1. 서로 다른 5통의 편지를 서로 다른 3개의 우체통에 넣는 방법의 수는? (단, 빈 우체통이 있는 경우도 생각한다.)

① 30 ② 60 ③ 120
④ 125 ⑤ 243

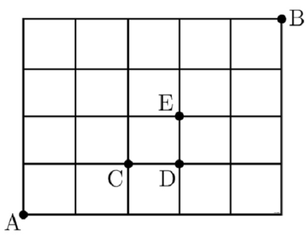
2. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(3)$은 홀수이다.
(나) $x<3$이면 $f(x)<f(3)$이다.
(다) $x>3$이면 $f(x)>f(3)$이다.

함수 f의 개수는?

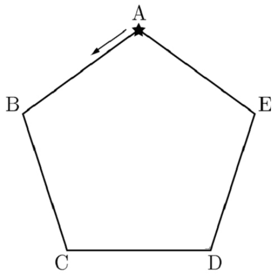
① 108 ② 112 ③ 116
④ 120 ⑤ 124

3. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단거리로 간다고 할 때, C 지점, D 지점, E 지점 중 적어도 한 지점을 통과하여 이동하는 경우의 수는?



① 88 ② 93 ③ 98
④ 103 ⑤ 108

4. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정오각형 ABCDE가 있다. 동전을 던져서 앞면이 나오면 2만큼씩, 뒷면이 나오면 1만큼씩 별 모양의 말을 화살표 방향을 따라 정오각형의 변 위를 움직이기로 한다. 동전을 10회 던져서 말을 이동하였을 때, 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 A에 도착하는 경우의 수는?



① 244 ② 248 ③ 250
④ 252 ⑤ 254

5. 수직선 위의 원점에 있는 점 P를 다음 규칙에 따라 이동시키려고 한다. 동전을 6번 던질 때, 점 P가 2에 위치하는 경우의 수는?

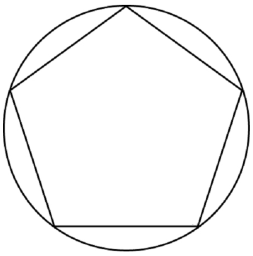
동전 한 개를 던져 앞면이 나오면 오른쪽으로 3만큼, 뒷면이 나오면 왼쪽으로 1만큼 이동시킨다.

① 10 ② 15 ③ 20
④ 25 ⑤ 30

6. 세 쌍의 부부가 원탁에 둘러앉으려고 한다. 부부끼리 이웃하게 앉는 경우의 수는?

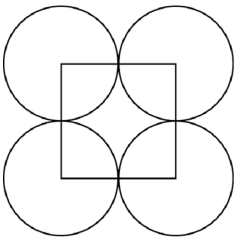
① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

7. 그림과 같이 원에 내접하는 정오각형에 의해 원의 내부가 6개의 영역으로 나누어졌다. 6개의 영역이 서로 구분되도록 각 영역을 서로 다른 6가지 색을 모두 이용하여 칠하는 방법의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 보고, 한 영역에는 한 가지 색만 칠한다.)



① 84 ② 96 ③ 108
④ 120 ⑤ 144

8. 서로 접하고 크기가 같은 원 4개와 이 네 원의 중심을 꼭짓점으로 하는 정사각형이 있다. 원의 내부 또는 정사각형의 내부에 만들어지는 9개의 영역에 서로 다른 9가지 색을 모두 사용하여 칠하려고 한다. 한 영역에 한 가지 색만을 칠할 때, 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는 $\dfrac{10!}{N}$ 이다. 자연수 N의 값은? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



① 10 ② 20 ③ 30
④ 40 ⑤ 50

9. $(a+b+c+d)^4(a+b+c+d+e)$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는?

① 90 ② 91 ③ 92
④ 93 ⑤ 94

10. 방정식 $x+y+z=11$의 양의 정수해의 개수는?

① 12 ② 45 ③ 56
④ 78 ⑤ 120

11. 크기와 모양이 같은 붕어빵 6개를 3명이 나누어 먹으려고 한다. 3명 모두 적어도 한 개 이상씩 먹는 방법의 수는?

① 6 ② 10 ③ 14
④ 18 ⑤ 22

12. [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. ${}_5C_4+{}_6C_4+\cdots+{}_{10}C_4={}_{11}C_5$

ㄴ. $3^6\cdot{}_6C_0+3^5\cdot{}_6C_1+\cdots+3\cdot{}_6C_5+{}_6C_6=2^{12}$

ㄷ. 부등식
$256<{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_{n-1}<1024$을
만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

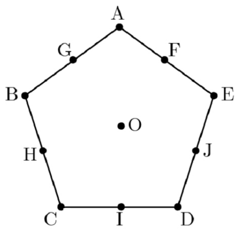
13. $\left(ax^3+\frac{2}{x^2}\right)^4$의 전개식에서 $\frac{1}{x^3}$의 계수가 96일 때, x^2의 계수는?

① 3 ② 54 ③ 128
④ 192 ⑤ 216

14. 길이가 p인 선분을 임의로 세 선분으로 나눌 때, 나누어진 세 선분으로 삼각형을 만들 수 있는 확률은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

15. 그림과 같이 정오각형 $ABCDE$의 외접원의 중심을 O라 하고, 정오각형의 각 변의 중점을 각각 F, G, H, I, J라고 하자. 정오각형의 꼭짓점과 각 변의 중점 중 서로 다른 세 점을 동시에 택하여 삼각형을 만들었다. 이 삼각형 중에서 임의로 하나의 삼각형을 택하였을 때, 이 삼각형의 외심이 점 O일 확률은?



① $\frac{2}{23}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{4}{23}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{5}{23}$

16. 서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 합이 3의 배수이거나 소수일 확률은?

① $\frac{11}{18}$ ② $\frac{23}{36}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{25}{36}$ ⑤ $\frac{13}{18}$

17. 여학생 6명, 남학생 4명 중에서 5명의 대표를 뽑을 때, 여학생이 남학생보다 많을 확률은?

① $\frac{9}{14}$ ② $\frac{29}{42}$ ③ $\frac{31}{42}$
④ $\frac{11}{14}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

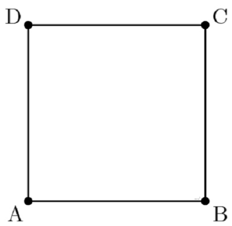
18. 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 합이 4의 배수 또는 6의 배수가 될 확률은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{13}{36}$ ③ $\frac{7}{18}$
④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{4}{9}$

19. 움직이는 점 P가 한 변의 길이가 1인 정사각형 $ABCD$의 변 위를 주사위를 한 번 던질 때마다 다음과 같은 규칙으로 움직인다.

[보 기]

- 짝수의 눈이 나오면 시계 반대 방향으로 나온 눈의 수만큼 움직인다.
- 홀수의 눈이 나오면 시계 방향으로 나온 눈의 수만큼 움직인다.



주사위를 2번 던질 때, 점 A를 출발한 점 P가 점 B에 있을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값은? (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

① 20 ② 21 ③ 22
④ 23 ⑤ 24

20. 경기도 분당구 정자동에서 비가 올 확률을 조사해보니, 비가 온 다음 날에 비가 올 확률은 $\frac{1}{3}$이고, 비가 오지 않은 날의 다음 날에 비가 올 확률은 $\frac{1}{4}$이라고 한다. 이 지역에서 월요일에 비가 왔을 때, 같은 주 목요일에 비가 올 확률은?

① $\frac{59}{216}$ ② $\frac{47}{216}$ ③ $\frac{7}{36}$
④ $\frac{13}{36}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

21. 두 사건 A, B가 $0<P(A)<1$, $0<P(B)<1$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, A^C, B^C는 각각 A, B의 여사건이다.)

| 보기 |

ㄱ. A와 B가 서로 배반사건이면 $P(B^C \mid A)=1$이다.
ㄴ. A와 B가 서로 독립사건이면 $P(A \mid B^C)P(B)=P(A\cap B)$이다.
ㄷ. A와 B가 서로 독립사건이면 $P(A^C \mid B^C)=1-P(A^C \mid B)$이다.
ㄹ. A와 B가 서로 독립사건이면 $P(A^C\cup B^C)=1-P(A)P(B)$이다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄷ, ㄹ ③ ㄱ, ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄹ

서술형

22. $29^{19}+31^{21}$을 900으로 나눈 나머지를 구하시오.

23. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X\to Y$의 개수를 각각 구하시오.

(1) 함수 $f:X\to Y$의 개수

(2) 일대일 함수 $f:X\to Y$의 개수

(3) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면, $f(x_1)<f(x_2)$이다.

(4) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면, $f(x_1)\geq f(x_2)$이다.

24. A와 B가 바둑돌 통에서 검은 바둑돌을 각각 10개씩 꺼내서 가위 바위 보를 하기로 하였다. 한 번의 가위 바위 보에서 이긴 사람이 상대의 바둑돌 2개를 가져오고, 비길 경우에는 원래의 바둑돌 통에서 각각 검은 바둑돌 1개씩 꺼내 갖기로 하였다. 가위 바위 보를 다섯 번 하였을 때, A가 15개의 검은 바둑돌을 가지게 될 확률을 구하시오.

25. 이차방정식 $56x^2-(10\cdot{}_n\mathrm{C}_r)x-(5\cdot{}_n\mathrm{P}_{n-r})=0$의 두 근이 30과 -20일 때, 다음 물음에 답하시오. (단, $0\le r\le n$)

(1) 자연수 n과 r의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

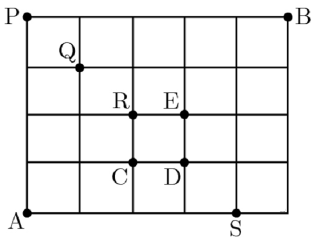
(2) (1)에서 구한 n과 r을 이용하여 자연수 n을 r개의 자연수의 합으로 나타내는 방법의 수를 구하고 그 과정을 서술하시오.

정답 및 풀이

1) ⑤
3개의 우체통에서 편지를 넣을 5개의 우체통을 택하는 중복순열의 수이므로
$_3\Pi_5 = 3^5 = 243$

2) ⑤
(ⅰ) $f(3)=1$인 경우는 없다.
(ⅱ) $f(3)=3$인 경우
 $1, 2$는 $1, 2$ 중 하나로, $4, 5, 6$은 $4,5,6$ 중 하나로 대응되므로 경우의 수는
$_2\Pi_2 \times {}_3\Pi_3 = 108$
(ⅲ) $f(3)=5$인 경우
 $1, 2$는 $1,2,3,4$ 중 하나로, $4, 5, 6$은 6으로 대응되므로 경우의 수는 $_4\Pi_2 \times 1 = 16$
따라서 구하는 모든 함수의 개수는
$108+16=124$이다.

3) ①



(ⅰ) $A \to P \to B$인 경우의 수는 1
(ⅱ) $A \to Q \to B$인 경우의 수는 $\frac{4!}{3!} \times \frac{5!}{4!} = 20$
(ⅲ) $A \to R \to B$인 경우의 수는 $\frac{3!}{2!} \times 1 \times \frac{4!}{3!} = 12$
(ⅳ) $A \to S \to B$인 경우의 수는 $1 \times \frac{5!}{4!} = 5$
(ⅰ)~(ⅳ)에 의해 구하는 경우의 수는
$1+20+12+5=38$
A에서 B로 가는 최단거리의 경우의 수는 $\frac{9!}{5!\,4!} = 126$ 이다.
따라서 구하는 경우의 수는 $126-38=88$

4) ⑤
앞 면이 나오는 횟수 a, 뒷면이 나오는 횟수 b라 하자. $a+b=10$ 이고, 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 A에 도착해야 하므로 다음과 같은 경우로 생각할 수 있다.
(ⅰ) $2a+b=5$인 경우,
$a+b=10$을 만족하는 a, b는 존재하지 않는다.
(ⅱ) $2a+b=10$인 경우,
$a+b=10$을 만족하는 $a=0, b=10$
(ⅲ) $2a+b=15$인 경우,
$a+b=10$을 만족하는 $a=5, b=5$이다. 따라서 구하는 경우의 수는 $a, a, a, a, a, b, b, b, b, b$를 일렬로 배열하는 방법의 수와 같으므로 $\frac{10!}{5!\,5!} = 252$
(ⅳ) $2a+b=20$ 인 경우,
$a+b=10$을 만족하는 $a=10, b=0$
(ⅰ)~(ⅳ)에 의해 구하는 경우의 수는
$1+252+1=254$

5) ②
앞면이 나오는 횟수 a, 뒷면이 나오는 횟수 b라 하자. $a+b=6$이고 문제의 조건에 의해 $3a-b=2$이다.
$a+b=6$, $3a-b=2$를 연립하여 풀면 $a=2, b=4$
따라서 구하는 경우의 수는 a, a, b, b, b, b를 일렬로 배열하는 방법의 수와 같으므로 $\frac{6!}{2!\,4!} = 15$

6) ①
부부 2명을 한 사람으로 생각하면 3명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는
$(3-1)! = 2! = 2$
부부끼리 자리를 바꾸는 방법의 수가 각각 $2!$
따라서 구하는 방법의 수는
$2 \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! = 16$

7) ⑤
정오각형을 칠하는 방법의 수는 6이고, 나머지 5가지 색을 원의 내부이면서 정오각형의 외부인 영역에 칠하는 방법의 수는 $(5-1)! = 4! = 24$
따라서 구하는 방법의 수는
$6 \cdot 24 = 144$

8) ④
정중앙 영역에 칠하는 경우의 수는 $_9C_1 = 9$
정사각형 외부의 네 원의 네 영역에 네가지 색을 칠하는 경우의 수는 $_8C_4 \times 3! = \frac{8!}{4!4!} \times 3! = \frac{8!}{4 \times 4!}$
정사각형 내부의 네 원의 네 영역에 칠하는 경우의 수는 순열이므로 $4!$
따라서 $9 \times \frac{8!}{4 \times 4!} \times 4! = \frac{9!}{4} = \frac{10!}{40}$이므로
$N=40$

9) ②
$(a+b+c+d)^4(a+b+c+d+e)$
 $=(a+b+c+d)^5 + e(a+b+c+d)^4$
$(a+b+c+d)^5$을 전개할 때, 생기는 서로 다른 항의 개수는 $_4H_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = 56$(개)
$e(a+b+c+d)^4$을 전개할 때, 생기는 서로 다른 항의 개수는 $_4H_4 = {}_7C_4 = {}_7C_3 = 35$(개)
따라서 전개식에서 서로 다른 항의 개수는

$56+35=91$

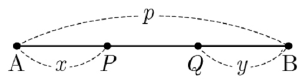
10) ②
양의 정수해는 $x, y, z \geq 1$을 뜻한다. $x-1=X$, $y-1=Y, z-1=Z$이라 하면 $X+Y+Z$ $=(x-1)+(y-1)+(z-1)=8$이다. 또한 $X, Y, Z \geq 0$이고, 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 (X, Y, Z)의 개수와 같다. $\therefore {}_3H_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=\frac{10 \cdot 9}{2}=45$

11) ②
먼저 각각 하나씩 붕어빵을 가진다. 그럼 남은 붕어빵 3개를 3명에게 나눠야 하고, 이 경우의 수는 ${}_3H_3={}_5C_3=10$가지다. 따라서 3명 모두 적어도 한 개 이상씩 먹는 방법의 수는 10가지다.

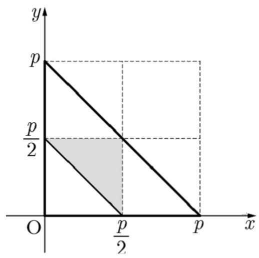
12) ②
ㄱ. ${}_5C_5=1$이므로
${}_5C_5+{}_5C_4={}_6C_5$, ${}_6C_5+{}_6C_4={}_7C_5$, $\cdots$
동일한 방법으로 계속 계산하면
(주어진 식)$={}_{11}C_5-{}_5C_5$ (거짓)
ㄴ. ${}_6C_0 3^6+{}_6C_1 3^5+\cdots+{}_6C_6$
$={}_6C_0 3^6 \cdot 1^0+{}_6C_1 3^5 \cdot 1^1+\cdots+{}_6C_6 3^0 \cdot 1^6$
$=(3+1)^{5}=4^6=2^{12}$ (참)
ㄷ. ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$ 이므로
${}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-2}=2^n-2$
따라서 주어진 식은
$256<2^n-2<1024$
$2^8=256$, $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로
$n=9$
따라서 부등식을 만족시키는 n의 값은 존재한다. (거짓)
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ이다.

13) ⑤
$\left(ax^3+\frac{2}{x^2}\right)^4$의 전개식의 일반항은
${}_4C_r(ax^3)^{4-r}\left(\frac{2}{x^2}\right)^r={}_4C_r a^{4-r}2^r x^{12-5r}$
$\frac{1}{x^3}$항은 $12-5r=-3$일 때이므로 $r=3$
따라서 $\frac{1}{x^3}$의 계수는 ${}_4C_3 a \cdot 2^3=96$ $\therefore a=3$
따라서 x^2의 계수는 $r=2$일 때
${}_4C_2 \cdot 3^2 \cdot 2^2=216$

14) ①
다음 그림과 같이 선분 위에 네 점 A, B, P, Q를 잡고 $\overline{AP}=x$, $\overline{BQ}=y$라 하면



(ⅰ) $0<x<p$, $0<y<p$, $p-x-y>0$에서 $x+y<p$
(ⅱ) 삼각형의 결정조건에 의하여
$x+(p-x-y)>y$에서 $y<\frac{p}{2}$
$(p-x-y)+y>x$에서 $x<\frac{p}{2}$
$x+y>p-x-y$에서 $\frac{p}{2}<x+y$
이를 만족시키는 영역을 좌표평면위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{4}$

15) ②
전체 만들 수 있는 삼각형의 개수는 ${}_{10}C_3=120$
점 O가 삼각형의 외심이 되기 위해서는 정오각형 ABCDE의 꼭짓점 중 3개의 점을 택하여 삼각형을 만들거나 정오각형 FGHIJ의 꼭짓점 중 3개의 점을 택하여 삼각형을 만들거나 야 하므로 그 개수는
${}_5C_3+{}_5C_3=10+10=20$
따라서 구하는 확률은 $\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$

16) ④
두 눈의 합이 3,6,9,12 또는 2,3.5.7,11
일 경우는
$(1,1),(1,2),(2,1),(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$
$(1,5),(2,3),(3,3),(4,2),(5,1),(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2)$
$(6,1),(3,6),(4,5),(5,4),(6,3),(5,6),(6,5),(6,6)$
$\therefore \frac{25}{36}$이다.

17) ③
여학생이 남학생보다 많을 경우는
(여,남) : $(5,0),(4,1),(3,2)$
따라서 구하는 확률은 $\frac{{}_6C_5+{}_6C_4\times{}_4C_1+{}_6C_3\times{}_4C_2}{{}_{10}C_5}=\frac{31}{42}$가 된다.

18) ③
주사위의 눈의 수의 합이 4인 경우는
$(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$의 3가지

주사위의 눈의 수의 합이 8인 경우는
$(2,6)$, $(3,5)$, $(4,4)$, $(5,3)$, $(6,2)$의 5가지
주사위의 눈의 수의 합이 12인 경우는
$(6,6)$의 1가지
주사위의 눈의 수의 합이 6인 경우는
$(1,5)$, $(2,4)$, $(3,3)$, $(4,2)$, $(5,1)$의 5가지
따라서 구하는 확률은
$\frac{9}{36}+\frac{6}{36}-\frac{1}{36}=\frac{7}{18}$

19) ④
주사위를 2번 던져서 점 A를 출발한 점 P가 점 B에 도착하는 경우는 다음과 같이 주사위의 눈이 나오면 된다.
$(1,2)$, $(1,6)$, $(2,1)$, $(2,5)$, $(3,4)$,
$(4,3)$, $(5,2)$, $(5,6)$, $(6,1)$, $(6,5)$
따라서 구하는 확률은 $\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\right)\times 10=\frac{5}{18}$이므로
$p+q=23$

20) [정답] ①
[해설]
비가 오는 경우를 ○, 오지 않은 경우를 ×라 하면 목요일에 비가 오는 경우와 그 때의 확률은 다음 표와 같다.

화요일	수요일	목요일	확　률
○	○	○	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$
○	×	○	$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{18}$
×	○	○	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$
×	×	○	$\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

따라서 구하는 확률은
$\frac{1}{27}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{8}=\frac{59}{216}$

21) ⑤

ㄱ. A와 B가 서로 배반사건이면 $P(A\cap B)=0$이므로
$P(B^C|A)=\frac{P(B^C\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$이다. (참)

ㄴ. $P(A|B^C)P(B)=\frac{P(A\cap B^C)}{P(B^C)}P(B)$에서 A와 B가 서로 독립사건이므로 $P(A\cap B^C)=P(A)P(B^C)$이다.
$P(A|B^C)P(B)=\frac{P(A\cap B^C)}{P(B^C)}P(B)=\frac{P(A)P(B^C)}{P(B^C)}P(B)$ (참)
$=P(A)P(B)=P(A\cap B)$

ㄷ. $P(A^C|B^C)=\frac{P(A^C\cap B^C)}{P(B^C)}$에서 A와 B가 서로 독립사건이므로 $P(A^C\cap B^C)=P(A^C)P(B^C)$이다.
$P(A^C|B^C)=\frac{P(A^C\cap B^C)}{P(B^C)}=\frac{P(A^C)P(B^C)}{P(B^C)}=P(A^C)$
$P(A^C|B)=\frac{P(A^C\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A^C)P(B)}{P(B)}=P(A^C)$
$\therefore P(A^C)\neq 1-P(A^C)$ (거짓)
ㄹ. $P(A^C\cup B^C)=1-P(A\cap B)$에서 A와 B가 서로 독립사건이므로 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$이다.
$\therefore P(A^C\cup B^C)=1-P(A)P(B)$ (참)

22) 300
$29^{19}=-(1-30)^{19}$
$=-{}_{19}C_0+{}_{19}C_1\cdot 30-{}_{19}C_2\cdot 30^2+\cdots+{}_{19}C_{19}\cdot 30^{19}$
에서 세 번째항 이후로는 900 으로 나누어떨어지므로 29^{19}을 900 으로 나누었을 때의 나머지는
$-{}_{19}C_0+{}_{19}C_1\cdot 30$ 을 900 으로 나누었을 때의 나머지와 같다.
따라서 $-{}_{19}C_0+{}_{19}C_1\cdot 30=569$이므로 29^{19}을 900 으로 나누었을 때의 나머지는 569이다.
$31^{21}=(1+30)^{21}$
$={}_{21}C_0+{}_{21}C_1\cdot 30+{}_{21}C_2\cdot 30^2+\cdots+{}_{21}C_{21}\cdot 30^{21}$
에서 세 번째항 이후로는 900 으로 나누어떨어지므로 31^{21}을 900 으로 나누었을 때의 나머지는
${}_{21}C_0+{}_{21}C_1\cdot 30$을 900 으로 나누었을 때의 나머지와 같다.
따라서 ${}_{21}C_0+{}_{21}C_1\cdot 30=631$이므로 31^{21}을 900 으로 나누었을 때의 나머지는 631이다.
따라서 $29^{19}+31^{19}$을 900 으로 나누었을 때의 나머지는 $569+631=1200$을 900 으로 나누었을 때의 나머지인 300이다.

23) (1) 125 (2) 60 (3) 10 (4) 35
(1) 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_5\Pi_3=5^3=125$(개)
(2) 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 서로 다른 3개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로
${}_5P_3=60$(개)
(3) 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 3개를 택하여 크기가 작은 것부터 차례로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는
${}_5C_3={}_5C_2=10$(개)
(4) 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허락하여 3개를 뽑는 중복조합의 수와 같으므로
${}_5H_3={}_7C_3=35$(개)

24) $\frac{7}{81}$

A가 이긴 횟수를 x, 진 횟수를 y라 하면
비긴 횟수는 $5-x-y$ $\therefore 2x-2y+(5-x-y)=5$

$$\therefore x-3y=0$$

$$(x,\ y)=(3,\ 1),\quad (0,\ 0)$$

즉, 세번 이기고 한 번 지고 한 번 비기거나
5번 모두 비겨야 한다.
구하는 확률은
${}_5C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3 {}_2C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3^5}=\frac{21}{243}=\frac{7}{81}$이다.

25) (1) $n=8$, $r=3$ (2) 5
(1) 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\frac{10\cdot {}_nC_r}{56}=30+(-20)=10$
에서 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}=56$ ⋯ ㉠
또, $-\frac{5\cdot {}_nP_{n-r}}{56}=30\cdot(-20)=-600$
에서 ${}_nP_{n-r}=6720$ ⋯ ㉡
이때, ${}_nC_{n-r}=\frac{{}_nP_{n-r}}{(n-r)!}$에서
$(n-r)!=\frac{6720}{56}=120=5!$
이므로 $n-r=5$ ⋯ ㉢
㉠, ㉡, ㉢을 모두 만족시키는 n, r의 값은
$n=8,\ r=3$
(2) $8=6+1+1$
$=5+2+1$
$=4+3+1=4+2+2$
$=3+3+2$
이므로 구하는 방법의 수는 5이다.