의 수는 $9+4=13$이므로

구하는 확률은 $\dfrac{13}{20}$ 따라서 $p+q=33$

30. 이해 능력 - 삼각함수 정답 25



그림과 같이 두 선분 AB, BC에 동시에 접하고 점 D를 지나는 원의 중심을 O′이라 하고, 두 선분 BD, EF의 교점을 L, 선분 BC의 중점을 M, 점 O′에서 선분 AM에 내린 수선의 발을 N이라 하자.

$\overline{\mathrm{BM}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{OM}}=\tan\dfrac{\theta}{2}$

$\overline{\mathrm{O'F}}=x$로 놓으면

삼각형 OO′N에서 $\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\tan\dfrac{\theta}{2}-x}{x+\tan\dfrac{\theta}{2}}$

따라서 $x=\dfrac{1-\sin\dfrac{\theta}{2}}{1+\sin\dfrac{\theta}{2}}\times\tan\dfrac{\theta}{2}$ …… ㉠

$\angle\mathrm{FO'L}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$이므로 삼각형 O′LF에서

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}\right)=\dfrac{\overline{\mathrm{O'L}}}{x}$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}\right)=\dfrac{\overline{\mathrm{LF}}}{x}$

$\overline{\mathrm{O'L}}=x\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}\right)=x\sin\dfrac{\theta}{2}$

$\overline{\mathrm{LF}}=x\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}\right)=x\cos\dfrac{\theta}{2}$

따라서

$\overline{\mathrm{DL}}=\overline{\mathrm{DO'}}+\overline{\mathrm{O'L}}$

$=x+x\sin\dfrac{\theta}{2}=x\left(1+\sin\dfrac{\theta}{2}\right)$

$\overline{\mathrm{EF}}=2\times\overline{\mathrm{LF}}=2x\cos\dfrac{\theta}{2}$이므로

$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{EF}}\times\overline{\mathrm{DL}}$

$=\dfrac{1}{2}\times2x\cos\dfrac{\theta}{2}\times x\left(1+\sin\dfrac{\theta}{2}\right)$

$=x^2\cos\dfrac{\theta}{2}\left(1+\sin\dfrac{\theta}{2}\right)$

$=\dfrac{\left(1-\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2}{1+\sin\dfrac{\theta}{2}}\tan^2\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$ ($\because$ ㉠)

따라서

$\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}$

$\displaystyle=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\tan^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\theta^2\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)}$

$\displaystyle=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\times\lim_{\theta\to0+}\cos\frac{\theta}{2}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}$

$\displaystyle=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\times\lim_{\theta\to0+}\cos\frac{\theta}{2}$

$\displaystyle\times\frac{1}{4}\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2$

$=1\times1\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$

따라서 $100\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=100\times\frac{1}{4}=25$

수학 영역(나형)

1. 계산 능력 – 지수와 로그 정답 ③

$$2^{-2}\times\log_2 8=\frac{1}{2^2}\times\log_2 2^3$$
$$=\frac{1}{4}\times 3=\frac{3}{4}$$

2. 이해 능력 – 집합과 명제 정답 ③

$A\cap B^C=A-B=\{1,\ 3\}$이므로

집합 $A\cap B^C$의 원소의 개수는 2이다.

3. 계산 능력 – 수열의 극한 정답 ①

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+5^n}{3^n+5^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n+5}$$
$$=\frac{0+1}{0+5}=\frac{1}{5}$$

4. 이해 능력 – 확률 정답 ①

두 사건 A, B에 대하여

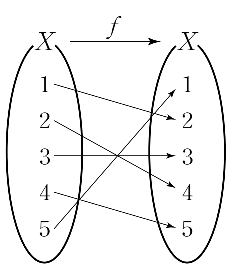
$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\mathrm{P}(A)+2\mathrm{P}(A)-\frac{1}{5}$$
$$\frac{7}{10}=3\mathrm{P}(A)-\frac{1}{5},\ 3\mathrm{P}(A)=\frac{9}{10}$$
$$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{3}{10}$$

5. 이해 능력 – 함수의 극한과 연속 정답 ②

$\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to1-}f(x)=-1$이므로

$$\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)=1+(-1)=0$$

6. 이해 능력 – 함수 정답 ⑤



함수 f는 일대일 대응

이므로

$f(4)=1$ 또는

$f(4)=5$이다.

만약, $f(4)=1$이면

$(f\circ f)(4)=f(f(4))$

$=f(1)=2$

가 되어 $(f\circ f)(4)=1$을 만족시키지 않는다.

따라서 $f(4)=5$, $f(5)=1$이므로

$(f\circ f)^{-1}(2)=f^{-1}(f^{-1}(2))=f^{-1}(1)=5$

7. 가형 6번과 동일 정답 ④

8. 이해 능력 – 집합과 명제 정답 ②

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$x^2-5x-24\le0$에서 $(x+3)(x-8)\le0$

따라서 $-3\le x\le8$이므로

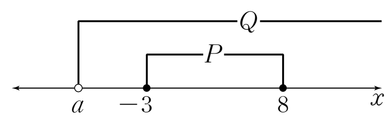
$P=\{x\mid-3\le x\le8\}$

$x-a>0$에서 $x>a$이므로

$Q=\{x\mid x>a\}$

p가 q이기 위한 충분조건이려면 $P\subset Q$ 이어야

하므로 $a<-3$이어야 한다.



따라서 정수 a의 최댓값은 -4이다.

9. 이해 능력 – 순열과 조합 정답 ①

사과 3개, 배 3개를 먼저 나열한 다음 한 가운데에 감을 나열하면 된다. 사과 3개, 배 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3!3!}=\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times3\times2\times1}=20$$

한 가운데에 감을 나열하는 경우는 1가지이므로

구하는 경우의 수는 $20\times1=20$

10. 수학 외적 문제 해결 능력 – 지수와 로그 정답 ④

$P_1=0.999^{\frac{2500}{8}}$, $P_2=0.999^{\frac{1500}{8}}$이므로

$$\frac{P_1}{P_2}=0.999^{\frac{2500}{8}-\frac{1500}{8}}=0.999^{\frac{1000}{8}}$$
$$\therefore\ \log\frac{P_1}{P_2}=\log0.999^{\frac{1000}{8}}$$
$$=\frac{1000}{8}\log0.999$$
$$=\frac{1000}{8}\log\left(9.99\times\frac{1}{10}\right)$$
$$=\frac{1000}{8}\times(0.9996-1)$$
$$=\frac{1000}{8}\times(-0.0004)=-0.05$$

11. 이해 능력 – 수열 정답 ④

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k$$
$$=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$$
$$=2n+1\ (n\ge2) \qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

$a_1=\sum\limits_{k=1}^{1}a_k=1+2=3$이므로

㉠은 $n=1$일 때도 성립한다.

따라서 $a_n=2n+1\ (n\ge1)$이므로 $a_{2k}=4k+1$

$$\sum_{k=1}^{10}a_{2k}=\sum_{k=1}^{10}(4k+1)=4\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}1$$
$$=4\times\frac{10\times11}{2}+10=230$$

12. 이해 능력 – 함수의 극한과 연속 정답 ③

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면

$x=1$에서 연속이어야 하므로 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2+ax-3}{x-1}=b \qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

에서 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$$\lim_{x\to1}(2x^2+ax-3)=2+a-3=a-1=0$$

$\therefore\ a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2+x-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(2x+3)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(2x+3)=5$$

$\therefore\ b=5$

$\therefore\ a+b=1+5=6$

13. 이해 능력 – 함수 정답 ①

$f(x)=\dfrac{3x+2}{x}=\dfrac{2}{x}+3$이므로

곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시키면 곡선

$y=\dfrac{2}{x-m}+3+n$이 된다.

이 곡선이 곡선 $y=g(x)$와 일치하므로

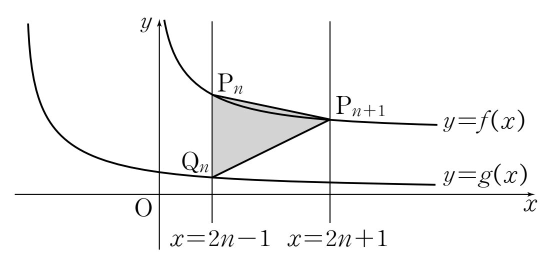
$$\frac{2}{x-m}+3+n=\frac{2}{x+2}$$

따라서 $m=-2$, $n=-3$이므로 $m+n=-5$

[다른 풀이]

곡선 $y=f(x)$의 점근선의 방정식은 $x=0$, $y=3$이고, 곡선 $y=g(x)$의 점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=0$이므로 $m=-2$, $n=-3$이어야 한다. 따라서 $m+n=-5$

14. 수학 내적 문제 해결 능력 – 수열의 극한 정답 ②



$f(x)=\dfrac{3x+2}{x}=\dfrac{2}{x}+3$, $g(x)=\dfrac{2}{x+2}$에서

$\mathrm{P}_n\left(2n-1,\ \dfrac{2}{2n-1}+3\right)$, $\mathrm{Q}_n\left(2n-1,\ \dfrac{2}{2n+1}\right)$

$$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\frac{2}{2n-1}+3-\frac{2}{2n+1}$$

따라서

$$S_n=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}\times2=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$$
$$=\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n+1}+3$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(S_n-3)$$
$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=2\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=2\times(1-0)=2$$

15. 가형 11번과 동일 　　　　정답 ②

16. 연역적 추론 능력(증명) - 수열 　　　　정답 ⑤

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=\sum_{k=0}^{1}(-1)^k(1-k)^2=1+0=1$

(우변)$=\frac{1\times2}{2}=1$

이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, 등식 $(*)$이 성립한다고 가정하고 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립함을 보이자.

$\sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k(m+1-k)^2$

$=(m+1)^2-m^2+(m-1)^2-(m-2)^2+\cdots+(-1)^m\times1^2+(-1)^{m+1}\times0^2$

$=\boxed{(m+1)^2}+\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k+1}(m-k)^2$

$=\boxed{(m+1)^2}-\sum_{k=0}^{m}(-1)^k(m-k)^2$

$=\boxed{(m+1)^2}-\boxed{\frac{m(m+1)}{2}}$

$=\boxed{\frac{(m+1)(m+2)}{2}}$

따라서 $f(m)=(m+1)^2$

$g(m)=\frac{m(m+1)}{2}$

$h(m)=\frac{(m+1)(m+2)}{2}$이므로

$\frac{f(10)\times g(9)}{h(8)}=\frac{11^2\times\frac{9\times10}{2}}{\frac{9\times10}{2}}=121$

17. 수학 내적 문제 해결 능력 - 지수와 로그 　　　　정답 ⑤

$\log_3 x-\log_{\frac{1}{2}} y=5$에서 $\log_3 x+\log_2 y=5$

$\log_2 x\times\log_3 y$

$=\frac{\log_3 x}{\log_3 2}\times\frac{\log_2 y}{\log_2 3}$

$=\frac{\log_3 x}{\frac{1}{\log_2 3}}\times\frac{\log_2 y}{\log_2 3}$

$=\log_3 x\times\log_2 y=5$

$\therefore\ (\log_3 x)^3+(\log_2 y)^3$

$=(\log_3 x+\log_2 y)^3-3\times\log_3 x\times\log_2 y\times(\log_3 x+\log_2 y)$

$=5^3-3\times5\times5=125-75=50$

18. 이해 능력 - 함수의 극한 　　　　정답 ③

$\mathrm{P}(t,\ -2(t^2-3t+2)),\ \mathrm{Q}\left(t,\ \frac{1}{2}(t^2-1)\right)$,

$\mathrm{R}(t,\ 0)$이므로

$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{AR}}$

$=\frac{1}{2}\left\{-2(t^2-3t+2)-\frac{1}{2}(t^2-1)\right\}(t-1)$

$=\frac{1}{2}\left\{-2(t-1)(t-2)-\frac{1}{2}(t-1)(t+1)\right\}(t-1)$

$=\frac{1}{4}(t-1)^2(-5t+7)$

$T(t)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{QR}}\times\overline{\mathrm{AR}}$

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(t-1)(t+1)\right\}(t-1)$

$=\frac{1}{4}(t-1)^2(t+1)$

$\lim_{t\to1+}\frac{S(t)}{T(t)}=\lim_{t\to1+}\frac{\frac{1}{4}(t-1)^2(-5t+7)}{\frac{1}{4}(t-1)^2(t+1)}$

$=\lim_{t\to1+}\frac{-5t+7}{t+1}=\frac{-5+7}{1+1}=1$

19. 발견적 추론 능력(추측) - 수열의 극한 　　　　정답 ⑤

$\overline{\mathrm{AM_1}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB_1}}^2-\overline{\mathrm{B_1M_1}}^2}$

$=\sqrt{(8\sqrt{3})^2-(4\sqrt{3})^2}$

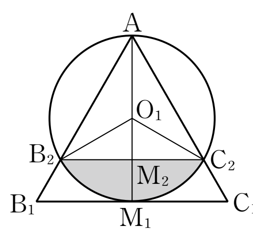
$=\sqrt{192-48}=\sqrt{144}=12$

이므로 선분 $\mathrm{AM_1}$의 중점을 $\mathrm{O_1}$이라 하면

$\overline{\mathrm{O_1B_2}}=\overline{\mathrm{O_1A}}$

$=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AM_1}}$

$=\frac{1}{2}\times12=6$



삼각형 $\mathrm{AB_2O_1}$은 $\overline{\mathrm{O_1A}}=\overline{\mathrm{O_1B_2}}$인 이등변삼각형이고, $\angle\mathrm{B_2AO_1}=30^\circ$이므로 $\angle\mathrm{M_2O_1B_2}=60^\circ$이다.

$\overline{\mathrm{O_1M_2}}=6\times\cos60^\circ=6\times\frac{1}{2}=3$

$\overline{\mathrm{B_2M_2}}=6\times\sin60^\circ=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

따라서 S_1은 부채꼴 $\mathrm{O_1B_2C_2}$의 넓이에서 삼각형 $\mathrm{O_1B_2C_2}$의 넓이를 뺀 것과 같다.

$\therefore\ S_1=\pi\times6^2\times\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times3\times6\sqrt{3}$

$=12\pi-9\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{AM}_n}=l_n$으로 놓으면

$l_n:l_{n+1}=\overline{\mathrm{AM_1}}:\overline{\mathrm{AM_2}}=12:9=4:3$이므로

그림 R_{n+1}에서 새로 색칠된 도형의 넓이는 그림 R_n에서 새로 색칠된 도형의 넓이의 $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$(배)이다.

따라서

$S_n=(12\pi-9\sqrt{3})+\frac{9}{16}(12\pi-9\sqrt{3})+\left(\frac{9}{16}\right)^2(12\pi-9\sqrt{3})+\cdots+\left(\frac{9}{16}\right)^{n-1}(12\pi-9\sqrt{3})$

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{12\pi-9\sqrt{3}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{48}{7}(4\pi-3\sqrt{3})$

20. 연역적 추론 능력(증명) - 다항함수의 미분법 　　　　정답 ③

ㄱ. (참) $\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

$=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{-x^3+4x}{x}$

$=\lim_{x\to0+}(-x^2+4)=4$

$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

$=\lim_{x\to0-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{x^2}{x}$

$=\lim_{x\to0-}x=0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. (거짓) $x<0$일 때, $f'(x)=2x<0$

$x>0$일 때, $f'(x)=-3x^2+4<4$이므로

$f'(a)=4$를 만족시키는 실수 a가 존재하지 않는다.

ㄷ. (참) $b>0$일 때, $f'(b)=-3b^2+4$,

$f'(-b)=-2b$

$-3b^2+4=-2b$, $3b^2-2b-4=0$에서

$b=\frac{1+\sqrt{13}}{3}$ 또는 $b=\frac{1-\sqrt{13}}{3}$

$\therefore\ b=\frac{1+\sqrt{13}}{3}\ (\because\ b>0)$

즉, $f'(b)=f'(-b)$를 만족시키는 양수 b가 존재한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

21. 이해 능력 - 다항함수의 미분법 　　　　정답 ④

$f(x)=\begin{cases}x^3+3x^2+k(x-1) & (x\ge1)\\ x^3+3x^2-k(x-1) & (x<1)\end{cases}$ 이므로

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이때,

$f'(x)=\begin{cases}3x^2+6x+k & (x>1)\\ 3x^2+6x-k & (x<1)\end{cases}$

이므로

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 1이 아닌 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이 성립해야 한다.

(i) $x>1$일 때,

$f'(x)=3x^2+6x+k$

$=3(x+1)^2+k-3\ge0$ 　　…… ㉠

이어야 하므로 $x=1$일 때 ㉠의 값이 0 이상이어야 한다.

즉, $12+k-3\ge0$, $9+k\ge0$

따라서 $k\ge-9$

(ii) $x<1$일 때,

$f'(x)=3x^2+6x-k$

$=3(x+1)^2-k-3\ge0$ 　　…… ㉡

이어야 한다.

이때, $f'(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 $-k-3$을 가지므로 ㉡을 만족시키려면

$f'(-1)\ge0$이어야 한다. 즉, $-k-3\ge0$

따라서 $k\le-3$

(i), (ii)에서 $-9\le k\le-3$이므로 구하는 모든 정수 k는 $-9,\ -8,\ -7,\ \cdots,\ -3$의 7개이다.

22. 이해 능력 - 다항함수의 미분법 정답 5

$f(x)=3x^2-x+2$로 놓으면
$f'(x)=6x-1$이므로
점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 기울기는
$f'(1)=6-1=5$

23. 이해 능력 - 수열 정답 48

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면
$a_2a_3=3r\times 3r^2=9r^3=72$에서
$r^3=8$이므로 $r=2$
따라서 $a_5=3\times 2^4=48$

24. 이해 능력 - 수열의 극한 정답 40

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+pn}-n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+pn}+n}{(\sqrt{n^2+pn}-n)(\sqrt{n^2+pn}+n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+pn}+n}{pn}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{p}{n}}+1}{p}$$
$$=\frac{\sqrt{1+0}+1}{p}=\frac{2}{p}=\frac{1}{20}$$
따라서 $p=40$

25. 수학 외적 문제 해결 능력 - 집합과 명제 정답 3

학생 30명 전체의 집합을 U라 하고, A, B, C 영화를 본 학생들의 집합 각각 $A,\ B,\ C$라 하자.
(가)에서 $n(A\cup B\cup C)=30$ …… ㉠
(나)에서 $A\cap(B\cup C)=\varnothing$ …… ㉡
(다)에서 $n(A)=9,\ n(B)=14,\ n(C)=18$
㉠, ㉡에서
$n(B\cup C)=n(U)-n(A)=30-9=21$
한편, B 영화만 본 학생들의 집합은
$B\cap A^C\cap C^C$이다.
$A\cap B=\varnothing$이므로 $B\cap A^C=B$이다.
따라서 B 영화만 본 학생들의 수는
$n(B\cap A^C\cap C^C)=n(B\cap C^C)$
$=n(B\cup C)-n(C)$
$=21-18=3$(명)이다.

26. 이해 능력 - 수열 정답 34

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$a_5-a_2=(a_1+4d)-(a_1+d)=3d=9$에서
$d=3$
$a_{101}=a_1+3\times 100=200$에서
$a_1=-100$
따라서 $a_n=-100+3(n-1)=3n-103$
$a_{34}=3\times 34-103=-1$이고
$a_{35}=3\times 35-103=2$이므로
$|a_n|$이 최소가 되는 자연수 n의 값은 34이다.

27. 수학 내적 문제 해결 능력 - 함수 정답 7

$f(x)=\begin{cases}1\ (x\in A)\\ 2\ (x\notin A)\end{cases}$ 이므로
$f(x)=1$ 또는 $f(x)=2$이다.
따라서 조건 (가)에서 $6=1+1+2+2$인 경우만 가능하므로
$f(x)=1$인 x가 2개, $f(x)=2$인 x가 2개이어야 한다.
$\therefore\ n(A)=2$
한편, $1\notin A,\ 2\in A$이면 조건 (나)를 만족시킬 수 없으므로 $1\in A$ 또는 $2\notin A$이어야 한다.
따라서 주어진 조건을 만족시키는 집합 A는
$\{1,\ 2\},\ \{1,\ 3\},\ \{1,\ 4\},\ \{3,\ 4\}$의 4개이다.
따라서 집합 A의 모든 원소의 합의 최댓값은
$3+4=7$
[참고]
$A=\{1,\ 2\}$일 때
$f(1)=f(2)=1,\ f(3)=f(4)=2$
$A=\{1,\ 3\}$일 때
$f(1)=f(3)=1,\ f(2)=f(4)=2$
$A=\{1,\ 4\}$일 때
$f(1)=f(4)=1,\ f(2)=f(3)=2$
$A=\{3,\ 4\}$일 때
$f(3)=f(4)=1,\ f(1)=f(2)=2$

28. 이해 능력 - 순열과 조합 정답 144

(i) $x+y+z=0$이고 $a+b+c=8$인 경우
방정식 $x+y+z=0$을 만족시키는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 $x=y=z=0$의 1가지
방정식 $a+b+c=8$을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 서로 다른 3개에서 8개를 택하는 중복조합의 수이므로
$${}_3H_8={}_{3+8-1}C_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=\frac{10\times 9}{2\times 1}=45$$
따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $1\times 45=45$

(ii) $x+y+z=1$이고 $a+b+c=5$인 경우
방정식 $x+y+z=1$을 만족시키는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 서로 다른 3개에서 1개를 택하는 중복조합의 수이므로
$${}_3H_1={}_{3+1-1}C_1={}_3C_1=3$$
이 각각에 대하여 방정식 $a+b+c=5$를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수이므로
$${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=\frac{7\times 6}{2\times 1}=21$$
따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $3\times 21=63$

(iii) $x+y+z=2$이고 $a+b+c=2$인 경우
방정식 $x+y+z=2$를 만족시키는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수이므로
$${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=\frac{4\times 3}{2\times 1}=6$$
이 각각에 대하여 방정식 $a+b+c=2$를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수이므로
$${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=\frac{4\times 3}{2\times 1}=6$$
따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $6\times 6=36$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z)$의 개수는 $45+63+36=144$

29. 이해 능력 - 확률 정답 67

주어진 정육면체 모양의 상자를 한 번 던질 때, 1, 2, 3의 숫자가 나올 확률은 각각 $\frac{1}{6},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2}$이다.
이 상자를 두 번 던질 때, 각각 나온 윗면에 적혀 있는 두 수의 합이 4 이상일 확률은
1−(각각 나온 윗면에 적혀 있는 두 수의 합이 3 이하일 확률)이다.

(i) 각각 나온 윗면에 적혀 있는 두 수의 합이 2인 경우
첫 번째 1이 나오고, 두 번째도 1이 나오는 경우이므로 확률은
$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$
(ii) 각각 나온 윗면에 적혀 있는 두 수의 합이 3인 경우
첫 번째 1이 나오고, 두 번째 2가 나오거나 첫 번째 2가 나오고, 두 번째 1이 나오는 경우이므로 확률은
$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$$
(i), (ii)에서 주어진 정육면체 상자를 연속하여 두 번 던질 때, 각각 나온 윗면에 적혀 있는 두 수의 합이 3 이하일 확률은 $\frac{1}{36}+\frac{1}{9}=\frac{5}{36}$이므로
구하는 확률은 $1-\frac{5}{36}=\frac{31}{36}$이다.
따라서 $p+q=36+31=67$

30. 수학 내적 문제 해결 능력 - 다항함수의 미분법 정답 10

$f(x)=(x-a)^3+b$
$=x^3-3ax^2+3a^2x-a^3+b$
$f'(x)=3x^2-6ax+3a^2$
따라서 점 $P(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은
$y=(3t^2-6at+3a^2)(x-t)+t^3-3at^2+3a^2t-a^3+b$
$=(3t^2-6at+3a^2)x-2t^3+3at^2-a^3+b$
$\therefore\ g(t)=-2t^3+3at^2-a^3+b$
$g'(t)=-6t^2+6at=-6t(t-a)$
$g'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=a$
이때, $a>0$이므로 함수 $g(t)$는 $t=a$에서 극대, $t=0$에서 극소이다.
$g(0)=-a^3+b,\ g(a)=b$이므로
$b=7,\ -a^3+b=-a^3+7=-20$에서 $a=3$
$\therefore\ a+b=3+7=10$