수학 영역(가형)

1. 계산 능력 – 평면벡터 정답 ④

$\vec{a}=(-1,\ 4)$이므로

$3\vec{a}=3(-1,\ 4)=(-3,\ 12)$

따라서 벡터 $3\vec{a}$의 모든 성분의 합은

$-3+12=9$이다.

2. 이해 능력 – 삼각함수 정답 ④

$$\cos 2\theta=\cos(\theta+\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$
$$=1-2\sin^2\theta=1-2\left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

3. 계산 능력 – 지수함수와 로그함수 정답 ③

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^{x+1}-2}{3^x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{2}{3^x}}{1-\dfrac{1}{3^x}}=\frac{3-0}{1-0}=3$$

4. 이해 능력 – 확률 정답 ⑤

$\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{3}$에서 $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$이고

$\mathrm{P}(B\cap A^C)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{5}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)-\frac{2}{5}=\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$

따라서

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\dfrac{4}{15}}{\dfrac{2}{3}}=\frac{2}{5}$$

5. 이해 능력 – 미분법 정답 ①

함수 $f(x)=\frac{e^{2x}}{x+1}$에 대하여

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}(x+1)-e^{2x}}{(x+1)^2}=\frac{e^{2x}(2x+1)}{(x+1)^2}$$

이므로

$$f'(1)=\frac{e^2(2+1)}{(1+1)^2}=\frac{3}{4}e^2$$

6. 이해 능력 – 지수함수와 로그함수 정답 ③

부등식 $4^x-2^{x+2}-32\le 0$에서

$2^x=t\,(t>0)$으로 치환하면 위의 부등식은

$t^2-4t-32\le 0,\ (t-8)(t+4)\le 0$

$t>0$이므로 $0<t\le 8$

즉, $0<2^x\le 2^3,\ x\le 3$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x는

1, 2, 3의 3개이다.

7. 이해 능력 – 평면곡선 정답 ④

$x=t\sqrt{t}=t^{\frac{3}{2}}$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{3}{2}\sqrt{t}$

$y=t^2-t$에서 $\frac{dy}{dt}=2t-1$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{2t-1}{\dfrac{3}{2}\sqrt{t}}=\frac{4t-2}{3\sqrt{t}}$$

따라서 $t=9$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{4\times 9-2}{3\times\sqrt{9}}=\frac{34}{9}$$

8. 이해 능력 – 평면벡터 정답 ⑤

두 직선 $\frac{x+1}{2}=3-y,\ x-4=\frac{1-y}{3}$의 방향벡터를 각각 $\vec{a},\ \vec{b}$라 하면

$\vec{a}=(2,\ -1),\ \vec{b}=(1,\ -3)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(2,\ -1)\cdot(1,\ -3)=2+3=5$

$|\vec{a}|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5},\ |\vec{b}|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

따라서

$$\cos\theta=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{5}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

9. 이해 능력 – 순열과 조합 정답 ②

문자 C가 적혀 있는 카드가 문자 O가 적혀 있는 카드보다 왼쪽에 나열되어야 하므로

두 카드 C, O를 같은 카드 X, X라 생각하자.

그러면 X, X, F, F, E, E의 6장의 카드를 일렬로 나열 한 후, X가 적혀 있는 카드를 왼쪽부터 차례로 C, O로 바꾸면 된다. 따라서

구하는 경우의 수는 $\frac{6!}{2!\times 2!\times 2!}=90$

10. 이해 능력 – 순열과 조합 정답 ②

$3+4+6=13$ 또는 $3+5+5=13$ 또는 $4+4+5=13$이므로

(i) 치역이 $\{3,\ 4,\ 6\}$일 때

정의역 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$의 각 원소를 치역의 원소에 하나씩 대응시키는 방법은 $3!=6$(가지)

(ii) 치역이 $\{3,\ 5\}$일 때

정의역 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$의 각 원소를 3에 1개, 5에 2개 대응시키는 방법은 $\frac{3!}{2!}=3$(가지)

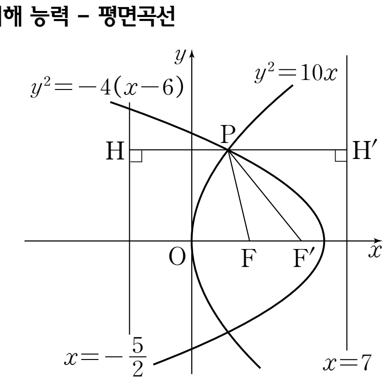
(iii) 치역이 $\{4,\ 5\}$일 때

정의역 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$의 각 원소를 4에 2개, 5에 1개 대응시키는 방법은 $\frac{3!}{2!}=3$(가지)

(i), (ii), (iii)에서 함수 f의 개수는

$6+3+3=12$이다.

11. 이해 능력 – 평면곡선 정답 ②



두 포물선 $y^2=10x,\ y^2=-4(x-6)$의 초점의 좌표는 각각 $\mathrm{F}\left(\frac{5}{2},\ 0\right),\ \mathrm{F}'(5,\ 0)$이고,

준선의 방정식은 각각 $x=-\frac{5}{2},\ x=7$이다.

따라서 점 P에서 직선 $x=-\frac{5}{2}$, 직선 $x=7$에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면

위의 그림에서 포물선의 정의에 의해

$$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PH}}+\overline{\mathrm{PH'}}=\overline{\mathrm{HH'}}$$
$$=7-\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{19}{2}$$

이고, $\overline{\mathrm{FF'}}=\frac{5}{2}$이므로 구하는 삼각형 PFF′의 둘레의 길이는 $\frac{19}{2}+\frac{5}{2}=12$

12. 이해 능력 – 평면곡선 정답 ③

$x=2$를 $x^2-2x+\frac{y^2}{9}=1$에 대입하여 정리하면

$y^2=9$이므로 제1사분면의 점 P의 좌표는 $(2,\ 3)$이다.

$x^2-2x+\frac{y^2}{9}=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x-2+\frac{2y}{9}\times\frac{dy}{dx}=0$

즉, $\frac{dy}{dx}=-\frac{9(x-1)}{y}$ (단, $y\ne 0$)이므로

점 $\mathrm{P}(2,\ 3)$에서의 접선의 기울기는

$-\frac{9(2-1)}{3}=-3$

13. 수학 내적 문제 해결 능력 – 지수함수와 로그함수 정답 ③

$y=a^x-a$에서 $y=0$일 때, $x=1$이므로 $\mathrm{A}(1,\ 0)$

$y=\log_a(x+a)$에서 $x=0$일 때, $y=1$이므로 $\mathrm{B}(0,\ 1)$

함수 $y=a^x-a$의 역함수가 $y=\log_a(x+a)$이므로

두 곡선 $y=a^x-a,\ y=\log_a(x+a)$는

직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 양수 t에 대하여 점 C의 좌표는 $(t,\ t)$로 놓을 수 있다.

점 $\mathrm{C}(t,\ t)$와 직선 AB, 즉 직선 $x+y=1$ 사이의 거리가 $\frac{|t+t-1|}{\sqrt{2}}=\frac{|2t-1|}{\sqrt{2}}$이고

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$, 삼각형 ACB의 넓이는 $\frac{3}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times\frac{|2t-1|}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}=\frac{3}{2}$

$t>1$이므로 $2t-1=3$에서 $t=2$

따라서 곡선 $y=a^x-a$가 점 $\mathrm{C}(2,\ 2)$를 지나므로

$a^2-a=2,\ a^2-a-2=0,\ (a-2)(a+1)=0$

이때, $a>0$이므로 $a=2$이다.

14. 이해 능력 – 적분법 정답 ①

$x=e^t$으로 놓으면 $\frac{dx}{dt}=e^t$이고

$x=e$일 때 $t=1$이고, $x=e^2$일 때 $t=2$이므로

$$\int_e^{e^2}\frac{f'(x)}{x}dx=\int_1^2\frac{f'(e^t)}{e^t}e^t dt=\int_1^2 f'(e^t)dt$$
$$=\int_1^2\ln t\,dt=\Big[t\ln t-t\Big]_1^2$$
$$=(2\ln 2-2)-(0-1)$$
$$=2\ln 2-1$$

[다른 풀이]

$f'(e^x)=\ln x$에서 $e^x=t\,(t>1)$로 놓으면

$x=\ln t$이므로 $f'(t)=\ln(\ln t)$

$\int_e^{e^2}\frac{f'(x)}{x}dx=\int_e^{e^2}\frac{\ln(\ln x)}{x}dx$에서

$\ln x=s$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{ds}{dx}$이므로

$$\int_e^{e^2}\frac{f'(x)}{x}dx=\int_1^2\ln s\,ds=\Big[s\ln s-s\Big]_1^2$$
$$=(2\ln 2-2)-(0-1)$$
$$=2\ln 2-1$$

15. 이해 능력 – 미분법 정답 ⑤

$y'=2e^{2x}+4xe^{2x}=2(2x+1)e^{2x}$이므로

점 $(t,\ 2te^{2t})$에서의 접선의 방정식은

$y-2te^{2t}=2(2t+1)e^{2t}(x-t)$

$x=0$일 때,

$y=2te^{2t}-2t(2t+1)e^{2t}=-4t^2e^{2t}$이므로

$f(t)=-4t^2e^{2t}$

$f'(t)=-8te^{2t}-8t^2e^{2t}$

$\quad\ \ =-8t(1+t)e^{2t}$

$f'(t)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=0$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(t)$는 $t=-1$에서 극소이므로

$a=-1,\ b=f(-1)=-4e^{-2}=-\dfrac{4}{e^2}$

따라서 $ab=(-1)\times\left(-\dfrac{4}{e^2}\right)=\dfrac{4}{e^2}$

16. 이해 능력 – 확률 정답 ⑤

점 A에 있던 말이 한 개의 동전을 6번 던진 후, 점 D에 있으려면 동전의 앞면이 2번, 뒷면이 4번 나와야 하므로

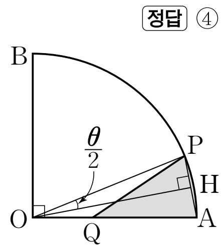
$p_1={}_6C_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{6\times5}{2\times1}\times\dfrac{1}{64}=\dfrac{15}{64}$

점 A에 있던 말이 한 개의 동전을 6번 던진 후, 점 G에 있으려면 동전의 앞면이 5번, 뒷면이 1번 나와야 하므로

$p_2={}_6C_5\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\left(\dfrac{1}{2}\right)=6\times\dfrac{1}{64}=\dfrac{3}{32}$

따라서 $p_1-p_2=\dfrac{15}{64}-\dfrac{3}{32}=\dfrac{9}{64}$

17. 이해 능력 – 삼각함수 정답 ④



점 O에서 선분 PA에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OQ}=\overline{PA}=2\overline{PH}$

$\quad\ =2\sin\dfrac{\theta}{2}$

이므로

$f(\theta)=\left(\dfrac{1}{2}\times1^2\times\theta\right)-\left(\dfrac{1}{2}\times2\sin\dfrac{\theta}{2}\times\sin\theta\right)$

$\quad\ \ =\dfrac{\theta}{2}-\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\theta$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta-2f(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\times\frac{\sin\theta}{\theta}\right)$$

$$=1\times1=1$$

18. 이해 능력 – 확률 정답 ③

A와 B의 게임에서는 A가 $\boxed{7}$ 또는 $\boxed{8}$을 꺼내면 B가 꺼낸 카드와 상관없이 A가 이기므로

$p_1=\dfrac{2}{3}\times1=\dfrac{2}{3}$

B와 C의 게임에서는 C가 $\boxed{2}$ 또는 $\boxed{3}$을 꺼내면 B가 꺼낸 카드와 상관없이 B가 이기므로

$p_2=1\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$

C와 A의 게임에서는 A가 $\boxed{1}$을 꺼내면 C가 이기고, A가 $\boxed{7}$ 또는 $\boxed{8}$을 꺼낼 때 C가 $\boxed{9}$를 꺼내면 C가 이기므로

$p_3=\dfrac{1}{3}\times1+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{9}$

따라서 $p_1+p_2+p_3=\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{9}=\dfrac{17}{9}$

19. 연역적 추론 능력(증명) – 확률 정답 ④

(i)에서

$a=m+1$일 때, $m+2\le b\le 2m+1$이어야 하므로 m가지

$a=m+2$일 때, $m+3\le b\le 2m+1$이어야 하므로 $(m-1)$가지

$\vdots$

$a=2m$일 때, $b=2m+1$이어야 하므로 1가지

따라서 $a\ge m+1$일 때, 나오는 모든 경우의 수는

$1+2+\cdots+m=\boxed{\dfrac{m(m+1)}{2}}$이다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1}{{}_{2m+1}C_2}\left\{1+2+3+\cdots+m+\frac{m(m+1)}{2}\right\}$$

$$=\frac{2}{2m(2m+1)}\left\{\frac{m(m+1)}{2}+\frac{m(m+1)}{2}\right\}$$

$$=\frac{m+1}{2m+1}=\boxed{\frac{n+1}{2n}}\ \ (\because\ n=2m+1)$$

(ii)에서

$a=m+1$일 때, $m+2\le b\le 2m$이어야 하므로 $(m-1)$가지

$a=m+2$일 때, $m+3\le b\le 2m$이어야 하므로 $(m-2)$가지

$\vdots$

$a=2m-1$일 때, $b=2m$이어야 하므로 1가지

따라서 $a\ge m+1$일 때, 나오는 모든 경우의 수는

$1+2+\cdots+(m-1)=\boxed{\dfrac{m(m-1)}{2}}$이다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1}{{}_{2m}C_2}\left\{1+2+3+\cdots+m+\frac{m(m-1)}{2}\right\}$$

$$=\frac{2}{2m(2m-1)}\left\{\frac{m(m+1)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}\right\}$$

$$=\frac{m}{2m-1}=\boxed{\frac{n}{2(n-1)}}\ \ (\because\ n=2m)$$

이상에서

$p(m)=\dfrac{m(m+1)}{2},\ q(m)=\dfrac{m(m-1)}{2},$

$r(n)=n+1,\ s(n)=n$

따라서

$$\frac{p(10)\times r(10)\times s(10)}{q(11)}=\frac{\frac{10\times11}{2}\times11\times10}{\frac{10\times11}{2}}$$

$$=11\times10=110$$

20. 수학 내적 문제 해결 능력 – 적분법 정답 ②

조건 (나)에서 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형은 사다리꼴이고 넓이가 $(t-1)e^t$이므로

$\dfrac{1}{2}\times|f(t)+f(2-t)|\times\{t-(2-t)\}=(t-1)e^t$

$(t-1)|f(t)+f(2-t)|=(t-1)e^t$

이때 $t>1$이고, 조건 (가)에서 $f(t)<0$이므로

$f(t)+f(2-t)=-e^t$

한편, $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{2-t}^{t}f(x)dx=f(t)+f(2-t)$이므로

$\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{2-t}^{t}f(x)dx=-e^t$

양변을 t에 대하여 적분하면

$\displaystyle\int_{2-t}^{t}f(x)dx=-e^t+C$ (C는 상수) …… ㉠

㉠에 $t=1$을 대입하면 $0=-e+C$에서 $C=e$

따라서 $\displaystyle\int_{2-t}^{t}f(x)dx=e-e^t$이므로

$\displaystyle\int_{-1}^{3}f(x)dx=e-e^3$

21. 연역적 추론 능력(증명) – 미분법 정답 ③

ㄱ. (참) $(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(0)=0$이므로 $h(0)=0$

ㄴ. (참) $f'(x)=\cos x,\ g'(x)=4x+4,$

$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))f'(x)$

역함수의 미분법에 의하여

$h'(x)=\dfrac{1}{(g\circ f)'(h(x))}$이므로

$h'(0)=\dfrac{1}{(g\circ f)'(h(0))}=\dfrac{1}{(g\circ f)'(0)}$ ($\because$ ㄱ)

$\quad\ =\dfrac{1}{g'(f(0))f'(0)}=\dfrac{1}{g'(0)\times1}=\dfrac{1}{4}$

ㄷ. (거짓) 실수 a가 등식 $h(\cos^2 3a)=3a$를 만족시킬 때, $H(x)=h(\cos^2 3x)$로 놓으면

$$\lim_{x\to a}\frac{h(\cos^2 3x)-3a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{H(x)-H(a)}{x-a}$$

$$=H'(a)$$

이므로 극한값이 존재하지만 그 이외의 경우는 분자의 값이 0으로 수렴하지 않으므로 극한값이 존재하지 않는다.

$h(\cos^2 3a)=3a$에서 $h^{-1}(3a)=\cos^2 3a$

즉, $(g\circ f)(3a)=\cos^2 3a$이므로

$g(f(3a))=\cos^2 3a$

$2\sin^2 3a+4\sin 3a=\cos^2 3a$

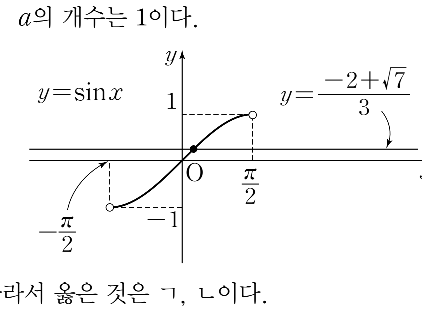
$2\sin^2 3a+4\sin 3a=1-\sin^2 3a$

$3\sin^2 3a+4\sin 3a-1=0$

$\therefore\ \sin 3a=\dfrac{-2\pm\sqrt{7}}{3}$ …… ㉠

$\dfrac{-2-\sqrt{7}}{3}<-1$이고, $-\dfrac{\pi}{2}<3a<\dfrac{\pi}{2}$

이므로 다음 그림에서 ㉠을 만족시키는 실수 a의 개수는 1이다.



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

22. 이해 능력 - 지수함수와 로그함수 정답 12

$\log_{\frac{1}{5}}(2x+1)=-2$에서 $2x+1=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

$2x+1=25$, $2x=24$

따라서 $x=12$

23. 이해 능력 - 순열과 조합 정답 30

${}_5P_2+{}_5C_2=5\times4+\frac{5\times4}{2\times1}=20+10=30$

24. 이해 능력 - 평면곡선 정답 21

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점의 좌표는

$F(3,\ 0)$, $F'(-3,\ 0)$이고,

주축의 길이는 $2\times2=4$이므로

쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{PF'}-\overline{PF}=4$

$\overline{MF'}=6$에서 $\overline{PF'}=2\times\overline{MF'}=12$이므로

$\overline{PF}=12-4=8$

이때, 삼각형 $PF'F$에서 두 점 M, O는 각각

두 선분 PF', FF'의 중점이므로

$\overline{MO}=\frac{1}{2}\times\overline{PF}=4$

따라서 사각형 OFPM의 둘레의 길이는

$\overline{OF}+\overline{FP}+\overline{PM}+\overline{MO}=3+8+6+4=21$

25. 이해 능력 - 순열과 조합 정답 55

x, y, z를 3으로 나누었을 때의 나머지가 각각

0, 1, 2이므로

$x=3p$, $y=3q+1$, $z=3r+2$

(p, q, r는 음이 아닌 정수)

로 놓을 수 있다.

$3p+3q+1+3r+2=30$이므로

$p+q+r=9$ …… ㉠

㉠을 만족시키는 음이 아닌 정수 p, q, r의 모든 순서쌍 $(p,\ q,\ r)$의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

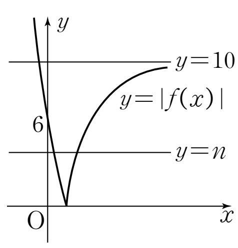
${}_3H_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=\frac{11\times10}{2\times1}=55$

따라서 구하는 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 55이다.

26. 수학 내적 문제 해결 능력 - 지수함수와 로그함수 정답 14

함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}-10$은 x의 값이 증가하면 y의 값이 감소하고, 그래프의 점근선의 방정식이 $y=-10$이므로

$y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

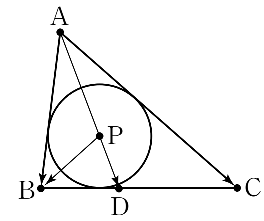


자연수 n에 대하여 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=n$은

$0<n<6$일 때 제1사분면에서 두 개의 교점을 가지고, $6\le n<10$일 때 제1사분면에서 한 개의 교점을 가지며, $n\ge10$일 때 교점이 생기지 않는다.

따라서 $\sum_{n=1}^{15}a_n=5\times2+4\times1+6\times0=14$

27. 이해 능력 - 평면벡터 정답 20



직선 AP는 $\angle A$의 이등분선이므로

직선 AP와 선분 BC의 교점을 D라 하면

$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}$

$=4:6=2:3$

이므로 $\overline{BD}=2$, $\overline{DC}=3$이고,

$\overrightarrow{AD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

삼각형 ABD에서 직선 BP는 $\angle B$의 이등분선이므로

$\overline{AP}:\overline{PD}=\overline{BA}:\overline{BD}=4:2=2:1$

따라서 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{15}\overrightarrow{AC}$이므로

$p=\frac{2}{5}$, $q=\frac{4}{15}$

따라서 $30(p+q)=30\left(\frac{2}{5}+\frac{4}{15}\right)=20$

28. 수학 내적 문제 해결 능력 - 지수함수와 로그함수 정답 3

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)}{2h^2+3h}=1$이고 $h\to0$일 때,

(분모) → 0이므로 (분자) → 0이어야 한다.

이때, 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 연속이므로

$\lim_{h\to0}f(1+h)=f(1)=0$, 즉 $a\ln(1+b)=0$

이때, $a\neq0$ $\left(\because a=0\text{이면 } \lim_{h\to0}\frac{f(1+h)}{2h^2+3h}\neq1\right)$

이므로 $1+b=1$에서 $b=0$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)}{2h^2+3h}=\lim_{h\to0}\frac{a\ln(1+h)}{h(2h+3)}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{\ln(1+h)}{h}\times\frac{a}{2h+3}\right\}$$
$$=1\times\frac{a}{3}=\frac{a}{3}$$

$\frac{a}{3}=1$이므로 $a=3$

따라서 $a+b=3$

[다른 풀이]

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)}{2h^2+3h}=1$이고 $h\to0$일 때,

(분모) → 0이므로 (분자) → 0이어야 한다.

이때, 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 연속이므로

$\lim_{h\to0}f(1+h)=f(1)=0$, 즉 $a\ln(1+b)=0$

이때, $a\neq0$ $\left(\because a=0\text{이면 } \lim_{h\to0}\frac{f(1+h)}{2h^2+3h}\neq1\right)$

이므로 $1+b=1$에서 $b=0$

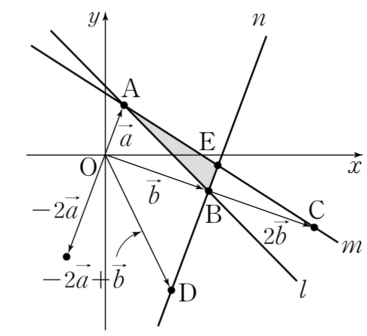
$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)}{2h^2+3h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{2h^2+3h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\times\frac{1}{2h+3}\right\}$$
$$=\frac{1}{3}f'(1)=1$$

이므로 $f'(1)=3$

$f'(x)=\frac{a}{x}$이므로 $a=3$

따라서 $a+b=3$

29. 수학 내적 문제 해결 능력 - 평면벡터 정답 5



위의 그림에서

$\vec{p}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}=\vec{b}+t(\vec{a}-\vec{b})$

이므로 직선 l은 벡터 $\vec{b}$의 종점 B를 지나고

벡터 $\vec{a}-\vec{b}$와 평행한 직선이다.

$\vec{q}=s\vec{a}+(2-2s)\vec{b}=2\vec{b}+s(\vec{a}-2\vec{b})$

이므로 벡터 $2\vec{b}$의 종점을 C라 하면

직선 m은 점 C를 지나고

벡터 $\vec{a}-2\vec{b}$와 평행한 직선이다.

$\vec{r}=u(\vec{b}-2\vec{a})+(1-u)\vec{b}=\vec{b}+u(-2\vec{a})$

이므로 직선 n은 벡터 $\vec{b}$의 종점 B를 지나고

벡터 $-2\vec{a}$와 평행한 직선이다.

두 직선 m, n의 교점을 E라 하면

$\overline{OA}$와 직선 n이 평행하고, 점 B는 선분 OC의 중점이므로 $\triangle AOB=\triangle ABC$

따라서 $\triangle ABE=\frac{1}{2}\triangle ABC=\frac{1}{2}\triangle AOB=5$

[참고]

$\vec{p}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$에서

직선 l은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 종점 A, B를 지나는 직선이다.

$\vec{q}=s\vec{a}+(2-2s)\vec{b}=s\vec{a}+(1-s)(2\vec{b})$에서

직선 m은 두 벡터 $\vec{a}$, $2\vec{b}$의 종점 A, C를 지나는 직선이다.

$\vec{r}=u(\vec{b}-2\vec{a})+(1-u)\vec{b}$에서

직선 n은 두 벡터 $-2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}$의 종점 D, B를 지나는 직선이다.

30. 수학 내적 문제 해결 능력 - 적분법 정답 9

$$g(x)=\int_0^x\frac{\tan t}{f(t)}dt=\int_0^x\sin t\times\frac{1}{f(t)\cos t}dt$$
$$=\left[(-\cos t)\times\frac{1}{f(t)\cos t}\right]_0^x-\int_0^x(-\cos t)\times\left(\frac{1}{f(t)\cos t}\right)'dt$$
$$=-\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(0)}+\int_0^x\cos t\times\left(\frac{t}{\cos t}\right)dt$$
$$=-\frac{1}{f(x)}+1+\int_0^x t\,dt$$
$$=-\frac{1}{f(x)}+1+\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x$$
$$=-\frac{1}{f(x)}+1+\frac{x^2}{2}$$

$g(4)=-\frac{1}{f(4)}+1+\frac{4^2}{2}$이므로

$g(4)+\frac{1}{f(4)}=9$

수학 영역(나형)

1. 계산 능력 - 지수와 로그 정답 ③

$4^{-\frac{1}{2}} \times \log_3 9 = 2^{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)} \times \log_3 3^2$

$= 2^{-1} \times 2 = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

2. 계산 능력 - 함수의 극한과 연속 정답 ⑤

$\lim_{x\to2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} = \lim_{x\to2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)}$

$= \lim_{x\to2} \frac{x+3}{x+2} = \frac{2+3}{2+2} = \frac{5}{4}$

3. 이해 능력 - 집합과 명제 정답 ④

$A-B=\{1, 2, 3\}$이므로 $n(A-B)=3$이다.

4. 이해 능력 - 확률 정답 ③

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cup B)+\mathrm{P}(A\cap B)$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cup B)+\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$= \frac{17}{32} + \frac{3}{32} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$

5. 이해 능력 - 수열 정답 ①

세 수 $\frac{4}{3}$, a, 12가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a^2 = \frac{4}{3} \times 12 = 16$

이때, a는 양수이므로 $a=4$이다.

6. 이해 능력 - 다항함수의 미분법 정답 ④

$f(x)=x^3-3x^2-9x+4$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9$

$f'(a)=0$에서

$3a^2-6a-9=3(a-3)(a+1)=0$

$\therefore$ $a=3$ 또는 $a=-1$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$3+(-1)=2$이다.

7. 이해 능력 - 수열 정답 ⑤

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2+a_6=(a+d)+(a+5d)$

$=2a+6d=20$ …… ㉠

$a_2-a_6=(a+d)-(a+5d)$

$=-4d=10$

이므로 $d=-\frac{5}{2}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a=\frac{35}{2}$

따라서 $a_{10}=a+9d=\frac{35}{2}-\frac{45}{2}=-5$

[다른 풀이]

$a_2+a_6=20$, $a_2-a_6=10$에서

$a_2=15$, $a_6=5$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_6=a_2+4d$이므로 $4d=-10$

따라서 $a_{10}=a_6+4d=5+(-10)=-5$

8. 이해 능력 - 함수 정답 ③

함수 $y=\sqrt{-x-5}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

함수

$y=\sqrt{-(x-m)-5}+2=\sqrt{-x+m-5}+2$

의 그래프가 된다.

함수 $y=\sqrt{-x+m-5}+2$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면 함수 $y=\sqrt{x+m-5}+2$의 그래프가 된다.

이 함수의 그래프가 함수 $y=\sqrt{x}+n$의 그래프와 일치하므로 $m-5=0$에서 $m=5$, $n=2$

따라서 $m+n=7$

9. 이해 능력 - 수열의 극한 정답 ①

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n+2^{-n})+(b_n-4^{-n})+(4^{-n}-2^{-n})\}$

이고

$\sum_{n=1}^{\infty}(4^{-n}-2^{-n})=\sum_{n=1}^{\infty}4^{-n}-\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$

이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2^{-n})$, $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-4^{-n})$이 수렴하므로

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의해

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2^{-n})+\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-4^{-n})+\sum_{n=1}^{\infty}(4^{-n}-2^{-n})$

$=2+4-\frac{2}{3}=\frac{16}{3}$

10. 가형 9번과 동일 정답 ②

11. 가형 10번과 동일 정답 ②

12. 이해 능력 - 확률 정답 ④

(i) 주머니 A에서 흰 공 2개, 검은 공 1개를 꺼낸 경우

꺼낸 3개의 공을 주머니 B에 넣은 후, 주머니 B에서 공을 1개 꺼낼 때, 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_3}\times\frac{{}_5\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_1}=\frac{1\times2}{4}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{16}$

(ii) 주머니 A에서 흰 공 1개, 검은 공 2개를 꺼낸 경우

꺼낸 3개의 공을 주머니 B에 넣은 후, 주머니 B에서 공을 1개 꺼낼 때, 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_3}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_1}=\frac{2\times1}{4}\times\frac{4}{8}=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{5}{16}+\frac{1}{4}=\frac{9}{16}$

13. 이해 능력 - 지수와 로그 정답 ③

$\log_a b$의 값이 자연수가 되려면 $1<a\le b\le 30$이어야 한다.

$1\le\log_a b\le\log_2 30<5$

(i) $\log_a b=1$일 때, $b=a$이므로

$1<a\le30$에서 순서쌍 (a, b)의 개수는 29

(ii) $\log_a b=2$일 때, $b=a^2$이므로

$1<a^2\le30$에서 순서쌍 (a, b)는 $(2, 4)$, $(3, 9)$, $(4, 16)$, $(5, 25)$의 4개

(iii) $\log_a b=3$일 때, $b=a^3$이므로

$1<a^3\le30$에서 순서쌍 (a, b)는 $(2, 8)$, $(3, 27)$의 2개

(iv) $\log_a b=4$일 때, $b=a^4$이므로

$1<a^4\le30$에서 순서쌍 (a, b)는 $(2, 16)$의 1개

(i)~(iv)에서 구하는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는

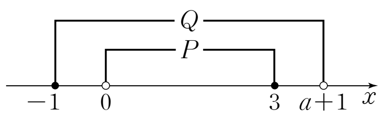
$29+4+2+1=36$

14. 이해 능력 - 집합과 명제 정답 ③

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

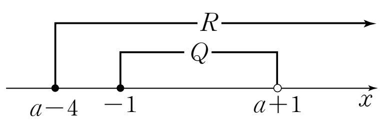
$P=\{x|0<x\leq3\}$, $Q=\{x|-1\leq x<a+1\}$,
$R=\{x|x\geq a-4\}$

p는 q이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q$이어야 한다.



$3<a+1$이므로 $a>2$ …… ㉠

r는 q이기 위한 필요조건이므로 $Q\subset R$이어야 한다.



$-1\geq a-4$이므로 $a\leq3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2<a\leq3$이므로 양수 a의 최댓값은 3이다.

15. 수학 내적 문제 해결 능력 - 함수 정답 ②

$f(x)=\dfrac{3x+k}{x+3}=3+\dfrac{k-9}{x+3}$이므로

점 C의 좌표가 $(-3,\ 3)$

따라서

$\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{(0+3)^2+(0-3)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$\angle\mathrm{COB}=90^\circ$, $\angle\mathrm{CBO}=60^\circ$이므로 $\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{6}$

점 B는 직선 $y=x$ 위의 점이므로 $\mathrm{B}(\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

점 B가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$\dfrac{3\sqrt{3}+k}{\sqrt{3}+3}=\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}+k=3+3\sqrt{3}$

$\therefore\ k=3$

$f(x)=\dfrac{3x+3}{x+3}$이므로

$f(-4)=\dfrac{3\times(-4)+3}{-4+3}=9$

16. 연역적 추론 능력(증명) - 함수의 극한과 연속 정답 ③

ㄱ. (참) $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=2$이고

$\lim\limits_{x\to0-}f(x+1)=\lim\limits_{t\to1-}f(t)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to0-}\{f(x)+f(x+1)\}$

$=\lim\limits_{x\to0-}f(x)+\lim\limits_{x\to0-}f(x+1)$

$=2+1=3$

ㄴ. (거짓) $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=1$이고

$\lim\limits_{x\to0+}f(x+1)=\lim\limits_{t\to1+}f(t)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to0+}\{f(x)+f(x+1)\}$

$=\lim\limits_{x\to0+}f(x)+\lim\limits_{x\to0+}f(x+1)$

$=1+2=3$

따라서 $\lim\limits_{x\to0}\{f(x)+f(x+1)\}=3$ ($\because$ ㄱ)

그런데, $f(0)+f(1)=1+0=1$이므로

$\lim\limits_{x\to0}\{f(x)+f(x+1)\}\neq f(0)+f(1)$

따라서 함수 $f(x)+f(x+1)$은 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. (참) $|f(0)-f(1)|=|1-0|=1$

$\lim\limits_{x\to0-}|f(x)-f(x+1)|=|2-1|=1$

$\lim\limits_{x\to0+}|f(x)-f(x+1)|=|1-2|=1$

따라서

$|f(0)-f(1)|=\lim\limits_{x\to0}|f(x)-f(x+1)|=1$

이므로 함수 $|f(x)-f(x+1)|$은 $x=0$에서 연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

17. 이해 능력 - 집합과 명제 정답 ①

(i) 집합 X의 가장 큰 원소가 6일 때,
$3\notin X$, $4\notin X$, $5\notin X$이므로 집합 X의 개수는 $\{1,\ 2\}$의 부분집합 중에서 $\varnothing$을 제외한 것과 같다.
따라서 $2^2-1=3$

(ii) 집합 X의 가장 큰 원소가 5일 때,
$4\notin X$, $6\notin X$이므로 집합 X의 개수는 $\{1,\ 2,\ 3\}$의 부분집합 중에서 $\varnothing$을 제외한 것과 같다.
따라서 $2^3-1=7$

(iii) 집합 X의 가장 큰 원소가 4일 때,
$5\notin X$, $6\notin X$이므로 집합 X의 개수는 $\{1,\ 2,\ 3\}$의 부분집합 중에서 $\varnothing$을 제외한 것과 같다.
따라서 $2^3-1=7$

(iv) 집합 X의 가장 큰 원소가 3일 때,
$4\notin X$, $5\notin X$, $6\notin X$이므로 집합 X의 개수는 $\{1,\ 2\}$의 부분집합 중에서 $\varnothing$을 제외한 것과 같다.
따라서 $2^2-1=3$

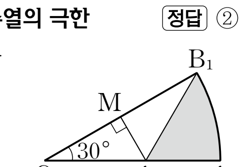
(v) 집합 X의 가장 큰 원소가 2일 때,
$\{1,\ 2\}$의 1가지

(i)~(v)에 의하여 구하는 집합 X의 개수는
$3+7+7+3+1=21$

18. 발견적 추론 능력(추측) - 수열의 극한 정답 ②

선분 $\mathrm{OB_1}$의 중점을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{OM}}=6$이므로

직각삼각형 $\mathrm{OA_2M}$에서



$\overline{\mathrm{MA_2}}=\overline{\mathrm{OM}}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

$\therefore\ \triangle\mathrm{OA_2B_1}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB_1}}\times\overline{\mathrm{MA_2}}$

$=\dfrac{1}{2}\times12\times2\sqrt{3}=12\sqrt{3}$

이때, 부채꼴 $\mathrm{OA_1B_1}$의 넓이는

$\pi\times12^2\times\dfrac{30^\circ}{360^\circ}=12\pi$이므로

$S_1=12\pi-12\sqrt{3}=12(\pi-\sqrt{3})$

한편, $\overline{\mathrm{OA_2}}=2\times\overline{\mathrm{MA_2}}=2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$이므로

부채꼴 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$과 부채꼴 $\mathrm{OA}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}$의

닮음비는 $1:\dfrac{4\sqrt{3}}{12}$ 즉, $1:\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

넓이의 비는 $1:\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=1:\dfrac{1}{3}$이다.

따라서

$S_n=S_1+\dfrac{1}{3}S_1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2S_1+\cdots+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}S_1$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{12(\pi-\sqrt{3})}{1-\dfrac{1}{3}}=18(\pi-\sqrt{3})$

19. 발견적 추론 능력(추측) - 수열 정답 ⑤

19행까지에서 홀수번째 행의 모든 자연수의 개수는

$1+2+3+\cdots+10=\dfrac{10\times11}{2}=55$이다.

따라서 19행의 오른쪽 끝에 있는 수는 55번째의 홀수이므로 $2\times55-1=109$이다.

20행까지에서 짝수번째 행의 모든 자연수의 개수는

$1+3+5+\cdots+19=\dfrac{10\times(1+19)}{2}=100$이다.

따라서 20행의 오른쪽 끝에 있는 수는 100번째의 짝수이므로 $2\times100=200$이다.

따라서 구하는 합은 $109+200=309$

20. 가형 19번과 동일 정답 ④

21. 수학 내적 문제 해결 능력 - 함수의 극한과 연속 정답 ④

(i) $|x|<1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$이므로

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{ax^{n+1}+1}{x^{n-1}+a}=\dfrac{1}{a}$

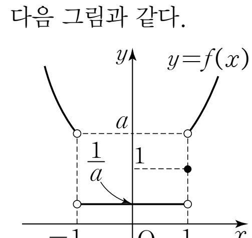
(ii) $|x|>1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\infty$이므로

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{ax^{n+1}+1}{x^{n-1}+a}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{ax^2+\dfrac{1}{x^{n-1}}}{1+\dfrac{a}{x^{n-1}}}$

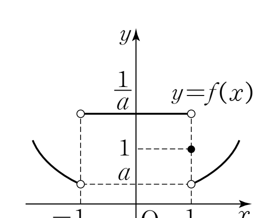
$=ax^2$

(iii) $x=1$일 때, $f(1)=\dfrac{a+1}{1+a}=1$

(i), (ii), (iii)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$[a>1$일 때$]$



$[0<a<1$일 때$]$

(가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$은 서로 다른 세 점에서 만나야하므로 $0<a<1$이어야 한다.

이때, $\lim\limits_{x\to1-}f(x)+\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\dfrac{1}{a}+a=\dfrac{10}{3}$

이므로

$3a^2-10a+3=(3a-1)(a-3)=0$

에서 $a=\dfrac{1}{3}$ ($\because\ 0<a<1$)

따라서 $\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=\dfrac{1}{a}=3$

22. 계산 능력 - 함수 정답 21

${}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$

23. 이해 능력 – 함수 정답 3

$f(x)=x^2-1,\ g(x)=\sqrt{x+7}-1$에서

$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(2)=3$

24. 이해 능력 – 수열의 극한 정답 13

모든 자연수 n에 대하여 $2n+1>0$이므로

$12(n-1)<(2n+1)a_n<12(n+1)$에서

$\dfrac{12(n-1)}{2n+1}<a_n<\dfrac{12(n+1)}{2n+1}$ …… ㉠

이때

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{12(n-1)}{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{12(n+1)}{2n+1}=\dfrac{12}{2}=6$

이므로 ㉠에서 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=6$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n+1)=2\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}1$

$=2\times6+1=13$

25. 이해 능력 – 집합과 명제 정답 6

$q : x^2-6x+k>0$에서

$\sim q : x^2-6x+k\le0$이므로

명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면

$x=k$일 때, $x^2-6x+k\le0$이 성립해야 한다.

즉, $k^2-6k+k\le0,\ k(k-5)\le0$

따라서 $0\le k\le5$이므로 구하는 정수 k는

0, 1, …, 5의 6개이다.

26. 이해 능력 – 다항함수의 미분법 정답 36

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(9,\ 4)$에서의

접선의 기울기가 6이므로 $f(9)=4,\ f'(9)=6$

따라서

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x^2)-4}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to3}\left\{\dfrac{f(x^2)-f(9)}{x^2-9}\times(x+3)\right\}$

에서 $x^2=t$로 놓으면

$x\to3$일 때, $t\to9$이므로

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x^2)-f(9)}{x^2-9}=\lim\limits_{t\to9}\dfrac{f(t)-f(9)}{t-9}$

$=f'(9)=6$

따라서

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x^2)-4}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x^2)-f(9)}{x^2-9}\times\lim\limits_{x\to3}(x+3)$

$=6\times(3+3)=36$

27. 이해 능력 – 다항함수의 미분법 정답 5

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-3x+1$에 대하여

$f'(x)=x^2+2x-3$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의

점 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{3}t^3+t^2-3t+1\right)$에서의 접선의

기울기는 t^2+2t-3이다.

따라서 접선의 방정식은

$y-\left(\dfrac{1}{3}t^3+t^2-3t+1\right)=(t^2+2t-3)(x-t)$

이 직선의 y절편은 $x=0$일 때의 y좌표이므로

$g(t)=-\dfrac{2}{3}t^3-t^2+1$

이때 $g'(t)=-2t^2-2t=-2t(t+1)$이므로

$g'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=-1$

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	…	-1	…	0	…
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	↘	극소	↗	극대	↘

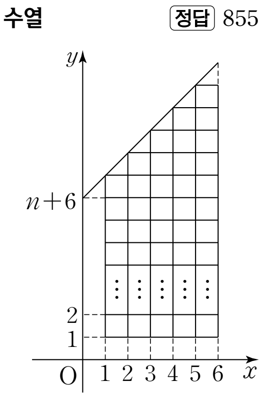
따라서 함수 $g(t)$는 $t=-1$에서

극솟값 $g(-1)=\dfrac{2}{3}-1+1=\dfrac{2}{3}$를 갖는다.

따라서 $p=3,\ q=2$이므로 $p+q=5$

28. 가형 16번과 동일 정답 73

29. 발견적 추론 능력(추측) – 수열 정답 855



$y-n\le x+6\le12$에서

$y\le x+6+n$

$x\le6$이므로

조건을 만족시키고

한 변의 길이가 1인

정사각형의 개수는

$(n+6)+(n+7)$

$+(n+8)+(n+9)$

$+(n+10)$

$=5n+40$

한 변의 길이가 2인 정사각형의 개수는

$(n+5)+(n+6)+(n+7)+(n+8)=4n+26$

한 변의 길이가 3인 정사각형의 개수는

$(n+4)+(n+5)+(n+6)=3n+15$

한 변의 길이가 4인 정사각형의 개수는

$(n+3)+(n+4)=2n+7$

한 변의 길이가 5인 정사각형의 개수는

$n+2$이므로

$a_n=(5n+40)+(4n+26)+(3n+15)$

$+(2n+7)+(n+2)$

$=15n+90$

따라서

$\sum\limits_{n=1}^{6}a_n=\sum\limits_{n=1}^{6}(15n+90)$

$=15\sum\limits_{n=1}^{6}n+\sum\limits_{n=1}^{6}90$

$=15\times\dfrac{6\times7}{2}+90\times6$

$=315+540=855$

30. 수학 내적 문제 해결 능력 – 다항함수의 미분법 정답 24

$f(x)=x^4-8x^3+18x^2-20$에서

$f'(x)=4x^3-24x^2+36x$

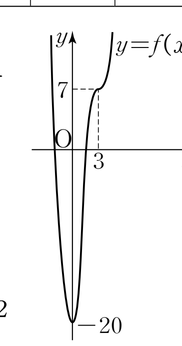
$=4x(x-3)^2$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	0	…	3	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	-20	↗	7	↗

그러므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수

$g(x)=|f(x)-\{f(n)-c\}|$

에 대하여

$f(n)-c\le-20$이면 $a_n=0$

$-20<f(n)-c<7$이면 $a_n=2$

$f(n)-c=7$이면 $a_n=1$

$f(n)-c>7$이면 $a_n=2$

한편,

$f(1)=-9,\ f(2)=4,\ f(3)=7,\ f(4)=12,$

$f(5)=55,\ \cdots$

$f(n)-c=7$이면 $f(n)=c+7$이고,

$0<c<10$이므로 $7<f(n)<17$

따라서 $f(n)-c=7$을 만족시키는 자연수 n과

상수 $c(0<c<10)$이 존재하는 경우는 $n=4,$

$c=5$일 때뿐이다.

즉, $\sum\limits_{n=1}^{10}a_n$의 값이 홀수이기 위한 필요충분조건은

$n=4,\ c=5$이다.

이때, $g(x)=|f(x)-\{f(n)-5\}|$이므로

$a_n=2(n\ne4$일 때$)$

$a_n=1(n=4$일 때$)$

따라서 $\sum\limits_{n=1}^{10}a_n=2\times9+1=19$이므로

$c+\sum\limits_{n=1}^{10}a_n=5+19=24$