수학 영역(가형)

1. 계산 능력 – 평면벡터 정답 ①

$\vec{a}=(2, -3)$, $\vec{b}=(3, 1)$이므로
$\vec{a}-\vec{b}=(2, -3)-(3, 1)=(-1, -4)$
따라서 벡터 $\vec{a}-\vec{b}$의 모든 성분의 합은
$-1+(-4)=-5$이다.

2. 계산 능력 – 적분법 정답 ②

$\int_0^1 x\sqrt{x}\,dx=\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx=\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{5}$

3. 계산 능력 – 지수함수와 로그함수 정답 ③

$\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{2\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{x}{2\ln(1+x)}\times\frac{e^{3x}-1}{3x}\times3\right\}$
$=\frac{1}{2}\times1\times3=\frac{3}{2}$

4. 이해 능력 – 확률 정답 ④

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$=\frac{1}{2}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)=\frac{5}{6}$
$\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)=\frac{5}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$에서 $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$
따라서 $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$

5. 이해 능력 – 순열과 조합 정답 ⑤

$(2x+3)^5$의 전개식에서 일반항은
${}_5\mathrm{C}_r(2x)^{5-r}3^r={}_5\mathrm{C}_r2^{5-r}3^rx^{5-r}$
x^4항은 $r=1$일 때이므로 x^4의 계수는
${}_5\mathrm{C}_1\times2^4\times3=5\times16\times3=240$

6. 이해 능력 – 통계 정답 ②

한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 6의 약수의 눈이 나올 확률이 $\frac{2}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(6, \frac{2}{3}\right)$를 따른다.
따라서 $\mathrm{V}(X)=6\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$이므로
$\mathrm{V}(3X)=3^2\times\mathrm{V}(X)=9\times\frac{4}{3}=12$

7. 이해 능력 – 지수함수와 로그함수 정답 ②

$y=\ln x+kx$에서 $y'=\frac{1}{x}+k$
접점의 좌표를 $(t, \ln t+kt)$로 놓으면 접선의 기울기가 2이므로 $\frac{1}{t}+k=2$
$2t-kt=1$ …… ㉠
점 $(t, \ln t+kt)$는 직선 $y=2x-1$ 위의 점이므로
$\ln t+kt=2t-1$, $\ln t+1=2t-kt$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $\ln t+1=1$에서 $\ln t=0$이므로
$t=1$, ㉠에서 $2-k=1$ 따라서 $k=1$

8. 이해 능력 – 적분법 정답 ③

$\int_0^\pi tf'(t)dt=k$(k는 실수)라 놓으면
$f(x)=a\sin x+k$이고, $f'(x)=a\cos x$
$\int_0^\pi tf'(t)dt=\int_0^\pi(t\times a\cos t)dt$
$=a\left(\left[t\sin t\right]_0^\pi-\int_0^\pi\sin t\,dt\right)$
$=a\left(0-\left[-\cos t\right]_0^\pi\right)$
$=a\times(-1-1)=-2a$
따라서 $f(x)=a\sin x-2a$이고
조건에서 $f(0)=-4$이므로 $-2a=-4$
따라서 $a=2$

9. 이해 능력 – 미분법 정답 ⑤

$f(x)=\frac{x}{x^2+1}\,(x>0)$으로 놓으면
$f'(x)=\frac{x^2+1-x(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$
$f''(x)=\frac{-2x(x^2+1)^2-(1-x^2)\times2(x^2+1)\times2x}{(x^2+1)^4}$
$=\frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}=\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$
$f''(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$
이때 $x>0$이므로 $x=\sqrt{3}$이고, $x=\sqrt{3}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$이다.
따라서 $a=\sqrt{3}$, $b=\frac{\sqrt{3}}{4}$, $a+b=\frac{5\sqrt{3}}{4}$

10. 이해 능력 – 통계 정답 ①

크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 15이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은
$15-1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}\le m\le15+1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}$
이때 $a\le m\le15.98$이므로
$a=15-1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}$, $15.98=15+1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}$
$1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}=15.98-15=0.98$에서
$\sqrt{n}=\frac{1.96\times2}{0.98}=4$
따라서 $n=16$, $a=15-1.96\times\frac{2}{\sqrt{16}}=14.02$
이므로 $n+a=30.02$

11. 이해 능력 – 평면 곡선 정답 ②

$y^2-12x-6y+33=0$을 변형하면
$(y-3)^2=12x-24=12(x-2)$
따라서 포물선 $y^2-12x-6y+33=0$의 초점의 좌표는 $(5, 3)$이고
준선의 방정식은 $x=-1$이다.
점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{HP}}$이고,
$b-a=\frac{1}{2}$이므로
$\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{HP}}=1+5+\frac{1}{2}=\frac{13}{2}$

12. 수학 내적 문제 해결 능력 – 삼각함수 정답 ①

함수 $f(x)=\begin{cases}(ax+3)\cos x & (x<0)\\ x^2+2x+b & (x\ge0)\end{cases}$이
$x=0$에서 미분가능하면
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로
$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x)=f(0)$이다.
$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}(ax+3)\cos x=3$
$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}(x^2+2x+b)=b$
$f(0)=b$ 따라서 $b=3$
한편, $x=0$에서의 미분계수가 존재하므로
$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$
$=\lim_{x\to0-}\frac{(ax+3)\cos x-3}{x}$
$=\lim_{x\to0-}\frac{ax\cos x+3\cos x-3}{x}$
$=\lim_{x\to0-}\left\{a\cos x-\frac{3(1-\cos x)}{x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right\}$
$=\lim_{x\to0-}\left\{a\cos x-\frac{3\sin x}{x}\times\frac{\sin x}{1+\cos x}\right\}$
$=a-3\times0=a$
$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{x^2+2x+3-3}{x}$
$=\lim_{x\to0+}(x+2)=0+2=2$
따라서 $a=2$이므로 $a+b=2+3=5$

13. 수학 외적 문제 해결 능력 – 통계 정답 ③

이 공장에서 생산하는 노트북 컴퓨터 1대의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(900, 20^2)$을 따른다. 이 공장에서 생산하는 노트북 컴퓨터 중에서 임의추출한 4대의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(900, \left(\frac{20}{\sqrt{4}}\right)^2\right)$
즉, $\mathrm{N}(900, 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{\overline{X}-900}{10}$이라 하면 확률변수 Z는 정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.
이때 임의추출한 노트북 컴퓨터 4대의 무게의 합은 $4\overline{X}$와 같으므로 구하는 확률은
$\mathrm{P}(4\overline{X}\le3640)=\mathrm{P}(\overline{X}\le910)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-900}{10}\le\frac{910-900}{10}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\le1)=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le1)$
$=0.5+0.3413=0.8413$

14. 이해 능력 – 평면벡터 정답 ④

시각 t에서의 점 P의 속도는
$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)=\left(\frac{4}{t+1}, 2t\right)$
$\vec{v}$가 벡터 $\vec{a}=(1, 1)$과 평행할 때,
$\left(\frac{4}{t+1}, 2t\right)=s(1, 1)$을 만족시키는 실수 $s(s\ne0)$이 존재한다. 따라서 $\frac{4}{t+1}=s$, $2t=s$이므로
$\frac{4}{t+1}=2t$, $4=2t^2+2t$, $t^2+t-2=0$
$(t+2)(t-1)=0$ $\quad\therefore t=1(\because t\ge0)$
$t=1$일 때, 점 P의 속도는 $(2, 2)$이므로
속력은 $\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$이다.

15. 이해 능력 – 적분법 정답 ③

x좌표가 $x(0\le x\le\ln2)$인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자를 때, 그 단면은 지름의 길이가 $e^2-e^x(0\le x\le\ln2)$인 반원이다.
따라서 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면
$S(x)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{e^2-e^x}{2}\right)^2\pi$
$=\frac{1}{8}(e^{2x}-2e^{x+2}+e^4)\pi$
따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면
$V=\int_0^{\ln2}S(x)dx=\frac{\pi}{8}\int_0^{\ln2}(e^{2x}-2e^{x+2}+e^4)dx$
$=\frac{\pi}{8}\left[\frac{1}{2}e^{2x}-2e^{x+2}+e^4x\right]_0^{\ln2}$
$=\frac{\pi}{8}\left\{\left(\frac{1}{2}e^{2\ln2}-2e^{\ln2+2}+e^4\ln2\right)-\left(\frac{1}{2}-2e^2\right)\right\}$
$=\frac{\pi}{8}\left(2-4e^2+e^4\ln2-\frac{1}{2}+2e^2\right)$
$=\frac{\pi}{8}\left(e^4\ln2-2e^2+\frac{3}{2}\right)$

16. 이해 능력 – 확률 정답 ④

뽑은 3장의 카드에 적힌 수의 최댓값과 최솟값의 차가 5 미만인 사건을 A, 최댓값과 최솟값의 차가 홀수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.
10장의 카드 중에서 임의로 3장의 카드를 동시에 뽑는 경우의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$
3장의 카드에 적혀 있는 수의 최댓값을 a, 최솟값을 b라 할 때, $a-b<5$인 경우는 다음과 같다.
(i) $a-b=2$인 경우
뽑은 3장의 카드에 적힌 세 수가
k, $k+1$, $k+2(k=1, 2, 3, \cdots, 8)$이므로
그 경우의 수는 $1\times8=8$
(ii) $a-b=3$인 경우
뽑은 3장의 카드에 적힌 세 수가
k, $k+1$, $k+3$ 또는
k, $k+2$, $k+3(k=1, 2, 3, \cdots, 7)$이므로
그 경우의 수는 $2\times7=14$

(iii) $a-b=4$인 경우

뽑은 3장의 카드에 적힌 세 수가

$k,\ k+1,\ k+4$ 또는 $k,\ k+2,\ k+4$

또는 $k,\ k+3,\ k+4(k=1,\ 2,\ 3,\cdots,\ 6)$

이므로 그 경우의 수는 $3\times6=18$

(i)~(iii)에서

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{8+14+18}{120}=\dfrac{40}{120}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{14}{120}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B\,|\,A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{14}{120}}{\frac{40}{120}}=\dfrac{14}{40}=\dfrac{7}{20}$

17. 연역적 추론 능력(증명) - 평면 곡선 정답 ②

ㄱ. (참) 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$은 선분 AB에 접하고 그 접점이 점 P이므로 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 직선 AB의 기울기와 같다.

두 점 $\mathrm{A}(2\sqrt{3},\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{0-2}{2\sqrt{3}-0}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로

점 P에서의 접선의 기울기는 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이다.

ㄴ. (참) 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$에 대하여 $\mathrm{E}(a,\ 0)$, $\mathrm{F}(0,\ b)$

$\overline{\mathrm{AB}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{EF}}$이고 ㄱ에서 직선 AB의 기울기가 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ a=\sqrt{3}\,b$ …… ㉠

타원 위의 점 P에서의 접선은 기울기가 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이고 점 $\mathrm{B}(0,\ 2)$를 지나므로

접선의 방정식은 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+2$

한편, 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$이라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는

$-\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $3b^2x_1=\sqrt{3}a^2y_1$

㉠에서 $3b^2x_1=3\sqrt{3}b^2y_1$, $x_1=\sqrt{3}y_1$ …… ㉡

한편, 점 P는 직선 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+2$ 위의 점이므로 $y_1=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x_1+2$

이 식에 ㉡을 대입하여 정리하면 $2y_1=2$

따라서 $x_1=\sqrt{3}$, $y_1=1$, 즉 점 P의 좌표는 $(\sqrt{3},\ 1)$

점 P는 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$ …… ㉢

㉠, ㉢에서 $a^2=6$, $b^2=2$이므로 $a^2+b^2=8$

ㄷ. (거짓) ㄴ에서 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 1)$이다.

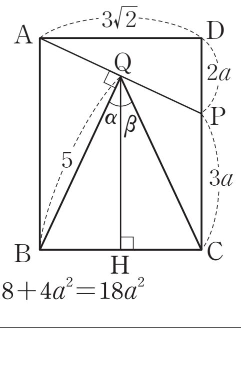
따라서 두 점 A, C를 초점으로 하고 점 P를 지나는 쌍곡선의 주축의 길이는

$\overline{\mathrm{CP}}-\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+1^2}-\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}$

$=2\sqrt{7}-2$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

18. 이해 능력 - 삼각함수 정답 ②



$\overline{\mathrm{DP}}=2a(a>0)$, $\overline{\mathrm{PC}}=3a$ 라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=5a$이고,

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+(2a)^2}$

$=\sqrt{18+4a^2}$

삼각형 ABQ와 삼각형 PAD는 닮음이므로

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{AD}}$

$5a:5=\sqrt{18+4a^2}:3\sqrt{2}$, $18+4a^2=18a^2$

$\therefore\ a=\dfrac{3}{\sqrt{7}}=\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{DP}}=\dfrac{6\sqrt{7}}{7}$, $\overline{\mathrm{PC}}=\dfrac{9\sqrt{7}}{7}$

점 Q에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\angle\mathrm{BQH}=\alpha$, $\angle\mathrm{CQH}=\beta$라 하자.

$\tan\alpha=\tan(\angle\mathrm{ABQ})=\tan(\angle\mathrm{PAD})$

$=\dfrac{\overline{\mathrm{DP}}}{\overline{\mathrm{AD}}}=\dfrac{\frac{6\sqrt{7}}{7}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{14}}{7}$ …… ㉠

한편, $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{BQ}}:\overline{\mathrm{QH}}$에서

$\overline{\mathrm{QH}}=\dfrac{\overline{\mathrm{BQ}}^2}{\overline{\mathrm{AB}}}=\dfrac{5\sqrt{7}}{3}$이므로

$\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{QH}}\tan\alpha=\dfrac{5\sqrt{7}}{3}\times\dfrac{\sqrt{14}}{7}=\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{HC}}=\overline{\mathrm{BC}}-\overline{\mathrm{BH}}=3\sqrt{2}-\dfrac{5\sqrt{2}}{3}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

$\therefore\ \tan\beta=\dfrac{\overline{\mathrm{HC}}}{\overline{\mathrm{QH}}}=\dfrac{\frac{4\sqrt{2}}{3}}{\frac{5\sqrt{7}}{3}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{5\sqrt{7}}=\dfrac{4\sqrt{14}}{35}$

$\therefore\ \tan(\angle\mathrm{BQC})=\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=\dfrac{\frac{\sqrt{14}}{7}+\frac{4\sqrt{14}}{35}}{1-\frac{\sqrt{14}}{7}\times\frac{4\sqrt{14}}{35}}$

$=\dfrac{\frac{9\sqrt{14}}{35}}{1-\frac{8}{35}}=\dfrac{9\sqrt{14}}{27}=\dfrac{\sqrt{14}}{3}$

19. 수학 내적 문제 해결 능력 - 평면벡터 정답 ③

$|\vec{p}|=a$, $|\vec{q}|=b$라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{b\vec{p}+a\vec{q}}{|b\vec{p}+a\vec{q}|}$

이때, $|a\vec{q}|=a|\vec{q}|=ab$, $|b\vec{p}|=b|\vec{p}|=ba$이므로

두 벡터 $a\vec{q}$, $b\vec{p}$의 크기는 서로 같다. 따라서

$b\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OX}}$, $a\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{OY}}$, $b\vec{p}+a\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=\overrightarrow{\mathrm{OX}}+\overrightarrow{\mathrm{OY}}$이므로

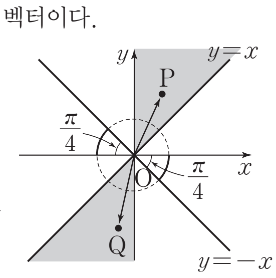
선분 XY의 중점을 M이라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

이때 $|\overrightarrow{\mathrm{OX}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OY}}|$이므로 직선 OZ는 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OY}}$가 이루는 각의 이등분선이다.

즉, 직선 OZ는 두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$가 이루는 각의 이등분선이다.

$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=\left|\dfrac{b\vec{p}+a\vec{q}}{|b\vec{p}+a\vec{q}|}\right|=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OZ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OZ}}|}=1$

이므로 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$는 단위벡터이다.



따라서 점 R가 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같이 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원에서 중심각의 크기가 $\dfrac{\pi}{4}$인 2개의 호와 같으므로 구하는 도형의 길이는 $\dfrac{\pi}{4}\times2=\dfrac{\pi}{2}$

20. 연역적 추론 능력(증명) - 확률 정답 ⑤

20장의 카드 중에서 k장$(4\le k\le11)$의 카드를 택하는 경우의 수는 ${}_{20}\mathrm{C}_k$이다.

2장의 카드에 적힌 숫자가 같은 경우의 수는 10이고, 나머지 $(k-2)$장의 카드에 적힌 숫자가 모두 서로 다른 경우의 수는

나머지 9개의 숫자 중에서 서로 다른 숫자 $(k-2)$개를 선택하는 경우의 수가 ${}_9\mathrm{C}_{k-2}$이고, 이 각각의 경우에 대하여 카드의 색이 2가지이므로

$\boxed{{}_9\mathrm{C}_{k-2}\times2^{k-2}}$이다. 따라서

$\mathrm{P}(k)=\dfrac{10\times\boxed{{}_9\mathrm{C}_{k-2}\times2^{k-2}}}{{}_{20}\mathrm{C}_k}$

$\mathrm{P}(m+1)=\mathrm{P}(m)$이라 하면

$\dfrac{10\times{}_9\mathrm{C}_{m-1}\times2^{m-1}}{{}_{20}\mathrm{C}_{m+1}}=\dfrac{10\times{}_9\mathrm{C}_{m-2}\times2^{m-2}}{{}_{20}\mathrm{C}_m}$

$\dfrac{\boxed{{}_9\mathrm{C}_{m-1}\times2}}{{}_{20}\mathrm{C}_{m+1}}=\dfrac{{}_9\mathrm{C}_{m-2}}{{}_{20}\mathrm{C}_m}$

$\dfrac{\frac{9!}{(m-1)!(10-m)!}\times2}{\frac{20!}{(m+1)!(19-m)!}}=\dfrac{\frac{9!}{(m-2)!(11-m)!}}{\frac{20!}{m!(20-m)!}}$

$\dfrac{(m+1)!(19-m)!\times2}{(m-1)!(10-m)!}=\dfrac{m!(20-m)!}{(m-2)!(11-m)!}$

$\dfrac{2(m+1)}{m-1}=\dfrac{20-m}{11-m}$

$2(m+1)(11-m)=(20-m)(m-1)$

$-2m^2+20m+22=-m^2+21m-20$

$m^2+m-42=0$, $(m+7)(m-6)=0$

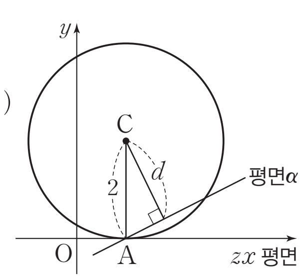
$4\le m\le10$이므로 구하는 자연수 m은 $\boxed{6}$이다.

따라서 $f(k)={}_9\mathrm{C}_{k-2}\times2^{k-2}$, $g(m)={}_9\mathrm{C}_{m-1}\times2$, $a=6$이므로

$a+\dfrac{f(7)}{g(5)}=6+\dfrac{{}_9\mathrm{C}_5\times2^5}{{}_9\mathrm{C}_4\times2}=6+16=22$

21. 수학 내적 문제 해결 능력 - 공간도형과 공간벡터 정답 ⑤

평면 α는 점 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$을 지나고 xy평면에 수직이므로



0이 아닌 실수 a에 대하여 평면 α의 법선벡터를 $(a,\ 1,\ 0)$이라 하면

평면 α의 방정식은 $a(x-1)+y=0$, $ax+y-a=0$이다.

구의 중심 $(1,\ 2,\ 0)$에서 평면 α까지의 거리를 d라 하면 $d=\dfrac{|a+2+0-a|}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{a^2+1}}$

따라서 원 C의 반지름의 길이가

$\sqrt{2^2-\dfrac{4}{a^2+1}}=\sqrt{\dfrac{4a^2}{a^2+1}}$이므로

원 C의 넓이는 $\dfrac{4a^2}{a^2+1}\pi$

평면 $2y-4z+13=0$의 법선벡터가 $(0,\ 2,\ -4)$이므로

평면 α와 평면 $2y-4z+13=0$이 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{4+16}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}\sqrt{a^2+1}}$

따라서 원 C의 평면 $2y-4z+13=0$ 위로의 정사영의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\dfrac{4a^2}{a^2+1}\pi\times\dfrac{1}{\sqrt{5}\sqrt{a^2+1}}$

이때 $a^2=t(t>0)$이라 하면 $S(a)=\dfrac{4\pi t}{\sqrt{5}\sqrt{(t+1)^3}}$

$T(t)=\dfrac{4\pi t}{\sqrt{5}\sqrt{(t+1)^3}}$라 하면

$T'(t)=\dfrac{4\pi}{\sqrt{5}}\times\dfrac{\sqrt{(t+1)^3}-t\times\frac{3}{2}\sqrt{t+1}}{(t+1)^3}$

$=\dfrac{4\pi}{\sqrt{5}}\times\dfrac{t+1-\frac{3}{2}t}{(t+1)^2\sqrt{t+1}}$

$=\dfrac{2\pi}{\sqrt{5}}\times\dfrac{2-t}{(t+1)^2\sqrt{t+1}}$

$T'(t)=0$에서 $t=a^2=2$이고 이때 $S(a)$는 최대이다.

따라서 구하는 넓이의 최댓값은

$\dfrac{8}{3}\pi\times\dfrac{1}{\sqrt{5}\sqrt{3}}=\dfrac{8\sqrt{15}}{45}\pi$

22. 이해 능력 – 순열과 조합 정답 9

$\dfrac{{}_6\Pi_3}{{}_4P_3}=\dfrac{6\times6\times6}{4\times3\times2}=9$

23. 이해 능력 – 공간도형과 공간벡터 정답 10

선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{-2-3}{2-1},\ \dfrac{6-0}{2-1},\ \dfrac{2a-(-2)}{2-1}\right)$

즉, $(-5,\ 6,\ 2a+2)$이다.

$2a+2=10$에서 $a=4$이고, $b=6$이므로 $a+b=10$

24. 이해 능력 – 미분법 정답 4

함수 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 $g(-1)=a$라 하면

$f(a)=a^3+a-3=-1$

$a^3+a-2=0,\ (a-1)(a^2+a+2)=0$에서

$a^2+a+2>0$이므로 $a=1$

따라서 $g'(-1)=\dfrac{1}{f'(1)}$이므로 $\dfrac{1}{g'(-1)}=f'(1)$

$f'(x)=3x^2+1$이므로 $f'(1)=3\times1^2+1=4$

따라서 $\dfrac{1}{g'(-1)}=4$

25. 이해 능력 – 지수함수와 로그함수 정답 24

$5+3^x=k,\ 12+3^y=2k$에서

$3^x=k-5>0,\ 3^y=2k-12>0$이므로

$k>5,\ k>6$ …… ㉠

$(k-5)(2k-12)=3^x\times3^y$

$=3^{x+y}\le3^{\log_3 24}=24$

에서 부등식 $(k-5)(2k-12)\le24$를 풀면

$k^2-11k+18\le0,\ (k-2)(k-9)\le0$

$\therefore\ 2\le k\le9$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $6<k\le9$이므로 구하는 모든 자연수 k의 값의 합은 $7+8+9=24$이다.

26. 이해 능력 – 평면 곡선 정답 140

$x=e^t-e^{-t}$, $y=e^t-3e^{-t}$에서

$\dfrac{dx}{dt}=e^t+e^{-t},\ \dfrac{dy}{dt}=e^t+3e^{-t}$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{e^t+3e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$

$\dfrac{e^t+3e^{-t}}{e^t+e^{-t}}=\dfrac{6}{5}$에서 $\dfrac{e^{2t}+3}{e^{2t}+1}=\dfrac{6}{5}$

$5(e^{2t}+3)=6(e^{2t}+1),\ e^{2t}=9,\ e^t=3$

따라서 $t=\ln3$

이때, $a=e^{\ln3}-e^{-\ln3}=3-\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{3}$

$b=e^{\ln3}-3e^{-\ln3}=3-1=2$이므로

접점의 좌표는 $\left(\dfrac{8}{3},\ 2\right)$

따라서

$30(a+b)=30\left(\dfrac{8}{3}+2\right)=30\times\dfrac{14}{3}$

$=140$

27. 수학 내적 문제 해결 능력 – 순열과 조합 정답 543

조건 (가)에서 $f(1)\le f(4)$이므로

조건 (나)에서 $f(1)=1,\ f(4)=6$ 또는 $f(1)=2,\ f(4)=3$이다.

(ⅰ) $f(1)=1,\ f(4)=6$일 때

조건 (가)에서

$1=f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)=6$이고

$f(5),\ f(6),\ f(7)$의 값이 될 수 있는 것은 중복을 허락하여 6, 7 중의 하나이므로 함수 f의 개수는

${}_6H_2\times{}_2\Pi_3={}_{6+2-1}C_2\times2^3={}_7C_2\times8$

$=\dfrac{7\times6}{2\times1}\times8=168$

(ⅱ) $f(1)=2,\ f(4)=3$일 때

조건 (가)에서

$2=f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)=3$이고

$f(5),\ f(6),\ f(7)$의 값이 될 수 있는 것은 중복을 허락하여 3, 4, 5, 6, 7 중의 하나이므로 함수 f 의 개수는

${}_2H_2\times{}_5\Pi_3={}_{2+2-1}C_2\times5^3={}_3C_2\times125$

$=3\times125=375$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수 f의 개수는

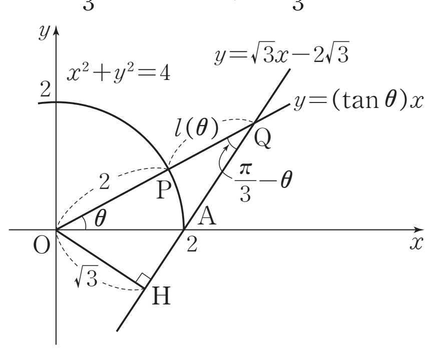
$168+375=543$

28. 수학 내적 문제 해결 능력 – 삼각함수 정답 13

원점 O에서 직선 $y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{OH}$는 원점 O와 직선 $y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{OH}=\dfrac{|-2\sqrt{3}|}{\sqrt{3+1}}=\sqrt{3}$이고, 점 (2, 0)을 A라 하면

$\angle OAH=\dfrac{\pi}{3}$이므로 $\angle OQH=\dfrac{\pi}{3}-\theta$이다.



직각삼각형 OHQ에서

$\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)=\dfrac{\overline{OH}}{\overline{OQ}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2+l(\theta)}$

$\therefore\ l(\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)}-2$

$=\dfrac{\sqrt{3}-2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\dfrac{1}{2}\sin\theta\right)}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\dfrac{1}{2}\sin\theta}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}(1-\cos\theta)+2\sin\theta}{\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta}$

따라서

$\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{l(\theta)}{\theta}=\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{2\sqrt{3}(1-\cos\theta)+2\sin\theta}{\theta(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta)}$

$=\lim\limits_{\theta\to0+}\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta}\times\left\{\dfrac{2\sqrt{3}(1-\cos\theta)}{\theta}+\dfrac{2\sin\theta}{\theta}\right\}\right]$

$=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times(0+2)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서 $p=3,\ q=2$이므로 $p^2+q^2=13$

[참고]

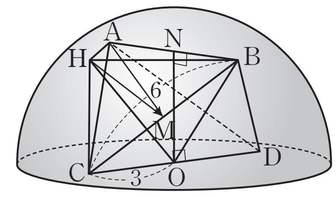
$\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{1-\cos\theta}{\theta}=\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta(1+\cos\theta)}$

$=\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\sin^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}$

$=\lim\limits_{\theta\to0+}\left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\times\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)$

$=1\times0=0$

29. 이해 능력 – 공간도형과 공간벡터 정답 9



선분 CD의 중점이 반구의 밑면의 중심이며 삼각형 BCO는 $\angle BOC=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이고 $\overline{BC}=6$, $\overline{CO}=3$이므로 $\overline{OB}=\sqrt{36-9}=3\sqrt{3}$이다. 따라서 반구의 반지름의 길이는 $3\sqrt{3}$ 이다.

삼각형 OHC는 $\angle HCO=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이고

$\overline{OH}=3\sqrt{3},\ \overline{OC}=3$이므로 $\overline{CH}=\sqrt{27-9}=3\sqrt{2}$

한편, 선분 AB는 반구의 밑면과 평행하므로 선분 AB의 중점을 N이라 하면 $\overline{OB}=3\sqrt{3},\ \overline{BN}=3$이고 삼각형 OBN은 직각삼각형이므로

$\overline{ON}=\sqrt{27-9}=3\sqrt{2}$

따라서 세 점 A, B, H는 모두 반구의 밑면과 평행한 한 평면 위에 있으므로 $\overline{CH}\perp\overline{BH}$이다.

따라서 삼각형 CBH는 직각삼각형이고

$\overline{CB}=6,\ \overline{CH}=3\sqrt{2}$이므로 $\overline{BH}=\sqrt{36-18}=3\sqrt{2}$

$\overline{AH}\perp\overline{CH}$이므로 삼각형 AHC는 직각삼각형이다.

$\overline{CH}=3\sqrt{2},\ \overline{AC}=6$이므로 $\overline{AH}=\sqrt{36-18}=3\sqrt{2}$

이고 $\overline{AB}=6$이므로

$\overline{AB}^2=\overline{AH}^2+\overline{BH}^2$에서 삼각형 AHB는 직각삼각형이다.

$\overline{AM}=3\sqrt{3},\ \overline{HM}=3$이므로

$\overline{AM}^2=\overline{AH}^2+\overline{HM}^2$에서 삼각형 AHM은 직각삼각형이다.

따라서 $\angle AMH=\theta$라 하면 $\cos\theta=\dfrac{\overline{HM}}{\overline{AM}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

이므로

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{HM}=3\sqrt{3}\times3\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}=9$

30. 수학 내적 문제 해결 능력 – 미분법 정답 43

함수 $f(x)=\dfrac{a(x+1)^2}{x^2+3}$에서

$f'(x)=\dfrac{2a(x+1)(x^2+3)-2ax(x+1)^2}{(x^2+3)^2}$

$=-\dfrac{2a(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$이므로

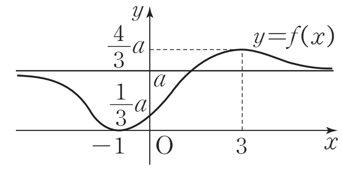
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-1	…	3	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$f(0)=\dfrac{1}{3}a(a>0),\ f(-1)=0,\ f(3)=\dfrac{4}{3}a$

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a,\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $\dfrac{4}{3}a$를 갖고, $x=-1$에서 최솟값 0을 갖는다.

함수 $g(x)$의 그래프는 함수 $f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 다음 x축 아래 부분을 접어 올린 그래프이므로

$g'(-1)=g'(3)=0$이고,

$g(-1)=k,\ g(3)=\dfrac{4a}{3}-k$ 이다.

(ⅰ) $g(-1)>g(3)$인 경우

조건 (가)에서 $g(x)$의 최댓값은

$g(-1)=k=8$이고, 조건 (나)에서

$|g(3)-g(-1)|$

$=g(-1)-g(3)=k-\left(\dfrac{4a}{3}-k\right)$

$=2k-\dfrac{4a}{3}=2$

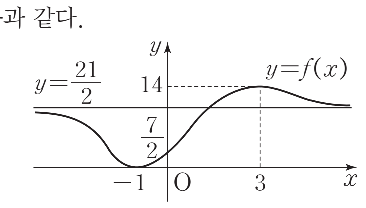
이므로 $2\times8-\dfrac{4a}{3}=2$에서 $a=\dfrac{21}{2}$

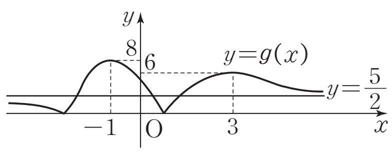
$\therefore\ a=\dfrac{21}{2},\ k=8$

$f(x)=\dfrac{21(x+1)^2}{2(x^2+3)}$, $g(x)=|f(x)-8|$이므로

$f(1)=\dfrac{21}{2}$, $g(1)=\dfrac{5}{2}$

따라서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 각각 다음과 같다.





한편, 실수 t에 대하여 함수 $h(t)$는 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수이므로 함수 $h(x)$는 다음과 같다.

$$\therefore\ h(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ 2 & (x=0)\\ 4 & \left(0<x<\dfrac{5}{2}\right)\\ 3 & \left(x=\dfrac{5}{2}\right)\\ 4 & \left(\dfrac{5}{2}<x<6\right)\\ 3 & (x=6)\\ 2 & (6<x<8)\\ 1 & (x=8)\\ 0 & (x>8)\end{cases}$$

따라서

$f(1)+g(1)+\sum_{n=1}^{10}h(n-1)$

$=\dfrac{21}{2}+\dfrac{5}{2}+2+5\times4+3+2+1+0=41$

(ⅱ) $g(-1)<g(3)$인 경우

조건 (가)에서 $g(x)$의 최댓값은

$g(3)=\dfrac{4a}{3}-k=8$ …… ㉠

이고 조건 (나)에서

$|g(3)-g(-1)|$

$=g(3)-g(-1)=\left(\dfrac{4a}{3}-k\right)-k$

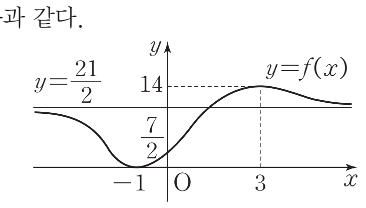
$=\dfrac{4a}{3}-2k=2$ …… ㉡

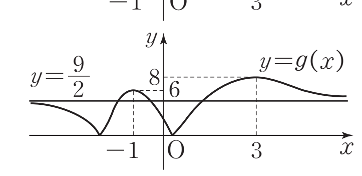
㉠, ㉡의 두 방정식 $4a-3k=24$, $4a-6k=6$을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{21}{2}$, $k=6$

$f(x)=\dfrac{21(x+1)^2}{2(x^2+3)}$, $g(x)=|f(x)-6|$이므로

$f(1)=\dfrac{21}{2}$, $g(1)=\dfrac{9}{2}$

따라서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 각각 다음과 같다.





한편, 실수 t에 대하여 함수 $h(t)$는 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수이므로 함수 $h(x)$는 다음과 같다.

$$\therefore\ h(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ 2 & (x=0)\\ 4 & \left(0<x<\dfrac{9}{2}\right)\\ 3 & \left(x=\dfrac{9}{2}\right)\\ 4 & \left(\dfrac{9}{2}<x<6\right)\\ 3 & (x=6)\\ 2 & (6<x<8)\\ 1 & (x=8)\\ 0 & (x>8)\end{cases}$$

따라서

$f(1)+g(1)+\sum_{n=1}^{10}h(n-1)$

$=\dfrac{21}{2}+\dfrac{9}{2}+2+5\times4+3+2+1+0=43$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(1)+g(1)+\sum_{n=1}^{10}h(n-1)$의 최댓값은 43이다.

수학 영역(나형)

1. 가형 22번과 동일 정답 ③

2. 계산 능력 - 수열의 극한 정답 ④

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{n^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{3}{n}}=\frac{3+0}{1+0}=3$$

3. 이해 능력 - 집합과 명제 정답 ②

$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$, $B=\{2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 8\}$

$A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B=\{2,\ 6,\ 8\}$

따라서 집합 $A-B^C$의 모든 원소의 합은 16이다.

4. 이해 능력 - 함수 정답 ③

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(2)=5$

5. 이해 능력 - 함수의 극한과 연속 정답 ②

$\lim_{x\to1-}f(x)=2$, $\lim_{x\to2}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to2}f(x)=2+0=2$

6. 이해 능력 - 수열 정답 ④

등비중항의 성질에 의해

$a(a+2)=8$, $a^2+2a-8=0$, $(a-2)(a+4)=0$

$a=2$ 또는 $a=-4$에서 $a>0$이므로 $a=2$

7. 가형 4번과 동일 정답 ④

8. 이해 능력 - 집합과 명제 정답 ①

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

명제 $p\longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 한다.

$|x-a|\geq1$에서 $x-a\geq1$ 또는 $x-a\leq-1$

즉, $x\geq a+1$ 또는 $x\leq a-1$이므로

$P\subset Q$이기 위해서는 $-4\leq a-1$, $a+1\leq2$

따라서 $-3\leq a\leq1$이므로 구하는 실수 a의 최댓값은 1, 최솟값은 -3이다.

따라서 구하는 합은 -2이다.

9. 수학 외적 문제 해결 능력 - 순열과 조합 정답 ④

A유니폼끼리는 서로 이웃하지 않도록 배열하려면

∨B∨B∨B∨C∨C∨C∨C∨

유니폼 B, C를 먼저 배열한 후 그 사이사이와 양 끝의 8개의 ∨ 자리 중에서 A유니폼이 올 2개의 자리를 택하면 되므로 이 경우의 수는

$\dfrac{7!}{3!\times4!}\times{}_8C_2=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times\dfrac{8\times7}{2\times1}=980$

[다른 풀이]

전체의 경우에서 A유니폼이 이웃하는 경우를 제외시킨다.

$\dfrac{9!}{2!\times3!\times4!}-\dfrac{8!}{3!\times4!}=980$

10. 수학 내적 문제 해결 능력 - 다항함수의 미분법 정답 ⑤

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=a$에서도 연속이다.

$\lim_{x\to a-}(x^2+2x-1)=a^2+2a-1$

$\lim_{x\to a+}(x^2+4x-7)=a^2+4a-7$

$f(a)=a^2+4a-7$에서

$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)=f(a)$이어야 하므로

$a^2+2a-1=a^2+4a-7$ $\quad\therefore\ a=3$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-1 & (x<3)\\ x^2+4x-7 & (x\geq3)\end{cases}$이므로

$f'(x)=\begin{cases}2x+2 & (x<3)\\ 2x+4 & (x>3)\end{cases}$

$\therefore\ \lim_{x\to a-}f'(x)=\lim_{x\to3-}(2x+2)=8$

11. 수학 내적 문제 해결 능력 - 다항함수의 적분법 정답 ②

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 삼차함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값을 가지므로 $a=-2$ 따라서

$\int_0^a f(x)dx=\int_0^{-2}f(x)dx=-\int_{-2}^0 f(x)dx$

$=-\int_{-2}^0(x^3-12x+1)dx$

$=-\left[\dfrac{x^4}{4}-6x^2+x\right]_{-2}^0$

$=4-24-2=-22$

12. 이해 능력 - 수열 정답 ②

$\sum_{k=1}^{n}a_k=2a_n-6$에 $n=1$을 대입하면

$a_1=2a_1-6$에서 $a_1=6$

$\sum_{k=1}^{n+1}a_k=2a_{n+1}-6$이므로 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_k=2a_{n+1}-2a_n$

$a_{n+1}=2a_n$이므로

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 6이고, 공비가 2인 등비수열이다.

따라서 $a_n=6\times2^{n-1}=3\times2^n$이므로

$\sum_{n=1}^{10}\dfrac{a_n}{2^n}=\sum_{n=1}^{10}3=3\times10=30$

13. 가형 10번과 동일 정답 ①

14. 이해 능력 - 지수와 로그 정답 ⑤

$a=\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$, $b=\sqrt[4]{9}=3^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[10]{(ab^2)^n}=a^{\frac{n}{10}}b^{\frac{n}{5}}=\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{n}{10}}\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{n}{5}}=2^{\frac{n}{30}}3^{\frac{n}{10}}$이

자연수가 되기 위해서는 $\dfrac{n}{30}$, $\dfrac{n}{10}$이 모두 자연수이어야 하므로 $n=30k$(k는 자연수)이어야 한다.

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 30이다.

15. 이해 능력 - 지수와 로그 정답 ①

$\log a=x$, $\log b=y$라 하면

$\log_a 10b=\dfrac{\log 10b}{\log a}=\dfrac{1+y}{x}=6$에서

$6x-y=1$ ...... ㉠

$\dfrac{7\log b}{2\log\sqrt{a}+\log b}=\dfrac{7y}{x+y}=3$에서

$3x-4y=0$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\dfrac{4}{21}$, $y=\dfrac{1}{7}$

따라서 $\log ab=\log a+\log b=x+y=\dfrac{1}{3}$

16. 이해 능력 - 통계 정답 ③

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(12,\ 3^2)$을 따르고

확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X\le 9)=\mathrm{P}\left(Z\le \dfrac{9-12}{3}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le -1)=\mathrm{P}(Z\ge 1)$

$\mathrm{P}(Y\ge 21)=\mathrm{P}\left(Z\ge \dfrac{21-m}{4}\right)$

$\mathrm{P}(X\le 9)=\mathrm{P}(Y\ge 21)$에서

$\dfrac{21-m}{4}=1$, $m=17$

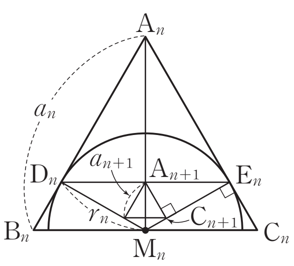
$\therefore\ \mathrm{P}(Y\le 11)=\mathrm{P}\left(Z\le \dfrac{11-17}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le -1.5)=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

$=0.5-0.4332=0.0668$

17. 발견적 추론 능력(추측) - 수열의 극한 정답 ①



정삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$의 한 변의 길이를 a_n, 점 M_n을 중심으로 하는 반원의 반지름의 길이를 r_n이라 하자. 직각삼각형 $\mathrm{M}_n\mathrm{C}_n\mathrm{E}_n$에서

$r_n=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{\mathrm{M}_n\mathrm{C}_n}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{a_n}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a_n$ ...... ㉠

한편, $\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{E}_n}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}r_n$이고,

$\angle\mathrm{E}_n\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}=90°$, $\angle\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{E}_n\mathrm{A}_{n+1}=30°$이므로

$a_{n+1}=\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{E}_n}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}r_n=\dfrac{\sqrt{3}}{4}r_n$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$r_{n+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a_{n+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}r_n=\dfrac{3}{16}r_n$

$a_1=2$이므로 $r_1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ l_1=\dfrac{1}{2}\times 2\pi r_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$

이때 l_n은 첫째항이 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$, 공비가 $\dfrac{3}{16}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합과 같으므로

$\lim\limits_{n\to\infty}l_n=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi}{1-\frac{3}{16}}=\dfrac{8\sqrt{3}}{13}\pi$

18. 수학 내적 문제 해결 능력 - 다항함수의 미분법 정답 ①

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 0)$이므로 $f(x)=kx^2(k\neq 0)$이라 놓을 수 있다.

곡선 $y=f(x)$가 점 $\mathrm{D}(1,\ 2)$를 지나므로 $k=2$

$\therefore\ f(x)=2x^2$

$f'(x)=4x$이므로 $\mathrm{P}(a,\ 2a^2)(0<a<1)$이라 하면 점 P에서의 접선 l의 방정식은

$y-2a^2=4a(x-a)$, $y=4ax-2a^2$

직선 l의 x절편은 $x=\dfrac{a}{2}$이고 $x=1$일 때, $y=4a-2a^2$이므로 구하는 어두운 부분의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{a}{2}\right)\times(4a-2a^2)$

$=\dfrac{a^3}{2}-2a^2+2a$

$S'(a)=\dfrac{3}{2}a^2-4a+2=\dfrac{1}{2}(3a^2-8a+4)$

$=\dfrac{1}{2}(3a-2)(a-2)$

$S'(a)=0$에서 $a=\dfrac{2}{3}$이므로 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}$	$\cdots$	(1)
$\dfrac{dS}{da}$		$+$	0	$-$	
S		↗	극대	↘	

따라서 $a=\dfrac{2}{3}$일 때, 최대이므로 구하는 넓이의 최댓값은

$S\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{8}{27}-2\times\dfrac{4}{9}+2\times\dfrac{2}{3}$

$=\dfrac{4}{27}-\dfrac{8}{9}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{16}{27}$

19. 발견적 추론 능력(추측) - 함수 정답 ⑤

$f(1)$의 값에 따라 나누어 생각하자.

(ⅰ) $f(1)=g(1)=1$이면 $g(f(1))=1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $f(1)=g(1)=2$이면

$g(f(1))=g(2)=2$이어야 하는데

$g(1)=2$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

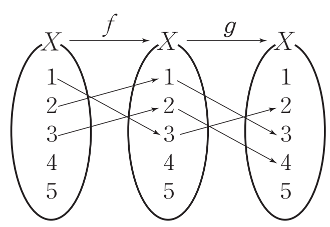
(ⅲ) $f(1)=g(1)=3$이면

$g(f(1))=2$이므로 $g(3)=2$, $f(3)=2$

$g(f(2))=3$이므로 $f(2)=1$

$g(f(3))=4$이므로 $g(2)=4$

따라서 다음 그림과 같이 대응된다.



이때, $f(5)=g(5)=4$, $f(5)=g(5)=5$는 모두 조건을 만족시키지 않는다.

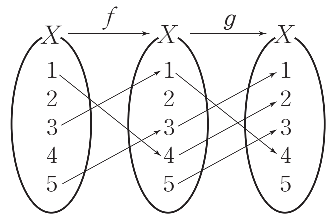
(ⅳ) $f(1)=g(1)=4$이면

$g(f(1))=2$이므로 $g(4)=2$

$g(f(3))=4$이므로 $f(3)=1$, $g(3)=1$

$g(f(5))=1$이므로 $f(5)=3$, $g(5)=3$

따라서 다음 그림과 같이 대응된다.



이때, $g(2)=5$이므로 $f(4)=2$이고, $f(2)=5$이다.

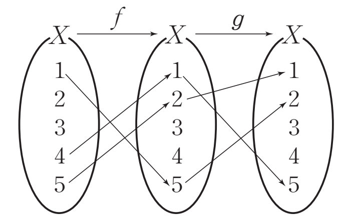
(ⅴ) $f(1)=g(1)=5$이면

$g(f(4))=5$이므로 $f(4)=1$

$g(f(1))=2$이므로 $g(5)=2$, $f(5)=2$

$g(f(5))=1$이므로 $g(2)=1$

따라서 다음 그림과 같이 대응된다.



이때, $f(3)=3$, $f(3)=4$는 모두 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ)~(ⅴ)에서 모든 조건을 만족시키는 경우는 (ⅳ)이다. 따라서 $f(2)+g(2)=10$이다.

20. 가형 20번과 동일 정답 ⑤

21. 연역적 추론 능력(증명) - 다항함수의 적분법 정답 ⑤

ㄱ. (참) 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

$\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}ax^2=a$

$\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}\{f(x-1)+k\}$ ($\because$ 조건 (나))

$=\lim\limits_{x\to 0+}\{f(x)+k\}$

$=\lim\limits_{x\to 0+}(ax^2+k)=a\times 0^2+k=k$

$f(1)=f(0)+k=0+k=k$

따라서 $a=k$이므로 $a=1$이면 $k=1$이다.

ㄴ. (참) 함수 $f(x)$의 부정적분 중의 하나를 $F(x)$라 하면 $F'(x)=f(x)$이고,

$g(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}f(t)dt=F(x+1)-F(x)$

$F'(x+1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+1+h)-F(x+1)}{h}$

$=f(x+1)$

이므로 $g(x)=F(x+1)-F(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(x)=f(x+1)-f(x)$

이때 조건 (나)에서

$f(x+1)-f(x)=k$이므로 $g'(x)=k$이다.

따라서 함수 $g(x)$는 일차함수이다.

ㄷ. (참) ㄴ에서 $g'(x)=k$이므로

$g(x)=kx+C$(C는 적분상수)

$g(0)=\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 ax^2dx=\left[\dfrac{ax^3}{3}\right]_0^1=\dfrac{a}{3}$

이므로 $C=\dfrac{a}{3}$

따라서 $g(x)=kx+\dfrac{a}{3}$이고,

ㄱ에서 $k=a$이므로 $g(x)=k\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$

$\displaystyle\int_0^6 g(x)dx=k\int_0^6\left(x+\dfrac{1}{3}\right)dx=k\left[\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{3}\right]_0^6$

$=k\left(\dfrac{36}{2}+\dfrac{6}{3}-0\right)=20k=60$

에서 $k=3$이므로 $f(x)=3x^2$

따라서 조건 (나)에서

$f(10)=f(9)+3=f(8)+3+3=\cdots$

$=f(1)+9\times 3=3+27=30$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

22. 계산 능력 - 다항함수의 미분법 정답 39

$f'(x)=3x^2+4x$이므로

$f'(3)=3\times 3^2+4\times 3=39$

23. 이해 능력 - 집합과 명제 정답 15

$x=0$, $y=1,\ 2,\ 3$일 때

$2x+y$의 값은 각각 $1,\ 2,\ 3$이다.

$x=1$, $y=1,\ 2,\ 3$일 때

$2x+y$의 값은 각각 $3,\ 4,\ 5$이다.

따라서 집합 $\{2x+y\,|\,x\in X,\ y\in Y\}$의 모든 원소의 합은 $1+2+3+4+5=15$이다.

24. 이해 능력 - 수열 정답 420

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$a_1+2a_3+a_5=a_2+a_4+a_6$에서

$a+2(a+2d)+a+4d=a+d+a+3d+a+5d$

$4a+8d=3a+9d$, $a=d$

따라서 $a_n=na$

$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}ka=a\times\frac{10\times11}{2}=55a=110$에서

$a=2$이므로 $\sum_{k=1}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{20}2k=2\times\frac{20\times21}{2}=420$

25. 이해 능력 - 함수의 극한과 연속 정답 20

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=1$이므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(x)}=1$에서 (분자) → 0이고 극한값이 0이 아니므로 (분모) → 0이어야 한다.

따라서 $f(x)=(x-1)(x-k)$(단, $k\neq1$)로 놓을 수 있다.

$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x-k)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-k}=\frac{1}{1-k}=1$

이어야 하므로 $1-k=1$에서 $k=0$

따라서 $f(x)=x(x-1)$이므로

$f(5)=5\times4=20$

26. 수학 외적 문제 해결 능력 - 확률 정답 11

A, B, C 세 사람이 모두 한 모둠에 포함되는 사건을 X라 하면 각 모둠에 A, B, C 중에서 적어도 한 사람이 포함되는 사건은 X^C이므로 구하는 확률은 $\mathrm{P}(X^C)$이다.

10명을 5명씩 영화팀과 연극팀으로 나누는 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_5\times{}_5\mathrm{C}_5\times\frac{1}{2!}\times2!=\frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1}\times1$

$=252$

A, B, C 세 사람이 모두 한 모둠에 포함되는 경우의 수는

${}_7\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_5\times2!=\frac{7\times6}{2\times1}\times1\times2=42$

따라서 A, B, C 세 사람이 모두 한 모둠에 포함될 확률은 $\frac{42}{252}=\frac{1}{6}$이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X^C)=1-\mathrm{P}(X)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

따라서 $p=6$, $q=5$이므로 $p+q=11$

27. 이해 능력 - 수열의 극한 정답 100

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{8n}{n+1}\right)=0$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{8n}{n+1}=8$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=8$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^{\,2}-a_{n+1}^{\,2})$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k^{\,2}-a_{k+1}^{\,2})$

$=\lim_{n\to\infty}\{(a_1^{\,2}-a_2^{\,2})+(a_2^{\,2}-a_3^{\,2})+\cdots$

$+(a_n^{\,2}-a_{n+1}^{\,2})\}$

$=\lim_{n\to\infty}(a_1^{\,2}-a_{n+1}^{\,2})=36$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}^{\,2}=a_1^{\,2}-36$

이때 $\lim_{n\to\infty}a_n^{\,2}=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}^{\,2}$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n^{\,2}=a_1^{\,2}-36$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=8$이므로

$64=a_1^{\,2}-36$

따라서 $a_1^{\,2}=100$

28. 수학 내적 문제 해결 능력 - 순열과 조합 정답 75

조건 (가)에서 $f(1)\le f(4)$이므로

조건 (나)에서 $f(1)=1$, $f(4)=4$ 또는

$f(1)=2$, $f(4)=2$이다.

(i) $f(1)=1$, $f(4)=4$일 때, 조건 (가)에서

$1=f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)=4\le f(5)\le f(6)$

이므로 함수 f의 개수는

${}_4\mathrm{H}_2\times{}_3\mathrm{H}_2={}_{4+2-1}\mathrm{C}_2\times{}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_5\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2$

$=\frac{5\times4}{2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}=60$

(ii) $f(1)=2$, $f(4)=2$일 때, 조건 (가)에서

$2=f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=2\le f(5)\le f(6)$

이므로 함수 f 의 개수는

$1\times{}_5\mathrm{H}_2={}_{5+2-1}\mathrm{C}_2={}_6\mathrm{C}_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는 $60+15=75$

29. 수학 내적 문제 해결 능력 - 수열 정답 49

$\mathrm{R}_k(k,\ 2)$라 하자.

$y=-\frac{2}{n}x+2$에 $x=k$를 대입하면 $y=-\frac{2k}{n}+2$

따라서 선분 $\mathrm{R}_k\mathrm{Q}_k$의 길이는 $\frac{2k}{n}$

직선 $\mathrm{R}_k\mathrm{P}_k$의 방정식은 $y=2(x-k+1)$이므로

$-\frac{2}{n}x+2=2(x-k+1)$에서 $x=\frac{nk}{n+1}$

따라서 P_k에서 선분 $\mathrm{R}_k\mathrm{Q}_k$에 내린 수선의 길이는

$k-\frac{nk}{n+1}=\frac{k}{n+1}$

$a_k=\frac{2k}{n}\times\frac{k}{n+1}\times\frac{1}{2}=\frac{k^2}{n(n+1)}$

$\sum_{k=1}^{n}2a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2}{n(n+1)}$

$=\frac{2}{n(n+1)}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$=\frac{2n+1}{3}=33$

따라서 $n=49$

30. 수학 내적 문제 해결 능력 - 다항함수의 미분법 정답 12

$f(x)=x^3-12x^2+36x+1$에서

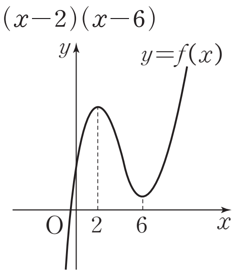
$f'(x)=3x^2-24x+36=3(x-2)(x-6)$

$f'(x)=0$에서

$x=2$ 또는 $x=6$이고,

$f(2)=33$, $f(6)=1$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 곡선은 $y=f(x+a)$이고, 곡선 $y=f(x+a)$에서 $x<0$의 부분을 지우고 $x\ge0$인 부분과 y축에 대하여 대칭이 되도록 $x<0$인 부분에 곡선을 그리면 이 곡선이 $y=f(|x|+a)$이다.

따라서 상수 a의 값에 따른 함수 $y=g(x)$는 다음과 같다.

(i) $-a>-2$, 즉 $a<2$일 때,

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 [그림 1]과 같으므로 극값을 갖는 x의 개수는 5이고, 미분가능하지 않은 실수 x의 개수는 1이다.

(ii) $-a=-2$, 즉 $a=2$일 때,

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 [그림 2]와 같으므로 극값을 갖는 x의 개수는 3이고, 미분가능하지 않은 실수 x는 없다.

(iii) $-6<-a<-2$, 즉 $2<a<6$일 때,

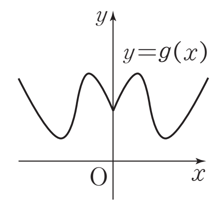
함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 [그림 3]과 같으므로 극값을 갖는 x의 개수는 3이고, 미분가능하지 않은 실수 x의 개수는 1이다.

(iv) $-a=-6$, 즉 $a=6$일 때,

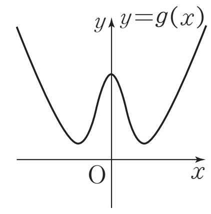
함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 [그림 4]와 같으므로 극값을 갖는 x의 개수는 1이고, 미분가능하지 않은 실수 x는 없다.

(v) $-a<-6$, 즉 $a>6$일 때,

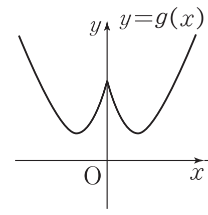
함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 [그림 5]와 같으므로 극값을 갖는 x의 개수는 1이고, 미분가능하지 않은 실수 x의 개수는 1이다.



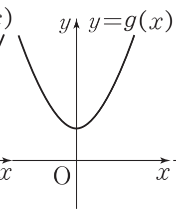
[그림 1]



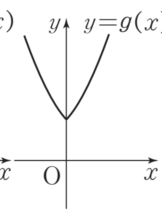
[그림 2]



[그림 3]



[그림 4]



[그림 5]

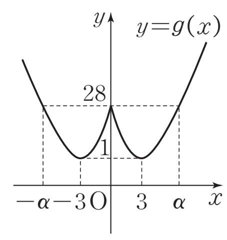
따라서 (i)~(v)에서 조건을 만족하는 a의 값의 범위는 $2<a<6$이므로 정수 a의 최솟값은 $m=3$

$a=3$일 때, 함수 $g(x)=f(|x|+3)$의 극솟값은 $g(3)=f(6)=1$이고

극댓값은

$g(0)=f(3)=28$이므로

함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $h(t)$는

$$h(t)=\begin{cases}0 & (t<1)\\ 2 & (t=1)\\ 4 & (1<t<28)\\ 3 & (t=28)\\ 2 & (t>28)\end{cases}$$

$$\therefore\ h(g(t))=\begin{cases}0 & (g(t)<1)\\ 2 & (g(t)=1)\\ 4 & (1<g(t)<28)\\ 3 & (g(t)=28)\\ 2 & (g(t)>28)\end{cases}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

이때 직선 $y=1$과 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표는 -3, 3이고,

직선 $y=28$과 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표는 $-\alpha$, 0, $\alpha(\alpha>0)$으로 놓을 수 있다.

이때 $-\alpha<-3<0<3<\alpha$이므로

㉠에서 함수 $(h\circ g)(t)$는 다음과 같다.

$$(h\circ g)(t)=\begin{cases}2 & (t<-\alpha)\\ 3 & (t=-\alpha)\\ 4 & (-\alpha<t<-3)\\ 2 & (t=-3)\\ 4 & (-3<t<0)\\ 3 & (t=0)\\ 4 & (0<t<3)\\ 2 & (t=3)\\ 4 & (3<t<\alpha)\\ 3 & (t=\alpha)\\ 2 & (t>\alpha)\end{cases}$$

따라서 함수 $(h\circ g)(t)$가 불연속인 모든 실수 t를 작은 수부터 순서대로 나열하면

$p_1=-\alpha$, $p_2=-3$, $p_3=0$, $p_4=3$, $p_5=\alpha$

이므로 $n=5$, $p_{n-1}=p_4=3$

한편, $\frac{p_1+p_2}{2}=\frac{-\alpha-3}{2}$이고

$-\alpha<\frac{-\alpha-3}{2}<-3$이므로 $(h\circ g)\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right)=4$

따라서

$n+p_{n-1}+(h\circ g)\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right)=5+3+4=12$