수학 영역

1. $x^2-4x+y^2=0$에서

$x^2-4x+4+y^2=4$

$(x-2)^2+y^2=2^2$

따라서 이 원의 중심의 좌표는 $(2,\ 0)$이다.

답 ④

2. 다항식 $(2x+3)^3$의 전개식에서 x항은

$3\times2x\times3^2=54x$

이므로 x의 계수는 54이다.

답 ⑤

3. $\bar{z}=2+3i$이므로

$z+2\bar{z}=(2-3i)+2(2+3i)$

$=2-3i+4+6i=6+3i$

답 ④

4. 나머지정리에 의해 $f(3)=2$이므로 다항식 $(x+4)f(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지는

$(3+4)f(3)=7f(3)=7\times2=14$

답 ②

5. 기울기가 -2이고 점 $(-3,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=-2(x+3)$

$\therefore y=-2x-4$

따라서 구하는 직선의 y절편은 -4이다.

답 ②

6. 이차방정식 $2x^2+2(a-2)x+a+10=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(a-2)^2-2(a+10)\le0$

$a^2-6a-16\le0$

$(a+2)(a-8)\le0$

$\therefore -2\le a\le8$

즉, 실수 a의 최댓값은 8, 최솟값은 -2이다.

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 6이다.

답 ③

7. 직선 $ax+y-5=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-ax-y-5=0$, 즉 $ax+y+5=0$

이 직선을 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$ax+y-b+5=0$ ⋯ ㉠

㉠이 $-3x+y=0$과 같으므로

$a=-3$

$-b+5=0$에서 $b=5$

$\therefore a+b=-3+5=2$

답 ②

8. 점 C의 좌표는 $\left(\frac{3}{n+1},\ 0\right)$이고 삼각형 OCB의 무게중심 G의 좌표는 $\left(\frac{1}{n+1},\ \frac{4}{3}\right)$이므로

$\overline{\mathrm{CG}}=\sqrt{\left(\frac{1}{n+1}-\frac{3}{n+1}\right)^2+\left(\frac{4}{3}-0\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{4}{(n+1)^2}+\frac{16}{9}}=\frac{5}{3}$

위 식의 양변을 제곱하면

$\frac{4}{(n+1)^2}+\frac{16}{9}=\frac{25}{9},\ \frac{4}{(n+1)^2}=1$

$(n+1)^2=4$

$\therefore n=1$ 또는 $n=-3$

따라서 자연수 n의 값은 1이다.

답 ①

9. 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면 이 이차방정식이 중근을 가지므로

$D=(2k+m)^2-4(k^2+k+n)=0$ ⋯ ㉠

㉠을 k에 대하여 내림차순으로 정리하면

$4(m-1)k+m^2-4n=0$ ⋯ ㉡

㉡이 k의 값에 관계없이 성립하므로 항등식의 성질에 의하여

$m-1=0,\ m^2-4n=0$

$\therefore m=1,\ n=\frac{1}{4}$

$\therefore m+n=\frac{5}{4}$

답 ③

10. 나머지정리에 의해

$P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{a}{4}-1+3=\frac{3}{2}$

$\therefore a=3$

즉, $P(x)=2x^3-3x^2-2x+3$이므로 $P(x)$를 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -3 & -2 & 3 \\ & & 2 & -1 & -3 \\ \hline & 2 & -1 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(2x^2-x-3)$

$=(x-1)(2x-3)(x+1)$

나머지정리에 의해

$P\left(\frac{3}{2}\right)=0\quad\therefore b=0$

$\therefore a+b=3+0=3$

답 ③

11. $|x-b|<6$의 해는

$-6<x-b<6$

$b-6<x<b+6$

주어진 두 부등식의 해가 서로 같으므로 이차방정식 $x^2-8x-a=0$의 두 근은 $b-6,\ b+6$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(b-6)+(b+6)=2b=8\quad\therefore b=4$

$(b-6)(b+6)=-2\times10=-a\quad\therefore a=20$

$\therefore a+b=20+4=24$

답 ⑤

[다른 풀이]

$|x-b|<6$의 양변을 제곱하면

$(x-b)^2<36,\ x^2-2bx+b^2-36<0$

두 이차부등식

$x^2-8x-a<0,\ x^2-2bx+b^2-36<0$

의 해가 서로 같으므로

$2b=8,\ -a=b^2-36$

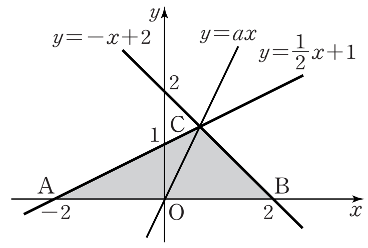
$\therefore a=20,\ b=4$

$\therefore a+b=20+4=24$

12. 연립부등식

$y\ge0,\ y\le-x+2,\ y\le\frac{1}{2}x+1$

이 나타내는 영역은 다음 그림의 색칠된 부분과 같다.



두 직선 $y=\frac{1}{2}x+1,\ y=-x+2$가 x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고 두 직선의 교점을 C라 하자.

직선 $y=ax$가 삼각형 ABC의 밑변 AB의 중점인 원점 O를 지나므로 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 점 C를 지나야 한다.

이때 점 C의 좌표를 구하면

$\frac{1}{2}x+1=-x+2$

에서

$x=\frac{2}{3},\ y=\frac{4}{3}$

즉, 점 C의 좌표는 $\left(\frac{2}{3},\ \frac{4}{3}\right)$이므로

$\frac{2}{3}a=\frac{4}{3}\quad\therefore a=2$

답 ③

13. 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, $D>0$이므로 두 근 $\alpha,\ \beta$는 모두 실수이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-5,\ \alpha\beta=-3$

이므로 두 실근 $\alpha,\ \beta$ 중 하나는 양수, 다른 하나는 음수이다.

$\alpha<0<\beta$라 가정해도 일반성을 잃지 않는다.

$|\alpha|=-\alpha,\ |\beta|=\beta$이고

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=25+12=37$

이므로

$\alpha-\beta=-\sqrt{37}\ (\because \alpha<\beta)$

$\therefore \frac{\beta}{|\alpha|}+\frac{\alpha}{|\beta|}=\frac{\beta}{-\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha\beta}$

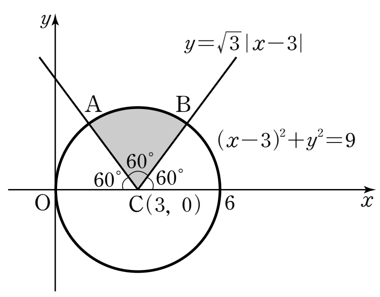
$=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{\alpha\beta}=\frac{5\sqrt{37}}{-3}$

$=-\frac{5\sqrt{37}}{3}$

답 ③

14. 원 $(x-3)^2+y^2=9$의 중심을 C라 하자.

직선 $y=\sqrt{3}(x-3)$과 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기는 60°이므로 함수 $y=\sqrt{3}|x-3|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 중심각의 크기가 예각인 작은 부채꼴의 중심각의 크기는 $\angle\mathrm{ACB}=60^\circ$이므로 호 AB의 길이는

$2\pi\times3\times\frac{60^\circ}{360^\circ}=\pi$

답 ⑤

15. $f(x)=x^2-(a+1)x-5$로 놓으면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하다.

$-2\le x\le 2$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)<0$이 성립해야 하므로

$f(-2)<0$이고 $f(2)<0$

이어야 한다.

(i) $f(-2)<0$에서

$4+2(a+1)-5<0$

$2a+1<0 \quad \therefore a<-\dfrac{1}{2}$

(ii) $f(2)<0$에서

$4-2(a+1)-5<0$

$-2a-3<0 \quad \therefore a>-\dfrac{3}{2}$

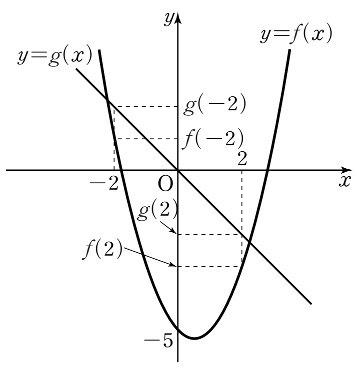
(i), (ii)에서 $-\dfrac{3}{2}<a<-\dfrac{1}{2}$이므로 구하는 정수 a의 값은 -1이다.

답 ②

[다른 풀이]

$f(x)=x^2-x-5$, $g(x)=ax$라 하자.

$-2\le x\le 2$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<g(x)$를 만족시키려면 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $f(-2)<g(-2)$이고 $f(2)<g(2)$이어야 한다.

16. 주어진 직육면체의 부피는

$(a+b)(a+2b)(a+3b)$

$=(a^2+3ab+2b^2)(a+3b)$

$=a^3+6a^2b+11ab^2+6b^3$

ㄱ. a, b는 서로소인 자연수이므로 a^3, a^2b, ab^2, b^3은 모두 다르다. 따라서 부피가 서로 다른 직육면체는 4종류이다. (참)

ㄴ. $a=3$, $b=2$일 때, 부피가 $ab^2=3\times 2^2=12$인 직육면체의 개수는 11이다. (거짓)

ㄷ. $75=5^2\times 3$이므로 $a=5$, $b=3$ ($\because a>b$)일 때, 부피가 75인 직육면체가 존재한다. 따라서 $a=5$, $b=3$일 때, 부피가 $ab^2=5\times 3^2=45$인 직육면체는 11개 존재한다. (참)

답 ④

17. $(x^2-4)(x^2+10x+21)+96$

$=(x-2)(x+2)(x+3)(x+7)+96$

$=\{(x-2)(x+7)\}\{(x+2)(x+3)\}+96$

$=(x^2+5x-14)(x^2+5x+6)+96$

위의 식에서 $x^2+5x-14=A$로 놓으면

(주어진 식)$=A(A+20)+96$

$=A^2+20A+96$

$=(A+12)(A+8)$

$=(x^2+5x-2)(x^2+5x-6)$

$=(x^2+5x-2)(x+6)(x-1)$

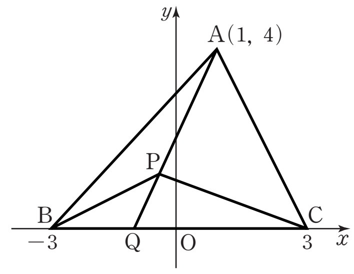
이므로

$a=5,\ b=-2,\ c=6,\ d=-1$

$\therefore a+b+c+d=5+(-2)+6+(-1)=8$

답 ①

18. 직선 AP와 x축의 교점을 Q라 하자.



$\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{1}{2}\times\triangle\mathrm{PCA}$이고

$\triangle\mathrm{PBQ} : \triangle\mathrm{PQC}=\triangle\mathrm{PAB} : \triangle\mathrm{PCA}=1 : 2$

이므로 점 Q는 선분 BC를 $1 : 2$로 내분하는 점이다.

$\therefore \mathrm{Q}(\boxed{-1},\ 0)$

또 $\triangle\mathrm{PBQ} : \triangle\mathrm{PQC}=1 : 2$이므로

$\triangle\mathrm{PQC}=2\times\triangle\mathrm{PBQ}$, $\triangle\mathrm{PBC}=3\times\triangle\mathrm{PBQ}$

그런데 $\dfrac{1}{2}\times\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{1}{3}\times\triangle\mathrm{PBC}$이므로

$\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{2}{3}\times\triangle\mathrm{PBC}=\dfrac{2}{3}\times 3\times\triangle\mathrm{PBQ}$

$=\boxed{2}\times\triangle\mathrm{PBQ}$

이다. 따라서 $\triangle\mathrm{PAB} : \triangle\mathrm{PBQ}=2 : 1$이므로 점 P는 선분 AQ를 $2 : 1$로 내분하는 점이다.

$\therefore \mathrm{P}\left(\dfrac{2\times(-1)+1\times 1}{2+1},\ \dfrac{2\times 0+1\times 4}{2+1}\right)$

따라서 점 P의 x좌표는 $\boxed{-\dfrac{1}{3}}$이고, y좌표는 $\boxed{\dfrac{4}{3}}$이다.

$\therefore a+b+c+d=-1+2+\left(-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{4}{3}=2$

답 ①

19. ㄱ. $a=0$일 때, 직선 l의 방정식은 $y=1$이므로 x축에 평행하다. (참)

ㄴ. 직선 l의 방정식을 a에 대하여 정리하면

$a(x+y)+(4y-4)=0$

이 등식이 a의 값에 관계없이 성립하므로 항등식의 성질에 의하여

$x+y=0$, $4y-4=0$

즉 $x=-1$, $y=1$이므로 항상 점 $(-1,\ 1)$을 지난다. (참)

ㄷ. 원점과 직선 l 사이의 거리는

$\dfrac{|4|}{\sqrt{a^2+(a+4)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2a^2+8a+16}}$

거리가 최대가 되려면 분모가 최소이어야 하므로 $2a^2+8a+16=2(a+2)^2+8\ge 8$에서 $a=-2$일 때 거리가 최대이다. (참)

답 ⑤

[다른 풀이]

ㄷ. 직선 $l : a(x+y)+(4y-4)=0$에서 직선 l은 점 $\mathrm{P}(-1,\ 1)$을 지나는 직선이다. 원점 O에서 직선 l에 내린 수선의 길이가 최대가 될 때는 직선 OP가 직선 l에 수직일 때, 즉 직선 l의 기울기가 1일 때이다.

$\dfrac{-a}{a+4}=1 \quad \therefore a=-2$

20. 주어진 연립방정식의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 하면

$\begin{cases}(\alpha+1)(\beta+1)=k+1\\(\alpha-1)(\beta-1)=k-1\end{cases}$

$\begin{cases}\alpha\beta+\alpha+\beta+1=k+1 \cdots ㉠\\\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=k-1 \cdots ㉡\end{cases}$

㉠, ㉡을 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$에 대하여 풀면

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=k-1$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 α, β는 $t^2-t+k-1=0$의 두 실근이다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D\ge 0$이어야 하므로

$D=1-4(k-1)\ge 0$

$5-4k\ge 0 \quad \therefore k\le\dfrac{5}{4}$

따라서 실수 k의 최댓값은 $\dfrac{5}{4}$이다.

답 ④

21. 곡선 $y=x^2-2x$와 직선 $y=x+k$의 두 교점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2-2x=x+k$, 즉 $x^2-3x-k=0$의 두 실근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-k$

두 교점의 좌표는 $(\alpha,\ \alpha+k)$, $(\beta,\ \beta+k)$이므로 두 교점 사이의 거리는

$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+\{(\alpha+k)-(\beta+k)\}^2}$

$=\sqrt{2(\alpha-\beta)^2}$

$=\sqrt{2}\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

$=\sqrt{2}\sqrt{9+4k}$

두 교점 사이의 거리가 10 이상이 되어야 하므로

$\sqrt{2}\sqrt{9+4k}\ge 10$

$2(9+4k)\ge 100$

$9+4k\ge 50$

$4k\ge 41 \quad \therefore k\ge\dfrac{41}{4}=10.25$

따라서 구하는 자연수 k의 최솟값은 11이다.

답 ④

22. 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$a=4-2b+3$

$\therefore a+2b=7 \cdots ㉠$

또, $x=1$을 대입하면

$4+4+a=3 \quad \therefore a=-5$

㉠에서 $b=6$

$\therefore 2a+3b=2\times(-5)+3\times 6=8$

답 8

23. 계수가 실수인 이차방정식의 한 근이 $3+2i$이므로 다른 한 근은 $3-2i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a=(3+2i)+(3-2i)=6$

$b=(3+2i)(3-2i)=3^2+2^2=13$

$\therefore ab=6\times 13=78$

답 78

24. $x-y=6$에서 $y=x-6$ ⋯ ㉠
㉠을 $x^2-4y=20$에 대입하면
$x^2-4(x-6)=20$
$x^2-4x+4=0$
$(x-2)^2=0$
따라서 $x=2$, $y=-4$, 즉 $\alpha=2$, $\beta=-4$이므로
$\alpha^2+\beta^2=4+16=20$

답 20

25. 두 점 $\mathrm{A}(4,\ 5)$, $\mathrm{B}(7,\ -4)$의 y좌표의 부호가 다르므로 선분 AB는 x축과 한 점에서 만난다.
따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 값은 점 P가 선분 AB가 x축과 만나는 점일 때 최소가 된다.
두 점 $\mathrm{A}(4,\ 5)$, $\mathrm{B}(7,\ -4)$를 지나는 직선의 방정식은
$$y-5=\frac{-4-5}{7-4}(x-4)$$
즉,
$y=-3x+17$ ⋯ ㉠
이때 점 $\mathrm{P}(a,\ 0)$이 직선 ㉠ 위의 점이므로
$0=-3a+17$에서 $a=\frac{17}{3}$
$\therefore 3a=17$

답 17

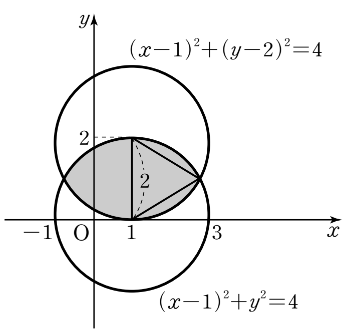
26. 직선 $y=2x+1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$y+3=2(x-2)+1$
$2x-y-6=0$ ⋯ ㉠
직선 ㉠이 원 $(x-3)^2+(y+4)^2=k$에 접하므로 원의 중심 $(3,\ -4)$에서 직선 ㉠까지의 거리와 반지름의 길이 $\sqrt{k}$가 같다.
$$\frac{|2\times3-(-4)-6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{k},\quad \frac{4}{\sqrt{5}}=\sqrt{k}$$
$\therefore k=\frac{16}{5}$
$\therefore 10k=10\times\frac{16}{5}=32$

답 32

27. 삼차방정식 $x^3-3x^2+(k+2)x-k=0$의 좌변을 인수분해하면
$(x-1)(x^2-2x+k)=0$
이때 삼차방정식 $x^3-3x^2+(k+2)x-k=0$이 서로 다른 세 실근을 가지므로 이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=1-k>0 \quad \therefore k<1$
이고
$x=1$ 또는 $x^2-2x+k=0$
이므로
$\therefore x=1$ 또는 $x=1\pm\sqrt{1-k}$
$1-\sqrt{1-k}<1<1+\sqrt{1-k}$이므로
$\alpha=1-\sqrt{1-k}$, $\beta=1$, $\gamma=1+\sqrt{1-k}$
$(\alpha-1)(\beta+1)(\gamma-1)=-10$에서
$(-\sqrt{1-k})\times2\times(\sqrt{1-k})=-10$
$1-k=5 \quad \therefore k=-4$
$\therefore k^2=16$

답 16

28. $\begin{cases} x^2+y^2-2x-3\le0 \\ x^2+y^2-2x-4y+1\le0 \end{cases}$ 에서
$\begin{cases} (x-1)^2+y^2\le4 \\ (x-1)^2+(y-2)^2\le4 \end{cases}$
이때 두 원의 반지름의 길이가 같고 두 원이 서로 다른 원의 중심을 지나므로 주어진 연립부등식이 나타내는 영역은 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 연립부등식이 나타내는 영역의 넓이는
$$4\left(\pi\times2^2\times\frac{60^\circ}{360^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2\right)+2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2$$
$$=\frac{8}{3}\pi-2\sqrt{3}$$
따라서 $a=\frac{8}{3}$, $b=-2$이므로
$30a-b=30\times\frac{8}{3}-(-2)=82$

답 82

29. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3$의 두 교점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 이차방정식
$x^2+3x+2=3$, $x^2+3x-1=0$
의 두 실근이 α, β이므로
$x^2+3x-1=(x-\alpha)(x-\beta)$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로
$\gamma^2+3\gamma-1=(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$ ⋯ ㉠
라 할 수 있다. 또한 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 두 교점 중 한 점의 x좌표를 γ라 하면 이차방정식
$x^2+3x+2=k$, $x^2+3x+2-k=0$
의 한 실근이 γ이므로
$\gamma^2+3\gamma+2-k=0$, $\gamma^2+3\gamma=k-2$ ⋯ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$(k-2)-1=(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)=10$
이므로
$k-3=10 \quad \therefore k=13$

답 13

30. $(x-4)P(x+4)=(x+5)P(x+1)$ ⋯ ㉠
㉠에 $x=4$를 대입하면 $P(5)=0$이고, $x=-5$를 대입하면 $P(-1)=0$이다.
㉠에 $x=1$ (또는 $x=-2$)를 대입하면
$-3P(5)=6P(2)$
(또는 $-6P(2)=3P(-1)$)
이때 $P(5)=0$ (또는 $P(-1)=0$)이므로
$\therefore P(2)=0$
따라서 인수정리에 의하여 다항식 $P(x)$가 $x-5$, $x+1$, $x-2$를 인수로 가지므로
$P(x)=(x-5)(x+1)(x-2)$
이때 $P(x)$를 x^2-1로 나눈 나머지는 일차 이하의 다항식이므로 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면
$P(x)=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$ ⋯ ㉡
㉡은 x에 대한 항등식이므로 $x=-1$을 대입하면
$P(-1)=-a+b$이고, $P(-1)=0$이므로
$-a+b=0$ ⋯ ㉢
$x=1$을 대입하면 $P(1)=a+b$이고
$P(1)=(-4)\times2\times(-1)=8$이므로
$a+b=8$ ⋯ ㉣
㉢, ㉣을 연립하여 계산하면
$a=4$, $b=4$
따라서 $R(x)=4x+4$이므로
$R(10)=44$

답 44