

제2교시

수학 영역(가형)



5지선다형

1. 두 벡터 $\vec{a}=(2, -3)$, $\vec{b}=(3, 1)$ 에 대하여 벡터 $\vec{a}-\vec{b}$ 의 모든 성분의 합은? [2점]

- ① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

2. $\int_0^1 x\sqrt{x} dx$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{2\ln(1+x)}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

4. 두 사건 A 와 B 는 서로 독립이고

$$P(A|B)=\frac{1}{2}, \quad P(A \cup B)=\frac{5}{6}$$

일 때, $P(B|A)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

5. $(2x+3)^5$ 의 전개식에서 x^4 의 계수는? [3점]

- ① 200 ② 210 ③ 220 ④ 230 ⑤ 240

6. 한 개의 주사위를 여섯 번 던질 때, 6의 약수의 눈이 나온 횟수를 확률변수 X 라 하자. $V(3X)$ 의 값은? [3점]

- ① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

7. 직선 $y=2x-1$ 이 곡선 $y=\ln x+kx$ 에 접할 때, 상수 k 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

8. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가

$$f(0) = -4, \quad f(x) = a \sin x + \int_0^x t f'(t) dt$$

를 만족시킬 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① -2 ② 0 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

9. 곡선 $y = \frac{x}{x^2+1} (x > 0)$ 의 변곡점의 좌표가 (a, b) 일 때, $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

10. 모평균이 m , 모표준편차가 2인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n 인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 15이었다. 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \leq m \leq 15.98$ 일 때, $n+a$ 의 값은? (단, Z 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \leq 1.96) = 0.95$ 로 계산한다.) [3점]

- ① 30.02 ② 31.28 ③ 32.02
④ 33.28 ⑤ 34.02

11. 포물선 $y^2 - 12x - 6y + 33 = 0$ 의 초점 F의 x 좌표를 a ,
이 포물선 위의 점 P의 x 좌표를 b 라 하자. $b - a = \frac{1}{2}$ 일 때,
선분 FP의 길이는? [3점]

- ① 6 ② $\frac{13}{2}$ ③ 7 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 8

12. 함수

$$f(x) = \begin{cases} (ax+3)\cos x & (x < 0) \\ x^2 + 2x + b & (x \geq 0) \end{cases}$$

이 $x=0$ 에서 미분가능할 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [3점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

13. 어느 공장에서 생산하는 노트북 컴퓨터 1대의 무게는 평균이 900 g, 표준편차가 20 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산하는 노트북 컴퓨터 중에서 임의추출한 4대의 무게의 합이 3640 g 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

| z | $P(0 \leq Z \leq z)$ |
|-----|----------------------|
| 0.5 | 0.1915 |
| 1.0 | 0.3413 |
| 1.5 | 0.4332 |
| 2.0 | 0.4772 |

- ① 0.3085 ② 0.6247 ③ 0.8413
 ④ 0.9332 ⑤ 0.9772

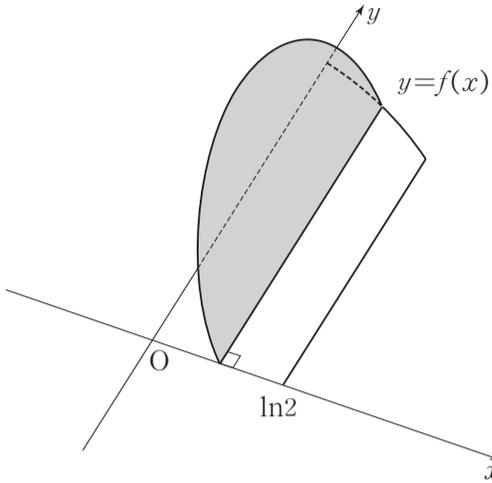
14. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 위치 $P(x, y)$ 가

$$x = 4\ln(t+1), \quad y = t^2$$

이다. 점 P의 속도 \vec{v} 와 벡터 $\vec{a} = (1, 1)$ 이 서로 평행하게 되는 시각 t 에서의 점 P의 속력은? [4점]

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

15. 그림과 같이 곡선 $f(x)=e^2-e^x(0\leq x\leq \ln 2)$ 와 x 축, y 축 및 직선 $x=\ln 2$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 반원일 때, 이 입체도형의 부피는? [4점]



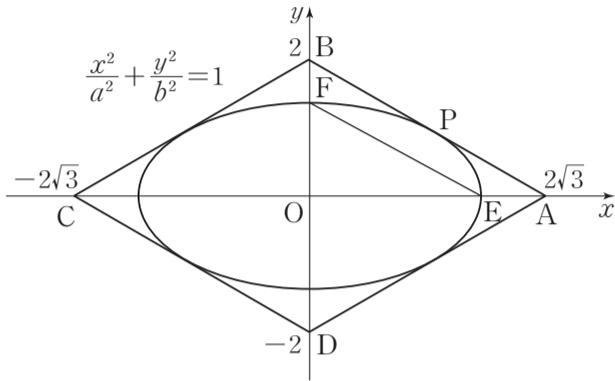
- ① $\frac{\pi}{8}(e^2\ln 2 - e + \frac{3}{2})$
- ② $\frac{\pi}{8}(e^4\ln 2 - 2e^2)$
- ③ $\frac{\pi}{8}(e^4\ln 2 - 2e^2 + \frac{3}{2})$
- ④ $\frac{\pi}{4}(e^2\ln 2 - e + \frac{1}{2})$
- ⑤ $\frac{\pi}{4}(e^4\ln 2 - 2e^2 + \frac{3}{2})$

16. 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적힌 10장의 카드 중에서 임의로 3장의 카드를 동시에 뽑는다. 뽑은 3장의 카드에 적힌 수의 최댓값과 최솟값의 차가 5 미만일 때, 최댓값과 최솟값의 차가 홀수일 확률은? [4점]



- ① $\frac{1}{20}$
- ② $\frac{3}{20}$
- ③ $\frac{1}{4}$
- ④ $\frac{7}{20}$
- ⑤ $\frac{9}{20}$

17. 그림과 같이 네 점 $A(2\sqrt{3}, 0)$, $B(0, 2)$, $C(-2\sqrt{3}, 0)$, $D(0, -2)$ 를 꼭짓점으로 하는 마름모 $ABCD$ 가 있다. 마름모 $ABCD$ 의 네 변과 접하는 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이 선분 AB 와 접하는 점을 P 라 하고, 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 네 꼭짓점 중 x 좌표가 양수인 점을 E , y 좌표가 양수인 점을 F 라 하자. 직선 AB 와 직선 EF 가 서로 평행할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $a > b > 0$) [4점]

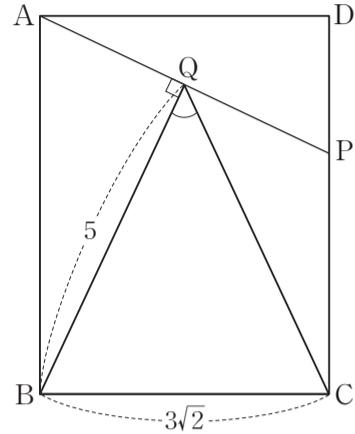


<보기>

- ㄱ. 타원 위의 점 P 에서의 접선의 기울기는 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.
- ㄴ. $a^2 + b^2 = 8$
- ㄷ. 두 점 A, C 를 초점으로 하고 점 P 를 지나는 쌍곡선의 주축의 길이는 $2\sqrt{7} - 1$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 그림과 같이 $\overline{BC} = 3\sqrt{2}$ 인 직사각형 $ABCD$ 가 있다. 선분 CD 를 3 : 2로 내분하는 점을 P 라 하고, 점 B 에서 직선 AP 에 내린 수선의 발을 Q 라 하자. $\overline{BQ} = 5$ 일 때, $\tan(\angle BQC)$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{\sqrt{14}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{14}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{14}}{2}$ ④ $\frac{2\sqrt{14}}{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{14}}{6}$

19. 좌표평면에서 연립부등식 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq x \end{cases}$ 의 영역에 속하는 점 P와

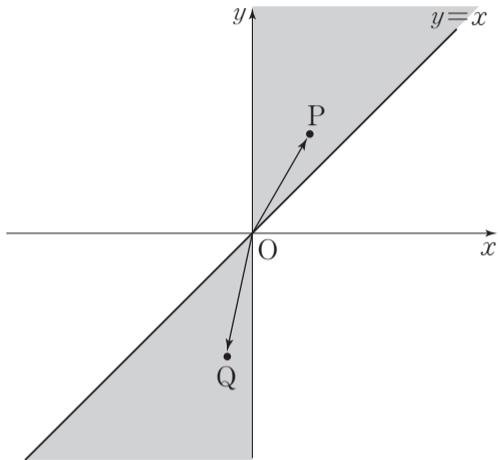
연립부등식 $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq x \end{cases}$ 의 영역에 속하는 점 Q가 있다. $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$,

$\overrightarrow{OQ} = \vec{q}$ 라 할 때, 등식

$$\overrightarrow{OR} = \frac{|\vec{q}|\vec{p} + |\vec{p}|\vec{q}}{|\vec{q}|\vec{p} + |\vec{p}|\vec{q}|}$$

를 만족시키는 점 R가 나타내는 도형의 길이는?

(단, $|\vec{q}|\vec{p} + |\vec{p}|\vec{q}| \neq 0$ 이고, O는 원점이고 두 점 P, Q는 원점이 아니다.) [4점]



- ① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{2}{3}\pi$ ⑤ $\frac{3}{4}\pi$

20. 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적힌 빨간색 카드와 노란색 카드가 각각 10장씩, 총 20장의 카드가 있다. 이 20장의 카드 중에서 임의로 k 장($4 \leq k \leq 11$)의 카드를 뽑을 때, 2장에만 서로 같은 숫자가 적혀 있고 나머지 $(k-2)$ 장에는 모두 서로 다른 숫자가 적혀 있을 확률을 $P(k)$ 라 하자. 다음은 $4 \leq m \leq 10$ 일 때, $P(m+1) = P(m)$ 을 만족시키는 자연수 m 의 값을 구하는 과정이다.

20장의 카드 중에서 k 장($4 \leq k \leq 11$)의 카드를 택하는 경우의 수는 ${}_{20}C_k$ 이다.
2장의 카드에 적힌 숫자가 같은 경우의 수는 10이고, 나머지 $(k-2)$ 장에는 모두 서로 다른 숫자가 적혀 있는 경우의 수는 $\boxed{\text{가}}$ 이다. 따라서

$$P(k) = \frac{10 \times \boxed{\text{가}}}{{}_{20}C_k}$$

$P(m+1) = P(m)$ 이라 하면

$$\frac{\boxed{\text{나}}}{{}_{20}C_{m+1}} = \frac{{}_9C_{m-2}}{{}_{20}C_m}$$

따라서 $4 \leq m \leq 10$ 일 때, $P(m+1) = P(m)$ 을 만족시키는 자연수 m 은 $\boxed{\text{다}}$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(m)$, (다)에 알맞은 수를 a 라 할 때, $a + \frac{f(7)}{g(5)}$ 의 값은? [4점]

- ① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

21. 점 $A(1, 0, 0)$ 을 지나고 xy 평면에 수직인 평면을 α 라 하고, 구 $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=4$ 와 평면 α 가 만나서 생기는 원을 C 라 하자. 원 C 의 평면 $2y-4z+13=0$ 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은? [4점]

- ① $\frac{2\sqrt{5}}{15}\pi$ ② $\frac{8\sqrt{5}}{45}\pi$ ③ $\frac{2\sqrt{15}}{15}\pi$
 ④ $\frac{7\sqrt{15}}{45}\pi$ ⑤ $\frac{8\sqrt{15}}{45}\pi$

단답형

22. 6P_3 의 값을 구하시오. [3점]

23. 좌표공간의 두 점 $A(3, 0, -2)$, $B(-1, 3, a)$ 에 대하여 선분 AB 를 2:1로 외분하는 점의 좌표가 $(-5, b, 10)$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 함수 $f(x) = x^3 + x - 3$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때,

$\frac{1}{g'(-1)}$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. 두 실수 x, y 에 대하여 $x + y \leq \log_3 24$ 일 때,

$$5 + 3^x = k, \quad 12 + 3^y = 2k$$

를 만족시키는 모든 자연수 k 의 값의 합을 구하시오. [3점]

26. 좌표평면에서 매개변수 t 로 나타내어진 곡선

$$x = e^t - e^{-t}, \quad y = e^t - 3e^{-t}$$

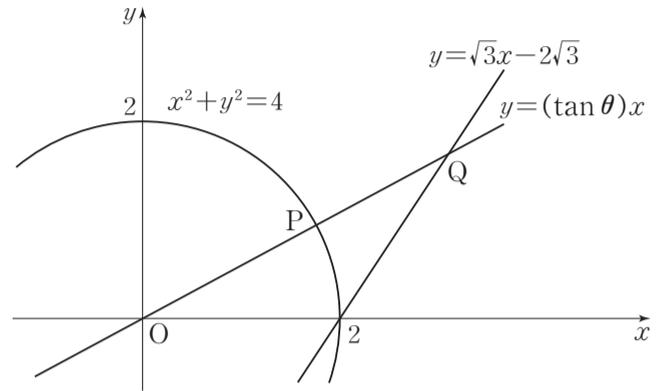
위의 한 점 (a, b) 에서의 접선의 기울기가 $\frac{6}{5}$ 일 때,

$30(a+b)$ 의 값을 구하시오. [4점]

27. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$ 의 개수를 구하시오. [4점]

- (가) 집합 X 의 임의의 두 원소 x, y 에 대하여 $x < y \leq 4$ 이면 $f(x) \leq f(y)$ 이고, $x > 4$ 이면 $f(x) \geq f(4)$ 이다.
 (나) $f(1)f(4) = 6$

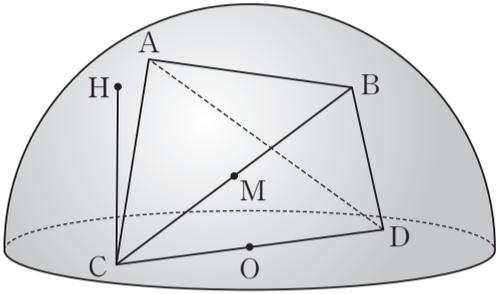
28. 그림과 같이 좌표평면에서 직선 $y = (\tan \theta)x$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{3}$)가 원 $x^2 + y^2 = 4$ 와 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하고, 직선 $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$ 과 만나는 점을 Q라 하자. 선분 PQ의 길이를 $l(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{l(\theta)}{\theta} = \frac{q}{p}\sqrt{3}$ 이다. $p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



29. 한 모서리의 길이가 6인 정사면체 ABCD와 밑면의 중심이 O인 반구가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 두 꼭짓점 A, B는 반구 위에 있고 선분 AB는 반구의 밑면과 평행하다.
- (나) 두 꼭짓점 C, D는 반구의 밑면 위에 있고 점 O는 선분 CD의 중점이다.

점 C를 지나고 반구의 밑면에 수직인 직선이 반구와 만나는 점을 H라 하고 선분 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{HM}$ 의 값을 구하시오. [4점]



30. 함수 $f(x) = \frac{a(x+1)^2}{x^2+3}$ 에 대하여 함수

$$g(x) = |f(x) - k| \quad \left(0 \leq k \leq \frac{4}{3}a\right)$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(x)$ 의 최댓값은 8이다.
- (나) $|g(3) - g(-1)| = 2$

실수 t 에 대하여 방정식 $g(x) = t$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$ 라 할 때, $f(1) + g(1) + \sum_{n=1}^{10} h(n-1)$ 의 최댓값을 구하시오. (단, a 는 양의 상수이고, k 는 상수이다.) [4점]

♣ 확인 사항

답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.