수학 전문가 그룹

N.G.D

math whiz

2021학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가

NGD

2021학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가 문제지

수학 영역
(가 형)

성명		수험번호	

○ 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정확히 기재하시오.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 유형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 정답에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점, 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

NGD

2021학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가 문제지

수학 영역(가 형)

제2교시

5지선다형

1. $\sqrt[3]{2}\times 2^{\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2-(2n-1)^2}{2n+5}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5},\ \mathrm{P}(B)=\frac{4}{5},\ \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{9}{10}$$

일 때, $\mathrm{P}(B|A)$의 값은? [2점]

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{7}{12}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n(n+2)}$ 의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

5. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 8$이고, X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이다.

$$3\mathrm{P}(2 \le X \le 4) = 4\mathrm{P}(6 \le X \le 8)$$

일 때, $\mathrm{P}(2 \le X \le 6)$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{9}{14}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

6. $\int_1^2 (x-1)e^{-x}dx$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{e}-\frac{2}{e^2}$ ② $\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}$ ③ $\frac{1}{e}$ ④ $\frac{2}{e}-\frac{2}{e^2}$ ⑤ $\frac{2}{e}-\frac{1}{e^2}$

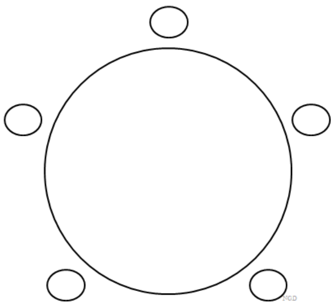
7. 매개변수 t $(t > 0)$으로 나타내어진 함수 $x=\ln t+t$, $y=-t^3+3t$에 대하여 $\frac{dy}{dx}$가 $t=a$에서 최댓값을 가질 때, a의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

8. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{a_n+2^n}=6$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

9. 다섯 명이 둘러앉을 수 있는 원 모양의 탁자와 두 학생 A, B를 포함한 8명의 학생이 있다. 이 8명의 학생 중에서 A, B를 포함하여 5명을 선택하고 이 5명의 학생 모두를 일정한 간격으로 탁자에 둘러앉게 할 때, A와 B가 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



① 180　② 200　③ 220　④ 240　⑤ 260

10. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=12$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}+a_n=(-1)^{n+1}\times n$$

을 만족시킨다. $a_k>a_1$인 자연수 k의 최솟값은? [3점]

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

11. 1보다 큰 세 실수 a, b, c가

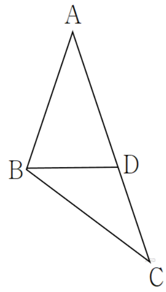
$$\log_a b = \frac{\log_b c}{2} = \frac{\log_c a}{4}$$

를 만족시킬 때, $\log_a b + \log_b c + \log_c a$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$
④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

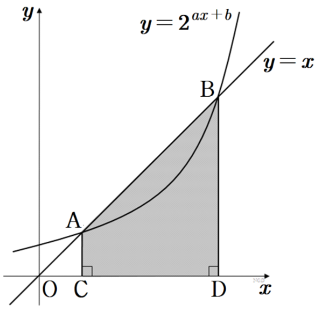
12. $\overline{AB} = 6$, $\overline{AC} = 10$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위에 점 D를 $\overline{AB} = \overline{AD}$가 되도록 잡는다. $\overline{BD} = \sqrt{15}$일 때, 선분 BC의 길이는? [3점]

① $\sqrt{37}$ ② $\sqrt{38}$ ③ $\sqrt{39}$
④ $2\sqrt{10}$ ⑤ $\sqrt{41}$



13. 곡선 $y=2^{ax+b}$과 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=6\sqrt{2}$이고 사각형 ACDB의 넓이가 30일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$



14. 어느 지역 신생아의 출생 시 몸무게 X가 정규분포를 따르고

$$\mathrm{P}(X \geq 3.4)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(X \leq 3.9)+\mathrm{P}(Z \leq -1)=1$$

이다.
이 지역 신생아 중에서 임의추출한 25명의 출생 시 몸무게의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X} \geq 3.55)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?
(단, 몸무게의 단위는 kg이고, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0062 ② 0.0228 ③ 0.0668
④ 0.1587 ⑤ 0.3413

15. 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

$$f(x) = \ln\left(\frac{\sec x + \tan x}{a}\right)$$

의 역함수를 $g(x)$라 하자, $\lim_{x \to -2} \frac{g(x)}{x+2} = b$일 때,

두 상수a, b의 곱 ab의 값은?(단, $a > 0$) [4점]

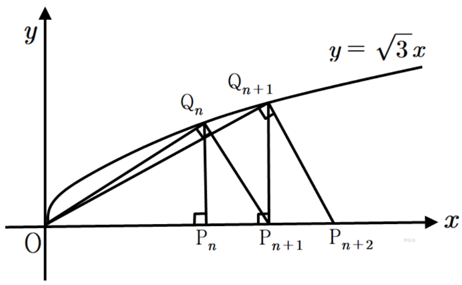
① $\frac{e^2}{4}$ ② $\frac{e^2}{2}$ ③ e^2

④ $2e^2$ ⑤ $4e^2$

16. 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 x축 위의 점 $\mathrm{P_n}$과 곡선 $y = \sqrt{3x}$ 위의 점 $\mathrm{Q_n}$이 있다.

- 선분 $\mathrm{OP_n}$과 선분 $\mathrm{P_nQ_n}$이 서로 수직이다.
- 선분 $\mathrm{OQ_n}$과 선분 $\mathrm{Q_nP_{n+1}}$이 서로 수직이다.

다음은 점 $\mathrm{P_1}$의 좌표가 $(1,\ 0)$일 때, 삼각형$\mathrm{OP_{n+1}Q_n}$의 넓이 A_n을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)



모든 자연수 n에 대하여 점 $\mathrm{P_n}$의 좌표를 $(a_n,\ 0)$이라 하자.

$\overline{\mathrm{OP_{n+1}}} = \overline{\mathrm{OP_n}} + \overline{\mathrm{P_nP_{n+1}}}$이므로

$a_{n+1} = a_n + \overline{\mathrm{P_nP_{n+1}}}$

이다. 삼각형 $\mathrm{OP_nQ_n}$과 삼각형 $\mathrm{Q_nP_nP_{n+1}}$이 닮음이므로

$\overline{\mathrm{OP_n}} : \overline{\mathrm{P_nQ_n}} = \overline{\mathrm{P_nQ_n}} : \overline{\mathrm{P_nP_{n+1}}}$

이고, 점 $\mathrm{Q_n}$의 좌표는 $\left(a_n,\ \sqrt{3a_n}\right)$이므로

$\overline{\mathrm{P_nP_{n+1}}} = \boxed{\text{(가)}}$

이다. 따라서 삼각형 $\mathrm{OP_{n+1}Q_n}$의 넓이 A_n은

$A_n = \frac{1}{2} \times \boxed{\text{(나)}} \times \sqrt{9n-6}$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p + f(8)$의 값은?[4점]

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

17. 어느 고등학교에는 5개의 과학 동아리와 2개의 수학 동아리 A, B가 있다. 동아리 학술 발표회에서 이 7개 동아리가 모두 발표하도록 발표 순서를 임의로 정할 때, 수학 동아리 A가 수학 동아리 B보다 먼저 발표하는 순서로 정해지거나 두 수학 동아리의 발표 사이에는 2개의 과학 동아리만이 발표하는 순서로 정해질 확률은? (단, 발표는 한 동아리씩 하고 각 동아리는 1회만 발표한다). [4점]

① $\frac{4}{7}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{25}{42}$
④ $\frac{17}{28}$ ⑤ $\frac{13}{21}$

18. 함수

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x \le 0)\\ \{\ln(1+x^4)\}^{10} & (x>0)\end{cases}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)f(1-t)dt$$

라 하자. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $x \le 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=0$이다.

ㄴ. $g(1)=2g\left(\frac{1}{2}\right)$

ㄷ. $g(a) \ge 1$인 실수 a가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$의 공집합이 아닌 모든 부분집합 15개 중에서 임의로 서로 다른 세 부분집합을 뽑아 임의로 일렬로 나열하고,나열된 순서대로 $A,\ B,\ C$ 라 할 때, $A \subset B \subset C$ 일 확률은? [4점]

① $\frac{1}{91}$ ② $\frac{2}{91}$ ③ $\frac{3}{91}$
④ $\frac{4}{91}$ ⑤ $\frac{5}{91}$

20. 함수 $f(x)=\sin(\pi\sqrt{x})$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x tf(x-t)dt \quad (x \geq 0)$$

이 $x=a$에서 극대인 모든 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

$k^2 < a_6 < (k+1)^2$인 자연수 k의 값은 [4점]

① 11 ② 14 ③ 17
④ 20 ⑤ 23

21. 닫힌구간 $[-2\pi,\ 2\pi]$에서 정의된 두 함수

$f(x)=\sin kx+2,\ g(x)=3\cos 12x$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수는? [4점]

> 실수 a가 두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$의 교점의 y좌표이면
>
> $\{x \mid f(x)=a\} \subset \{x \mid g(x)=a\}$
>
> 이다.

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

단답형

22. $\left(x+\dfrac{4}{x^2}\right)^6$ 의 전개식에서 x^3의 계수를 구하시오. [3점]

23. 함수 $f(x)=x\ln(2x-1)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

24. 방정식 $\log_2 x = 1 + \log_4(2x-3)$을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 곱을 구하시오. [3점]

25. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^4 = a$ 일 때, $5a$의 값을 구하시오. [3점]

26.[26] 두 이산확률변수 X, Y의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	d	1

Y	11	21	31	41	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	a	b	c	d	1

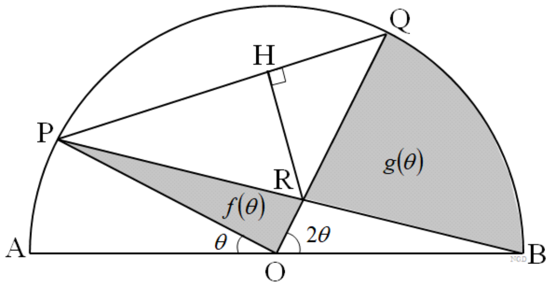
$\mathrm{E}(X)=2$, $\mathrm{E}(X^2)=5$일 때, $\mathrm{E}(Y)+\mathrm{V}(Y)$의 값을 구하시오. [4점]

27. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$$S_{n+3}-S_n=13\times 3^{n-1}$$

일 때, a_4의 값을 구하시오. [4점]

28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 호 AB 위에 두 점 P, Q의 교점을 $\angle\mathrm{POA}=\theta$, $\angle\mathrm{QOB}=2\theta$가 되도록 잡는다. 두 선분 PB, OQ의 교점을 R라 하고, 점 R에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 POR의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 RQ, RB와 호 QB로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\overline{\mathrm{RH}}}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{3}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



29. 흰 공 4개와 검은 공 6개를 세 상자 A, B, C에 남김없이 나누어 넣을 때, 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

30. 다음 조건을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 ab의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

> 모든 실수 x에 대하여 부등식
> $$-e^{-x+1} \le ax+b \le e^{x-2}$$
> 이 성립한다.

$|M \times m^3| = \dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2021년도
대수능
9월 모평

수학 전문가 그룹

N.G.D

math whiz

강유식 - 대전 - 헤럴드영수학원 - ☎ 010.2585.2997
강혁 - 서울대치 - 모아시스수학 - ☎ 010.3790.1715
구덕문 - 부산해운대 - 아연학원 - ☎ 010.3558.6123
권도형 - 울산옥동 - 더플러스수학학원 - ☎ 052.260.9981
권세욱 - 경기광명 - 하피수학 - ☎ 02.899.7360
김광수 - 경남양산 - 넥서스영어수학전문학원 - ☎ 055.381.0582
김광현 - 인천송도 - 선심수학학원 - ☎ 032.8181.999
김대호 - 충북청주 - 온수학전문학원 - ☎ 010.2709.0502
김문수 - 경기용인 - 생각의창수학학원 - ☎ 010.2105.8463
김미선 - 경기분당 - 패러다임수학 - ☎ 031.715.5715
김상운 - 대구수성 - 진솔수학 - ☎ 053.742.0553
김성민 - 충남천안 - GoMSLab.수학학원 - ☎ 010.6315.3720
김영민 - 서울서초 - 다온수학학원 - ☎ 02.532.6650
김영제 - 서울대치 - 상산브레인학원 - ☎ 010.2737.7997
김지선 - 서울반포 - 에프엑스수학학원 - ☎ 02.594.4888
김태현 - 서울대치 - 미투스카이 - ☎ 010.4953.1211
김하늘 - 서울대치 - 역경패도수학전문 - ☎ 02.566.7854
김훈 - 부산부산진구 - 매쓰힐수학학원 ☎ 051.816.1705
나혜미 - 서울광진 - 늘푸른수학원 - ☎ 010.9161.8595
남기석 - 위례 - 더착한수학 - ☎ 010.2771.3822
남호성 - 서울은평 - 퍼씰수학 - - ☎ 02.385.9101
노인주 - 서울대치 - CMS - ☎ 010.2723.7885
류병욱 - 성남분당 - 엘피수학 - ☎ 031.711.2534
박경남 - 경남김해 - 김해율하고등학교 - ☎ 010.8495.7811
박보석 - 서울동대문 - 매쓰멘토스학원 - ☎ 02.3390.4806
박원식 - 서울중계 - 수아인학원 - ☎ 02.933.1211
박정균 - 하당교연학원 - ☎ 010.7370.7719
박정수 - 서울대치 - 해름학원•개념상상 - ☎ 010.9043.8353
박준석 - 서울대치 - 해냄학원 - ☎ 010.8644.1080
박현철 - 서울마포 - 시그마식스수학학원 - ☎ 02.322.4786
반영민 - 서울대치 - 시대인재 - ☎ 010.5414.1028
서민국 - 서울대치 - 시대인재 - ☎ 010.8346.7440
송동일 - 서울대치 - 뷰티풀마인드수학학원 - - ☎ 02.6338.1210
신동관 - 성남분당 - 올림피아드에듀신샘수학 - ☎ 031.712.4312
신동휘 - 대구수성/달서 - 알파학원 - ☎ 010.9847.1793
신헌섭 - 부산화명 - 신수학전문학원 - ☎ 051.361.2154
윤영호 - 서울은평 - SP학원 - ☎ 010.5344.6057
윤혜영 - 서울대치 - 수수배학원 - ☎ 010.7497.3235
윤홍식 - 서울송파 - 구주이배수학학원 - ☎ 02.424.9624
이경덕 - 부산동래 - 수딴's수학 - ☎ 051.924.2358
이광희 - 서울대치 - 메이드학원 - ☎ 010.4134.7134
이동훈 - 서울대치 - 아카데미아학원 - ☎ 02.508.6971
이상학 - 경기일산 - 이투스네오 - ☎ 010.8891.0043
이상혁 - 광주수완 - SH수학 - ☎ 010.6399.0910
이소연 - 서울대치 - SY전문교육 - ☎ 010.9968.2190
이수동 - 경기부천 - E&T수학전문학원
이수민 - 경기오산 - 스마트쎈큰수학 - ☎ 010.9790.9731
이용우 - 강원홍천 - 블루밍타임클래스 - ☎ 010.3126.9531
이정환 - 온라인 - 이투스•분당청솔•강남하이퍼 - ☎ 010.3266.3884
이종환 - 서울마포 - 카이수학전문학원 - ☎ 02.706.6173
이중현 - 성남분당 - 수이학원 - ☎ 010.4029.7138
이충안 - 서울성북 - 채움수학 - ☎ 010.7919.3536
장규만 - 세종충청 - UTOEDU - ☎ 010.6226.7268
장석원 - 서울목동 - 목동미래탐구 - ☎ 010.4744.2481
정영기 - 경기의정부 - 정영기수학 - ☎ 010.6398.8856
정은혁 - 경기부천 - 퀸즈아카데미 - ☎ 010.7311.0710
정하윤 - 서울중계 - 랑수학 - ☎ 02.939.3420
조기찬 - 울산 - 동은학원(남구•중구) - ☎ 011.488.0870
조용호 - 대전둔산 - 오르고수학학원 - ☎ 010.6474.3800
조훈진 - 서울목동 - 바람수학학원 - ☎ 02.2647.2511
지요한 - 부산사직 - 트리플(Tri.pl)수학학원 - ☎ 010.9074.5658
최승인 - 서울마포 - 종로학원 - ☎ 010.3787.7779
한연호 - 서울서초 - 상운학원 - ☎ 02.3472.9452
허접 - 상도•대방•노량진 - 수준별맞춤과외 - ☎ 010.6471.0175
허진 - 경기수원 - 이자경수학 - ☎ 031.236.8558
황완수 - 경기안양 - 황선생수학 - ☎ 010.5549.1138
황은지 - 경기안산 - 멘토수학 - ☎ 031.495.0419
Ray - 세종새롬 - 4차원수학 - ☎ 010.8449.1974
<객원 member>
류용수 - 대치분당 - 러셀 - ☎ 010.3311.5577
송명석 - 경기안산 - 명석수학학원 - ☎ 031.487.7311
이세진 - 부산동래 - 이세진수학학원 - ☎ 010.8012.1021
채종원 - 분석수학•강서1관 - ☎ 010.8994.2002
최자호 - 동탄신도시 - 자호수학전문학원 - ☎ 031.8003.4533
최재영 - 대구달서 - 세르파수학교습소 - ☎ 010.2577.4221
최지혜 - 경기안양 - 아르케학원 - ☎ 010.9110.0701

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

〈2021학년도 9월 평가원 수학(가 형)〉

2021학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가									
1	②	2	④	3	⑤	4	②	5	③
6	①	7	⑤	8	③	9	④	10	④
11	①	12	⑤	13	④	14	③	15	③
16	⑤	17	③	18	②	19	②	20	①
21	②	22	24	23	2	24	12	25	242
26	121	27	9	28	23	29	168	30	43

1) 정답 ②

문제해설

$\sqrt[3]{2}\times 2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=2^1=2$

2) 정답 ④

문제해설

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2-(2n-1)^2}{2n+5}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4n)\cdot 2}{2n+5}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n}{2n+5}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8}{2+\dfrac{5}{n}}=4$

3) 정답 ⑤

문제해설

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{2}{5}+\dfrac{4}{5}-\dfrac{9}{10}=\dfrac{3}{10}$

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}}=\dfrac{3}{4}$

4) 정답 ②

문제해설 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)=\dfrac{3}{2}$

5) 정답 ③

문제해설

$x=4$에 대칭이므로

$\mathrm{P}(2\le X\le 4)=\mathrm{P}(4\le X\le 6)$이고

$\mathrm{P}(2\le X\le 4)=\mathrm{P}(4\le X\le 6)=k$라 하면

$\mathrm{P}(6\le X\le 8)=\dfrac{1}{2}-k$

$3\mathrm{P}(2\le X\le 4)=4\mathrm{P}(6\le X\le 8)$이므로

$3k=4\left(\dfrac{1}{2}-k\right)$

$k=\dfrac{2}{7}$

따라서 $\mathrm{P}(2\le X\le 6)=2k=\dfrac{4}{7}$

6) 정답 ①

문제해설

$\displaystyle\int_1^2(x-1)e^{-x}dx=\left[-(x-1)e^{-x}\right]_1^2-\int_1^2(-e^{-x})dx$

$=-e^{-2}-\left[e^{-x}\right]_1^2=-e^{-2}-(e^{-2}-e^{-1})=\dfrac{1}{e}-\dfrac{2}{e^2}$

7) 정답 ⑤

문제해설 $x=\ln t+t$이므로 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t}+1$,

$y=-t^3+3t$이므로 $\dfrac{dy}{dt}=-3t^2+3$이다.

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-3t^2+3}{\frac{1}{t}+1}=\dfrac{-3t(t+1)(t-1)}{t+1}$

$=-3t(t-1)=-3\left(t^2-t+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\right)$

$=-3\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

이므로 $t=\dfrac{1}{2}$에서 최댓값 $\dfrac{3}{4}$를 갖는다.

$\therefore\ a=\dfrac{1}{2}$이다.

8) 정답 ③

문제해설 $a_n=a\times r^{n-1}$이라 하면

i) $r\neq 3$일 때는 주어진 식이 성립할 수 없다.

ii) $r=3$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{a_n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{a\times 3^{n-1}+2^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 1}{a\cdot 1+2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$$
$$=\frac{3}{a+0}=6$$

에서 $a=\frac{1}{2}$이므로 $a_n=\frac{1}{2}\cdot 3^{n-1}$이다.

(준식) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot 3^{n-1}}$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}$$
$$=\frac{6}{3-1}=3$$

$\therefore$ 3

9) 정답 ④

문제해설 A, B를 제외한 6명의 학생 중 3명을 선택하는 경우 : ${}_6C_3$
A, B는 이웃하므로 하나로 취급하여 A, B를 포함한 5명의 학생이 원탁의 둘러앉는 경우 : $\frac{4!}{4}$

A와 B가 자리를 바꾸는 경우 : 2!

따라서 ${}_6C_3\times\frac{4!}{4}\times 2!=240$이다.

10) 정답 ④

문제해설

$n=1$일 때, $a_2+a_1=1$. $\therefore$ $a_2=-11$
$n=2$일 때, $a_3+a_2=-2$. $\therefore$ $a_3=9$
$n=3$일 때, $a_4+a_3=3$. $\therefore$ $a_4=-6$
$n=4$일 때, $a_5+a_4=-4$. $\therefore$ $a_5=2$
$n=5$일 때, $a_6+a_5=5$. $\therefore$ $a_6=3$
$n=6$일 때, $a_7+a_6=-6$. $\therefore$ $a_7=-9$
$n=7$일 때, $a_8+a_7=7$. $\therefore$ $a_8=16$
$a_8>a_1$이므로 최소의 자연수 k의 값은 8이다.

다른풀이

$n=2k-1$일 때,
$a_{2k}+a_{2k-1}=(-1)^{2k}\times(2k-1)=2k-1$ …… ㉠
$n=2k$일 때,
$a_{2k+1}+a_{2k}=(-1)^{2k+1}\times(2k)=-2k$ …… ㉡
$n=2k+1$일 때,
$a_{2k+2}+a_{2k+1}=(-1)^{2k+2}\times(2k+1)=2k+1$ …… ㉢
그러므로
㉡$-$㉠에서 $a_{2k+1}-a_{2k-1}=-4k+1$ …… ㉣
㉢$-$㉡에서 $a_{2k+2}-a_{2k}=4k+1$ …… ㉤
$a_1=12$이므로 ㉣에서
$a_3=12-3=9$
$a_5=9-7=2$
$a_7=2-11=-9$
⋮
n이 홀수일 때는 항의 값이 점점 작아짐을 알 수 있다. 따라서
$n=1$일 때, $a_2+a_1=1$에서 $a_2=-11$이므로 ㉤에서
$a_4=-11+5=-6$
$a_6=-6+9=3$
$a_8=3+13=16$
따라서 $a_k>a_1$을 만족하는 최소의 자연수 k는 8이다.

11) 정답 ①

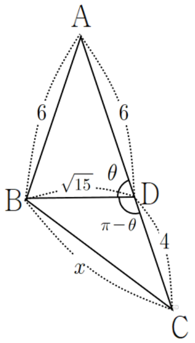
문제해설

주어진 식

$\log_a b=\frac{\log_b c}{2}=\frac{\log_c a}{4}=k$라 두면
$\log_a b=k$
$\log_b c=2k$
$\log_c a=4k$
라 두고 세 식을 모두 곱하면
$1=8k^3$
$\therefore$ $k=\frac{1}{2}$ (단, a, b, c는 1보다 큰 실수)
$\log_a b+\log_b c+\log_c a=7k$
$$=\frac{7}{2}$$

12) 정답 ⑤

문제해설 $\overline{AC}=10$, $\overline{AB}=\overline{AD}=6$이므로 $\overline{DC}=4$이다. $\overline{BC}=x$, $\angle ABD=\theta$라 하면 $\angle BDC=\pi-\theta$이고 다음 그림과 같다.



삼각형 ABD에서 코사인법칙을 쓰면

$6^2=6^2+\sqrt{15}^2-2\cdot 6\cdot \sqrt{15}\cdot \cos\theta$

$36=51-12\sqrt{15}\cos\theta$ … ㉠

삼각형 BCD에서 코사인법칙을 쓰면

$x^2=4^2+\sqrt{15}^2-2\cdot 4\cdot \sqrt{15}\cdot \cos(\pi-\theta)$

$x^2=31+8\sqrt{15}\cos\theta$ … ㉡

㉡$\times 3+$㉠$\times 2$에서

$3x^2+72=93+102$

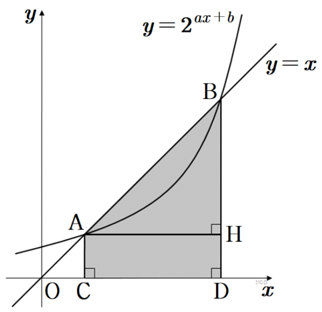
$\therefore\ x^2=41$

따라서 $x=\sqrt{41}$이다.

13) 정답 ④

문제해설

점 A에서 선분 BD에 수선의 발 H를 내리면 $\triangle$ABH는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{AH}=\overline{BH}=6$



점 C의 x좌표를 m이라 하면 점 A, H, B, D의 좌표는 각각 A$(m,\ m)$, H$(m+6,\ m)$, B$(m+6,\ m+6)$, D$(m+6,\ 0)$이므로 사각형 ACDB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times(\overline{AC}+\overline{BD})\times\overline{CD}=\frac{1}{2}\times\{m+(m+6)\}\times 6$$
$$=6(m+3)$$
$$=30$$

$\therefore\ m=2$

그러므로 두 점 A, B의 좌표는 A$(2,\ 2)$, B$(8,\ 8)$이다.

이때 두 점 A, B가 곡선 $y=2^{ax+b}$ 위의 점이므로 대입하면

$2^{2a+b}=2,\ 2^{8a+b}=8$ …… ㉠

이고, 위 식에서

$2^{2a+b}=2\ \Rightarrow\ 2a+b=1$ …… ㉡

㉠에서 좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리 나누면

$2^{6a}=4=2^2$

$6a=2 \qquad \therefore\ a=\frac{1}{3}$

이를 ㉡에 대입하면

$\frac{2}{3}+b=1 \qquad \therefore\ b=\frac{1}{3}$

$\therefore\ a+b=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

14) 정답 ③

문제해설

$\mathrm{P}(X\geq 3.4)=\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X의 평균은 3.4이다.

$\mathrm{P}(X\leq 3.9)+\mathrm{P}(Z\leq -1)=1$이므로

$\mathrm{P}(X\leq 3.9)=\mathrm{P}(Z\geq -1)$이다.

$\mathrm{P}(Z\geq -1)$

$=\mathrm{P}(-1\leq Z\leq 0)+0.5$

$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)+0.5$

$=0.3413+0.5$

$=0.8413$

따라서 $\mathrm{P}(X\leq 3.9)=0.8413$

확률변수 X의 표준편차를 σ라 하면

$\mathrm{P}(X\leq 3.9)=0.8413$

$\mathrm{P}(X-3.4\leq 0.5)=0.8413$

$\mathrm{P}\left(\frac{X-3.4}{\sigma}\leq\frac{0.5}{\sigma}\right)=0.8413$

$\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{0.5}{\sigma}\right)=0.8413$

$\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{0.5}{\sigma}\right)=0.5+0.3413$

$\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{0.5}{\sigma}\right)=0.5+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)$

따라서 $\frac{0.5}{\sigma}=1$ 이므로 $\sigma=0.5$이다.

임의추출한 25명이므로 $\overline{X}$의 평균은 3.4 표준편차는 $\frac{0.5}{\sqrt{25}}=\frac{0.5}{5}=0.1$이다.

따라서 $\overline{X}$는 $\mathrm{N}(3.4,\ (0.1)^2)$의 정규분포를 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\geq 3.55)$

$=\mathrm{P}(\overline{X}-3.4\geq 0.15)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-3.4}{0.1}\geq\frac{0.15}{0.1}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 1.5)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)$

$=0.5-0.4332$

$=0.0668$

15) 정답 ③

문제해설 $\lim_{x\to-2}\frac{g(x)}{x+2}=b$, $g(-2)=0$이므로

$f(0)=-2,\ f(0)=\ln\left(\frac{\sec0+\tan0}{a}\right)=-2$

$\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-2,\ a=e^2$

$\lim_{x\to-2}\frac{g(x)-g(-2)}{x+2}=g'(-2)=b$

$f'(x)=\frac{\sec x\ \cdot\ \tan x+\sec^2 x}{\sec x+\tan x}$, $f'(0)=1$

$g'(-2)=\frac{1}{f'(g(-2))}=\frac{1}{f'(0)}=1,\ b=1$

$\therefore ab=e^2$

16) 정답 ⑤

문제해설

점 $\mathrm{P_n}$의 좌표를 $(a_n,\ 0)$,

점 $\mathrm{Q_n}$의 좌표는 $(a_n,\ \sqrt{3a_n})$,

$\overline{\mathrm{OP_n}}:\overline{\mathrm{P_nQ_n}}=\overline{\mathrm{P_nQ_n}}:\overline{\mathrm{P_nP_{n+1}}}$임을 이용하면

$\Rightarrow a_n:\sqrt{3a_n}=\sqrt{3a_n}:\overline{\mathrm{P_nP_{n+1}}}$

$\Rightarrow \overline{\mathrm{P_nP_{n+1}}}=\boxed{\ (가)\ }=3$

$a_{n+1}=a_n+\overline{\mathrm{P_nP_{n+1}}}$을 이용하면

a_n이 등차수열이므로

$a_n=1+3(n-1)$

$A_n=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OP_{n+1}}}\times\overline{\mathrm{P_nQ_n}}$

$=\frac{1}{2}\times a_{n+1}\times\sqrt{3a_n}$

$=\frac{1}{2}\times(3n+1)\times\sqrt{3(3n-2)}$

$=\frac{1}{2}\times(3n+1)\times\sqrt{9n-6}$

이므로 $\boxed{\ (나)\ }=3n+1$

즉, $p=3,\ f(n)=3n+1$이다.

따라서 $p+f(8)=3+25=28$이다.

17) 정답 ③

문제해설 7개의 동아리를 나열하는 경우의 수는 $7!$이다

이 때, 수학 동아리 A가 수학 동아리 B보다 먼저 발표하는 경우의 가지수는 $\frac{7!}{2!}$이고 두 수학 동아리의 발표 사이에 2개의 과학 동아리만이 발표하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_2\times4!\times2$이고 수학 동아리 A가 수학 동아리 B보다 먼저 발표하고 두 수학 동아리의 발표 사이에는 2개의 과학 동아리가 오는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_2\times4!$이다.

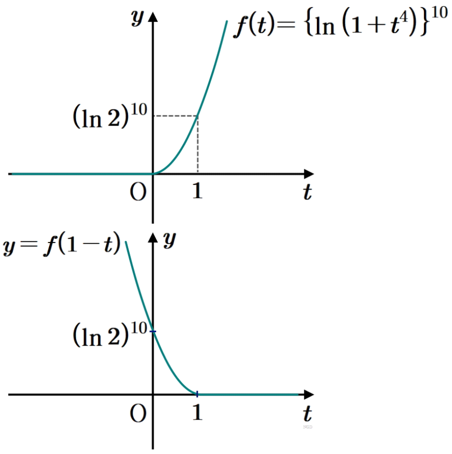
그러므로 $\mathrm{P}=\frac{\frac{7!}{2!}+{}_5\mathrm{P}_2\times4!\times2-{}_5\mathrm{P}_2\times4!}{7!}$

$=\frac{25}{42}$

18) 정답 ②

문제해설

함수 $f(t)$와 함수 $f(1-t)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. $x\le0$에서 $f(x)=0$이므로

$g(x)=-\int_x^0 f(t)f(1-t)dt$

$=-\int_x^0 0\times f(1-t)dt$

$=0$

ㄴ. $f(t)$와 $f(1-t)$가 $t=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이므로

$g(1)=\int_0^1 f(t)f(1-t)dt$

$=2\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)f(1-t)dt$

따라서 $g(1)=2g\left(\frac{1}{2}\right)$

〈다른 풀이〉

$g\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)f(1-t)dt$이다.

이 때 $1-t=x$로 치환하면

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = -\int_1^{\frac{1}{2}} f(1-x)f(x)dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)f(1-x)dx$$

따라서

$$g(1)=\int_0^1 f(x)f(1-x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)f(1-x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)f(1-x)dx$$

$$=2g\left(\frac{1}{2}\right)$$

ㄷ. (ⅰ) $t \le 0, t \ge 1$일 때

$g(x)=0<1$

(ⅱ) $0<t<1$일 때

$f(t)<1, f(1-t)<1$이므로 $f(t)f(1-t)<1$

정적분의 정의는 함숫값의 총합이므로

(ⅰ)과 (ⅱ)에 의해

$$g(x)=\int_0^x f(t)f(1-t)dt \ < \ 1$$

$g(a) \ge 1$인 실수 a는 존재하지 않는다.

19) 정답 ②

문제해설 집합 B의 원소의 개수를 기준으로 집합 A와 C를 정하자.

그리고 집합 A, B, C 는 모두 다른 집합 이고 포함 관계에 있으므로 $n(A)<n(B)<n(C)$ 이다.

ⅰ) $n(B)=2$ 일 때,

B집합이 될 수 있는 개수는 ${}_4\mathrm{C}_2=6$이고

이때 A집합의 개수는 집합 B의 진부분집합중 공집합을 제외한 것이므로 $2^2-1-1=2$

집합 C의 개수는 X의 부분집합 중 B의 원소를 포함한 부분집합이므로 $2^{4-2}-1=3$ 이다. ($\because B \ne C$)

따라서 개수는 ${}_4\mathrm{C}_2\times(2^2-2)\times(2^2-1)=36$

ⅱ) $n(B)=3$ 일 때,

B집합이 될 수 있는 개수는 ${}_4\mathrm{C}_3=4$이고

이때, A집합의 개수는 집합 B의 진부분집합중 공집합을 제외한 것이므로 $2^3-1-1=6$

집합 C의 개수는 X의 부분집합 중 B의 원소를 포함한 부분집합이므로 $2^{4-3}-1=1$ 이다. ($\because B \ne C$)

따라서 개수는 ${}_4\mathrm{C}_3\times(2^3-2)\times(2^1-1)=24$

ⅰ), ⅱ)에 의하여 모든 경우의 수는 60이다.

따라서 위의 조건을 만족할 확률은

$$\frac{60}{{}_{15}\mathrm{P}_3}=\frac{60}{15\times14\times13}=\frac{2}{91}$$ 이다.

20) 정답 ①

문제해설 $g(x)=\int_0^x tf(x-t)dt \quad (x \ge 0)$

$x-t=s$, $-dt=ds$라 하면

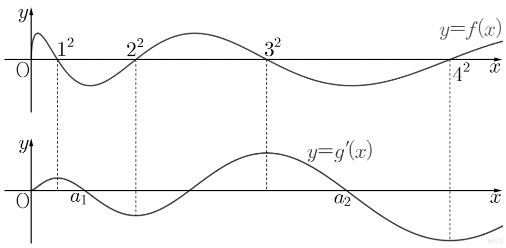
$$g(x)=\int_x^0 (x-s)f(s)(-ds)$$

$$g(x)=\int_0^x (x-s)f(s)ds$$

양변을 미분하면

$$g'(x)=\int_0^x f(s)ds$$

함수 $f(x)$가 $g'(x)$의 도함수 이므로 그래프를 그려보면



$1^2<a_1<2^2$

$3^2<a_2<4^2$

$\cdots$

$(2n-1)^2<a_n<(2n)^2$

$11^2<a_6<12^2$

$\therefore k=11$

21) 정답 ②

문제해설

$y=f(x)$, $y=g(x)$는 $0<x<\frac{\pi}{24}$에서 적어도 하나의 교점을 가진다. 이 교점의 x좌표를 α라 하자.

$y=f(x)$는 주기가 $\frac{2\pi}{k}$, $y=g(x)$는 주기가 $\frac{\pi}{6}$인 함수이므로

$$\{x|f(x)=f(\alpha)\}=\left\{\alpha,\ \frac{\pi}{k}-\alpha,\ \frac{2\pi}{k}+\alpha,\ \frac{3\pi}{k}-\alpha,\ \cdots\right\}=A$$

$\{x|g(x)=g(\alpha)\}$

$$=\left\{\alpha,\ \frac{\pi}{6}-\alpha,\ \frac{\pi}{6}+\alpha,\ \frac{2\pi}{6}-\alpha,\ \cdots,\ \frac{12\pi}{6}-\alpha\right\}=B$$

임을 알 수 있다.

이때 $A \subset B$를 만족하기 위해서는 $\dfrac{\pi}{k}-\alpha \in B$여야 한다.

ⅰ) $\dfrac{\pi}{k}-\alpha=\dfrac{n\pi}{6}-\alpha$인 경우

$\dfrac{1}{k}=\dfrac{n}{6}$에서 $k=\dfrac{6}{n}$이므로 $n=1,\ n=2,\ n=3,\ n=6$일 때 각각 $k=6,\ k=3,\ k=2,\ k=1$이다. (총 4가지)

$k=6$일 때

$$A=\left\{\alpha,\ \frac{\pi}{6}-\alpha,\ \frac{2\pi}{6}+\alpha,\ \frac{3\pi}{6}-\alpha,\ \frac{4\pi}{6}-\alpha,\ \cdots\right\}\subset B$$

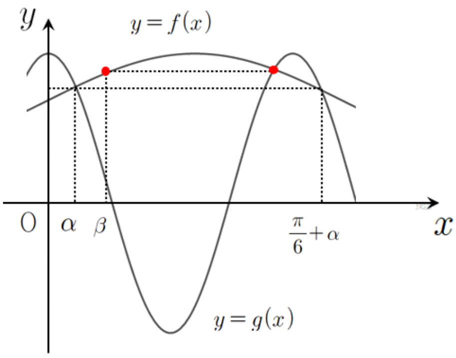
$k=3$일 때 $A=\left\{\alpha,\ \dfrac{2\pi}{6}-\alpha,\ \dfrac{4\pi}{6}+\alpha,\ \dfrac{6\pi}{6}-\alpha,\ \cdots\right\}\subset B$

$k=2$일 때 $A=\left\{\alpha,\ \dfrac{3\pi}{6}-\alpha,\ \dfrac{6\pi}{6}+\alpha,\ \dfrac{9\pi}{6}-\alpha\right\}\subset B$

$k=1$일 때 $A=\left\{\alpha,\ \dfrac{6\pi}{6}-\alpha\right\}\subset B$

삼각함수의 대칭성과 주기성에 의하여 $(\alpha,\ f(\alpha))$이외의 교점에 대해서도 같은 방법으로 확인할 수 있다.

ⅱ) $\dfrac{\pi}{k}-\alpha=\dfrac{n\pi}{6}+\alpha$인 경우



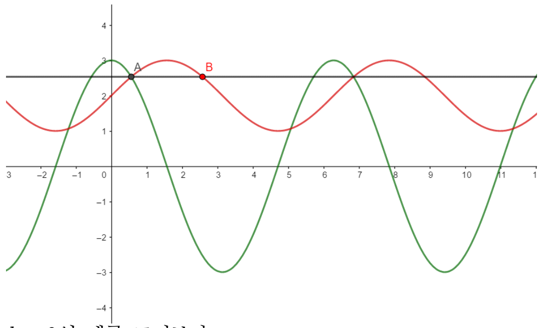
그림과 같이 $\beta \in A,\ \beta \notin B$가 되는 β가 존재하므로 조건에 모순이다.

ⅰ), ⅱ)에 의하여 조건을 만족하는 k는 4가지다.

다른 풀이

자연수 k에 대하여 $f(x)$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{k}$, $g(x)$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{12}=\dfrac{\pi}{6}$이다.

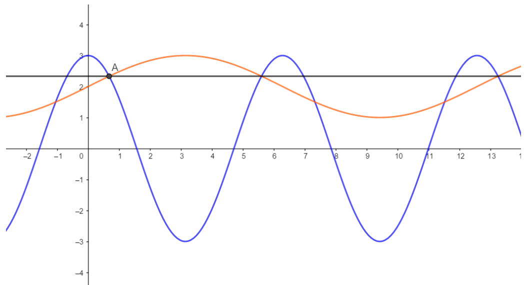
만약 $k=12$일 때 그림을 그려보면



위의 그림에서 보듯이 점 B가 f와 $y=a$의 교점이 더 생기므로 $\{x|f(x)=a\}\not\subset\{x|g(x)=a\}$

마찬가지로 $k>12$일 때도 g의 한 주기인 $\dfrac{\pi}{6}$에서 $g(x)=a$를 만족하지 않지만 $f(x)=a$를 만족하는 x가 존재하므로 안 된다.

$k=6$일 때를 그려보면



$y=a$와 $y=f(x)$가 만나는 점은 모두 $y=a$와 $y=g(x)$와 만나는 점이 되므로 $k=6$은 주어진 조건을 만족한다. 즉 $f(x)=a$를 만족하는 근이 α라 하면 $\dfrac{\pi}{6}-\alpha$도 근이므로 $g(\alpha)=g\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)$를 만족해야 한다. 그런데 $3\cos 12\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)=3\cos(2\pi-12\alpha)=3\cos 12\alpha$이므로 $\alpha\in\{x|g(x)=a\}$

마찬가지로 하면 $k=3,\ k=2,\ k=1$이면 된다.

이를 정리하면 자연수 k에 대하여 함수 $f(x)$의 주기가 $\dfrac{2\pi}{k}$이므로 $f(x)=a$의 근을 α라 하면 $f(x)=a$의 다른 한 근은 $\dfrac{\pi}{k}-\alpha$도 근이다. 따라서 $x=\alpha,\ \dfrac{\pi}{k}-\alpha$도 $g(x)=a$의 근이어야 한다. 즉

$g(\alpha)=g\left(\dfrac{\pi}{k}-\alpha\right)$, $3\cos 12\alpha=3\cos 12\left(\dfrac{\pi}{k}-\alpha\right)$

$3\cos 12\alpha=3\cos\left(\dfrac{12\pi}{k}-12\alpha\right)$

$\therefore\ \dfrac{12\pi}{k}=2n\pi$ (n은 정수)

$\therefore\ 6=kn$

따라서 k는 6의 약수이므로 1, 2, 3, 6인 4가지이다.

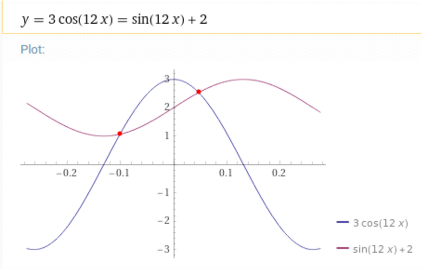
다른 풀이

$f(x)$의 주기는 $T_f=\dfrac{2\pi}{k}$이고 $g(x)$의 주기는 $T_g=\dfrac{\pi}{6}$이다.

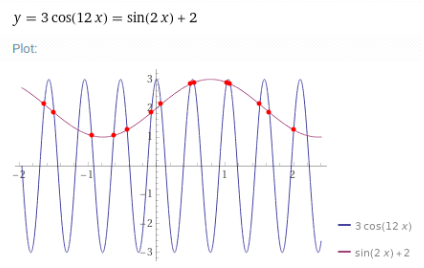
$T_f<T_g$이면,

$f(x)=\sin kx+2=a$의 해 중에는 $g(x)=3\cos 12x=a$의 해가 아닌 것이 존재하므로 조건을 만족하지 못한다.

$T_f = T_g$일 때도 $f(x)=g(x)$의 해가 y축에 대해 비대칭이므로 조건을 만족하지 못한다.



$T_f > T_g$일 때도, $f(x)=g(x)$의 해가 y축에 대해 대칭일 수는 없다.



이때 즉, $\dfrac{2\pi}{k} > \dfrac{\pi}{6}$일 때는 $k<12$, k는 자연수이고

만일 $x=\alpha$가 $f(x)=g(x)$의 근이라면 즉,

$\sin k\alpha + 2 = 3\cos 12\alpha$ 이면

$\dfrac{T_f}{2} - \alpha = \dfrac{\pi}{k} - \alpha$도 근이어야 한다. 즉,

$\sin k\alpha = \sin\left(\dfrac{\pi}{k}-\alpha\right)$이고

$\cos 12\alpha = \cos 12\left(\dfrac{\pi}{k}-\alpha\right) = \cos\left(\dfrac{12\pi}{k}-12\alpha\right)$이어야 하므로

$\dfrac{12\pi}{k} = 2n\pi$, n은 정수이다.

$\therefore\ 6 = kn$

따라서 k는 6의 약수고 1, 2, 3, 6로 4가지이다.

22) 정답 24

문제 해설

$\left(x+\dfrac{4}{x^2}\right)^6 = {}_6\mathrm{C}_r \times x^{6-r} \times (4x^{-2})^r$

${}_6\mathrm{C}_r \times 4^r \times x^{6-r}$ 에서 x^3은 $r=1$일 때,

$\therefore\ {}_6\mathrm{C}_1 \times 4 = 24$

23) 정답 2

문제 해설

함수 $f(x)$를 미분하면

$$f'(x) = \ln(2x-1) + \frac{2x}{2x-1}$$

이므로

$$f'(1) = 2$$

24) 정답 12

문제 해설

진수 조건에 의하여

$x>0$이고 $2x-3>0$이므로 $x>\dfrac{3}{2}$

$\log_2 x = 1 + \log_4(2x-3)$에서

$$\log_4 x^2 = \log_4 4(2x-3)$$
$$x^2 = 4(2x-3)$$
$$x^2 - 8x + 12 = 0$$
$$(x-2)(x-6) = 0$$

따라서 $x=2$ 또는 6

실수 x의 값의 곱은 $2\times 6 = 12$

25) 정답 242

문제 해설

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^4 = \int_1^3 x^4 dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_1^3 = \frac{242}{5}$$

$\therefore\ 5a = 242$

26) 정답 121

문제 해설

$\mathrm{E}(X)=2,\ \mathrm{E}(X^2)=5$에서

$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = 5 - 2^2 = 1$

한편 $Y = 10X+1$이므로

$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(10X+1) = 10\mathrm{E}(X)+1 = 21$

$\mathrm{V}(Y) = \mathrm{V}(10X+1) = 10^2\mathrm{V}(X) = 100$

따라서 $\mathrm{E}(Y)+\mathrm{V}(Y) = 21+100 = 121$

27) 정답 9

문제 해설

등비수열의 첫 항을 a, 공비를 r이라 하자.

$$\begin{aligned} S_{n+3} - S_n &= a_{n+3} + a_{n+2} + a_{n+1} \\ &= ar^{n+2} + ar^{n+1} + ar^n \\ &= ar^n(r^2+r+1) = 13\times 3^{n-1} \end{aligned}$$

$\therefore\ a = \dfrac{1}{3},\ r = 3$

$\therefore\ a_4 = ar^3 = \frac{1}{3} \times 3^3 = 9$

28) 정답 23

문제 해설

[출제의도] 싸인법칙을 이용하여 삼각형의 변의 길이를 구하고 $\frac{0}{0}$꼴의 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제

$\angle\mathrm{POR} = \pi - 3\theta$, $\angle\mathrm{OPR} = \frac{\theta}{2}$이므로 $\angle\mathrm{PRO} = \frac{5}{2}\theta$, $\overline{\mathrm{OP}} = 1$

삼각형 POR에서 싸인법칙에 의해

$\frac{1}{\sin\frac{5}{2}\theta} = \frac{\overline{\mathrm{OR}}}{\sin\frac{\theta}{2}}$이므로 $\overline{\mathrm{OR}} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta}$

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta} \cdot \sin(\pi - 3\theta)$$

$g(\theta)$는 부채꼴 OBQ에서 삼각형 OBR을 빼면 되므로

$$g(\theta) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot 2\theta - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta} \cdot \sin 2\theta$$

$\angle\mathrm{BPQ} = \theta$이고 삼각형 POR에서 싸인법칙에 의해

$\frac{1}{\sin\frac{5}{2}\theta} = \frac{\overline{\mathrm{PR}}}{\sin(\pi - 3\theta)}$이므로 $\overline{\mathrm{PR}} = \frac{\sin 3\theta}{\sin\frac{5}{2}\theta}$

따라서 $\overline{\mathrm{RH}} = \frac{\sin 3\theta}{\sin\frac{5}{2}\theta} \cdot \sin\theta$

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta) + g(\theta)}{\overline{\mathrm{RH}}} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{\sin\frac{\theta}{2} \cdot \sin 3\theta}{2\sin\frac{5}{2}\theta} + \theta - \frac{\sin\frac{\theta}{2} \cdot \sin 2\theta}{2\sin\frac{5}{2}\theta}}{\frac{\sin 3\theta \cdot \sin\theta}{\sin\frac{5}{2}\theta}}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{1}{10}\sin 3\theta + \theta - \frac{1}{10}\sin 2\theta}{\frac{6}{5}\sin\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{\sin 3\theta}{\theta} + 1 - \frac{1}{10} \cdot \frac{\sin 2\theta}{\theta}}{\frac{6}{5} \cdot \frac{\sin\theta}{\theta}}$$

$$= \frac{\frac{3}{10} + 1 - \frac{2}{10}}{\frac{6}{5}} = \frac{11}{12} = \frac{q}{p}$$

$p = 12$, $q = 11$이므로

$p + q = 23$

29) 정답 168

문제 해설

세 상자에 서로 같은 흰 공 4개를 나누어 넣는 조합은
(4, 0, 0), (3, 1, 0), (2, 2, 0), (2, 1, 1)이다.

i) 흰 공을 (4, 0, 0) 으로 나누어 넣는 경우
흰 공 4개 넣을 상자를 선택한 후
검은 공 6개를 나누어 넣는 경우는
$x + y + z = 6$에서 흰 공이 들어가지 않은 상자에 2개 이상씩 넣어야 하므로
$x + (y-2) + (z-2) = 2$
${}_3\mathrm{H}_2 = {}_4\mathrm{C}_2 = 6$
따라서 ${}_3\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{H}_2 = 3 \times 6 = 18$

ii) 흰 공을 (3, 1, 0)으로 나누어 넣는 경우
흰 공을 A, B, C에 나누어 넣고
검은 공 6개를 나누어 넣는 경우는
$x + y + z = 6$에서 흰 공 1개 넣은 상자에 1개 이상 흰 공 2개 넣은 상자에 2개 이상 넣어야 하므로
$x + (y-1) + (z-2) = 3$
${}_3\mathrm{H}_3 = {}_5\mathrm{C}_2 = 10$
따라서 $3! \times {}_3\mathrm{H}_3 = 6 \times 10 = 60$

iii) 흰 공을 (2, 2, 0)으로 나누어 넣는 경우
흰 공 0개인 상자를 선택한 후
검은 공 6개를 나누어 넣는 경우는
$x + y + z = 6$에서 흰 공이 안 들어간 상자에 2개 이상 넣어야 하므로
$x + y + (z-2) = 4$
${}_3\mathrm{H}_4 = {}_6\mathrm{C}_2 = 15$
따라서 ${}_3\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{H}_4 = 3 \times 15 = 45$

iv) 흰 공을 (2, 1, 1)으로 나누어 넣는 경우
흰 공 2개 들어가는 상자를 선택한 후
검은 공 6개를 나누어 넣는 경우는
$x + y + z = 6$에서 흰 공 1개씩 들어간 상자에 1개 이상 넣어야 하므로
$x + (y-1) + (z-1) = 4$
${}_3\mathrm{H}_4 = {}_6\mathrm{C}_2 = 15$
따라서 ${}_3\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{H}_4 = 3 \times 15 = 45$

i), ii), iii), iv)에 의해서 $18 + 60 + 45 + 45 = 168$

다른 풀이

흰 공 4개를 세 상자에 몇 개씩 나누어 넣는지를 기준으로 나누어 보면 다음과 같이 네 가지 경우가 있다.

1) 4개, 0개, 0개
2) 3개, 1개, 0개
3) 2개, 2개, 0개
4) 2개, 1개, 1개

각 경우에 따라 흰 공을 세 상자 A, B, C에 나누어 담은 후 각 상자에 2개 이상의 공이 담기도록 검은 색 공을 나누어 담으면 된다.

1) 흰 공을 4개, 0개, 0개로 나누어 담는 경우
우선 흰 공 4개가 담기는 상자를 결정하고 흰 공이 담기지 않는 상자 두 곳에는 검은 공을 적어도 2개씩 담기도록 하면 된다.
$_3C_1 \times {}_3H_{6-4} = 3 \times {}_4C_2 = 18$

2) 흰 공을 3개, 1개, 0개로 나누어 담는 경우
흰 공 3개가 담기는 상자와 흰 공 1개가 담기는 상자를 결정해주고 흰 공 1개가 담기는 상자에는 검은 색 공을 적어도 한 개이상 흰 공이 담기지 않는 상자에는 검은 색 공을 2개 이상 담기도록 하면 된다.
$_3P_2 \times {}_3H_{6-3} = 6 \times {}_5C_3 = 60$

3) 흰 공을 2개, 2개, 0개로 나누어 담는 경우
흰 공이 2개씩 담기는 두 개 상자를 결정해주고 흰 공이 담기지 않는 상자에는 검은 색 공이 2개 이상 담기도록 하면 된다.
$_3C_2 \times {}_3H_{6-2} = 3 \times {}_6C_4 = 45$

4) 흰 공을 2개, 1개, 1개로 나누어 담는 경우
흰 공이 2개 담기는 상자를 결정해주면 나머지 상자에는 흰 공이 1개씩 담겨지고 흰 공이 1개씩 담기는 상자에는 검은 색 공을 적어도 하나씩은 담기도록 하면 된다.
$_3C_1 \times {}_3H_{6-2} = 3 \times {}_6C_4 = 45$

따라서 1), 2), 3), 4)에 의하여 구하는 경우의 수는
$18 + 69 + 45 + 45 = 168$이다.

다른 풀이

(i) 경우 Ⅰ

상자	A	B	C	경우의 수
흰 공	0	0	4	3가지
검은 공	x $(x \geq 2)$	y $(y \geq 2)$	z $(z \geq 0)$	$_3H_2$가지

$x+y+z=6$의 음이 아닌 정수해
⇔ $x'+y'+z=2$ $(x'=x-2,\ y'=y-2)$의 음이 아닌 정수해
⇔ 음이 아닌 정수해의 개수는 $_3H_2$(가지)
∴ $3 \times {}_3H_2 = 18$(가지)

(ii) 경우 Ⅱ

상자	A	B	C	경우의 수
흰 공	0	1	3	3!가지
검은 공	x $(x \geq 2)$	y $(y \geq 1)$	z $(z \geq 0)$	$_3H_3$가지

$x+y+z=6$의 음이 아닌 정수해
⇔ $x'+y'+z=3$ $(x'=x-2,\ y'=y-1)$의 음이 아닌 정수해
⇔ 음이 아닌 정수해의 개수는 $_3H_3$(가지)
∴ $3! \times {}_3H_3 = 60$(가지)

(iii) 경우 Ⅲ

상자	A	B	C	경우의 수
흰 공	0	2	2	3가지
검은 공	x $(x \geq 2)$	y $(y \geq 0)$	z $(z \geq 0)$	$_3H_4$가지

$x+y+z=6$의 음이 아닌 정수해
⇔ $x'+y+z=4$ $(x'=x-2)$의 음이 아닌 정수해
⇔ 음이 아닌 정수해의 개수는 $_3H_4$(가지)
∴ $3 \times {}_3H_4 = 45$(가지)

(iv) 경우 Ⅳ

상자	A	B	C	경우의 수
흰 공	1	1	2	3가지
검은 공	x $(x \geq 1)$	y $(y \geq 1)$	z $(z \geq 0)$	$_3H_4$가지

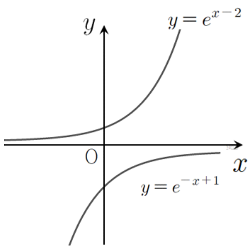
$x+y+z=6$의 음이 아닌 정수해
⇔ $x'+y'+z=4$ $(x'=x-1,\ y'=y-1)$의 음이 아닌 정수해
⇔ 음이 아닌 정수해의 개수는 $_3H_4$(가지)
∴ $3 \times {}_3H_4 = 45$(가지)

따라서 (i)~(iv)로부터 구하는 경우의 수는
$18+60+45+45=168$(가지)

30) 정답 43

문제 해설

$y=e^{x-2}$와 $y=-e^{-x+1}$의 그래프는 다음과 같다.



직선 $y=ax+b$가 두 그래프의 사이에 있으면 된다.
두 지수함수의 점근선이 모두 $y=0$(x축)이므로 $a \geq 0$이다.
따라서 ab의 최솟값은 a가 최대이고 b가 최소일 때이므로 두 곡선

의 공통접선일 때이다.

두 접점을 각각 $(t,\ e^{t-2})$, $(s,\ -e^{-s+1})$이라 하자.

점 $(t,\ e^{t-2})$에서의 접선의 방정식을 구하면

$$y=e^{t-2}(x-t)+e^{t-2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

점 $(s,\ -e^{-s+1})$에서의 접선의 방정식을 구하면

$$y=e^{-s+1}(x-s)-e^{s+1} \quad \cdots\cdots ㉡$$

두 직선 ㉠, ㉡이 서로 일치해야 하므로

$$e^{t-2}=e^{-s+1}$$

$$-te^{t-2}+e^{t-2}=-se^{-s+1}-e^{-s+1}$$

이므로

$$t+s=3 \quad \cdots\cdots ㉢$$

$$-t+1=-s-1 \quad \cdots\cdots ㉣$$

두 식㉢, ㉣을 연립하면

$$t=\frac{5}{2},\ s=\frac{1}{2}$$

이때 $a=e^{\frac{1}{2}}$, $b=-\frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}$이므로

$$\therefore\ m=-\frac{3}{2}e$$

$a>0,\ b>0$일 때, 최댓값을 구하면

$y=e^{x-2}$에 접할 때이므로

$y=e^{t-2}(x-t)+e^{t-2}$에서

$$a=e^{t-2},\ b=-te^{t-2}+e^{t-2}$$

이므로

$b=e^{t-2}(1-t)>0$에서 $t<1$이다.

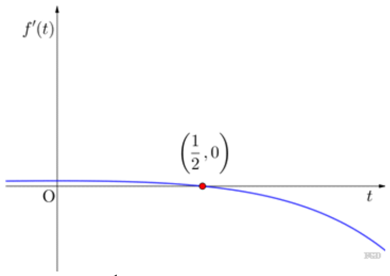
$ab=f(t)$라 하면

$f(x)=(1-t)e^{2t-4}$이고,

양변을 t에 대하여 미분하면

$f'(t)=e^{2t-4}(-1+2-2t)=e^{2t-4}(1-2t)$이고

$y=f'(t)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(t)$는 $t=\frac{1}{2}$에서 극대이자, 최대이므로

$$M=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{-3}$$

$$\therefore\ M\times m^3=\frac{1}{2}e^{-3}\times\left(-\frac{3}{2}e\right)^3=-\frac{27}{16}$$

$$\therefore\ p+q=16+27=43$$

문제해설

그래프 $y=e^{x-2}$ 위의 점 $(t,\ e^{t-2})$에서의 접선의 방정식은

$y=e^{t-2}(x-t)+e^{t-2}$이다.

그래프 $y=-e^{-x+1}$ 위의 점 $(s,\ -e^{-s+1})$에서의 접선의 방정식은

$y=e^{-s+1}(x-s)-e^{-s+1}$이다.

이때 그래프 $y=e^{x-2}$와 그래프 $y=-e^{-x+1}$에 동시에 접하는 접선의 방정식을 구하면

두 접선의 방정식 $y=e^{t-2}(x-t)+e^{t-2}$,

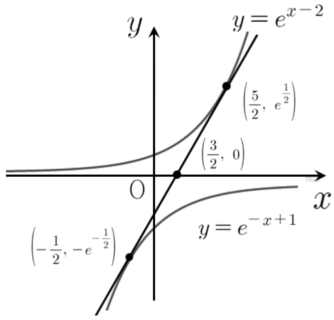
$y=e^{-s+1}(x-s)-e^{-s+1}$이 일치할 때이다.

따라서 $e^{t-2}(x-t)+e^{t-2}=e^{-s+1}(x-s)-e^{-s+1}$연립하여 풀면

$t-2=-s+1$

$(-t+1)e^{t-2}=(-s-1)e^{-s+1}$

$t=\frac{5}{2},\ s=\frac{1}{2}$이다.



따라서 $t\le\frac{5}{2}$, $s\ge-\frac{1}{2}$

그래프 $y=e^{x-2}$ 위의 점 $(t,\ e^{t-2})$에서의 접선의 방정식

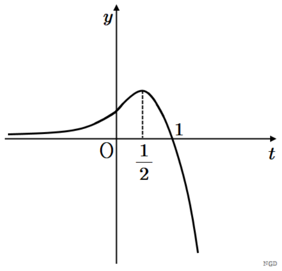
$y=e^{t-2}(x-t)+e^{t-2}$에서 $a=e^{t-2}$, $b=(-t+1)e^{t-2}$이다.

따라서 $ab=f(t)=e^{2t-4}(-t+1)$ $\left(t\le\frac{5}{2}\right)$이다.

함수 $f(t)$의 그래프 개형을 조사하여 함수의 최댓값, 최솟값을 구해보자.

$f'(t)=e^{2t-4}(-2t+1)$

따라서 그래프 개형은 아래와 같다.



이때 ab의 최댓값을 $t=\frac{1}{2}$일 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{-3}$이다.

그래프 $y=-e^{-x+1}$ 위의 점 $(s,\ -e^{-s+1})$에서의 접선의 방정식

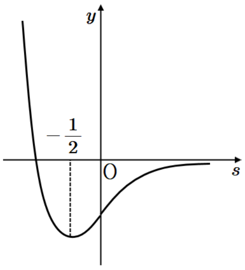
$y=e^{-s+1}(x-s)-e^{-s+1}$에서 $a=e^{-s+1}$, $b=e^{-s+1}(-s-1)$이다.

따라서 $ab = g(s) = e^{-2s+2}(-s-1)\left(s \geq \frac{1}{2}\right)$이다.

함수 $g(s)$의 그래프 개형을 조사하여 함수의 최댓값, 최솟값을 구해보자.

$g'(s) = e^{-2s+2}(2s+1)$

따라서 그래프 개형은 아래와 같다.



이때 ab의 최솟값을 $s = \frac{1}{2}$일 때, $g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}e$이다.

따라서 $M = \frac{1}{2}e^{-3}$ $m = -\frac{3}{2}e$

$|M \times m^3| = \frac{27}{16}$이다.