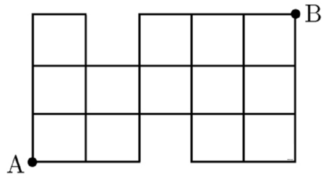
**1.** 여섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5에서 서로 다른 네 개를 이용하여 네 자리 자연수를 만들 때, 짝수의 개수는?

① 60 ② 108 ③ 156 ④ 214 ⑤ 180

**2.** 다섯 개의 알파벳 A, B, C, D, E 중에서 알파벳 A는 중복을 허락하지 않고, B, C, D, E는 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는?

① 52 ② 72 ③ 92 ④ 112 ⑤ 132

**3.** 다음 그림과 같은 도로망에서 A에서 B로 가는 최단 경로의 수는?




① 42 ② 46 ③ 50 ④ 52 ⑤ 54

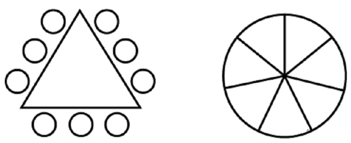
**4.** 1000보다 작은 자연수 중에서 23 또는 335와 같이 각 자리에 사용된 숫자가 2개인 자연수의 개수는?

① 300 ② 306 ③ 312 ④ 315 ⑤ 324

**5.** 8개의 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3을 일렬로 배열할 때, 맨 앞자리에는 1이 오고 맨 뒷자리에는 3이 오지 <u>않는</u> 경우의 수는?

① 30 ② 35 ③ 45 ④ 50 ⑤ 55

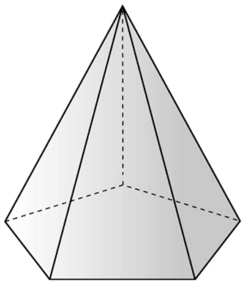
**6.** [그림1]과 같은 정삼각형 모양의 탁자에 9명이 둘러앉는 방법의 수를 $a$, [그림2]와 같이 7등분한 원판의 각 영역을 구분하여 7가지 무지개 색을 모두 이용하여 칠하는 방법의 수를 $b$라 할 때, $\frac{a}{b}$의 값은?



[그림 1] [그림 2]

① 8 ② 56 ③ 72 ④ 84 ⑤ 168

**7.** 그림과 같이 밑면은 정오각형이고 옆면은 모두 이등변 삼각형인 오각뿔이 있다. 이 정오각뿔의 각 면을 한 가지 색으로 칠할 때, 서로 다른 6가지의 색을 모두 사용하여 밑면과 옆면을 칠하는 경우의 수는?



① 48 ② 120 ③ 144
④ 600 ⑤ 720

**8.** 원형의 탁자 둘레에 놓인 같은 모양의 7개의 의자에 4명의 학생이 앉는 방법의 수는?

① 40 ② 60 ③ 80
④ 100 ⑤ 120

**9.** 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수는?

(가) $f(1) > f(2) = f(3)$
(나) $f(4) \le f(5)$

① 315 ② 480 ③ 540
④ 620 ⑤ 1890

**10.** 방정식 $x+y+z=4$를 만족시키는 $-2$ 이상의 $x$, $y$, $z$의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는?

① 15 ② 20 ③ 36
④ 66 ⑤ 220

**11.** $(a+b+c)^4$을 전개하였을 때 서로 다른 항의 개수는?

① 15 ② 20 ③ 36
④ 64 ⑤ 81

**12.** $A={}_{10}\mathrm{C}_0+3\,{}_{10}\mathrm{C}_1+3^2\,{}_{10}\mathrm{C}_2+\cdots+3^{10}\,{}_{10}\mathrm{C}_{10}$일 때, $\log_2 A$의 값은?

① 10 ② 15 ③ 20
④ 25 ⑤ 30

**13.** $\left(2x^2-\dfrac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 $x^5$의 계수는?

① $-24$ ② $-32$ ③ 36
④ 24 ⑤ 32

**14.** 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 눈의 수를 차례로 $m$, $n$이라고 하자. 등식 $i^{m+n}=-1$이 성립할 확률을 $\frac{q}{p}$ ($p$, $q$는 서로소인 자연수)라고 할 때, $p+q$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 3　② 4　③ 5
④ 7　⑤ 8

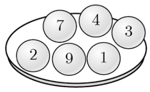
**15.** 5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 4개를 사용하여 만든 네 자리의 자연수 중 임의로 1개를 택하였을 때, 이 자연수가 3의 배수가 될 확률은?

① $\frac{3}{8}$　② $\frac{5}{12}$　③ $\frac{11}{24}$
④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{13}{24}$

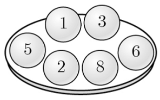
**16.** 두 선수 $A$, $B$가 경기를 하여 3번 먼저 이기는 사람이 상금을 모두 갖기로 하였다. 각 경기에서 $A$가 이길 확률은 $\frac{1}{3}$이고, $B$가 이길 확률은 $\frac{2}{3}$이다. 3번의 경기를 진행한 결과 $A$가 2승 1패로 이기고 있을 때, $A$가 상금을 모두 가질 확률은? (단, 비기는 경우는 없다.)

① $\frac{2}{27}$　② $\frac{4}{9}$　③ $\frac{13}{27}$
④ $\frac{5}{9}$　⑤ $\frac{17}{27}$

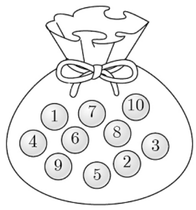
**17.** 주머니에 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 6개의 공을 동시에 꺼낼 때 꺼낸 공에 적혀 있는 자연수 중 연속된 자연수의 최대 개수가 4인 사건을 $A$라 하자.

예를 들어 

은 연속된 자연수의 최대 개수가 4이므로 사건 $A$에 속하고,



은 연속된 자연수의 최대 개수가 3이므로 사건 $A$에 속하지 않는다. 사건 $A$가 일어날 확률은?




① $\frac{5}{21}$　② $\frac{11}{42}$　③ $\frac{2}{7}$
④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{3}{7}$

**18.** 빨간 공 4개와 파란 공 2개가 들어 있는 상자 $A$가 있다. 상자 $A$에서 동시에 공 3개를 꺼내어 비어 있는 상자 $B$에 넣은 다음 다시 상자 $B$에서 공 1개를 꺼냈다. 상자 $B$에서 꺼낸 공이 파란 공이었을 때, 상자 $A$에서 상자 $B$로 옮겨진 공 3개가 빨간 공 2개와 파란 공 1개일 확률은?

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{5}$　③ $\frac{2}{5}$
④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{3}{5}$

**19.** 표본공간 $S$의 부분집합으로 $P(A)\neq 0$, $P(B)\neq 0$인 임의의 두 사건 $A$, $B$에 대하여, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $A$, $B$가 독립사건이면, 조건부확률 $P(A\mid B)$와 $P(B\mid A)$는 같다.
ㄴ. $A$, $B$가 배반사건이면, $P(A)+P(B)\leq 1$이다.
ㄷ. $A$, $B$가 독립사건이면, $A$, $B$는 배반사건이다.
ㄹ. $A$, $B$가 배반사건이면, $P(B\mid A)=0$이다.

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄹ
④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

## 서술형

**20.** 1에서 999까지의 자연수 중 0을 한 개 포함하는 수들의 개수를 $a$개, 0을 두 개 포함하는 수들의 개수를 $b$개라 할 때, $\dfrac{a}{b}$의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

**21.** 서로 다른 두 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수를 각각 $a$, $b$라 하자. 두 함수 $f(x)=x^2+2ax+b$, $g(x)=2x+1$일 때, 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $f(x)\geq g(x)$가 성립할 확률을 구하시오.

**22.** 집합 $X=\{a,\ b,\ c,\ d\}$의 부분집합 중에서 임의로 서로 다른 두 집합을 동시에 택할 때, 두 집합의 합집합이 집합 $X$가 될 확률을 구하시오.

**23.** 7개의 숫자 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5 중 일부 또는 전부를 택하여 곱하였을 때 만들어질 수 있는 서로 다른 수의 개수를 구하시오.

**24.** 이길 확률이 같은 두 사람 A, B가 게임을 하여 먼저 5번 이기는 사람이 상금을 모두 갖기로 하였다. 5번의 게임에서 A가 3번, B가 2번 이겼을 때, A가 상금을 모두 가질 확률을 구하시오.
(단, 비기는 경우는 없다.)

**25.** $A$와 $B$ 두 사람이 이길 확률은 같고, 비기는 경우는 없는 게임을 하여 6번 먼저 이기는 사람이 상금을 전부 갖기로 하였다. 그런데 7번의 게임에서 $A$가 4번 $B$가 3번 이겼을 때, 지진으로 경기장이 파괴되어 게임을 중지하였다고 한다. 만약에 위에서 중단된 게임이 다시 시작되었다고 한다면, 다음을 구하여라.

(1) $A$가 상금을 전부 가질 확률을 구하시오.

(2) $B$가 상금을 전부 가질 확률을 구하시오.

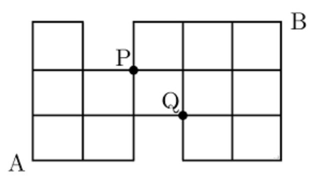
(3) 중지된 상태로 게임이 끝났을 때, 총 800만원의 상금을 어떻게 분배하는 것이 확률적으로 타당한지 구하시오.

## 정답 및 풀이

1) ③
일의 자리의 숫자가 0 또는 2 또는 4일 때 짝수가 된다.
( i ) 일의 자리의 숫자가 0인 경우
천의 자리에 올 수 있는 숫자는 5가지
백의 자리에 올 수 있는 숫자는 4가지
십의 자리에 올 수 있는 숫자는 3가지
이므로 이때의 짝수의 개수는 $5\times4\times3=60$
( ii ) 일의 자리의 숫자가 2 또는 4인 경우
천의 자리에 올 수 있는 숫자는 4가지
백의 자리에 올 수 있는 숫자는 4가지
십의 자리에 올 수 있는 숫자는 3가지
이므로 이때의 짝수의 개수는 $2\times(4\times4\times3)=96$
따라서 구하는 짝수의 개수는 $60+96=156$

2) ④
( i ) 알파벳 $A$를 포함하지 않는 경우
서로 다른 알파벳 $B, C, D, E$중 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하면 된다.
그러므로 경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수이므로 ${}_4\Pi_3=4^3=64$
( ii ) 알파벳 $A$를 포함하는 경우
우선 서로 다른 알파벳 $B,C,D,E$중 중복을 허락하여 2개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복순열의 수이므로
${}_4\Pi_2=4^2=16$
이 각각에 대하여 그림과 같이 ∨로 표시된 세 곳 중 한 곳에 $A$를 넣으면 되므로 경우의 수는 3이다.
∨□∨□∨
그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$16\times3=48$
( i ), ( ii )에 의하여 $64+48=112$

3) ①




( i ) $A\to P\to B$인 경우의 수는 $\frac{4!}{2!\,2!}\times\frac{4!}{3!}=24$

( ii ) $A\to Q\to B$인 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}\times1\times\frac{4!}{2!\,2!}=18$

( i ), ( ii )에 의해 구하는 경우의 수는 $24+18=42$

4) ⑤
1부터 9까지의 자연수를 사용하여 두 자리 숫자를 만드는 경우의 수 ${}_9P_2=72$
$10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90$ 총 9가지
1부터 9까지의 자연수를 사용하여 각 자리에 사용된 숫자가 2개인 세 자리 숫자를 만드는 경우의 수는 ${}_9C_2\times\frac{3!}{2!}\times2=216$가지
0을 한 개사용하여 각 자리에 사용된 숫자가 2개인 세 자리 숫자를 만드는 경우의 수는
$101, 110, 202, 220, 303, 330,$
$404, 440, 505, 550, 606, 660, 707, 770, 808, 880, 909, 990$
의 총 18가지
0을 두 개 사용하여 각 자리에 사용된 숫자가 2개인 세 자리 숫자를 만드는 경우의 수는
$100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900$의 총 9가지
따라서 구하는 경우의 수는
$72+9+216+18+9=324$

5) ③
맨 뒷자리에 1이 오는 경우의 수는 $\frac{6!}{2!4!}=15$

맨 뒷자리에 2이 오는 경우의 수는 $\frac{6!}{4!}=30$

따라서 구하는 경우의 수는
$15+30=45$

6) ⑤
9명을 원형으로 배열하는 방법의 수는
$(9-1)!=8!$
이때 정삼각형 모양의 탁자에서는 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 서로 다른 경우가 3가지씩 존재한다.
$\therefore a=8!\times3$
7가지 색을 원판의 각 영역에 칠하는 방법의 수는
$b=(7-1)!=6!$
$\therefore \frac{a}{b}=\frac{8!\times3}{6!}=168$

7) ③
정오각뿔의 밑면을 칠하는 방법의 수는 6이고, 나머지 5가지 색을 옆면에 칠하는 방법의 수는
$(5-1)!=4!=24$
따라서 구하는 방법의 수는
$6\cdot24=144$

8) ⑤
구하는 경우의 수는 4명의 학생 중 1명을 원형의 탁자에 앉은 후, 남은 3명의 학생을 남은 6개의 자리에 앉는 경우의 수와 같으므로 ${}_6P_3=120$

9) ⑤
조건 (가)를 만족시키는 경우의 수는 ${}_6C_2=15$
조건 (나)를 만족시키는 경우의 수는 ${}_6H_2={}_7C_2=21$
$X$의 원소 6을 대응시키는 경우의 수는 6

따라서 구하는 함수의 개수는 $15 \cdot 21 \cdot 6 = 1890$

10) ④

$x=a-2,\ y=b-2,\ z=c-2$

($a, b, c$는 음이 아닌 정수)

라 하고 $x+y+z=4$에 대입하면 $a+b+c=10$이다.

$a+b+c=10$ ($a, b, c$는 음이 아닌 정수)을

만족시키는 순서쌍 $(a, b, c)$의

개수는 ${}_3H_{10} = {}_{12}C_{10} = 66$

따라서 구하는 순서쌍 $(x, y, z)$의 개수는 66개다.

11) ①

$(a+b+c)^4$을 전개했을 때 항을 $a^A b^B c^C$라 하면

$A+B+C=4$이고 $A, B, C \geq 0$이다. 각 $(A, B, C)$에

대해 서로 다른 항이 나오므로 항의 개수는

$(A, B, C)$의 개수와 같고, 이는 ${}_3H_4 = {}_6C_4 = 15$개다.

12) ③

$A = {}_{10}C_0 + 3\,{}_{10}C_1 + 3^2\,{}_{10}C_2 + \cdots + 3^{10}\,{}_{10}C_{10}$

$= (1+3)^{10} = 4^{10} = 2^{20}$

$\therefore \log_2 A = \log_2 2^{20} = 20$

13) ②

$\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r (2x^2)^{4-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r = {}_4C_r 2^{4-r}(-1)^r x^{8-3r}$

$x^5$항은 $8-3r=5$일 때이므로 $r=1$

따라서 $x^5$의 계수는 ${}_4C_1 2^3 (-1)^1 = -32$

14) ③

$i^4 = 1,\ \therefore i^6 = -1,\ i^{10} = -1$

$m+n = 6,\ 10$

$(m,n) = (1,1), (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)$

$(4,6), (5,5), (6,4)$

$\therefore \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$가 된다.

15) ①

각 자리의 값을 $a,b,c,d$라고 하면

네 자리수를 만드는 가짓수는 $4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$

$a+b+c+d=3k$가 되어야 하니

$0, 1, 2, 3$ 인 경우 나열하는 가짓수는 $3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$

$0, 2, 3, 4$ 인 경우도 18가지이므로

구하는 확률은 $\frac{36}{96} = \frac{3}{8}$이 된다.

16) ④

$A$가 상금을 모두 가지려면

3회까지 2승1패의 상황이니 4회에서 $A$가 이기거나

5회에서 $A$가 이겨야 한다.

그러므로 구하는 확률은

$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$이다.

17) ①

연속된 자연수가 네 개가 되는 경우는

$1,2,3,4/2,3,4,5/\cdots/7,8,9,10$

알곱 가지의 경우가 있고

$1,2,3,4$와 $7,8,9,10$의 경우 연속되는 수가 다섯 개가 되지

않기 위해서 $4, 7$의 연속된 수를 제외한 수에서 공을

선택해야 하니 $2 \times {}_5C_2$ 이고

그 나머지 경우는 양쪽의 연속되는 수를 제외한 수에서

공을 선택해야 하니 $5 \times {}_4C_2$ 가 되어

구하는 확률은 $\frac{2 \times {}_5C_2 + 5 \times {}_4C_2}{{}_{10}C_6} = \frac{5}{21}$이다.

18) ⑤

i ) $A$상자에서 빨간공을 3개 뽑을 확률은

$\frac{{}_4C_3}{{}_6C_3} = \frac{1}{5}$

ii ) 빨간공을 2개 파란공을 1개 뽑을 확률은

$\frac{{}_4C_2 \times {}_2C_1}{{}_6C_3} = \frac{3}{5}$

iii ) 빨간공을 1개 파란공을 2개 뽑을 확률은

$\frac{{}_4C_1 \times {}_2C_2}{{}_6C_3} = \frac{1}{5}$

따라서 $B$상자에서 꺼낸 공이 파란공일 확률은

ii )의 경우에서 $\frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$

iii )의 경우에서 $\frac{1}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$

따라서 총 확률은 $\frac{1}{5} + \frac{2}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

$B$상자에서 꺼낸 공이 파란공이였을 때 옮겨진 공 3개가

빨간공 2개와 파란공 1개인 확률은

$\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{5}$이다.

19) ④

ㄱ. $A$, $B$가 독립사건이면 $P(A|B) = P(A)$이고,

$P(B|A) = P(B)$이므로 서로 같지 않다. (거짓)

ㄴ. $A$, $B$가 배반사건이면 $P(A \cap B) = 0$이므로

$P(A) + P(B) = P(A \cup B) \leq 1$ (참)

ㄷ. $A$, $B$가 독립사건이면 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$가 성립한다.

그런데 $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$이므로 $P(A \cap B) \neq 0$이다.

따라서 $A$, $B$는 배반사건이 될 수 없다. (거짓)

ㄹ. $A$, $B$가 배반사건이면 $P(A \cap B) = 0$이므로

$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 0$이다. (참)

20) 19

( i ) 두 자리 자연수에 0을 한 개 포함하는 경우의 수는 9

( ii ) 세 자리 자연수에 0을 한 개 포함하는 경우의 수는

일의 자리에 0인 경우 $9^2=81$

십의 자리에 0인 경우 $9^2=81$

따라서 0을 한 개 포함하는 경우의 수는

$a=9+81+81=171$

세 자리 자연수에 0을 두 개 포함하는 경우의 수는 $b=9$

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{171}{9}=19$

21) $\frac{13}{36}$

$f(x) \geq g(x)$

$\therefore x^2+2(a-1)x+b-1 \geq 0$

$D/4=(a-1)^2 \leq b-1$

$\therefore (a,b)=(1,1)\sim(1,6)$
$(2,2)\sim(2,6)$
$(3,5),(3,6)$

총 13개이니 구하는 확률은 $\frac{13}{36}$이다.

22) $\frac{2}{3}$

집합 $X$의 부분집합 개수는 $2^4=16$개이고

문제의 조건을 만족하는 경우는 $3^4-1=80$가지

이므로 구하는 확률은 $\frac{80}{{}_{16}C_2}=\frac{2}{3}$이다.

23) 53

7개의 숫자 $2,3,3,4,4,5,5$중 일부 또는 전부를 택하여 곱하였을 때 만들어질 수 있는 서로 다른 수의 개수는 $2\times3^2\times4^2\times5^2$의 약수의 개수에서 1을 뺀 수이다.

따라서 $2,3,3,4,4,5,5$를 이용하여 약수 1은 만들 수 없으므로 구하는 개수는

$(1+1)(2+1)(2+1)(2+1)-1=2\times3\times3\times3-1$

$=54-1=53$

24) $\frac{11}{16}$

( i ) 7번째 게임에서 A가 상금을 모두 가지는 경우

A가 6번째, 7번째 게임에서 모두 이겨야 하므로 확률은

$${}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

( ii ) 8번째 게임에서 A가 상금을 모두 가지는 경우

A가 6번째, 7번째 게임 중에서 1번 이기고 8번째 게임에서 이겨야 하므로 확률은

$${}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

(iii) 9번째 게임에서 A가 상금을 모두 가지는 경우

A가 6번째, 7번째, 8번째 게임 중에서 1번 이기고 9번째 게임에서 이겨야 하므로 확률은

$${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$$

이상에서 구하는 확률은 $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}=\frac{11}{16}$

25) (1) $\frac{11}{16}$ (2) $\frac{5}{16}$ (3) $A$ : 550(만원), $B$ : 250(만원)

6번을 먼저 이겨야 게임에서 승리하므로 $A$는 2번, $B$는 3번을 더 이겨야 한다.

(1) $A$가 게임에서 승리할 확률은

$\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+{}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}=\frac{11}{16}$

(2) $B$가 게임에서 승리할 확률은 $1-\frac{11}{16}=\frac{5}{16}$

(3) $A$와 $B$가 게임에서 승리할 확률은 각각 $\frac{11}{16}, \frac{5}{16}$이므로

총 800만원의 상금은

$A$가 $800\cdot\frac{11}{16}=550$(만원) , $B$가 $800\cdot\frac{5}{16}=250$(만원)

으로 분배하는 것이 확률적으로 타당하다.