1. 집합 $X=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$일 때, 다음 두 조건을 모두 만족시키는 함수 f의 개수는?

(가) f는 X에서 X로의 함수

(나) X의 임의의 원소 x에 대하여

$f(x)\{\{f(x)\}^2-1\}=0$이다.

① 144 ② 169 ③ 243
④ 289 ⑤ 625

2. 세 숫자 0, 1, 2를 중복 사용하여 네 자리의 자연수를 만들 때, 0, 1이 모두 포함되어 있는 자연수의 개수는?

① 29 ② 30 ③ 31
④ 32 ⑤ 33

3. 9개의 문자 h, a, p, p, i, n, e, s, s를 일렬로 배열할 때, 양쪽 끝에 s가 오고 모음 a, e, i 끼리는 이웃하도록 배열하는 경우의 수는?

① 360 ② 365 ③ 370
④ 375 ⑤ 380

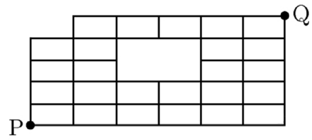
4. 다음 조건을 모두 만족하는 x_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$에 대하여 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_9)$의 개수를 구하면?

(가) x_i는 $-2,\ 2,\ 5$ 중에서 어느 하나의 값이다.

(나) $x_1+x_2+\cdots+x_9=10$

① 162 ② 182 ③ 202
④ 222 ⑤ 242

5. 그림과 같은 도로망이 있다. 지점 P에서 지점 Q까지 가는 최단 경로의 수를 구하면?



① 258 ② 260 ③ 261
④ 262 ⑤ 264

6. 어른 3명, 아이 5명이 원탁에 앉을 때, 어른이 이웃하지 않는 방법의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

① $4!\times3!$ ② $4!\times{}_5P_3$ ③ $4!\times{}_5C_3$
④ $5!\times{}_5P_3$ ⑤ $5!\times{}_5C_3$

7. 남학생 4명과 여학생 3명이 원형의 탁자에 앉을 때, 3명의 남학생은 서로 이웃하고 남은 1명의 남학생은 다른 남학생과 서로 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

① 48 ② 72 ③ 96
④ 144 ⑤ 288

8. 8개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7을 중복으로 사용하여 앞에서부터 절반까지의 숫자의 합과 나머지 절반의 숫자의 합이 같은 번호를 만들려고 한다. 예를 들어 두 개의 숫자로 이루어진 번호들 중에서 주어진 조건을 만족하는 번호는 00, 11, 22, 33, 44, ⋯, 77과 같이 8개 만들 수 있다고 할 때, 네 개의 숫자로 이루어진 번호 중에서 위의 조건을 만족하는 번호의 개수를 구하면?

① 680 ② 540 ③ 428
④ 344 ⑤ 336

9. 방정식 $x+y+z=9$를 만족시키는 -2 이상의 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는?

① 10 ② 35 ③ 81
④ 112 ⑤ 136

10. 크기와 모양이 같은 빨간 공, 노란 공, 파란 공이 각각 15개씩 들어 있는 주머니에서 12개의 공을 동시에 꺼낼 때, 빨간 공은 3개 이상, 노란 공은 2개 이상, 파란 공은 1개 이상을 꺼내는 경우의 수는?

① 28 ② 30 ③ 32
④ 34 ⑤ 36

11. $x \neq 0$일 때, 다항식 $(1+x^3)+(1+x^3)^2+(1+x^3)^3+\cdots+(1+x^3)^{10}$의 전개식에서 x^9의 계수는?

① 240 ② 330 ③ 380
④ 410 ⑤ 540

12. 다항식 $(a+b)^5$에서 a^2b^3의 계수는?

① 1 ② 5 ③ 10
④ 15 ⑤ 20

13. 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이고 $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{4}$일 때, $P(A \cup B)$의 값은?

① $\frac{7}{8}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{8}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{8}$

14. 서로 배반인 두 사건 A, B에 대하여 $P(A \cap B^C)=\frac{1}{8}$, $P(A \cup B)=\frac{3}{4}$일 때, $P(B)$를 구하면?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

15. 어느 마을에서 사과를 재배하는 가구는 전체의 $\frac{2}{3}$, 감을 재배하는 가구는 전체의 $\frac{3}{4}$, 사과와 감을 모두 재배하는 가구는 전체의 $\frac{1}{2}$이다. 이 마을에서 임의로 한 가구를 택할 때, 그 가구가 사과 또는 감을 재배하는 가구일 확률을 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

16. A, B, C, D 네 사람의 생일이 모두 6월일 때, 적어도 두 사람의 생일이 같을 확률은? (단, 6월 한 달은 30일이다.)

① 9.2% ② 18.8% ③ 23.6%
④ 45.3% ⑤ 57.8%

17. 집합 $X=\{a,\ b,\ c\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $Z=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 조건 (가)를 만족시키는 모든 함수 $f:X\to Y$ 중에서 임의로 하나를 선택하고, 조건 (나)를 만족시키는 모든 함수 $g:Y\to Z$ 중에서 임의로 하나를 선택하여 합성함수 $g\circ f:X\to Z$를 만들 때, 이 합성함수의 치역이 Z가 아닐 확률은?

(가) X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$이다.

(나) g의 치역은 Z이다.

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{2}{7}$

18. 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. 이차함수 $f(x)=x^2-7x+10$에 대하여 $f(a)f(b)=0$이 성립할 확률을 k라 할 때, $9k$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

19. 한 개의 주사위를 한 번 던지는 시행에 대하여 네 사건 A, B, C, D가 <보기>와 같을 때, 독립인 것은?

| 보기 |

A : 짝수의 눈이 나오는 경우
B : 홀수의 눈이 나오는 경우
C : 3의 배수가 나오는 경우
D : 4의 약수가 나오는 경우

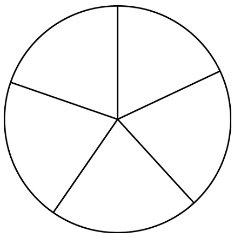
① A와 B ② A와 D ③ B와 C
④ B와 D ⑤ C와 D

20. 주머니 A에는 검은 공 4개, 흰 공 3개, 주머니 B에는 검은 공 2개, 흰 공 3개가 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내고 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 서로 상대 주머니에 넣었다. 공을 서로 교환한 후 두 주머니 A, B에 들어 있는 검은 공과 흰 공이 각각 3개씩일 때, 흰 공이 서로 교환되지 않았을 확률은? (단, 모든 공은 크기와 모양이 같다.)

① $\frac{1}{35}$ ② $\frac{1}{36}$ ③ $\frac{1}{37}$
④ $\frac{1}{38}$ ⑤ $\frac{1}{39}$

서술형

21. 다음 그림과 같이 한 원을 5등분하여 서로 다른 5가지 색의 전부 또는 일부를 사용하여 모든 면을 칠하려 한다. 인접한 부분은 서로 같은 색을 칠하지 않는다고 할 때, 원을 색칠하는 방법은 모두 몇 가지인지 구하고, 그 과정을 서술하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



22. $\left(x^2 - \dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식에서 상수항을 구하시오.

23. 흰 공 3개와 검은 공 2개가 들어 있는 주머니가 있다. 한 개의 동전을 던져서 앞면이 나오면 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내고, 뒷면이 나오면 검은 공 1개를 주머니에 넣은 후 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낸다. 이 시행을 2번 반복할 때, 꺼낸 공이 모두 흰 공일 확률을 구하시오. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

24. 올해 배구 시즌 경기에서의 상대전적을 계산한 결과 A팀이 B팀을 이길 확률이 $\dfrac{2}{3}$라고 한다. 두 팀이 7번의 경기 중 4번 먼저 이기는 팀이 우승하는 챔피언결정전에서 만나 우승을 다툴 때, A팀이 6차전에서 이겨 우승할 확률을 구하시오. (단, 비기는 경기는 없다고 한다.)

25. 세 사건 A, B, C에 대하여 A와 B는 서로 독립이고, A와 C는 서로 배반사건이다. $P(A \cap B) = \dfrac{1}{12}$, $P(A \cup C) = \dfrac{3}{5}$, $P(B) = \dfrac{1}{3}$일 때, $P(C)$의 값을 구하시오.

정답 및 풀이

1) ③

조건(나)에서

$0=f(x)\{(f(x))^2-1\}=f(x)(f(x)-1)(f(x)+1)$

이므로 $f(x)=0$ 또는 $f(x)=1$또는 $f(x)=-1$이다.

따라서 구하는 함수f의 개수는 $3^5=243$

2) ③

세 숫자 $0, 1, 2$를 중복 사용하여 만들 수 있는

네 자리의 자연수의 개수는 $2\cdot3\cdot3\cdot3=54$

0을 사용하지 않고, 두 숫자 $1, 2$를 중복 사용하여

만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

$2\cdot2\cdot2\cdot2=16$

1을 사용하지 않고, 두 숫자 $0, 2$를 중복 사용하여

만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

$1\cdot2\cdot2\cdot2=8$

1, 0을 모두 사용하지 않고 2를 중복 사용하여

만들 수 있는 제 자리의 자연수의 개수는 1

따라서 구하는 자연수의 개수는

$54-(16+8)+1=31$

3) ①

양쪽 끝에 s를 배열한 후, 모음 a, e, i의 3개를 한 묶음으로 생각하여 이 묶음과 문자 h, p, p, n을

일렬로 나열하는 방법의 수는 $\frac{5!}{2!}=60$

모음 a, e, i의 3개의 자리를 바꾸어 앉는 방법의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는 $60\cdot6=360$

4) ①

$-2, 2, 5$의 개수를 각각 a, b, c라고 하면

$a+b+c=9$

$-2a+2b+5c=10$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $4b+7c=28$

이를 만족시키는 b, c의 값은

$b=0,\ c=4$ 또는 $b=7,\ c=0$

(i) $b=0,\ c=4$일 때 $a=5$

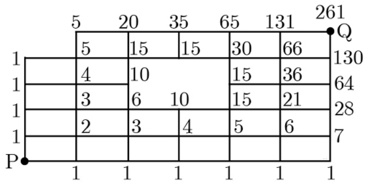
이를 만족시키는 경우의 수는 $\frac{9!}{4!5!}=126$

(ii) $b=7,\ c=0$일 때 $a=2$

이를 만족시키는 경우의 수는 $\frac{9!}{7!2!}=36$

따라서 구하는 경우의 수는 $126+36=162$

5) ③



따라서 구하는 최단 경로의 수는 261가지이다.

6) ②

아이 5명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(5-1)!=4!$

아이와 아이 사이의 5개의 자리 중에서 3개를 택하여 어른을 앉히는 방법의 수는 ${}_5P_3$

따라서 구하는 방법의 수는 $4!\times{}_5P_3$

7) ⑤

남학생 3명을 택하는 경우의 수는 ${}_4C_3={}_4C_1=4$

이 남학생 3명을 한 묶음으로 생각하여 이 묶음과

여학생 3명을 원형의 탁자에 앉히는 방법의 수는

$3!=6$

묶은 남학생 3명이 자리를 바꾸어 앉는 방법의

수는 $3!=6$

남은 한 명의 남학생을 여학생과 여학생 사이에

앉히는 방법의 수는 ${}_2P_1=2$

따라서 구하는 방법의 수는 $4\cdot6\cdot6\cdot2=288$

8) ④

네 자리 수의 행운 번호를 $ABCD$라고 하면

$A+B=C+D,\ \ A, B, C, D\in\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$이다. 이때 $ABCD$는 $AB(7-C)(7-D)$에 하나씩 대응 시킬 수 있으므로

$A=x, B=y, 7-C=z,\ \ 7-D=w$ 라고 하면

$x+y+z+w=14$을 만족한다.

따라서 조건을 만족하는 번호의 개수는 방정식

$x+y+z+w=14, x, y, z, w\in\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의

해의 개수와 같다.

$x+y+z+w=14$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_4H_{14}={}_{17}C_{14}={}_{17}C_3=680$

이때 $x\geq8$인 경우의 음이 아닌 정수해의 개수는

$x=x'+8$이라고 할 때 $x'+y+z+w=6$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로 ${}_4H_6={}_9C_6={}_9C_3=84$

이다.

같은 방법으로 $y\geq8,\ \ z\geq8,\ \ w\geq8$인 경우의 음이

아닌 정수해의 개수도 각각 84이므로 구하는 해의

개수는 $680-4\times84=344$

9) ⑤

$x, y, z\geq-2$이므로

$x+2=X, y+2=Y, z+2=Z$라 하면 $X, Y, Z\geq0$이다. 이 때

$X+Y+Z=(x+2)+(y+2)+(z+2)=x+y+z+6=15$

이다. 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 (X, Y, Z)의 개수와 같고 이는 ${}_3H_{15} = {}_{17}C_{15} = \frac{17 \cdot 16}{2 \cdot 1} = 136$이다.

10) ①
꺼낸 빨간 공의 개수를 x, 노란 공의 개수를 y, 파란 공의 개수를 z개라 하면 $x+y+z=12$이다.
또한 $x \geq 3, y \geq 2, z \geq 1$이므로
$X=x-3, Y=y-2, Z=z-1$이라 두면
$X+Y+Z=6, X, Y, Z \geq 0$이다. 따라서 이를 만족하는 (X, Y, Z)의 개수는 ${}_3H_6 = {}_8C_6 = 28$개고
이는 (x, y, z)의 개수와 같다.

11) ②
$(1+x^3)+(1+x^3)^2+\cdots+(1+x^3)^{10}$ ······㉠
㉠은 첫째항이 $1+x^3$, 공비가 $1+x^3$, 항수가 10인 등비수열의 합이므로
$$\frac{(1+x^3)\{(1+x^3)^{10}-1\}}{(1+x^3)-1} = \frac{(1+x^3)^{11}-(1+x^3)}{x^3} \quad \cdots\cdots ㉡$$
㉠의 전개식에서 x^9의 계수는 ㉡의 $(1+x^3)^{11}$의 전개식에서 x^{12}의 계수와 같다.
$(1+x^3)^{11}$의 전개식의 일반항이 ${}_{11}C_r(x^3)^r = {}_{11}C_r x^{3r}$
이므로 $3r=12$에서 $r=4$
따라서 구하는 계수는 ${}_{11}C_4 = 330$이다.

12) ③
$(a+b)^5$의 전개식의 일반항은 ${}_5C_r a^{5-r}b^r$
a^2b^3항은 $r=3$일 때이므로 a^2b^3의 계수는
${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$

13) ②
두 사건은 배반이니
$P(A \cap B) = 0$
$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{4}$$
가 된다.

14) ⑤
두 사건이 배반이니 $P(A \cap B) = 0$이고
$P(A)+P(B) = \frac{3}{4}$, $P(A \cap B^c) = P(A) = \frac{1}{8}$
$\therefore P(B) = \frac{5}{8}$이다.

15) ⑤
사과를 재배하는 가구, 감을 재배하는 가구를 각각 A, B라하면 구해야 하는 확률은
$P(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{11}{12}$가 된다.

16) ②
1−(모두 다른 생일일 확률)
$= 1 - \frac{30 \times 29 \times 28 \times 27}{30^4} = \frac{47}{250} = 18.8\%$ 이다.

17) ②
합성함수 $g \circ f$를 만들 때, 이 합성함수의 치역이 Z일 확률은
$$\frac{3! \times 3}{{}_4C_2 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} \times 3!} = \frac{1}{2}$$
이므로 치역이 Z가 아닐 확률은 $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

18) ⑤
$f(x) = (x-5)(x-2) = 0$
$\therefore x = 5, 2$
즉, 5, 2의 눈이 나오면 된다.

따라서 확률 $k = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} - \frac{4}{36} = \frac{5}{9}$ 이다.

19) ③
한 개의 주사위를 던졌을 때 홀수가 나오는 사건은 $\{1, 3, 5\}$이므로 $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
또, 3의 배수가 나오는 사건은 $\{3, 6\}$이므로
$P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
따라서 $P(B \cap C) = \frac{1}{6} = P(B)P(C)$이므로
두 사건 B와 C는 서로 독립이다.

20) ③
교환되는 공의 개수를 표로 나타내면 다음과 같다.

주머니 A	주머니 B	확률
검은 공 1 흰 공 2	흰 공 2	$\frac{{}_4C_1 \times {}_3C_2}{{}_7C_2} \times \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{36}{350}$
검은 공 2 흰 공 1	검은 공 1 흰 공 1	$\frac{{}_4C_2 \times {}_3C_1}{{}_7C_2} \times \frac{{}_3C_1 \times {}_2C_1}{{}_5C_2} = \frac{108}{350}$
검은 공 3	흰 공 2	$\frac{{}_4C_3}{{}_7C_2} \times \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{4}{350}$

따라서 구하는 확률은
$$\frac{\frac{4}{350}}{\frac{36}{350} + \frac{108}{350} + \frac{4}{350}} = \frac{4}{148} = \frac{1}{37}$$

21) 204
i) 5가지 색 사용 : $4!$
ii) 4가지 색 사용 : ${}_5C_4 \times 4 \times 3! = 120$
iii) 3가지 색 사용 : ${}_5C_3 \times 3 \times 2 = 60$
따라서 $24 + 120 + 60 = 204$

22) 240

$\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_r\,(x^2)^{6-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r = {}_6C_r\,(-2)^r x^{12-3r}$

상수항은 $12-3r=0$일 때이므로 $r=4$

따라서 상수항은 ${}_6C_4\,(-2)^4=240$

23) $\frac{17}{75}$

동전을 던져서 나온 면에 따른 확률을 구해보면 다음과 같다.

첫 번째	두 번째	확률
앞면	앞면	$\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{4}\right)=\frac{3}{40}$
앞면	뒷면	$\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\right)=\frac{3}{50}$
뒷면	앞면	$\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{20}$
뒷면	뒷면	$\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}\right)=\frac{1}{24}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{40}+\frac{3}{50}+\frac{1}{20}+\frac{1}{24}=\frac{17}{75}$

24) $\frac{160}{729}$

여섯 번째 경기에서 A팀이 우승하려면 A팀은 5번의 경기에서 3번 이기고 마지막 여섯 번째 경기에서도 이겨야 한다.

따라서 구하는 확률은 ${}_5C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}=\frac{160}{729}$

25) $\frac{7}{20}$

두 사건 A, B가 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$에서 $\frac{1}{12}=\frac{1}{3}P(A)$

$\therefore P(A)=\frac{1}{4}$

두 사건 A, C가 배반이므로

$P(A\cup C)=P(A)+P(C)=\frac{3}{5}$

$\frac{1}{4}+P(C)=\frac{3}{5}\quad\therefore P(C)=\frac{7}{20}$