

2018학년도 6월 고1 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

정답

1	③	2	④	3	④	4	②	5	③
6	①	7	①	8	③	9	②	10	⑤
11	②	12	⑤	13	⑤	14	②	15	①
16	③	17	④	18	⑤	19	②	20	①
21	⑤	22	12	23	5	24	7	25	27
26	40	27	11	28	60	29	16	30	146

해설

1. [출제의도] 복소수 계산하기

$$\begin{aligned}(3+i)-2i \\ &= 3+(1-2)i \\ &= 3-i\end{aligned}$$

2. [출제의도] 다항식 계산하기

$$(2x+3y)(4x-y)=8x^2+10xy-3y^2 \text{ 에서 } xy \text{의 계수는 } 10 \text{이다.}$$

3. [출제의도] 이차부등식 계산하기

$$\begin{aligned}x^2-6x+5 &= (x-1)(x-5) \leq 0 \\ \text{이므로 해는} \\ 1 \leq x &\leq 5 \\ \text{이다. 그러므로 } \alpha &= 1, \beta = 5 \text{이다.} \\ \text{따라서 } \beta - \alpha &= 5-1=4 \text{이다.}\end{aligned}$$

4. [출제의도] 항등식의 성질 이해하기

$$\begin{aligned}\text{등식} \\ x^3-x^2+x+3 &= (x-1)(x^2+1)+a \\ \text{가 } x \text{에 대한 항등식이므로 } x \text{에 어떤 값을 대입하여} \\ \text{도 항상 참이 되어야 한다. } x=1 \text{을 대입하면} \\ 1-1+1+3 &= a \\ \text{이다. 따라서 } a &= 4 \text{이다.} \\ \text{[다른 풀이]} \\ \text{등식의 우변을 정리하면} \\ x^3-x^2+x+3 &= x^3-x^2+x-1+a \\ \text{이다. 항등식의 성질을 이용하여 양변의 동류항을} \\ \text{비교하면} \\ 3 &= -1+a \\ \text{이다. 따라서 } a &= 4 \text{이다.}\end{aligned}$$

5. [출제의도] 조립제법 이해하기

$$\begin{array}{c|cccc} a & 2 & 0 & 3 & 4 \\ & & 2a & \boxed{} & \boxed{} \\ \hline & 2 & 2a & \boxed{} & b \end{array}$$

에서 $2a=2$ 이므로 $a=1$ 이다.
조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ & & 2 & 2 & 5 \\ \hline & 2 & 2 & 5 & 9 \end{array}$$

$$\text{이므로 } b=9 \text{이다. 따라서 } a+b=1+9=10 \text{이다.}$$

6. [출제의도] 인수분해 이해하기

$$\begin{aligned}x(x+2)+a &= x^2+2x+a \\ \text{이고} \\ (x+b)^2 &= x^2+2bx+b^2 \\ \text{이므로 } x^2+2x+a &= x^2+2bx+b^2 \text{에서} \\ 2 &= 2b, \quad a=b^2 \text{이다. 그러므로 } a=1, \quad b=1 \text{이다.} \\ \text{따라서 } ab &= 1 \text{이다.}\end{aligned}$$

7. [출제의도] 절댓값을 포함한 일차부등식 이해하기

$$\begin{aligned}|x-a|<2 \text{를 풀면 } -2+a < x < 2+a \text{이다.} \\ a \text{가 자연수이므로 부등식을 만족하는 정수 } x \text{는} \\ -1+a, a, 1+a \\ \text{이다. 모든 정수 } x \text{의 값의 합이} \\ (-1+a)+a+(1+a) &= 3a \\ \text{이므로 } 3a &= 33 \text{이다. 따라서 } a=11 \text{이다.}\end{aligned}$$

8. [출제의도] 삼차방정식 이해하기

$$\begin{aligned}ax^3+x^2+x-3=0 \text{의 한 근이 } 1 \text{이므로} \\ a+1+1-3 &= 0 \\ \text{이고 } a=1 \text{이다. 그러므로 주어진 방정식은} \\ x^3+x^2+x-3 &= 0 \\ \text{이다. 조립제법을 이용하면}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ & & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned}x^3+x^2+x-3 &= (x-1)(x^2+2x+3) \\ \text{이다. 그러므로 삼차방정식 } x^3+x^2+x-3=0 \text{의} \\ \text{나머지 두 근은 이차방정식} \\ x^2+2x+3 &= 0 \\ \text{의 두 근과 같다. 따라서 두 근을 } \alpha, \beta \text{라 하면} \\ \text{두 근의 곱 } \alpha\beta &= 3 \text{이다.}\end{aligned}$$

9. [출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계를 이용하여 문제 해결하기

$$\begin{aligned}\text{이차함수 } y=x^2-5x+k \text{의 그래프가 } x \text{축과 서로 다} \\ \text{른 두 점에서 만나려면 이차방정식 } x^2-5x+k=0 \text{이} \\ \text{서로 다른 두 실근을 가져야 한다.} \\ \text{그러므로 이차방정식의 판별식 } D > 0 \text{이어야 하므로} \\ D = (-5)^2-4k &= 25-4k > 0 \\ \text{에서 } k < \frac{25}{4} &= 6.25 \text{이다. 따라서 자연수 } k \text{의 최댓값은} \\ 6 \text{이다.}\end{aligned}$$

10. [출제의도] 연립이차방정식을 이용하여 도형 문제 해결하기

$$\begin{aligned}\text{연립이차방정식} \\ \begin{cases} r+2h=8 \\ r^2-2h^2=8 \end{cases} \\ \text{에서 } (8-2h)^2-2h^2=8 \text{이고 } h^2-16h+28=0 \text{이므로} \\ h=2 \text{ 또는 } h=14 \\ \text{이다. } h=2 \text{일 때, } r=4 \text{이고 } h=14 \text{일 때, } r=-20 \text{이다.} \\ \text{그러므로 } r=4, \quad h=2 \text{이다.} \\ \text{따라서 이 용기의 부피는 } 32\pi \text{이다.}\end{aligned}$$

11. [출제의도] 연립이차방정식을 이용하여 문제 해결하기

$$\begin{aligned}\text{두 연립방정식} \\ \begin{cases} 3x+y=a \\ 2x+2y=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2-y^2=-1 \\ x-y=b \end{cases} \\ \text{의 일치하는 해는 연립방정식} \\ \begin{cases} x^2-y^2=-1 \\ 2x+2y=1 \end{cases} \\ \text{의 해와 같다. 연립방정식} \\ \begin{cases} x^2-y^2=-1 \\ 2x+2y=1 \end{cases} \\ \text{을 풀면} \\ x = -\frac{3}{4}, \quad y = \frac{5}{4} \\ \text{이다. 그러므로 } 3x+y=a \text{에} \\ x = -\frac{3}{4}, \quad y = \frac{5}{4} \\ \text{를 대입하면} \\ a = -1 \\ \text{이다. 또한 } x-y=b \text{에 } x = -\frac{3}{4}, \quad y = \frac{5}{4} \text{를 대입하면} \\ b = -2 \\ \text{이다. 따라서 } ab=2 \text{이다.}\end{aligned}$$

12. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 다항식의 나눗셈 문제 해결하기

$$\begin{aligned}\text{다항식 } 2x^3+x^2+x-1 \text{을 일차식 } x-a \text{로 나누었을 때} \\ \text{몫은 } Q(x), \text{ 나머지는 } 3 \text{이므로} \\ 2x^3+x^2+x-1 &= (x-a)Q(x)+3 \\ \text{이다. 나머지정리에 의해 양변에 } x=a \text{를 대입하면} \\ 2a^3+a^2+a-1 &= 3 \\ \text{이므로 } 2a^3+a^2+a-4 &= 0 \text{이고 } (a-1)(2a^2+3a+4)=0 \\ \text{이다. } 2a^2+3a+4=0 \text{이 실근을 갖지 않으므로 } a=1 \text{이} \\ \text{다. } 2x^3+x^2+x-1 &= (x-1)Q(x)+3 \text{에서} \\ \text{조립제법을 이용하면}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ & & 2 & 3 & 4 \\ \hline & 2 & 3 & 4 & 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned}2x^3+x^2+x-1 &= (x-1)(2x^2+3x+4)+3 \\ \text{이다. 따라서 } Q(x) &= 2x^2+3x+4 \text{이고,} \\ Q(a) &= Q(1)=9 \text{이다.}\end{aligned}$$

13. [출제의도] 복소수의 연산을 이용하여 문제 해결하기

$$\begin{aligned}\frac{z}{\bar{z}} &= \frac{a+bi}{a-bi} = \frac{(a+bi)^2}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2} \\ \text{이므로 } \frac{z}{\bar{z}} \text{의 실수부분이 } 0 \text{이 되기 위해서는} \\ a^2-b^2 &= 0 \\ \text{이어야 한다. } a, b \text{가 자연수이므로 } a &= b \text{이다.} \\ a, b \text{가 } 5 \text{이하의 자연수이므로} \\ z=1+i, \quad 2+2i, \quad 3+3i, \quad 4+4i, \quad 5+5i \text{이다. 따라서 조} \\ \text{건을 만족하는 모든 복소수 } z \text{의 개수는 } 5 \text{이다.}\end{aligned}$$

14. [출제의도] 인수정리를 이용하여 삼차방정식 문제 해결하기

$$\begin{aligned}\text{삼차방정식 } x^3+2x^2-3x+4=0 \text{의 세 근이 } \alpha, \beta, \gamma \text{이} \\ \text{므로} \\ x^3+2x^2-3x+4 &= (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \\ \text{이다.} \\ \text{이때 } (3+\alpha)(3+\beta)(3+\gamma) \text{의 값은 양변에 } x &= -3 \text{을} \\ \text{대입한 다음 } -1 \text{을 곱해준 것과 같으므로} \\ -(-3-\alpha)(-3-\beta)(-3-\gamma) \\ &= -\{(-3)^3+2 \times (-3)^2-3 \times (-3)+4\} \\ &= -4 \\ \text{따라서 } (3+\alpha)(3+\beta)(3+\gamma) &= -4 \text{이다.}\end{aligned}$$

15. [출제의도] 인수분해 이해하기

$$\begin{aligned}a=2018, \quad b=3 \text{이라 하면} \\ 2018 \times 2021 + 9 &= a(a+b)+b^2 = a^2+ab+b^2 \\ \text{이고} \\ 2018^3-27 &= a^3-b^3 \\ \text{이다. 인수분해 공식 } a^3-b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2) \text{을} \\ \text{이용하면} \\ 2018^3-27 &= a^3-b^3 \\ &= (a-b)(a^2+ab+b^2) \\ &= 2015 \times (2018 \times 2021 + 9) \\ \text{따라서 몫은 } 2015 \text{이다.}\end{aligned}$$

16. [출제의도] 복소수의 성질을 이용하여 이차함수의 최대, 최소 이해하기

$$\begin{aligned}z^2 &= (a+2bi)^2 = (a^2-4b^2)+4abi \\ (\bar{z})^2 &= (a-2bi)^2 = (a^2-4b^2)-4abi \\ \text{이다. } z^2+(\bar{z})^2 &= 2(a^2-4b^2)=0 \text{이므로 } a^2=4b^2 \text{이다.} \\ 6a+12b^2+11 &= 3a^2+6a+11=3(a+1)^2+8 \\ \text{이므로 } a &= -1 \text{일 때, } 6a+12b^2+11 \text{의 최솟값은 } 8 \text{이다.}\end{aligned}$$

17. [출제의도] 다항식을 이용하여 통합 교과적 문제 해결하기

$$\begin{aligned}\text{실린더 } A \text{에 담긴 액체의 높이를 } h_A, \text{ 실린더 } B \text{에} \\ \text{담긴 액체의 높이를 } h_B, \text{ 실린더 } A \text{에 담긴 액체의}\end{aligned}$$

밀도를 ρ_A , 실린더 B 에 담긴 액체의 밀도를 ρ_B 라 하면, 실린더 A 에 담긴 액체의 높이가 실린더 B 에 담긴 액체의 높이의 15배이므로

$$h_A = 15h_B$$

이고 실린더 A 에 담긴 액체의 밀도는 실린더 B 에 담긴 액체의 밀도의 $\frac{3}{5}$ 배이므로

$$\rho_A = \frac{3}{5}\rho_B$$

이다. 따라서

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{\rho_A g h_A}{\rho_B g h_B} = \frac{\left(\frac{3}{5}\rho_B\right)g(15h_B)}{\rho_B g h_B} = 9$$

이다.

18. [출제의도] 이차함수의 성질 추론하기

$y = x^2$ 의 꼭짓점은 $(0, 0)$ 이고, $y = x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 n (n 은 자연수)만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프를 나타낸 함수 $y = f(x)$ 의 꼭짓점은 $(n, 3)$ 이다. 그러므로 함수

$$f(x) = (x - n)^2 + 3$$

이다.

ㄱ. $f(x) = (x - n)^2 + 3$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 3이다. (참)

ㄴ. $n = 3$ 일 때, $f(x) = (x - 3)^2 + 3$ 이므로

$$(x - 3)^2 + 3 = 10$$

$$x^2 - 6x + 2 = 0$$

이므로 근과 계수의 관계에 의해 서로 다른 두 실근의 합은 6이다. (참)

[다른 풀이]

$n = 3$ 일 때, $f(x) = (x - 3)^2 + 3$ 이므로 $y = f(x)$ 의 대칭축은 $x = 3$ 이다. 따라서 방정식 $f(x) = 10$ 의 서로 다른 두 실근의 합은 6이다.

$$\text{ㄷ. } (x - n)^2 + 3 = x - \frac{3n - 4}{2}$$

$$x^2 - (2n + 1)x + n^2 + \frac{3}{2}n + 1 = 0$$

에서 $x^2 - (2n + 1)x + n^2 + \frac{3}{2}n + 1 = 0$ 의 판별식

$$D = (2n + 1)^2 - 4\left(n^2 + \frac{3}{2}n + 1\right) = -2n - 3$$

이고 n 이 자연수이므로 $D < 0$ 이다. 그러므로

이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x - \frac{3n - 4}{2}$ 는

만나지 않는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

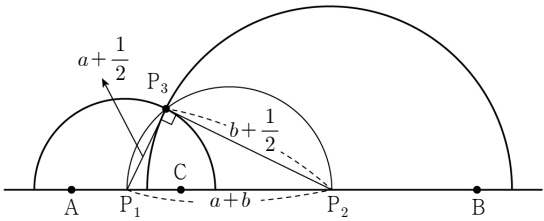
19. [출제의도] 연립이차방정식을 이용하여 도형 문제 추론하기

$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$ 이므로

$$6 = 2a + 2b, \quad a + b = 3$$

이다. 두 반원 O_1 과 O_2 의 교점을 P_3 이라 하자.

그림과 같이 반원에 대한 원주각은 90° 이므로 삼각형 $P_1P_2P_3$ 은 직각삼각형이다.



$$(a + b)^2 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 \text{에서}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + a + \frac{1}{4} + b^2 + b + \frac{1}{4}$$

$$2ab = a + b + \frac{1}{2}$$

이므로 $ab = \frac{7}{4}$ 이다.

20. [출제의도] 삼차방정식과 도형과의 관계 추론하기

삼차방정식 $2x^3 - 5x^2 + (k + 3)x - k = 0$ 에서

$$(x - 1)\left(\boxed{2x^2 - 3x} + k\right) = 0$$

이므로 삼차방정식 $2x^3 - 5x^2 + (k + 3)x - k = 0$ 의 서로 다른 세 실근은 1과 이차방정식 $\boxed{2x^2 - 3x} + k = 0$ 의 두 근이다. 이차방정식 $\boxed{2x^2 - 3x} + k = 0$ 의 두 근을 α, β ($\alpha > \beta$)라 하자. 1, α, β 가 직각삼각형의 세 변의 길이가 되는 경우는 다음과 같이 2가지로 나눌 수 있다.

(i) 빗변의 길이가 1인 경우

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \text{ 이므로 } (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 1 \text{ 이다.}$$

이차방정식 $2x^2 - 3x + k = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로

로 근과 계수의 관계에서 $\alpha + \beta = \frac{3}{2}, \alpha\beta = \frac{k}{2}$ 이다.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{k}{2} = 1$$

이므로 $k = \boxed{\frac{5}{4}}$ 이다.

그런데 $\boxed{2x^2 - 3x} + \frac{5}{4} = 0$ 에서 판별식 $D < 0$ 이므로

로 α, β 는 실수가 아니다. 따라서 1, α, β 가 직각삼각형의 세 변의 길이가 될 수 없다.

(ii) 빗변의 길이가 α 인 경우

$$1 + \beta^2 = \alpha^2 \text{ 이므로 } (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = 1 \text{ 이다.}$$

$$\alpha + \beta = \frac{3}{2}, \quad \alpha\beta = \frac{k}{2} \text{에서 } \alpha - \beta = \frac{2}{3} \text{ 이고,}$$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \times \frac{k}{2}$$

이므로 $k = \boxed{\frac{65}{72}}$ 이다. 이때 $\alpha = \frac{13}{12}, \beta = \frac{5}{12}$ 이

므로 1, α, β 는 직각삼각형의 세 변의 길이가 될 수 있다.

따라서 (i)과 (ii)에 의하여 $k = \boxed{\frac{65}{72}}$ 이다.

그러므로 $f(x) = 2x^2 - 3x, p = \frac{5}{4}, q = \frac{65}{72}$ 이다.

$$\text{따라서 } f(3) \times \frac{q}{p} = 9 \times \frac{\frac{65}{72}}{\frac{5}{4}} = \frac{13}{2} \text{ 이다.}$$

21. [출제의도] 곱셈공식을 이용하여 문제 해결하기

$$\{P(x)\}^3 + \{Q(x)\}^3 = 12x^4 + 24x^3 + 12x^2 + 16 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \{P(x) + Q(x)\}^3 - 3P(x)Q(x)\{P(x) + Q(x)\} \\ = 12x^4 + 24x^3 + 12x^2 + 16 \end{aligned}$$

$P(x) + Q(x) = 4$ 이므로

$$64 - 12P(x)Q(x) = 12x^4 + 24x^3 + 12x^2 + 16$$

$$-12P(x)Q(x) = 12x^4 + 24x^3 + 12x^2 - 48$$

$$-P(x)Q(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 4$$

$$= (x - 1)(x + 2)(x^2 + x + 2)$$

$$= (x^2 + x - 2)(x^2 + x + 2)$$

$P(x) + Q(x) = 4$ 이고 $P(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수이므로 조건(가), (나)를 만족시키는 두 이차다항식 $P(x), Q(x)$ 는

$$P(x) = -x^2 - x + 2, \quad Q(x) = x^2 + x + 2$$

이다. 따라서 $P(2) + Q(3) = 10$ 이다.

[다른 풀이]

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad (a < 0)$$

$$Q(x) = 4 - (ax^2 + bx + c)$$

라 하자.

$$\{P(x)\}^3 + \{Q(x)\}^3$$

$$= (ax^2 + bx + c)^3 + 64 - 48(ax^2 + bx + c)$$

$$+ 12(ax^2 + bx + c)^2 - (ax^2 + bx + c)^3$$

$$= 12a^2x^4 + 24abx^3 + (12b^2 + 24ac - 48a)x^2 +$$

$$(24bc - 48b)x + (12c^2 - 48c + 64)$$

$$= 12x^4 + 24x^3 + 12x^2 + 16$$

에서 $12a^2 = 12$ 이므로 $a = -1$ ($\because a < 0$)이다.

$24ab = 24$ 에서 $b = -1$ 이다. $12b^2 + 24ac - 48a = 12$ 에서 $c = 2$ 이다.

$b = -1, c = 2$ 를 $24bc - 48b = 0, 12c^2 - 48c + 64 = 16$ 에 대입하면 등식이 성립하므로

$$P(x) = -x^2 - x + 2$$

$$Q(x) = 4 - (-x^2 - x + 2) = x^2 + x + 2$$

이다. 따라서 $P(2) + Q(3) = -4 + 14 = 10$ 이다.

22. [출제의도] 다항식 계산하기

$$\begin{aligned} x^2y + xy^2 \\ = xy(x + y) \\ = 2 \times 6 \\ = 12 \end{aligned}$$

23. [출제의도] 이차방정식 계산하기

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$3 + 4 = -a, \quad 3 \times 4 = b$$

이므로 $a + b = -7 + 12 = 5$ 이다.

[다른 풀이]

이차방정식 $x^2 + ax + b$ 의 두 근이 3, 4이므로

$$3^2 + 3a + b = 0, \quad 4^2 + 4a + b = 0$$

이다. 연립방정식

$$\begin{cases} 3a + b = -9 \\ 4a + b = -16 \end{cases}$$

에서 $a = -7, b = 12$ 이다.

따라서 $a + b = -7 + 12 = 5$ 이다.

24. [출제의도] 연립부등식 이해하기

부등식 $x - 1 \geq 2$ 의 해는

$$x \geq 3$$

이고

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4) \leq 0 \text{의 해는}$$

$$2 \leq x \leq 4$$

이다. 그러므로 주어진 연립부등식의 해는

$$3 \leq x \leq 4$$

이다. 따라서 $\alpha = 3, \beta = 4$ 이므로 $\alpha + \beta = 7$ 이다.

25. [출제의도] 이차방정식의 근의 성질 이해하기

이차방정식 $2x^2 + 6x - 9 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$2\alpha^2 + 6\alpha - 9 = 0, \quad 2\beta^2 + 6\beta - 9 = 0$$

이다.

$$\begin{aligned} 2(2\alpha^2 + \beta^2) + 6(2\alpha + \beta) \\ = 4\alpha^2 + 2\beta^2 + 12\alpha + 6\beta \\ = 2(2\alpha^2 + 6\alpha) + (2\beta^2 + 6\beta) \\ = 2 \times 9 + 9 \\ = 27 \end{aligned}$$

26. [출제의도] 인수정리를 이용하여 다항식의 나눗셈 문제 해결하기

$$x^4 + ax + b = (x - 2)^2 Q(x)$$

조립제법을 이용하면

2	1	0	0	a	b
		2	4	8	$2a + 16$
	1	2	4	$a + 8$	$b + 2a + 16$

$x^4 + ax + b$ 는 $x - 2$ 로 나누어떨어지므로

$$b + 2a + 16 = 0$$

이고 $(x - 2)Q(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + a + 8$ 이다.

$x^3 + 2x^2 + 4x + a + 8$ 을 $x - 2$ 로 나누면

2	1	2	4	$a + 8$
		2	8	24
	1	4	12	$a + 32$

$x^3 + 2x^2 + 4x + a + 8$ 은 $x - 2$ 로 나누어떨어지므로

$$a + 32 = 0$$

이고

$$x^4 + ax + b = (x - 2)^2(x^2 + 4x + 12)$$

이다. 그러므로 $Q(x) = x^2 + 4x + 12$ 이다.

따라서 $a = -32$, $b = 48$, $Q(2) = 4 + 8 + 12 = 24$ 이고 $a + b + Q(2) = 40$ 이다.

27. [출제의도] 이차함수 추론하기

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + ax - (b-7)^2 \\ &= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} - (b-7)^2 \end{aligned}$$

이고 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 최솟값을 가지므로

$$-\frac{a}{2} = -1 \text{에서 } a = 2 \text{이다.}$$

이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = cx$ 가 한 점에 서 만나므로 x 에 대한 방정식

$$\begin{aligned} f(x) - cx &= 0 \\ x^2 + ax - (b-7)^2 - cx &= 0 \\ x^2 + (a-c)x - (b-7)^2 &= 0 \end{aligned}$$

이 중근을 가지고 판별식

$$D = (a-c)^2 + 4(b-7)^2 = 0$$

이다. $(a-c)^2 \geq 0$, $4(b-7)^2 \geq 0$ 이므로

$$(a-c)^2 = 0, \quad 4(b-7)^2 = 0$$

이다. 따라서 $a = c = 2$, $b = 7$ 이고 $a + b + c = 11$ 이다.

28. [출제의도] 연립이차방정식을 이용하여 도형 문제 해결하기

남아 있는 입체도형의 겉넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= 6a^2 - 2\pi b^2 + 2\pi ab \\ &= 6a^2 + 2\pi(ab - b^2) \\ &= 216 + 16\pi \end{aligned}$$

이고 a , b 가 유리수이므로

$$6a^2 = 216, \quad ab - b^2 = 8$$

이다. 그러므로 $a = 6$ 이고 $b^2 - 6b + 8 = 0$ 에서

$$b = 2 \text{ 또는 } b = 4$$

이다. $a > 2b$ 이므로 $b = 2$ 이다.

따라서 $15(a-b) = 60$ 이다.

29. [출제의도] 곱셈공식을 이용하여 문제 해결하기

$P(x) + x$ 가 이차다항식이므로

$$(x-a)(x+a)(x^2+5)+9$$

도 이차다항식의 완전제곱식이어야 한다.

$$\begin{aligned} &(x-a)(x+a)(x^2+5)+9 \\ &= (x^2-a^2)(x^2+5)+9 \\ &= x^4 + (5-a^2)x^2 - 5a^2 + 9 \\ &= x^4 + (5-a^2)x^2 + \frac{(5-a^2)^2}{4} - \frac{(5-a^2)^2}{4} - 5a^2 + 9 \\ &= \left\{x^4 + (5-a^2)x^2 + \frac{(5-a^2)^2}{4}\right\} - \frac{(5-a^2)^2 - 4(-5a^2+9)}{4} \\ &= \left(x^2 + \frac{5-a^2}{2}\right)^2 - \frac{(5-a^2)^2 - 4(-5a^2+9)}{4} \end{aligned}$$

에서

$$\begin{aligned} (5-a^2)^2 - 4(-5a^2+9) &= 0 \\ a^4 + 10a^2 - 11 &= 0 \\ (a^2+11)(a^2-1) &= 0 \end{aligned}$$

이고 $a = 1$ ($\because a > 0$)이다.

$\{P(x)+x\}^2 = (x^2+2)^2$ 에서

$$P(x) = x^2 - x + 2 \text{ 또는 } P(x) = -x^2 - x - 2$$

이고 이차항의 계수가 음수이므로

$$P(x) = -x^2 - x - 2$$

이다. 따라서 $\{P(a)\}^2 = \{P(1)\}^2 = 16$ 이다.

[다른 풀이]

$$\begin{aligned} \{P(x)+x\}^2 &= (x^2-a^2)(x^2+5)+9 \\ &= x^4 + (5-a^2)x^2 - 5a^2 + 9 \end{aligned}$$

이고 $P(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수이므로

$$P(x) + x = -x^2 + px + q$$

라 하자.

$$\begin{aligned} (-x^2 + px + q)^2 &= x^4 - 2px^3 + (p^2 - 2q)x^2 + 2pqx + q^2 \\ &= x^4 + (5-a^2)x^2 - 5a^2 + 9 \end{aligned}$$

에서

$$\begin{aligned} -2p &= 0 \\ p^2 - 2q &= 5 - a^2 \end{aligned}$$

$$2pq = 0$$

$$q^2 = -5a^2 + 9$$

이므로 $p = 0$ 이고 $a^2 = 2q + 5$ 이다.

$$q^2 + 10q + 16 = 0$$

$$(q+8)(q+2) = 0$$

$$q = -8 \text{ 또는 } q = -2$$

$q = -8$ 이면 $a^2 = -11 < 0$ 이므로 모순이다.

그러므로 $q = -2$ 이다. $a^2 = 2q + 5$ 에 $q = -2$ 를 대입 하면 a 가 양수이므로 $a = 1$ 이다.

그러므로 $P(x) + x = -x^2 - 2$ 즉, $P(x) = -x^2 - x - 2$ 이다. 따라서 $\{P(a)\}^2 = \{P(1)\}^2 = 16$ 이다.

30. [출제의도] 인수정리를 이용하여 다항식 추론하기

다항식 $P(x)$ 가 일차식 $x-a$ 를 인수로 가지므로

조립제법을 이용하면

a	1	0	-290	0	b
		a	a^2	$a^3 - 290a$	$a^4 - 290a^2$
	1	a	$a^2 - 290$	$a^3 - 290a$	$b + a^4 - 290a^2$

에서 뺀은 $x^3 + ax^2 + (a^2 - 290)x + a^3 - 290a$ 이고 나머지 $b + a^4 - 290a^2 = 0$ 이다. 따라서 $b = a^2(290 - a^2)$ 이고 b 가 자연수이므로 $290 - a^2 > 0$ 에서 이를 만족하는 a 의 값은

$$1, 2, 3, \dots, 17$$

이다. 뺀 $x^3 + ax^2 + (a^2 - 290)x + a^3 - 290a$ 가 $x + a$ 를 인수로 가지므로 조립제법을 이용하면

$-a$	1	a	$a^2 - 290$	$a^3 - 290a$
		$-a$	0	$-a^3 + 290a$
	1	0	$a^2 - 290$	0

이고 다항식 $P(x)$ 는

$$x^4 - 290x^2 + b = (x-a)(x+a)(x^2 + a^2 - 290)$$

으로 인수분해된다.

조건에 의해 $x^2 + a^2 - 290$ 이 계수와 상수항이

모두 정수인 서로 다른 두 개의 일차식의 곱으로

인수분해되는 경우는 제외한다.

$$x^2 + a^2 - 290 = x^2 - (290 - a^2)$$

이 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 두 개의 일차식의 곱으로 인수분해되는 경우는 $290 - a^2$ 이 제곱수인 경우이다.

$$290 = 1^2 + 17^2 = 11^2 + 13^2$$

이므로 $290 - a^2$ 이 제곱수가 되는 자연수 a 는 $a = 1$, $a = 11$, $a = 13$, $a = 17$ 인 경우이다.

그러므로 조건을 만족하는 자연수 a 의 값의 개수는 $17 - 4 = 13$ 이므로 모든 다항식 $P(x)$ 의 개수는 13 이다.

$b = a^2(290 - a^2) = -(a^2 - 145)^2 + 145^2$ 이고 a 가 자연수이므로 b 의 최댓값은 $a = 12$ 일 때

$$12^2 \times (290 - 12^2)$$

이다. 그러므로 $p = 13$ 이고 $q = 12^2 \times (290 - 12^2)$ 이다.

$$\text{따라서 } \frac{q}{(p-1)^2} = \frac{12^2 \times (290 - 12^2)}{(13-1)^2} = 146 \text{ 이다.}$$

[다른 풀이]

다항식 $P(x)$ 가 일차식 $x-a$ 를 인수로 가지므로

$P(a) = a^4 - 290a^2 + b = 0$ 을 만족한다.

$$b = -a^4 + 290a^2, \quad b = a^2(290 - a^2)$$

에서 b 가 자연수이므로 이를 만족하는 a 의 값은

$$1, 2, 3, \dots, 17$$

이고

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - 290x^2 + b \\ &= x^4 - 290x^2 + a^2(290 - a^2) \\ &= (x^2 - a^2)(x^2 - 290 + a^2) \end{aligned}$$

이다.

$a = 1$ 이면 $b = 1^2 \times (290 - 1^2) = 289$

$$P(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 289) = (x+1)(x-1)(x+17)(x-17)$$

으로 인수분해된다.

$a = 2$ 이면 $b = 2^2 \times (290 - 2^2) = 1144$

$$P(x) = (x^2 - 2^2)(x^2 - 286) = (x+2)(x-2)(x^2 - 286)$$

으로 인수분해된다.

$a = 3$ 이면 $b = 3^2 \times (290 - 3^2) = 2529$

$$P(x) = (x^2 - 3^2)(x^2 - 281) = (x+3)(x-3)(x^2 - 281)$$

으로 인수분해된다.

$a = 4$ 이면 $b = 4^2 \times (290 - 4^2) = 4384$

$$P(x) = (x^2 - 4^2)(x^2 - 274) = (x+4)(x-4)(x^2 - 274)$$

로 인수분해된다.

$a = 5$ 이면 $b = 5^2 \times (290 - 5^2) = 6625$

$$P(x) = (x^2 - 5^2)(x^2 - 265) = (x+5)(x-5)(x^2 - 265)$$

로 인수분해된다.

$a = 6$ 이면 $b = 6^2 \times (290 - 6^2) = 9144$

$$P(x) = (x^2 - 6^2)(x^2 - 254) = (x+6)(x-6)(x^2 - 254)$$

로 인수분해된다.

$a = 7$ 이면 $b = 7^2 \times (290 - 7^2) = 11809$

$$P(x) = (x^2 - 7^2)(x^2 - 241) = (x+7)(x-7)(x^2 - 241)$$

으로 인수분해된다.

$a = 8$ 이면 $b = 8^2 \times (290 - 8^2) = 14464$

$$P(x) = (x^2 - 8^2)(x^2 - 226) = (x+8)(x-8)(x^2 - 226)$$

으로 인수분해된다.

$a = 9$ 이면 $b = 9^2 \times (290 - 9^2) = 16929$

$$P(x) = (x^2 - 9^2)(x^2 - 209) = (x+9)(x-9)(x^2 - 209)$$

로 인수분해된다.

$a = 10$ 이면 $b = 10^2 \times (290 - 10^2) = 19000$

$$P(x) = (x^2 - 10^2)(x^2 - 190) = (x+10)(x-10)(x^2 - 190)$$

으로 인수분해된다.

$a = 11$ 이면 $b = 11^2 \times (290 - 11^2) = 20449$

$$P(x) = (x^2 - 11^2)(x^2 - 169) = (x+11)(x-11)(x+13)(x-13)$$

으로 인수분해된다.

$a = 12$ 이면 $b = 12^2 \times (290 - 12^2) = 21024$

$$P(x) = (x^2 - 12^2)(x^2 - 146) = (x+12)(x-12)(x^2 - 146)$$

으로 인수분해된다.

$a = 13$ 이면 $b = 13^2 \times (290 - 13^2) = 20449$

$$P(x) = (x^2 - 13^2)(x^2 - 121) = (x+13)(x-13)(x+11)(x-11)$$

으로 인수분해된다.

$a = 14$ 이면 $b = 14^2 \times (290 - 14^2) = 18424$

$$P(x) = (x^2 - 14^2)(x^2 - 94) = (x+14)(x-14)(x^2 - 94)$$

로 인수분해된다.

$a = 15$ 이면 $b = 15^2 \times (290 - 15^2) = 14625$

$$P(x) = (x^2 - 15^2)(x^2 - 65) = (x+15)(x-15)(x^2 - 65)$$

로 인수분해된다.

$a = 16$ 이면 $b = 16^2 \times (290 - 16^2) = 8704$

$$P(x) = (x^2 - 16^2)(x^2 - 34) = (x+16)(x-16)(x^2 - 34)$$

로 인수분해된다.

$a = 17$ 이면 $b = 17^2 \times (290 - 17^2) = 289$

$$P(x) = (x^2 - 17^2)(x^2 - 1) = (x+17)(x-17)(x+1)(x-1)$$

으로 인수분해된다.

계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 세 개의

다항식으로 인수분해되는 경우는 a 가 1, 11, 13, 17일

때를 제외한 13가지이므로 모든 다항식 $P(x)$ 의 개수

$p = 13$ 이고 $a = 12$ 일 때, b 의 최댓값 $q = 12^2 \times (290 - 12^2)$ 이다.

$$\text{따라서 } \frac{q}{(p-1)^2} = \frac{12^2 \times (290 - 12^2)}{(13-1)^2} = 146 \text{ 이다.}$$