

02 나머지 정리

1. 항등식

◎ 식의 종류

- ① x 에 관한 항등식
: x 의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식
- ② x 에 관한 방정식
: 특정한 x 의 값에 대해서만 성립하는 등식

◎ 항등식의 성질

- ① $ax+b=0$ 이 x 에 대한 항등식 이면 $a=0, b=0$ 이다.
- ② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ 이 x 에 대한 항등식이면 $a=a', b=b', c=c'$ 이다.
- ③ $ax^2+bx+c=0$ 이 x 에 대한 항등식이면 $a=b=c=0$ 이다.

2. 항등식

◎ 미정계수

등식에서 아직 정해지지 않은 계수

◎ 계수 비교법

항등식은 양변의 같은 차수의 항의 계수가 같다는 점을 이용하여 미정계수를 구하는 방법

◎ 수치 대입법

항등식은 x 에 어떤 값을 대입하여도 성립한다는 항등식의 특징을 이용하여 미정계수를 구하는 방법

대표 유형

#0101/02

[2019_1-1-a_전북대학교사범대학부설고]

1. $x^3 - ax + 6 = (x-1)(x+b)(x+c)$ 가 x 에 관한 항등식일 때, 상수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c$ 의 값은?

- ① 8
- ② 9
- ③ 10
- ④ 11
- ⑤ 12

#0101/02

[2019_1-1-a_전북대학교사범대학부설고]

2. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 에 대하여 $x^4 + ax + b = (x-1)f(x)$ 가 x 에 대한 항등식일 때, $f(2) - f(1)$ 의 값을 구하시오.

(단, a, b 는 상수이다.)

#0101/02

[2019년_1-1-a_군산여고]

3. 상수 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_8$ 에 대하여

$$(x^2 + 2x - 2)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_8x^8$$

x 에 관한 항등식일 때, $a_0 + a_1 + a_3 + a_5 + a_7$ 의 값을 구하는 과정을 자세히 서술하시오.

#0101/02C

[2021_1-1-a_한영고]

4. 등식 $(k+2)x - (k+1)y + k - 7 = 0$ 이 k 의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 값은?

- ① 15
- ② 16
- ③ 17
- ④ 18
- ⑤ 19

#0101/02B

[2021_1-1-a_창덕여고]

5. 등식

$2x^2 - 3x + 2 = ax(x-1) + bx(x-2) + c(x-1)(x-2)$ 가 x 에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c 의 값을 정할 때, abc 의 값은?

- ① -4
- ② -2
- ③ 0
- ④ 2
- ⑤ 4

#0101/02B

[2021_1-1-a_재현고]

6. 모든 실수 x 에 대하여

$(1 - 2x + x^2)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10}$ 이 항상 성립할 때, $a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$ 의 값은?

- ① -2^{10}
- ② -2^9
- ③ 0
- ④ 2^9
- ⑤ 2^{10}

#0101/02B

[2021_1-1-a_동백고]

7. 등식 $(x^2 - 3x + 1)^5$

$$= a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots + a_{10}(x-1)^{10}$$

(a_i 는 실수, $i = 0, 1, 2, \dots, 10$)이 x 에 대한 항등식일 때, $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$ 의 값은?

- ① -1
- ② $-\frac{1}{2}$
- ③ 0
- ④ $\frac{1}{2}$
- ⑤ 1

#0101/02B

[2021_1-1-a_한영고]

8. 이차다항식 $f(x)$ 에 대하여

$f(1) - 1 = 2f(2) - 2 = 4f(4) - 4 = 24$ 일 때, $5f(5)$ 의 값은?

- ① 63
- ② 65
- ③ 67
- ④ 69
- ⑤ 71

#0101/02B

[2021_1-1-a_한영고]

9. $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 임의의 실수 x 에 대하여

$2f(x+1) - f(x) = x^2$ 을 만족할 때, 상수 a, b, c 에 대하여 $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하시오

#0101/02C

[2021_1-1-a_서천고]

10. 등식 $x^5 + 5x + 1 = (x-1)^5 + a(x-2) + b$ 이 x 에 대한 항등식일 때, 상수 a, b 에 대하여 $\frac{b}{a}$ 의 값은?

- ① $\frac{6}{5}$
- ② $\frac{7}{5}$
- ③ $\frac{8}{5}$
- ④ $\frac{9}{5}$
- ⑤ 2

#0101/02C

[2021_1-1-a_방산고]

11. 등식 $a(x-1)^2 + b(x-1) + c = x^2 + 4x - 3$ 이 x 에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c 의 값을 정할 때, $a + b + c$ 의 값은?

- ① 5
- ② 7
- ③ 9
- ④ 11
- ⑤ 13

#0101/02A

[2021_1-1-a_대진고]

12. 다항식 $Q(x)$ 에 대하여 등식

$x^2 - 3x + 4 = (x-2)Q(x) + a$ 가 x 에 대한 항등식일 때, $a + Q(2)$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.)

- ① 3
- ② 4
- ③ 5
- ④ 6
- ⑤ 7

3. 나머지 정리

◎ 검토식

다항식 $f(x)$ 를 다항식 $g(x)$ 로 나누면 $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ 로 나타낼 수 있다. 이때, $q(x)$ 를 몫, $r(x)$ 를 나머지라고 한다.

◎ 나머지의 차수

(다항식 $g(x)$ 의 차수) > (나머지 $r(x)$ 의 차수)

◎ 나머지 정리

다항식을 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 직접 나눴셈을 하지 않고 간단하게 구하는 방법 x 에 대한 다항식 $P(x)$ 를 일차식 $x-a$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라고 하면 $P(x) = (x-a)Q(x) + R$ 이다. 이때, 양변에 $x=a$ 를 대입하면 $P(a) = R$ 이다.

◎ 인수 정리

다항식 $f(x)$ 가 $x-a$ 로 나누어떨어진다. $\Leftrightarrow f(a) = 0$

대표유형

#0101/02

[2019_1-1-a_전북대학교사범대학부설고]

13. 다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $x^2 + x + 1$ 이다. 다항식 $f(6x)$ 를 $6x^2 - 5x + 1$ 로 나누었을 때의 나머지를 $ax + b$ 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

- ① 27
- ② 31
- ③ 36
- ④ 43
- ⑤ 48

#0101/02

[2019_1-1-a_전북대학교사범대학부설고]

14. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $x^3 + 1$ 로 나눌 때, 몫은 $x + 2$ 이고, $f(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눌 때의 나머지는 -2 , $x^2 - x + 1$ 로 나눌 때의 나머지는 $x - 6$ 이다. 다항식 $f(x)$ 의 일차항의 계수와 이차항의 계수의 합은?

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

#0101/02

[2019_1-1-a_전북대학교사범대학부설고]

15. 다항식 $f(x)$ 에 대하여 다음 조건이 성립한다.

- (가) $x-1$ 로 나누면 몫이 $Q_1(x)$ 이고 나머지가 2 이다.
- (나) $x-3$ 으로 나누면 몫이 $Q_2(x)$ 이고 나머지가 8 이다.

이 때, $Q_1(x) + Q_2(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지를 구하면?

- ① 5
- ② 6
- ③ 7
- ④ 8
- ⑤ 9

#0101/02

[2019_1-1-a_전북대학교사범대학부설고]

16. 삼차 이상의 다항식 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(1+x) + f(1-x) = 0$
- (나) $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 5이다.

$f(x)$ 를 $x^3 - 3x^2 + 2x$ 로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(3)$ 의 값은? [4.2점]

- ① 10
- ② 11
- ③ 12
- ④ 13
- ⑤ 14

#0101/02

[2019년_1-1-a_군산여고]

17. 다항식 $P(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는 -2 이고, $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

$P(x)$ 를 $(x+1)(x-2)$ 로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$ 라고 할 때, $R(8)$ 의 값은? [4.2점]

- ① 6
- ② 7
- ③ 8
- ④ 9
- ⑤ 10

#0101/02C

[2021_1-1-a_서천고]

18. 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 + 3x - 1$ 로 나누었을 때의 몫은 $x+1$ 이고, 나머지가 $2x-5$ 일 때, $f(1)$ 의 값은?

- ① -1
- ② 1
- ③ 3
- ④ 5
- ⑤ 7

#0101/02C

[2021_1-1-a_한영외고]

19. 다항식 $P(x)$ 를 $x^2 + 2$ 로 나누었을 때, 몫이 $x-3$ 이고 나머지가 $5x$ 라고 한다. $P(2)$ 의 값은?

- ① 4
- ② 5
- ③ 6
- ④ 7
- ⑤ 8

#0101/02C

[2021_1-1-a_서천고]

20. 다항식 $f(x) = x^3 + 3x^2 - a^2x - 6$ 이 $x+a$ 로 나눈 나머지가 21일 때, $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지는?

- ① -8
- ② -7
- ③ -6
- ④ -5
- ⑤ -4

#0101/02C

[2021_1-1-a_성복고]

21. 다항식 $P(x) = x^3 - 2x^2 + ax + 4$ 가 일차식 $x - 1$ 로 나누어 떨어질 때, 실수 a 의 값은?

- ① - 5
- ② - 3
- ③ 1
- ④ 3
- ⑤ 5

#0101/02C

[2021_1-1-a_명일여고]

22. 다항식 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 4$ 가 $x - 3$ 과 $x - 2$ 로 모두 나누어떨어질 때, $3a - 9b^2$ 의 값은? (단, a, b 는 상수)

- ① - 69
- ② - 71
- ③ - 73
- ④ - 75
- ⑤ - 77

#0101/02C

[2021_1-1-a_서천고]

23. 다항식 $A = x^3 + 2x^2 + ax + b$ 가 $x^2 - x + 2$ 로 나누어떨어질 때, 상수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?

- ① 4
- ② 5
- ③ 6
- ④ 7
- ⑤ 8

#0101/02C

[2021_1-1-a_서현고]

24. 두 다항식 $x^2 - ax + 2$ 와 $2x^2 + 3x + b$ 를 각각 $x - 2$ 로 나눈 나머지가 같을 때, $2a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

- ① - 2
- ② - 4
- ③ - 6
- ④ - 8
- ⑤ - 10

#0101/02C

[2021_1-1-a_명일여고]

25. 다항식 $ax^3 - 13x^2 + bx - 4$ 가 $(x - 2)^2$ 으로 나누어떨어질 때, $b - a$ 의 값은? (단, a, b 는 상수)

- ① 9
- ② 11
- ③ 13
- ④ 15
- ⑤ 17

#0101/02B

[2021_1-1-a_대진고]

26. 삼차다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(x) - 2$ 가 $(x - 2)^2$ 으로 나누어떨어지고, $f(x) + 2$ 가 $(x + 2)^2$ 으로 나누어떨어질 때, $f(x)$ 를 $(x + 4)$ 로 나눈 나머지를 구하면?

- ① - 3
- ② 2
- ③ 5
- ④ 7
- ⑤ 10

#0101/02B

[2021_1-1-a_대진고]

27. 두 이차다항식 $P(x)$, $Q(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.
 $Q(1)=4$ 일 때, $P(2)$ 의 값은?

- (가) 모든 실수 x 에 대하여 $P(x)+3Q(x)=0$ 이다.
 (나) $P(x)Q(x)$ 는 x^2-x-6 으로 나누어떨어진다.

- ① -8
- ② -4
- ③ 2
- ④ 4
- ⑤ 6

#0101/02B

[2021_1-1-a_성복고]

28. 다항식 $8x^3-4x+5$ 를 $2x-1$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라고 할 때, $Q\left(\frac{1}{2}\right)+R$ 의 값은?

- ① 3
- ② 4
- ③ 5
- ④ 6
- ⑤ 7

#0101/02A

[2021_1-1-a_창덕여고]

29. x 에 대한 다항식 $x^{12}+x+1$ 을 x^2-1 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $Q(1)$ 의 값은?
(단, $Q(x)$, $R(x)$ 는 x 에 대한 다항식이다.)

- ① 3
- ② 4
- ③ 5
- ④ 6
- ⑤ 7

#0101/02B

[2021_1-1-a_창덕여고]

30. 다항식 $P(x)$ 를 x^2-2x-3 으로 나누었을 때의 나머지는 $2x+1$ 이고, x^2+x-2 로 나누었을 때의 나머지는 $4x$ 이다.
이때 $P(x)$ 를 x^2-x-6 으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

#0101/02B

[2021_1-1-a_방산고]

31. $f(x)$ 를 $x-\frac{3}{4}$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 할 때, $xf(x)$ 를 $4x-3$ 으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $Q(x)$ 와 R 로 나타내시오.

#0101/02B

[2021_1-1-a_재현고]

32. x 에 대한 다항식 $P(x)=(x^2-x-1)(ax+b)+2$ 에 대하여 $P(x+1)$ 을 x^2-4 로 나누었을 때의 나머지가 -3 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a , b 는 상수이다.)

- ① -5
- ② -4
- ③ -3
- ④ -2
- ⑤ -1

#0101/02B

[2021_1-1-a_동백고]

33. 다항식 $f(x)$ 를 $x + \frac{1}{3}$ 으로 나누었을 때 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라 하자. $f(x)$ 를 $6x + 2$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 순서대로 나타낸 것은?

- ① $Q(x), \frac{1}{6}R$
- ② $6Q(x), 6R$
- ③ $\frac{1}{6}Q(x), R$
- ④ $\frac{1}{6}Q(x), \frac{1}{6}R$
- ⑤ $6Q(x), R$

#0101/02B

[2021_1-1-a_창덕여고]

34. 다항식 $P(x)$ 를 $x - 1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라고 할 때, 다항식 $x^2P(x)$ 를 $x - 1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하면? (단, $Q(x)$ 는 x 에 대한 다항식이고, R 은 상수이다.)

| | 몫 | 나머지 |
|---|--------------------|------|
| ① | $x^2Q(x) + (x+1)R$ | R |
| ② | $x^2Q(x) + (x-1)R$ | R |
| ③ | $x^2Q(x) + (x-1)R$ | $-R$ |
| ④ | $x^2Q(x) + (x+2)R$ | R |
| ⑤ | $x^2Q(x) + (x+2)R$ | $-R$ |

#0101/02B

[2021_1-1-a_한영외고]

35. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, 다항식 $f(7-x)g(x)$ 를 $x - 3$ 으로 나누었을 때 나머지는?

- (가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x^2) = g(x)(x-2) - 3$
- (나) $g(3x) - x^2 + 4x$ 는 $x^2 - x$ 로 나누어떨어진다.

- ① 9
- ② 12
- ③ 15
- ④ 18
- ⑤ 21

#0101/02B

[2021_1-1-a_동백고]

36. 다항식 $P(x)$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나누었을 때 나머지는 $x + 2$ 이고, $P(-1) = 10$ 이다. 다항식 $P(x)$ 를 $x^3 + 1$ 로 나누었을 때 나머지를 $R(x)$ 라 하자. $R(1)$ 의 값은?

- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 5
- ⑤ 6

#0101/02B

[2021_1-1-a_한영고]

37. 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - x + 2$ 로 나눈 나머지는 $2x - 1$ 이고, $x - 1$ 로 나눈 나머지는 7이다. 이때, $f(x)$ 를 $(x^2 - x + 2)(x - 1)$ 로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(2)$ 의 값은?

- ① 15
- ② 16
- ③ 17
- ④ 23
- ⑤ 25

#0101/02B

[2021_1-1-a_한영고]

38. x 에 대한 다항식 $f(x), g(x), Q_1(x), Q_2(x)$ 에 대하여 다음 관계가 성립한다.

$$f(x) + 2g(x) = (x + 1)Q_1(x) - 2$$

$$2f(x) + g(x) = (x + 1)Q_2(x) + 1$$

이때, 다음 중 $x + 1$ 로 나누었을 때, 나누어떨어지는 식은?

- ① $f(x) + g(x)$
- ② $f(x) - g(x)$
- ③ $3f(x) - 2g(x)$
- ④ $3f(x) + 3g(x)$
- ⑤ $5f(x) + 4g(x)$

#0101/02B

[2021_1-1-a_한영고]

39. x 에 대한 다항식 $f(x)-1$ 이 x^2-3x+2 로 나누어떨어질 때, $f(x+1)$ 을 x^2-x 로 나눈 나머지는?

- ① 1
- ② x
- ③ $x+1$
- ④ $x-1$
- ⑤ $x+2$

#0101/02A

[2021_1-1-a_재현고]

40. x 에 관한 다항식 $f(x)$ 를 x^2+1 로 나누면 나머지가 $x+1$ 이고, $x-1$ 로 나누면 나머지가 4 이다. 이 다항식 $f(x)$ 를 $(x^2+1)(x-1)$ 로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라고 할 때, $R(2)$ 의 값은?

- ① 2
- ② 4
- ③ 6
- ④ 8
- ⑤ 10

#0101/02B

[2021_1-1-a_한영고]

41. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $f(x)+g(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 5 이고, $\{f(x)\}^3 + \{g(x)\}^3$ 을 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 20 일 때, $f(x)g(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는?

- ① 5
- ② 6
- ③ 7
- ④ 8
- ⑤ 9

#0101/02B

[2021_1-1-a_한영고]

42. 9^{375} 을 8 로 나누었을 때의 나머지를 R_1 , 3^{751} 을 4 로 나누었을 때의 나머지를 R_2 라 할 때, R_1+R_2 는?

- ① 4
- ② 5
- ③ 7
- ④ 10
- ⑤ 15

#0101/02B

[2021_1-1-a_명일여고]

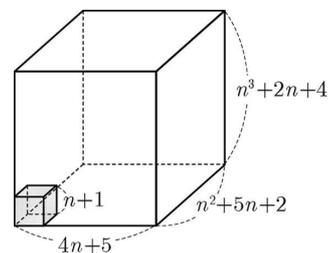
43. $2021^{30} + 2021^{20} + 2021$ 을 2022로 나누었을 때의 나머지는?

- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4

#0101/02A

[2021_1-1-a_한영고]

44. 가로 길이가 $4n+5$, 세로 길이가 n^2+5n+2 , 높이가 n^3+2n+4 인 직육면체의 나무토막을 한 모서리의 길이가 $n+1$ 인 정육면체 모양의 나무조각으로 자르려고 한다. 최대로 얻을 수 있는 나무조각의 개수를 $f(n)$ 이라 할 때, $f(3)$ 의 값을 구하시오. (단, n 은 자연수이고 남은 조각은 다시 붙일 수 없다.)



#0101/02B

[2021_1-1-a_서천고]

45. n 이 자연수일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

오지다

- ㄱ. 모든 자연수 n 에 대하여 다항식 $x^n - 1$ 은 $(x - 1)$ 을 인수로 갖는다.
- ㄴ. 모든 자연수 n 에 대하여 다항식 $x^n + 1$ 은 $(x + 1)$ 을 인수로 갖는다.
- ㄷ. 모든 자연수 n 에 대하여 다항식 $x^{2n} - 1$ 은 $(x^2 - 1)$ 을 인수로 갖는다.

- ① ㄱ
- ② ㄱ, ㄴ
- ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

#0101/02B

[2021_1-1-a_서천고]

46. 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 5x - 6$ 로 나누었을 때의 나머지는 $3x - 1$ 이고, $x^2 + x - 2$ 로 나누었을 때의 나머지는 $2x + 1$ 이다. 이때, $f(x)$ 를 $x^2 - 4x - 12$ 로 나누었을 때의 나머지 $R(x) = ax + b$ 에 대하여 $2a + b$ 의 값은?

- ① -5
- ② -2
- ③ 1
- ④ 4
- ⑤ 7

#0101/02B

[2021_1-1-a_방산고]

47. 삼차식 $f(x)$ 에 대하여 $f(x) + 6$ 은 $(x + 1)^2$ 으로 나누어떨어지고, $3 - f(x)$ 는 $x^2 - 4$ 로 나누어떨어진다. $f(x)$ 를 $x + 3$ 으로 나누었을 때의 나머지는?

- ① 36
- ② 38
- ③ 40
- ④ 44
- ⑤ 50

4. 표집제법

◎ 조립제법

다항식을 $x - a$ 로 나눌 때 계수만을 이용하여 몫과 나머지를 구하는 방법

$$\text{ex) } \begin{array}{r|rrrr} k & 1 & a & -1 & b \\ & & c & d & 18 \\ \hline & 1 & 5 & 9 & 20 \end{array}$$

◎ 주의해야 할 점

- ① 계수가 0인 것을 빠트리지 않도록 주의
- ② 일차항의 계수가 1이 아닐 때 주의

대표 유형

#0101/02C

[2021_1-1-a_창덕여고]

48. 조립제법을 이용하여 다항식 $2x^3 + ax^2 - 3x + 1$ 을 $x + 3$ 으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하는 과정이다. 이때 상수 a, b, c, d, e 의 값으로 옳지 않은 것은?

$$\begin{array}{r|rrrr} e & 2 & a & -3 & 1 \\ & & b & 6 & d \\ \hline & 2 & -2 & c & -8 \end{array}$$

- ① $a = 4$
- ② $b = 6$
- ③ $c = 3$
- ④ $d = -9$
- ⑤ $e = -3$

#0101/02C

[2021_1-1-a_서원고]

49. 다항식 $x^4 - 2x + 3$ 을 $x + 1$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$ 일 때, $Q(x)$ 를 $x - 1$ 로 나누었을 때의 나머지는?

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

#0101/02C

[2021_1-1-a_방산고]

50. 다항식 $x^3 - 2x^2 + 3ax - 2$ 를 $x + 2$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하자. $Q(x)$ 를 $x - 1$ 로 나누었을 때의 나머지가 2일 때, 상수 a 의 값은?

- ① -1
- ② 0
- ③ 1
- ④ 2
- ⑤ 3

#0101/02C

[2021_1-1-a_서원고]

51. 상수 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 에 대하여 x^5 을 $x - 2$ 로 나누었을 때의 몫이 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_4x^4$ 일 때, a_2 의 값은?

- ① 4
- ② 5
- ③ 6
- ④ 7
- ⑤ 8

#0101/02B

[2021_1-1-a_한영고]

52. 다항식 $x^3 + x^2 - 3x + 2$ 를 $a(x + 1)^3 + b(x + 1)^2 + c(x + 1) + d$ 꼴로 변형할 때, 상수 a, b, c, d 에 대하여 $abcd$ 의 값은?

- ① 2
- ② 3
- ③ 6
- ④ 10
- ⑤ 20

#0101/02A

[2021_1-1-a_재현고]

53. 임의의 실수 x 에 대하여 등식 $27x^3 - 9x^2 + 9x + 1 = a(3x - 1)^3 + b(3x - 1)^2 + c(3x - 1) + d$ 가 성립할 때, 상수 a, b, c, d 에 대하여 $a + b + c + d$ 의 값은?

- ① 11
- ② 12
- ③ 13
- ④ 14
- ⑤ 15

#0101/02C

[2021_1-1-a_서원고]

54. 등식

$x^3 + 7x^2 - 5 = (x - 1)^3 + a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c$ 가 x 에 대한 항등식이 되도록 하는 세 상수 a, b, c 에 대하여 $a - b + c$ 의 값은?

- ① -7
- ② -6
- ③ -5
- ④ -4
- ⑤ -3

#0101/02

[2019년_1-1-a_군산여고]

55. x 의 값에 관계없이 등식

$f(x) = 2x^3 + x^2 - 2 = a(x - 1)^3 + b(x - 1)^2 + c(x - 1) + d$ 가 항상 성립할 때, 상수 a, b, c, d 에 대하여 $a - b + c + d$ 의 값은? [4.5점]

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

1. [정답] ①

<해설>

$$x^3 - ax + 6 = (x-1)(x+b)(x+c)$$

에서 $x = 1$ 을 대입하면

$$1 - a + 6 = 0, a = 7$$

$$x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + x - 6)$$

이므로 $b + c = 1$

$$\therefore a + b + c = 7 + 1 = 8$$

2. [정답] 11

<해설>

x 에 대한 항등식 $x^4 + ax + b = (x-1)f(x)$ 에서

$x = 1$ 을 대입하면 $1 + a + b = 0, b = -a - 1$

$b = -a - 1$ 을 대입하면 주어진 식에 대입하면

$$x^4 + ax - a - 1 = (x-1)(x^3 + x^2 + x + a + 1)$$

$$(x-1)(x^3 + x^2 + x + a + 1) = (x-1)f(x)$$

이므로

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + a + 1$$

$$f(1) = a + 4$$

$$f(2) = 8 + 4 + 2 + a + 1 = 15 + a$$

$$f(2) - f(1) = 15 + a - (a + 4) = 11$$

$$\therefore 11$$

3. [정답] -24

<해설>

$x = 1$ 을 대입하면

$$1 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_8$$

..... ㉠

$x = -1$ 을 대입하면

$$81 = a_0 - a_1 + a_2 + \dots - a_7 + a_8 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

㉠-㉡을 연립하면

$$-80 = 2(a_1 + a_3 + a_5 + a_7)$$

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = -40$$

$x = 0$ 을 대입하여 a_0 값을 구한다. $\therefore a_0 = 16$

$$a_0 + a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = -24$$

4. [정답] ③

<해설>

$(k+2)x - (k+1)y + k - 7 = 0$ 을 k 에 대하여 정리하면

$$(x - y + 1)k + 2x - y - 7 = 0$$

이 식이 k 에 대한 항등식이므로

$$x - y + 1 = 0, \quad 2x - y - 7 = 0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x = 8, y = 9$

$$\therefore x + y = 17$$

5. [정답] ②

<해설>

등식

$$2x^2 - 3x + 2 = ax(x-1) + bx(x-2) + c(x-1)(x-2)$$

가 x 에 대한 항등식이므로 등식의 양변에 각각

$x = 0, x = 1, x = 2$ 를 대입하면

$$x = 0 \text{을 대입하면} : 2 = 2c \quad \therefore c = 1$$

$$x = 1 \text{을 대입하면} : 1 = -b \quad \therefore b = -1$$

$$x = 2 \text{를 대입하면} : 4 = 2a \quad \therefore a = 2$$

이므로 $abc = -2$ 이다.

6. [정답] ④

<해설>

$$(1 - 2x + x^2)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10} \text{에서}$$

$x = 1$ 을 대입하면

$$0^5 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9 + a_{10}$$

$x = -1$ 을 대입하면

$$4^5 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots - a_9 + a_{10}$$

두 식을 더하면

$$2^{10} = 2(a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10})$$

이상에서

$$a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 2^9$$

7. [정답] ①

<해설>

$$(x^2 - 3x + 1)^5$$

$$= a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots + a_{10}(x-1)^{10}$$

에서

양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$1^5 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots - a_9 + a_{10} \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$(-1)^5 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9 + a_{10} \quad \dots \quad \textcircled{2}$$

위 두식에서 ② - ①을 하면

$$-2 = 2(a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9)$$

이므로

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = -1$$

8. [정답] ②

<해설>

$$f(1) - 1 = 2f(2) - 2 = 4f(4) - 4 = 24 \text{에서}$$

$xf(x) - x - 24 = 0$ 의 근이 1, 2, 4이므로

$$xf(x) - x - 24 = a(x-1)(x-2)(x-4)$$

$$xf(x) = a(x-1)(x-2)(x-4) + x + 24$$

위의 식에서 좌변의 상수항이 0이므로 우변의 상수항도 0이어야 하므로

$$-8a + 24 = 0 \quad \therefore a = 3$$

따라서

$$xf(x) = 3(x-1)(x-2)(x-4) + x + 24$$

그러므로 구하는 값은

$$5f(5) = 3(5-1)(5-2)(5-4) + 5 + 24 = 65$$

9. [정답] 53

<해설>

$$\text{조건 } 2f(x+1) - f(x) = x^2 \text{은}$$

$$2\{a(x+1)^2 + b(x+1) + c\} - (ax^2 + bx + c) = x^2$$

정리하면

$$ax^2 + (4a+b)x + (2a+2b+c) = x^2$$

모든 실수 x 에 대하여 성립하므로 양변의 동류항의 계수를 비교

하면

$$a = 1, 4a + b = 0, 2a + 2b + c = 0$$

연립하여 풀면

$$a = 1, b = -4, c = 6$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 53$$

10. [정답] ①

<해설>

$$x^5 + 5x + 1 = (x-1)^5 + a(x-2) + b$$

.....㉠

(i) ㉠의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면,

$$1 + 5 + 1 = -a + b, -a + b = 7$$

(ii) ㉠의 양변에 $x = 2$ 를 대입하면,

$$32 + 10 + 1 = 1 + b, b = 42, a = 35$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{6}{5}$$

11. [정답] ③

<해설>

$$a(x-1)^2 + b(x-1) + c = x^2 + 4x - 3$$

a, b, c 에 계수가 1이면 되므로 $x = 2$ 대입하면

$$\therefore a + b + c = 9$$

12. [정답] ①

<해설>

$x^2 - 3x + 4 = (x-2)Q(x) + a$ 이므로 직접 나눗셈을 이용하여 $Q(x)$ 와 a 를 구하면

$$\begin{array}{r}
 x-1 \\
 x-2 \overline{) x^2 - 3x + 4} \\
 \underline{x^2 - 2x} \\
 -x + 4 \\
 \underline{-x + 2} \\
 2
 \end{array}$$

$Q(x) = x - 1$ 이고, $a = 2$ 이다.

$$\therefore a + Q(2) = 2 + 1 = 3$$

13. [정답] ②

<해설>

$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)Q(x) + x^2 + x + 1$ 에서 나머지 정리리에 의해 $f(2) = 7, f(3) = 13$ 임을 알 수 있다.

$$\text{한편 } f(6x) = (6x^2 - 5x + 1)Q_1(x) + ax + b$$

$$= (3x-1)(2x-1)Q_1(x) + ax + b$$

위 식에서

$$x = \frac{1}{3} \text{ 대입, } f(2) = \frac{1}{3}a + b = 7$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ 대입, } f(3) = \frac{1}{2}a + b = 13$$

두 식을 연립하여 a, b 를 구하면

$$a = 36, b = -5 \text{ 이다.}$$

$$\therefore a + b = 31$$

14. [정답] ⑤

<해설>

$$f(x) = (x-1)Q_1(x) - 2 \quad \rightarrow f(1) = -2$$

$$= (x^2 - x + 1)Q_2(x) + x - 6$$

$$= (x^3 + 1)(x+2) + R(x)$$

$$= (x+1)(x^2 - x + 1)(x+2) + R(x)$$

$$R(x) = a(x^2 - x + 1) + x - 6$$

$$f(1) = 2 \cdot 3 + a - 5 = -2 \text{ 이므로 } a = -3 \text{ 이다.}$$

$$f(x) = (x+1)(x^2 - x + 1)(x+2) - 3(x^2 - x + 1) + x - 6$$

$$= x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 5x - 7$$

따라서 일차항의 계수와 이차항의 계수의 합은 $5 - 3 = 2$

$$\therefore 2$$

15. [정답] ②

<해설>

$$f(x) = (x-1)Q_1(x) + 2$$

$$= (x-3)Q_2(x) + 8$$

$x = 2$ 대입하면

$$f(2) = Q_1(2) + 2$$

$$f(2) = -Q_2(2) + 8$$

두 식을 빼면

$$Q_1(2) + Q_2(2) - 6 = 0, \quad Q_1(2) + Q_2(2) = 6$$

$$\therefore 6$$

16. [정답] ①

<해설>

모든 실수 x 에 대하여 $f(1+x) + f(1-x) = 0$

이 성립하므로

$$x = 0, \quad f(1) + f(1) = 0, \quad 2f(1) = 0, \quad \underline{f(1) = 0}$$

(나)에서 $f(2) = 5$ 임을 알 수 있다.

$$x = 1, \quad f(2) + f(0) = 0, \quad \underline{f(0) = -5}$$

한편 $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x)Q(x) + R(x)$ 에서

$R(x) = ax^2 + bx + c$ 이라 하자.

$$f(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

$$f(0) = c = -5$$

$$f(1) = a + b - 5 = 0$$

$$f(2) = 4a + 2b - 5 = 5$$

위 두 식을 연립하여 a, b 를 구하면

$$a = 0, \quad b = 5 \text{ 이다.}$$

$$R(x) = 5x - 5$$

$$\therefore R(3) = 10$$

17. [정답] ②

<해설>

$$P(-1) = -2, \quad P(2) = 1$$

$$P(x) = (x+1)(x-2)Q(x) + ax + b$$

$$-a + b = -2 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$2a + b = 1 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠-㉡ 연립하면

$$a = 1, \quad b = -1$$

$$\therefore R(x) = x - 1 \text{ 이므로 } R(8) = 7$$

18. [정답] ③

<해설>

$$f(x) = (x^2 + 3x - 1)(x+1) + 2x - 5$$

$$= x^3 + 4x^2 + 4x - 6$$

$$\therefore f(1) = 3$$

19. [정답] ①

<해설>

다항식 $P(x)$ 를 x^2+2 로 나누었을 때, 몫이 $x-3$, 나머지가 $5x$ 이므로

$$P(x) = (x^2+2)(x-3) + 5x \text{ 이다.}$$

위 식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$P(2) = (2^2+2)(2-3) + 5 \times 2 = 4 \text{ 이다.}$$

20. [정답] ⑤

<해설>

다항식 $f(x)$ 를 $x+a$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$f(x) = (x+a)Q(x) + 21$$

$$\therefore f(-a) = 21$$

$$-a^3 + 3a^2 + a^3 - 6 = 21, \quad 3a^2 = 27, \quad a^2 = 9$$

$$\therefore f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 6$$

따라서 $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지는 $f(2)$ 이므로

$$f(2) = 8 + 12 - 18 - 6$$

$$= -4$$

21. [정답] ②

<해설>

$$P(1) = 0 \text{이므로, } a+3=0$$

$$\therefore a = -3$$

22. [정답] ⑤

<해설>

$$f(3) = 0, \quad f(2) = 0 \text{ 이므로}$$

$$27 + 9a + 3b + 4 = 0, \quad 8 + 4a + 2b + 4 = 0$$

위의 두 식을 연립하면, $a = -\frac{13}{3}, b = \frac{8}{3}$ 이다.

따라서 $3a - 9b^2 = -77$ 이다.

23. [정답] ②

<해설>

다항식 A 를 x^2-x+2 로 나눈 몫을 $x+c$ 라 하면

$$x^3 + 2x^2 + ax + b = (x^2 - x + 2)(x + c)$$

우변을 전개하여 정리하면

$$x^3 + 2x^2 + ax + b = x^3 + (x-1)x^2 + (2-c)x + 2c$$

$$c-1=2, \quad 2-c=a, \quad 2c=b \text{이므로}$$

$$c=3, \quad a=-1, \quad b=6$$

$$\therefore a+b=5$$

24. [정답] ④

<해설>

$f(x) = x^2 - ax + 2, g(x) = 2x^2 + 3x + b$ 이라고 하면

나머지 정리에 의하여 $f(2) = g(2)$ 이다.

$$f(2) = 4 - 2a + 2 = 6 - 2a$$

$$g(2) = 8 + 6 + b = 14 + b$$

$$6 - 2a = 14 + b$$

$$\therefore 2a + b = -8$$

25. [정답] ③

<해설>

준식은 x 에 대한 항등식이므로

$$ax^3 - 13x^2 + bx - 4 = (x^2 - 4x + 4)(ax - 1)$$

$$\therefore a = 3, \quad b = 16$$

$$b - a = 16 - 3 = 13 \text{이다.}$$

26. [정답] ②

<해설>

삼차다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(x)-2$ 가 $(x-2)^2$ 으로 나누어떨어지고, $f(x)+2$ 가 $(x+2)^2$ 으로 나누어떨어지므로 $f(2)-2=0, f(-2)+2=0$ 이다.

즉, $f(x)-x=0$ 의 두 근이 $2, -2$ 이므로 $f(x)-x = (x+2)(x-2)(ax+b)$ 이다.

$$\therefore f(x) = ax^3 + bx^2 + (1-4a)x - 4b$$

..... ㉠

이 때 $f(x)-2$ 와 $f(x)+2$ 는 각각 $(x-2)^2$ 과 $(x+2)^2$ 으로 나누어떨어지므로 조립제법을 이용하면,

| | | | | |
|----|-----|---------|-----------|---------|
| 2 | a | b | $1-4a$ | $-4b-2$ |
| | | $2a$ | $4a+2b$ | $4b+2$ |
| 2 | a | $2a+b$ | $2b+1$ | 0 |
| | | $2a$ | $8a+2b$ | |
| | a | $4a+b$ | $8a+4b+1$ | |
| -2 | a | b | $1-4a$ | $-4b+2$ |
| | | $-2a$ | $4a-2b$ | $4b-2$ |
| -2 | a | $-2a+b$ | $-2b+1$ | 0 |
| | | $-2a$ | $8a-2b$ | |
| | a | $-4a+b$ | $8a-4b+1$ | |

$8a+4b+1=0, 8a-4b+1=0$ 이다.

$$\therefore b=0, \quad a = -\frac{1}{8}$$

..... ㉡

㉡의 값을 ㉠에 대입하면 $f(x) = -\frac{1}{8}x(x+2)(x-2) + x$ 이다.

$f(x)$ 를 $(x+4)$ 로 나눈 나머지는 $f(-4)$ 이므로 $f(-4) = 2$ 이다.

[다른풀이]

삼차다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(x)-2$ 가 $(x-2)^2$ 으로 나누어떨어지므로

$$f(x) - 2 = (x-2)^2(ax+b)$$

라 둘 수 있다. 이로부터

$$f(x) = (x-2)^2(ax+b) + 2$$

$$= \{(x+2)^2 - 8x\}(ax+b) + 2$$

$$= (x+2)^2(ax+b) - 8ax^2 - 8bx + 2$$

$f(x)+2$ 는 $(x+2)^2$ 으로 나누어떨어지므로

$$f(x) + 2 = (x+2)^2(ax+b) - 8ax^2 - 8bx + 4$$

에서 $-8ax^2 - 8bx + 4$ 도 $(x+2)^2$ 을 인수로 가져야 한다.

$$-8ax^2 - 8bx + 4 = -8a(x+2)^2$$

$$= -8ax^2 - 32ax - 32a$$

$$-32a = 4, \quad a = -\frac{1}{8} \text{ 이고, } -32a = -8b, \quad b = -\frac{1}{2} \text{ 이다.}$$

따라서,

$$f(x) = (x-2)^2 \left(-\frac{1}{8}x - \frac{1}{2} \right) + 2$$

이고 $(x+4)$ 로 나눈 나머지는

$$f(-4) = (-4-2)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + 2 = 2$$

2 이다.

27. [정답] ①

<해설>

먼저 두 이차다항식 $P(x)$, $Q(x)$ 가 조건 (가)로부터 $P(x)+3Q(x)=0$ 이라 했으므로

$$\begin{aligned} Q(x) &= ax^2 + bx + c \\ P(x) &= -3(ax^2 + bx + c) \\ &\dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

한편, 조건 (나)에서 $P(x)Q(x)$ 는 x^2-x-6 으로 나누어 떨어지므로

$$\begin{aligned} P(x)Q(x) &= -3\{Q(x)\}^2 = (x-3)(x+2)A(x) \\ (\text{단, } A(x) \text{는 이차다항식이다. 이로부터}) \\ \{Q(3)\}^2 &= \{Q(-2)\}^2 = 0 \\ Q(3) &= Q(-2) = 0 \\ &\dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①의 식에 ②의 값을 대입하면

$$\begin{aligned} 9a + 3b + c &= 0 \\ 4a - 2b + c &= 0 \end{aligned}$$

이고 위의 두 방정식을 연립하여 풀면 $b = -a$, $c = -6a$ 이다.

$$\dots\dots \textcircled{3}$$

또한 $Q(1)=4$ 이므로 $a+b+c=4$ 이고 여기에 ③의 두 식을 대입하면 $a-a-6a=4$, 즉 $a = -\frac{2}{3}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = 4$ 이다.

이로부터 $P(x) = -3\left(-\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 4\right) = 2x^2 - 2x - 12$ 이다.

$$\therefore P(2) = 8 - 4 - 12 = -8$$

28. [정답] ③

<해설>

조건을 정리하면,

$$8x^3 - 4x + 5 = (2x-1)Q(x) + R$$

$x = \frac{1}{2}$ 를 대입하면, $\therefore R = 4$

$$8x^3 - 4x + 1 = (2x-1)Q(x)$$

$8x^3 - 4x + 1$ 을 인수분해하면,

$$8x^3 - 4x + 1 = (2x-1)(4x^2 + 2x - 1)$$

따라서, $Q(x) = 4x^2 + 2x - 1$ 이고, $Q\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ 이다.

$$\therefore Q\left(\frac{1}{2}\right) + R = 5$$

[참고]

$Q(x)$ 를 조립제법을 통한 인수분해를 이용하여

$$\frac{1}{2} \left| \begin{array}{cccc} 8 & 0 & -4 & 1 \\ & 4 & 2 & -1 \\ \hline 8 & 4 & -2 & 0 \end{array} \right.$$

따라서, $Q(x) = 4x^2 + 2x - 1$

또한, 계수비교를 이용하여 다음의 항등식을 정리해서 구할수 있다.

$$8x^3 - 4x + 1 = (2x-1)(4x^2 + mx - 1)$$

이때 2차항의 계수를 비교하면,

$$\begin{aligned} 0 &= 2m - 4 \\ \therefore m &= 2 \end{aligned}$$

29. [정답] ④

<해설>

x 에 대한 다항식 $x^{12} + x + 1$ 을 $x^2 - 1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$ 라 하면

$$x^{12} + x + 1 = (x^2 - 1)Q(x) + R(x)$$

라 식을 세울 수 있다. 다항식을 이차식으로 나눈 나머지는 일차식 또는 상수항이므로 $R(x) = ax + b$ 라 하면

$$x^{12} + x + 1 = (x^2 - 1)Q(x) + ax + b$$

이 성립한다.

등식의 양변에 $x = 1$, $x = -1$ 을 대입하여 풀면

$$x = 1 \text{을 대입하면 } 3 = a + b$$

$$\dots\dots \textcircled{1}$$

$$x = -1 \text{을 대입하면 } 1 = -a + b$$

$$\dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = 1$, $b = 2$ 이므로

$$R(x) = x + 2$$

임을 알 수 있다. 그러므로

$$x^{12} + x + 1 = (x^2 - 1)Q(x) + x + 2$$

이 성립한다.

$$x^{12} - 1 = (x^2 - 1)Q(x)$$

$$(x^6 + 1)(x^6 - 1) = (x^2 - 1)Q(x)$$

$$(x^6 + 1)(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) = (x^2 - 1)Q(x)$$

가 성립한다. 등식의 양변을 $x^2 - 1$ 로 나누면

$$\therefore Q(x) = (x^6 + 1)(x^4 + x^2 + 1)$$

$x = 1$ 을 대입하면

$$\therefore Q(1) = 2 \times 3 = 6$$

30. [정답] $3x - 2$

<해설>

다항식 $P(x)$ 를 $x^2 - 2x - 3$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $2x + 1$ 이므로

$$P(x) = (x-3)(x+1)A(x) + 2x + 1$$

$$\dots\dots \textcircled{1}$$

$x^2 + x - 2$ 로 나누었을 때의 나머지는 $4x$ 이므로

$$P(x) = (x+2)(x-1)B(x) + 4x$$

$$\dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $P(x)$ 를 $x^2 - x - 6$ 으로 나누었을 때의 나머지를 $ax + b$ 라 하면

$$P(x) = (x-3)(x+2)C(x) + ax + b$$

이라 할 수 있다.

①식의 양변에 $x = 3$ 을 대입하면 $P(3) = 7$ 이므로

$$3a + b = 7$$

$$\dots\dots \textcircled{3}$$

②식의 양변에 $x = -2$ 를 대입하면 $P(-2) = -8$ 이므로

$$-2a + b = -8$$

..... ④

③과 ④를 연립하여 풀면 $a = 3, b = -2$ 이다.

그러므로 $P(x)$ 를 $x^2 - x - 6$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $3x - 2$ 이다.

31. [정답] 몫 : $\frac{1}{4}xQ(x) + \frac{1}{4}R$, 나머지 : $\frac{3}{4}R$

<해설>

$$f(x) = \left(x - \frac{3}{4}\right)Q(x) + R \text{ 양변에 } x \text{를 곱하면}$$

$$xf(x) = \left(x - \frac{3}{4}\right)xQ(x) + Rx$$

나누는 수가 $(4x - 3)$ 이 되어야 하므로

$$xf(x) = \frac{1}{4}(4x - 3)xQ(x) + R(4x - 3) \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4}R$$

$$= (4x - 3)\left(\frac{1}{4}xQ(x) + \frac{1}{4}R\right) + \frac{3}{4}R$$

따라서 몫 : $\frac{1}{4}xQ(x) + \frac{1}{4}R$, 나머지 : $\frac{3}{4}R$

32. [정답] ③

<해설>

$$P(x) = (x^2 - x - 1)(ax + b) + 2 \text{이므로}$$

$$P(x + 1) = (x^2 + x - 1)(ax + a + b) + 2 \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

$P(x + 1)$ 을 $x^2 - 4$ 로 나누었을 때의 나머지가 -3 이므로

$$P(x + 1) = (x + 2)(x - 2)Q(x) - 3 \quad \dots \quad \textcircled{2}$$

①식과 ②식에

$x = 2$ 을 대입하면

$$P(3) = 5(3a + b) + 2 = -3, \quad 3a + b = -1$$

$x = -2$ 을 대입하면

$$P(-1) = -a + b + 2 = -3, \quad -a + b = -5$$

위 두식을 연립하면

$$a = 1, b = -4$$

이상에서

$$a + b = -3$$

33. [정답] ③

<해설>

다항식 $f(x)$ 를 $x + \frac{1}{3}$ 으로 나누었을 때 몫을 $Q(x)$, 나머지를

R 이라 하면

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{3}\right)Q(x) + R$$

$f(x)$ 를 $6x + 2$ 로 나누었을 때 몫을 $Q'(x)$, 나머지를 R' 이라 했을 때

$$f(x) = (6x + 2)Q'(x) + R'$$

$$f(x) = 6\left(x + \frac{1}{3}\right)Q'(x) + R'$$

이므로 두 식이 서로 같으려면

$$6Q'(x) = Q(x), \quad R' = R$$

즉

$$Q'(x) = \frac{1}{6}Q(x), \quad R' = R$$

임을 알 수 있다.

34. [정답] ①

<해설>

다항식 $P(x)$ 를 $x - 1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이므로

$$P(x) = (x - 1)Q(x) + R$$

다항식 $x^2P(x)$ 를 $x - 1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하면

$$\begin{aligned} x^2P(x) &= x^2(x - 1)Q(x) + Rx^2 \\ &= x^2(x - 1)Q(x) + R(x^2 - 1) + R \\ &= x^2(x - 1)Q(x) + R(x + 1)(x - 1) + R \\ &= (x - 1)\{x^2Q(x) + R(x + 1)\} + R \end{aligned}$$

이므로 다항식 $x^2P(x)$ 를 $x - 1$ 로 나누었을 때의 몫은 $x^2Q(x) + (x + 1)R$ 이고 나머지는 R 이다.

35. [정답] ①

<해설>

조건 (가)에 의하여 모든 실수 x 에 대하여 $f(x^2) = g(x)(x - 2) - 3$ 을 만족하므로 양 변에 $x = 2$ 를 대입하면 $f(4) = -3$ 이다.

또한 조건 (나)에 의하여 $g(3x) - x^2 + 4x$ 는 $x^2 - x$ 로 나누어 떨어지므로 검토식으로 나타내면

$g(3x) - x^2 + 4x = (x^2 - x)Q(x)$ 이므로 양 변에 $x = 1$ 를 대입하면 $g(3) - 1 + 4 = 0$ 즉, $g(3) = -3$ 이다.

이때, $f(7 - x)g(x)$ 를 $x - 3$ 으로 나눈 나머지는 $f(4)g(3)$ 이므로

$$\therefore f(4)g(3) = (-3) \times (-3) = 9$$

36. [정답] ⑤

<해설>

다항식 $P(x)$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나누었을 때 나머지는 $x + 2$ 이므로

$$P(x) = (x^2 - x + 1)Q(x) + x + 2$$

라고 하자.

다항식 $P(x)$ 를 $x^3 + 1$ 로 나누었을 때 나머지를 이차항의 계수가 a 인 이차식 $R(x)$ 라고 하면

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^3 + 1)Q'(x) + R(x) \\ &= (x^2 - x + 1)(x + 1)Q'(x) + a(x^2 - x + 1) + x + 2 \\ &\dots \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

라고 놓을 수 있다.

즉, $R(x) = a(x^2 - x + 1) + x + 2$ 으로 놓을 수 있다.

$P(-1) = 10$ 이므로 위 ① 식에 $x = -1$ 을 대입하면

$$10 = 3a + 1$$

에서 $a = 3$ 이다.

따라서

$$\begin{aligned} R(x) &= 3(x^2 - x + 1) + x + 2 \\ &= 3x^2 - 2x + 5 \end{aligned}$$

이므로

$$R(1) = 6$$

37. [정답] ①

<해설>

$f(x)$ 를 $(x^2 - x + 2)(x - 1)$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 하고 나머지

를 ax^2+bx+c 로 놓으면

$$f(x)=(x^2-x+2)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$$

한편, $(x^2-x+2)(x-1)Q(x)$ 는 x^2-x+2 로 나누어떨어지므로 $f(x)$ 를 x^2-x+2 로 나눈 나머지는 ax^2+bx+c 를 x^2-x+2 로 나눈 나머지와 같다.

즉, $ax^2+bx+c=a(x^2-x+2)+2x-1$ 이므로

$$f(x)=(x^2-x+2)(x-1)Q(x)+$$

$$a(x^2-x+2)+2x-1$$

이때, $x-1$ 로 나눈 나머지가 7이므로 $f(1)=7$ 에서

$$f(1)=a(1-1+2)+2\times 1-1=7$$

$$2a+1=7 \quad \therefore a=3$$

따라서

$$\begin{aligned} R(x) &= ax^2+bx+c \\ &= 3(x^2-x+2)+2x-1 \\ &= 3x^2-x+5 \end{aligned}$$

그러므로 $R(2)=15$ 이다.

38. [정답] ⑤

<해설>

$$f(x)+2g(x)=(x+1)Q_1(x)-2$$

.....㉠

$$2f(x)+g(x)=(x+1)Q_2(x)+1$$

.....㉡

㉡ $\times 2$ 을 하면

$$4f(x)+2g(x)=2(x+1)Q_2(x)+2$$

.....㉢

㉠+㉢을 하면

$$5f(x)+4g(x)=(x+1)\{Q_1(x)+2Q_2(x)\}$$

따라서 $5f(-1)+4g(-1)=0$ 이므로 $5f(x)+4g(x)$ 을 $x+1$ 로 나누면 나누어 떨어진다.

39. [정답] ①

<해설>

$f(x)-1$ 이 x^2-3x+2 로 나누어 떨어지므로 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} f(x)-1 &= (x^2-3x+2)Q(x) \\ &= (x-1)(x-2)Q(x) \end{aligned}$$

$$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+1$$

양변에 $x=1$, $x=2$ 를 각각 대입하면

$$f(1)=1, f(2)=1$$

이때 $f(x+1)$ 을 x^2-x 로 나누었을 때의 몫을 $P(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x+1)=(x^2-x)P(x)+ax+b$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면 $f(1)=b=1$

양변에 $x=1$ 을 대입하면 $f(2)=a+b=1$

$$\therefore a=0, b=1$$

따라서 구하는 나머지는 1이다.

40. [정답] ④

<해설>

다항식 $f(x)$ 를 x^2+1 로 나누면 나머지가 $x+1$ 이면

$$f(x)=(x^2+1)Q(x)+x+1 \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

이라고 놓을 수 있다.

다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누면 나머지가 4이면

$$f(1)=4$$

$f(x)$ 를 $(x^2+1)(x-1)$ 로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 하고

$$R(x)=ax^2+bx+c$$

라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+1)(x-1)Q'(x)+a(x^2+1)+bx+c-a \\ &= (x^2+1)\{(x-1)Q'(x)+a\}+bx+c-a \end{aligned}$$

라고 놓을 수 있고 ①식과 비교하면

$$x+1=bx+c-a$$

에서

$$b=1, c-a=1$$

임을 알 수 있다.

또한 $f(1)=4$ 이므로

$$4=a+b+c$$

에서 $a+c=3$

임을 알 수 있다.

$$c-a=1, a+c=3$$

에서 $a=1, c=2$

이므로

$$R(x)=x^2+x+2$$

이고 $R(2)=8$

41. [정답] ③

<해설>

$f(x)+g(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 5이므로

$$f(1)+g(1)=5$$

$\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3$ 을 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 20이므로

$$\{f(1)\}^3+\{g(1)\}^3=20$$

$f(x)g(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는 $f(1)g(1)$ 이므로

$$\{f(1)\}^3+\{g(1)\}^3$$

$$= \{f(1)+g(1)\}^3 - 3f(1)g(1)\{f(1)+g(1)\}$$

에서

$$20=5^3-15f(1)g(1)$$

$$\therefore f(1)g(1)=7$$

42. [정답] ①

<해설>

$$9^{375}=(8+1)^{375}$$
이므로 $8=x$ 라 하면

$$9^{375}=(x+1)^{375}$$

다항식 $(x+1)^{375}$ 을 x 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $Q(x), R_1$ 라 하면

$$(x+1)^{375}=xQ(x)+R$$

$$\dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $R=1$ 이므로

$$(x+1)^{375}=xQ(x)+1$$

이 식에 $x=8$ 을 대입하면

$$9^{375}=8Q(8)+1$$

따라서 9^{375} 을 8로 나누었을 때의 나머지 R_1 은 1이다.

$$3^{751}=(4-1)^{751}$$
이므로 $4=y$ 라 하면

$$3^{751} = (y-1)^{751}$$

다항식 $(y-1)^{751}$ 을 y 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $Q'(y)$, R' 이라 하면

$$(y-1)^{751} = yQ'(y) + R'$$

.....㉠

㉠의 양변에 $y=0$ 을 대입하면 $R' = -1$ 이므로

$$(y-1)^{751} = yQ'(y) - 1$$

이 식에 $y=4$ 를 대입하면

$$3^{751} = 4Q'(4) - 1$$

이때, 자연수의 나눗셈에서 나머지가 음수일 수 없으므로

$$3^{751} = 4\{Q'(4) - 1\} + 4 - 1$$

$$3^{751} = 4\{Q'(4) - 1\} + 3$$

따라서 3^{751} 을 4로 나누었을 때의 나머지 R_2 는 3이다.

$$\therefore R_1 + R_2 = 1 + 3 = 4$$

43. [정답] ②

<해설>

$x^{30} + x^{20} + x = (x+1)Q(x) + 1$ 에 $x=2021$ 대입하면

$$2021^{30} + 2021^{20} + 2021 = 2022 \cdot Q(2021) + 1$$

이므로 $2021^{30} + 2021^{20} + 2021$ 을 2022로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

44. [정답] 216

<해설>

직육면체 모양의 나무토막의 가로 길이, 세로 길이, 높이를 나머지가 음수가 되지 않도록 $n+1$ 로 나눈 몫을 각각 A, B, C 라 하자. 한 모서리의 길이가 $n+1$ 인 직육면체 모양의 나무 조각은 최대 $A \times B \times C$ (개)가 생긴다.

(i) 가로의 길이 $4n+5$ 를 $n+1$ 로 나누면

$$4n+5 = 4(n+1) + 1 \quad \therefore A = 4$$

(ii) 세로의 길이 n^2+5n+2 를 $n+1$ 로 나누면

$$n^2+5n+2 = (n+1)(n+3) + (n-1)$$

$$\therefore B = n+3$$

(iii) 높이 n^3+2n+4 를 $n+1$ 로 나누면

$$n^3+2n+4 = (n+1)(n^2-n+3) + 1$$

$$\therefore C = n^2-n+3$$

(i), (ii), (iii)에서 한 모서리의 길이가 $n+1$ 인 직육면체 모양의 나무조각의 개수는 최대

$$4 \times (n+3) \times (n^2-n+3)$$

즉, $f(n) = 4 \times (n+3) \times (n^2-n+3)$ 이므로

$$f(3) = 4 \times (3+3) \times (3^2-3+3) = 216$$

45. [정답] ③

<해설>

ㄱ. $f(x) = x^n - 1$ 이라 하면 $f(1) = 0$ 이므로 인수정리에 의해 $(x-1)$ 로 나누어 떨어진다.

ㄴ. $f(x) = x^n + 1$ 이라 하면 n 이 홀수일 때 $f(-1) = 0$, n 이 짝수일 때 $f(-1) = 2$ 이다. 따라서 n 이 짝수일 때는 $(x+1)$ 을 인수로 갖지 않는다.

ㄷ. $f(x) = x^{2n} - 1$ 이라 하면 $f(1) = 0, f(-1) = 0$ 이다.

따라서 $(x-1)$ 과 $(x+1)$ 을 모두 인수로 가지므로 (x^2-1) 을 인수로 갖는다.

보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

46. [정답] ⑤

<해설>

다항식 $f(x)$ 를 x^2-5x-6, x^2+x-2 로 나눈 몫을 각각 $Q_1(x), Q_2(x)$ 라 하자.

$$f(x) = (x-6)(x+1)Q_1(x) + 3x-1$$

$$f(6) = 17, f(-1) = -4$$

$$f(x) = (x+2)(x-1)Q_2(x) + 2x+1$$

$$f(-2) = -3, f(1) = 3$$

이때, 다항식 $f(x)$ 를 $x^2-4x-12$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$f(x) = (x-6)(x+2)Q(x) + ax+b$$

.....㉠

㉠의 양변에 $x=6, x=-2$ 를 대입하면

$$f(6) = 6a+b = 17$$

$$f(-2) = -2a+b = -3$$

따라서 두 식을 연립하면 $a = \frac{5}{2}, b = 2$

$$\therefore 2a+b = 7$$

47. [정답] ②

<해설>

문제에 삼차식이라는 말이 있을 땐 $f(x)$ 를 직접구해야 할 때가 대부분이다.

$f(x)$ 가 삼차식이므로 몫은 일차식이다.

문제에 주어진 것으로 식을 만들어보면

$$f(x) + 6 = (x+1)^2(ax+b)$$

$$\dots\dots\textcircled{1}$$

$$3 - f(x) = (x^2-4)(-ax+c)$$

$$\dots\dots\textcircled{2}$$

①에 $x=-1$ 을 대입하면 $f(-1) = -6$

②에 $x=-2, x=2$ 를 대입하면 $f(2) = 3, f(-2) = 3$

①식에 $x=2$ 를 대입하면 $f(2) + 6 = (2+1)^2(2a+b)$

$$2a+b = 1$$

.....㉠

①식에 $x=-2$ 를 대입하면 $f(-2) + 6 = -2a+b$

$$-2a+b = 9$$

.....㉡

㉠과 ㉡을 연립하면 $a = -2, b = 5$

$$\therefore f(x) = (x+1)^2(-2x+5) - 6$$

$f(x)$ 를 $x+3$ 으로 나누었을 때 몫을 $Q(x)$ 나머지를 R 이라고 하면

$$f(x) = (x+3)Q(x) + R$$

$$\text{따라서 } R = (-3+1)^2(6+5) - 6 = 38$$

48. [정답] ②

<해설>

조립제법을 이용하여 다항식 $2x^3 + ax^2 - 3x + 1$ 을 $x+3$ 으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하면

$$\begin{array}{c|cccc}
 e & 2 & a & -3 & 1 \\
 & & b & 6 & d \\
 \hline
 & 2 & -2 & c & -8
 \end{array}$$

에서

$$\begin{array}{c|cccc}
 -3 & 2 & a & -3 & 1 \\
 & & -6 & 6 & -9 \\
 \hline
 & 2 & -2 & 3 & -8
 \end{array}$$

이므로

$$e = -3, a - 6 = -2, c = 3, d = -9, b = -6 \\
 \therefore a = 4, b = -6, c = 3, d = -9, e = -3$$

49. [정답] ①

<해설>

$$x^4 - 2x + 3 = (x+1)Q(x) + a \text{에서}$$

$$x = -1 \text{을 대입하면 } a = 6$$

$$x^4 - 2x + 3 = (x+1)Q(x) + 6$$

..... ㉠

$Q(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지는 $Q(1)$ 이므로

㉠에 $x = 1$ 을 대입하면

$$1 - 2 + 3 = 2Q(1) + 6$$

$$\therefore Q(1) = -2$$

50. [정답] ①

<해설>

A 를 B 로 나누었을 때 몫이 Q 나머지가 R 이면

$$A = BQ + R$$

$$x^3 - 2x^2 + 3ax - 2 = (x+2)Q(x) \quad \dots\dots ㉠$$

$$Q(x) = (x-1)Q'(x) + 2 \text{이므로 } Q(1) = 2$$

㉠식에 $x = 1$ 을 대입하면

$$1 - 2 + 3a - 2 = 3Q(1) + R$$

51. [정답] ①

<해설>

$$\begin{array}{c|cccccc}
 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\
 \hline
 & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32
 \end{array}$$

$$x^5 = (x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)(x-2) + 32$$

이때 몫은 $(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$ 이므로

$$\therefore a_2 = 4$$

52. [정답] ⑤

<해설>

$$\begin{array}{c|cccc}
 -1 & 1 & 1 & -3 & 2 \\
 & & -1 & 0 & 3 \\
 \hline
 -1 & 1 & 0 & -3 & 5 = d \\
 & & -1 & 1 & \\
 \hline
 -1 & 1 & -1 & -2 = c & \\
 & & -1 & & \\
 \hline
 1 = a & & -2 = b & &
 \end{array}$$

위의 조립제법에서

$$\begin{aligned}
 x^3 + x^2 - 3x + 2 &= (x+1)(x^2 - 3) + 5 \\
 &= (x+1)\{(x+1)(x-1) - 2\} + 5 \\
 &= (x+1)[(x+1)\{(x+1) - 2\} - 2] + 5 \\
 &= (x+1)^3 - 2(x+1)^2 - 2(x+1) + 5
 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 1, b = -2, c = -2, d = 5$$

$$\therefore abcd = 20$$

53. [정답] ①

<해설>

문제의 우변을 전개하여 계수 비교하는 것도 한 방법이지만 전개가 복잡하고 여러 개의 연립방정식을 풀어야 하므로 조립제법을 사용하는 것이 편하다.

$$\begin{array}{c|cccc}
 \frac{1}{3} & 27 & -9 & 9 & 1 \\
 & & 9 & 0 & 3 \\
 \hline
 \frac{1}{3} & 27 & 0 & 9 & 4 \\
 & & 9 & 3 & \\
 \hline
 \frac{1}{3} & 27 & 9 & 12 & \\
 & & 9 & & \\
 \hline
 & 27 & 18 & &
 \end{array}$$

이므로

$$27x^3 - 9x^2 + 9x + 1$$

$$= 27\left(x - \frac{1}{3}\right)^3 + 18\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 12\left(x - \frac{1}{3}\right) + 4$$

$$= (3x-1)^3 + 2(3x-1)^2 + 4(3x-1) + 4$$

임을 만족한다.

이상에서 $a = 1, b = 2, c = 4, d = 4$ 이므로

$$a + b + c + d = 11$$

54. [정답] ④

<해설>

$(x-1)$ 의 거듭제곱에 대하여 내림차순으로 정리된 식은 조립제법을 이용하여 반복한다.

$$\begin{array}{c|cccc}
 1 & 1 & 7 & 0 & -5 \\
 & & 1 & 8 & 8 \\
 \hline
 1 & 1 & 8 & 8 & 3 \\
 & & 1 & 9 & \\
 \hline
 1 & 1 & 9 & 17 & \\
 & & 1 & & \\
 \hline
 & 1 & 10 & &
 \end{array}$$

즉 $x^3 + 2x + 1$ 를 $x-1$ 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^3 + 2x + 1 = (x-1)^3 + 10(x-1)^2 + 17(x-1) + 3$$

$$= (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$$

따라서 $a = 10, b = 17, c = 3$

$$\therefore a - b + c = 10 - 17 + 3 = -4$$

55. [정답] ④

<해설>

$$1 \left| \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & -2 \\ & 2 & 3 & 3 \end{array} \right.$$

$$1 \left| \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 1 = d \\ & 2 & 5 & \end{array} \right.$$

$$1 \left| \begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 8 = c \\ & 2 & \end{array} \right.$$

$$2 = a \quad 7 = b$$

$$a - b + c + d = 2 - 7 + 8 + 1 = 4$$