수학 영역

1. $A^2-B=(x+3)^2-(x^2+5x+5)$

$=(x^2+6x+9)-(x^2+5x+5)$

$=x+4$

답 ②

2. $P(x)=x^2+3x-2$로 놓으면 다항식 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$P(1)=1+3-2=2$

답 ③

3. $x^2+xy=x(x+y)$

$x^3+y^3=(x+y)(x^2+xy+y^2)$

따라서 공통인수는 $x+y$이다.

답 ④

4. $f(x)=x(x+1)(x+2)$에서

$f(x-1)=(x-1)x(x+1)$

이므로

$f(x)-f(x-1)$

$=x(x+1)(x+2)-(x-1)x(x+1)$

$=x(x+1)\{(x+2)-(x-1)\}$

$=3x(x+1)$

답 ③

5. $f(x)=2x^3+ax^2+ax+1$로 놓자.

$f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 1이므로

$f(-2)=-16+4a-2a+1=1$

$2a=16$

$\therefore a=8$

답 ⑤

6. $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$에서 $a+b=2$, $a^3+b^3=14$이므로

$14=8-3\cdot 2\cdot ab \quad \therefore ab=-1$

또한 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=2^2-2(-1)=6$이므로

$a^3b+ab^3=ab(a^2+b^2)=(-1)\cdot 6=-6$

답 ①

7. $P(x)=x^3+ax^2+4$라 하면 다항식 $P(x)$는 $x+1$로 나누어떨어진다.

즉, $P(-1)=0$에서

$-1+a+4=0 \quad \therefore a=-3$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

-1	1	-3	0	4
		-1	4	-4
	1	-4	4	0

$\therefore P(x)=(x+1)(x^2-4x+4)$

$=(x+1)(x-2)^2=(x+1)(x+b)^2$

따라서 $a=-3$, $b=-2$이므로

$a+b=-5$

답 ⑤

8. 주어진 등식의 양변에 x 대신 $x-1$을 대입하면

$(x-2)^2+3(x-2)-4=ax^2+bx+c$

$x^2-4x+4+3x-6-4=ax^2+bx+c$

$x^2-x-6=ax^2+bx+c$

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$a=1,\ b=-1,\ c=-6$

$\therefore abc=6$

답 ④

9. $P(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $2x-1$이므로

$P(x)=(x^2+1)Q(x)+2x-1$ ⋯ ㉠

$P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 -2이므로 $P(2)=-2$이다.

㉠에 $x=2$를 대입하면

$P(2)=5Q(2)+3$

$-2=5Q(2)+3$

$\therefore Q(2)=-1$

따라서 $Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 -1이다.

답 ②

10. $f(x)$를 $x-1$, $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 각각 2, 1이므로

$f(1)=2,\ f(2)=1$ ⋯ ㉠

$f(x)-g(x)$가 $x-1$, $x-2$로 각각 나누어떨어지므로

$f(1)-g(1)=0,\ f(2)-g(2)=0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $g(1)=2,\ g(2)=1$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 점 $(1,\ 2)$와 점 $(2,\ 1)$을 지난다.

따라서 보기의 그래프 중 점 $(1,\ 2)$와 점 $(2,\ 1)$을 지나는 그래프는 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④

11. 주어진 등식에 $x=2$를 대입하면

$4+6-4=a \quad \therefore a=6$

즉, 주어진 등식은

$x^2+3x-4=(x-2)f(x)+6$

$x^2+3x-10=(x-2)f(x)$

$(x-2)(x+5)=(x-2)f(x)$ ⋯ ㉠

㉠이 모든 x에 대하여 성립하므로

$f(x)=x+5$

$\therefore f(2)=7$

$\therefore a+f(2)=6+7=13$

답 ③

12. $P(x)=(x-3)Q_1(x)+8$, $Q_1(x)=(x-2)(x+3)+5$이므로

$P(x)=(x-3)\{(x-2)(x+3)+5\}+8$

$=(x-3)(x+3)(x-2)+5(x-3)+8$

$=(x^2-9)(x-2)+5x-7$

이때 $5x-7$의 차수가 x^2-9의 차수보다 낮으므로 $P(x)$를 x^2-9로 나누었을 때의 몫은 $x-2$이고 나머지는 $5x-7$이다.

따라서 $Q_2(x)=x-2,\ R(x)=5x-7$이므로

$Q_2(5)+R(4)=3+13=16$

답 ②

13. $c=1$일 때 $Q(x)=(x+1)^2$

다항식 $P(x)$는 다항식 $Q(x)$를 인수로 가져야 하므로 $P(-1)=-1+5-a+b=0$에서

$b=a-4$ ⋯ ㉠

이때

$P(x)=x^3+5x^2+ax+a-4$

$=(x+1)(x^2+4x+a-4)$

에서 $x^2+4x+a-4$도 $x+1$을 인수로 가져야 하므로

$1-4+a-4=0 \quad \therefore a=7$

$a=7$을 ㉠에 대입하면 $b=3$

$\therefore a+b=7+3=10$

답 ①

14. $P(x)=x^3+5x^2+ax+b,\ Q(x)=(x+c)^2$

다항식 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 7이므로 $P(-1)=7$에서

$-1+5-a+b=7$

$a-b=-3$ ⋯ ㉠

다항식 $P(x^2)$을 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 5이므로 $P(1)=5$에서

$1+5+a+b=5$

$a+b=-1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=1$

다항식 $Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 1이므로 $Q(-1)=1$에서

$(-1+c)^2=1$

$c-1=-1$ 또는 $c-1=1$

$\therefore c=0$ 또는 $c=2$ ⋯ ㉢

다항식 $Q(x^2)$을 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 9이므로 $Q(1)=9$에서

$(1+c)^2=9$

$c+1=-3$ 또는 $c+1=3$

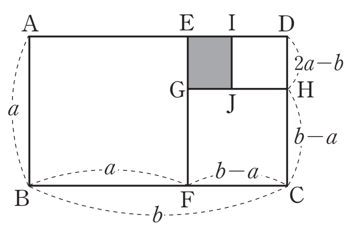
$\therefore c=-4$ 또는 $c=2$ ⋯ ㉣

㉢, ㉣에서 $c=2$

$\therefore abc=(-2)\times 1\times 2=-4$

답 ①

15.



위의 그림에서

$\overline{FC}=\overline{CH}=b-a$

$\overline{IJ}=\overline{JH}=\overline{DH}=a-(b-a)=2a-b$

$\overline{GJ}=(b-a)-(2a-b)=-3a+2b$

이므로 사각형 EGJI의 넓이는

$\overline{GJ}\times\overline{IJ}=(-3a+2b)(2a-b)$

$=-6a^2+7ab-2b^2$

이때 사각형 EGJI의 넓이가 $\frac{a^2}{8}$이므로

$-6a^2+7ab-2b^2=\frac{a^2}{8}$

$49a^2-56ab+16b^2=0$

$(7a-4b)^2=0$

위 식에서 $7a-4b=0$이므로 $\frac{b}{a}=\frac{7}{4}$

답 ④

16. 조건 ㈏에서 $b-c=t$로 놓으면

$(a+t)^2+(a-t)^2-4t^2=14(a-t)$

$2a^2-2t^2-14(a-t)=0$

$2(a-t)(a+t-7)=0$

이때 $a+c\neq b$에서 $a\neq b-c$이므로 $a\neq t$

$\therefore a+t=7$

즉, $a+b-c=7$이고, 조건 ㈎에서 $a+b=13$이므로

$c=6$

답 ②

17. 문제의 조건에서 $g(n)=f(6-n)$이 성립하므로

$$\begin{aligned}f(6-n)&=2(6-n)^2-8(6-n)+40\\&=2(36-12n+n^2)-(48-8n)+40\\&=72-24n+2n^2-48+8n+40\\&=2n^2-16n+64\end{aligned}$$

즉, $g(n)=2n^2-16n+64$이므로

$a=2,\ b=-16,\ c=64$

$\therefore a+2b+c=2+(-32)+64=34$

답 ⑤

18. 조건 ㈏에서

$$\begin{aligned}&a^3+a^2b+ab^2-ac^2-bc^2+b^3\\&=a^2(a+b)+b^2(a+b)-c^2(a+b)\\&=(a+b)(a^2+b^2-c^2)=0\end{aligned}$$

이때 $a+b>0$이므로

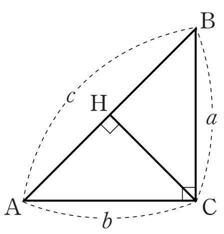
$a^2+b^2=c^2$

즉, 삼각형 ABC는 $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형이다.

조건 ㈎에서

$$\begin{aligned}c^2&=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab\\&=(\sqrt{15})^2-2\cdot3=9\end{aligned}$$

$\therefore c=3$



위의 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 점 H는 점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발이므로

$\overline{AB}\times\overline{CH}=\overline{BC}\times\overline{AC}$

$$\therefore \overline{CH}=\frac{\overline{BC}\times\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{ab}{c}=\frac{3}{3}=1$$

답 ③

19. 준비한 색종이의 총 넓이는 $15x^2+23x+5$이고 만들려는 직사각형의 가로의 길이는 $5x+1$이므로 색종이의 총 넓이를 가로의 길이로 나누면

$$\begin{array}{r}3x+4\\5x+1\,\overline{)\,15x^2+23x+5}\\\underline{15x^2+3x}\\20x+5\\\underline{20x+4}\\1\end{array}$$

$15x^2+23x+5=(5x+1)(3x+4)+1$

따라서 세로의 길이는 최대 $3x+4$가 될 수 있고 그때 한 변의 길이가 1인 정사각형 모양의 색종이가 1개 남음을 알 수 있다.

$\therefore ab=3\times4=12$

답 ⑤

20. $f(x)-2$는 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(x)-2=(x-1)^2(ax+b)$ (a, b는 상수) ⋯ ㉠

로 놓으면

$$\begin{aligned}&f(x)+2\\&=f(x)-2+4\\&=(x-1)^2(ax+b)+4\\&=(x^2-2x+1)(ax+b)+4\\&=(x^2+2x+1)(ax+b)-4x(ax+b)+4\\&=(x+1)^2(ax+b)+(\boxed{-4})(ax^2+bx-1)\end{aligned}$$

이때 $f(x)+2$가 $(x+1)^2$으로 나누어떨어지므로

$ax^2+bx-1=a(x+1)^2$

$ax^2+bx-1=ax^2+2ax+a$

이 식은 x에 대한 항등식이므로

$b=2a,\ -1=a$

$\therefore a=\boxed{-1},\ b=\boxed{-2}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$f(x)-2=(x-1)^2(-x-2)$

$\therefore f(x)=-x^3+3x$

따라서 $p=-4,\ q=-1,\ r=-2$이므로

$p+q+r=-7$

답 ④

21. ㄱ. $(x^6+x^4+x^2+1)^3$의 최고차항은 x^{18}이고 이때 계수는 1이므로 $f(18)=1$

또한 $(x^6+x^4+x^2+1)^3$의 상수항이 1이므로

$(x^7+x^5+x^3+x)^3=x^3(x^6+x^4+x^2+1)^3$

에서 $g(3)=1$

$\therefore f(18)+g(3)=2$ (참)

ㄴ. $(x^7+x^5+x^3+x)^3=x^3(x^6+x^4+x^2+1)^3$이므로 $(x^6+x^4+x^2+1)^3$에서 x^n의 계수는 $(x^7+x^5+x^3+x)^3$에서 x^{n+3}의 계수와 같다.

즉, $f(n)=g(n+3)$이다.

$\therefore f(4)=g(7)$ (참)

ㄷ. $(x^7+x^5+x^3+x)^3$

$=a_{21}x^{21}+a_{20}x^{20}+\cdots+a_1x+a_0$

이라 할 때 양변에 $x=1$을 대입하면

$$\begin{aligned}(1+1+1+1)^3&=a_{21}+a_{20}+\cdots+a_1+a_0\\&=64\end{aligned}$$

이때 $a_0=0$이므로

$g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(20)+g(21)$

$=64$ (참)

답 ⑤

22. $a=3+\sqrt{3},\ b=3-\sqrt{3}$에서

$a+b=6,\ a-b=2\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\therefore a^3-a^2b-ab^2+b^3&=a^2(a-b)-b^2(a-b)\\&=(a-b)(a^2-b^2)\\&=(a-b)^2(a+b)\\&=(2\sqrt{3})^2\times6\\&=72\end{aligned}$$

답 72

23. 나머지정리에 의하여 $xf(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 $2f(2)$이므로

$2f(2)=10\quad\therefore f(2)=5$

$x^3f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 $2^3f(2)$이므로

$2^3f(2)=8\cdot5=40$

답 40

24.

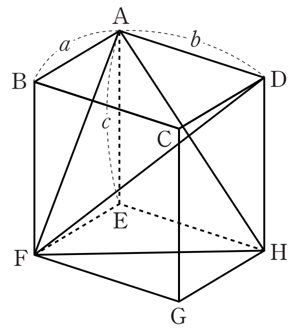
$$\begin{array}{r}x^2+x-1\\x^2+1\,\overline{)\,x^4+x^3-2x+1}\\\underline{x^4+x^2}\\x^3-x^2-2x+1\\\underline{x^3+x}\\-x^2-3x+1\\\underline{-x^2-1}\\-3x+2\end{array}$$

즉, $Q(x)=x^2+x-1,\ R(x)=-3x+2$이므로

$Q(2)+R(1)=5+(-1)=4$

답 4

25.



위의 그림과 같이 $\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=b$, $\overline{AE}=c$로 놓으면

$a+b+c=10$

세 직각삼각형 EFH, EHA, EAF의 넓이의 합이 9이므로

$\frac{1}{2}(ab+bc+ca)=9$

$\therefore ab+bc+ca=18$

이때 선분 FD의 길이는 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$이고

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\\&=10^2-2\cdot18=64\end{aligned}$$

$\therefore \sqrt{a^2+b^2+c^2}=8$

따라서 구하는 선분 FD의 길이는 8이다.

답 8

26. $f(x)$가 n차 다항식이면 $f(x+1)-f(x)$는 $(n-1)$차 다항식이므로

$f(x+1)-f(x)=2x+5$에서 $f(x)$는 이차식이다.

즉, $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓으면

$f(x+1)-f(x)$
$=a(x+1)^2+b(x+1)+c-(ax^2+bx+c)$
$=2ax+(a+b)$

$2ax+(a+b)=2x+5$에서

$2a=2$, $a+b=5$

$\therefore a=1$, $b=4$

$\therefore f(x)=x^2+4x+c$

따라서 $f(3)=21+c$, $f(-3)=-3+c$이므로

$f(3)-f(-3)=(21+c)-(-3+c)=24$

답 24

27. $f(x)=x^3+ax^2+bx+3$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^3+ax^2+bx+3=(x-1)Q(x)+4$

$x=1$을 대입하면

$1+a+b+3=4$ $\therefore a+b=0$ ⋯ ㉠

$x=-1$을 대입하면

$-1+a-b+3=-2Q(-1)+4$ ⋯ ㉡

그런데 $Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 -4이므로

$Q(-1)=-4$ ⋯ ㉢

㉡, ㉢에서

$a-b+2=12$ $\therefore a-b=10$ ⋯ ㉣

㉠, ㉣을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=-5$

$\therefore f(x)=x^3+5x^2-5x+3$

따라서 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2)=8+20-10+3=21$

답 21

28. $(x+1)^2g(x)=(x-1)^2g(x)+4xg(x)$이므로

$(x-1)^2f(x)+(x+1)^2g(x)=4x^2$에서

$(x-1)^2f(x)+(x-1)^2g(x)+4xg(x)=4x^2$
$(x-1)^2f(x)+(x-1)^2g(x)=4x^2-4xg(x)$
$(x-1)^2\{f(x)+g(x)\}=4x\{x-g(x)\}$

즉, $x-g(x)$는 $(x-1)^2$으로 나누어떨어진다.

그런데 $g(x)$는 이차식이므로

$x-g(x)=a(x-1)^2$ (a는 상수)

로 나타낼 수 있다.

이때 $g(0)=2$이므로

$-g(0)=a$ $\therefore a=-2$

$\therefore g(x)=x+2(x-1)^2=2x^2-3x+2$

$\therefore g(-2)=16$

답 16

29. $f(x)=x^3+ax-30$이라 하자.

부피는 가로의 길이, 세로의 길이, 높이의 곱이므로 $f(x)$는 $x+3$을 인수로 갖는다.

인수정리에 의해 $f(-3)=0$이므로

$(-3)^3-3a-30=0$

$-3a-57=0$ $\therefore a=-19$

$f(x)=x^3-19x-30$을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$f(x)=(x+3)(x+2)(x-5)$

두 물통의 부피가 모두 $f(x)$이므로 높이가 $x+3$인 물통의 밑면의 넓이는 $(x+2)(x-5)$, 높이가 $x+2$인 물통의 밑면의 넓이는 $(x+3)(x-5)$이다.

이때 $x>5$이고, 두 물통의 밑면의 넓이의 차가 8이므로

$(x+3)(x-5)-(x+2)(x-5)=8$
$(x-5)(x+3-x-2)=x-5=8$
$\therefore x=13$

답 13

30. $P(x)=x^4+(n-1)x^3+nx^2+(n-1)x+1$
$=x^4+(n-1)x^3+(n-1)x^2+x^2+(n-1)x+1$
$=(x^4+x^2+1)+(n-1)(x^3+x^2+x)$
$=(x^2+x+1)(x^2-x+1)+(n-1)x(x^2+x+1)$
$=(x^2+x+1)\{x^2+(n-2)x+1\}$

따라서 $k=n-2$에서 $n=k+2$이므로

$f(k)=k+2$

$\therefore f(10)+f(11)+f(12)=12+13+14=39$

답 39