

8월 31일 수능 모의평가

수학 영역

2교시

공통 - 수학 I, 수학 II

01 ④ 02 ① 03 ② 04 ① 05 ③ 06 ⑤ 07 ⑤ 08 ① 09 ③ 10 ④
11 ② 12 ② 13 ⑤ 14 ⑤ 15 ③ 16 7 17 16 18 13 19 4 20 80
21 220 22 58

선택 - 확률과 통계

23 ① 24 ③ 25 ④ 26 ② 27 ⑤ 28 ③ 29 175 30 260

선택 - 미적분

23 ① 24 ② 25 ⑤ 26 ③ 27 ③ 28 ④ 29 3 30 283

선택 - 기하

23 ④ 24 ② 25 ⑤ 26 ③ 27 ③ 28 ① 29 127 30 17

출제 문항 분석 - 공통(수학 I, 수학 II)

문항	정답률	출제 단위	출제 의도
1	98.2	지수함수와 로그함수	지수법칙의 계산
2	98.0	미분	미분계수의 계산
3	91.4	삼각함수	삼각함수 구하기
4	95.9	함수의 극한과 연속	함수의 연속
5	98.6	수열	등차수열의 항 구하기
6	97.9	미분	다항함수의 극대와 극소
7	89.2	수열	수열의 합 구하기
8	88.0	미분	다항함수의 접선
9	80.7	삼각함수	삼각방정식의 근 구하기
10	81.8	적분	수직선 위의 점의 속도와 거리
11	56.0	지수함수와 로그함수	거듭제곱근 중 실수의 개수**

12	68.0	함수의 극한과 연속	그래프에서의 함수의 극한
13	37.9	삼각함수	사인법칙과 코사인법칙
14	46.5	적분	정적분으로 정의된 함수
15	36.2	수열	수열의 귀납적 정의
16	93.9	지수함수와 로그함수	로그방정식의 근 구하기
17	94.7	적분	적분의 계산
18	92.1	수열	수열의 계산
19	83.3	미분	미분 방정식의 활용
20	42.9	적분	절댓값이 있는 함수의 넓이
21	17.8	지수함수와 로그함수	지수함수의 그래프의 활용**
22	6.4	미분	함수의 개형 추론하기**

** 수능 출제 가능 문제

출제 문항 분석 - 선택(확률과 통계)

문항	정답률	출제 단위	출제 의도
23	94.3	경우의 수	이항정리
24	85.1	확률	확률의 계산
25	80.2	통계	정규분포
26	81.9	확률	원순열
27	77.1	통계	이산확률변수의 평균과 분산
28	53.7	확률	확률의 정의
29	22.4	통계	수학적 확률
30	8.1	경우의 수	함수의 개수**

** 수능 출제 가능 문제

출제 문항 분석 - 선택(미적분)

문항	정답률	출제 단위	출제 의도
23	89.5	수열의 극한	지수함수의 극한
24	91.1	적분법	부분적분법
25	89.8	수열의 극한	수열의 극한
26	89.5	적분법	정적분의 활용**
27	63.5	수열의 극한	등비급수의 활용
28	67.2	미분법	삼각함수의 극한
29	16.9	미분법	음함수와 역함수의 미분법*
30	3.5	적분법	함수의 추론과 치환적분법

* 신유형

** 수능 출제 가능 문제

출제 문항 분석 - 선택(기하)

문항	정답률	출제 단위	출제 의도
23	96.6	공간도형과 공간좌표	공간좌표의 중점
24	91.1	이차곡선	쌍곡선의 접선
25	93.8	이차곡선	타원의 정의
26	80.8	평면벡터	평면벡터의 내적
27	60.3	공간도형과 공간좌표	삼수선의 정리
28	48.6	이차곡선	포물선의 정의**
29	11	공간도형과 공간좌표	정사영의 넓이
30	1.4	평면벡터	벡터의 자취

** 수능 출제 가능 문제

출제 경향 및 학습 대책

이번 9월 평가원 시험은 2022학년도 대학수학능력시험, 금년 6월 평가원 시험과 비슷한 유형과 난이도로 출제되었다. 대학수학능력시험과 6월 평가원 시험이 다소 어렵게 출제된 것을 감안하면 통합 수능 2년차인 올해 수능 출제 기조도 이번 시험과 비슷할 것으로 예상된다.

공통과목은 다소 어렵게 출제되었고, 선택과목에서는 상대적으로 미적분이 확률과 통계와 기하보다 다소 어렵게 출제되어 문이과 학생들의 선택과목간 유불리를 조정하려는 출제의도를 확인할 수 있었다.

공통과목에서는 15번(수열)은 수열의 귀납적 정의를 이해하고 수의 특성을 이용하여 값을 추론하는 문제, 22번(다항함수의 미분)은 조건을 해석하고 적절한 그래프를 추론하는 문제로 출제되어 학생들에게는 다소 어렵게 느껴졌을 것이다.

선택과목(확률과 통계, 미적분, 기하)에서는 확률과 통계 30번(경우의 수)은 합성함수를 이용한 함수의 개수를 구하는 문제, 미적분 29번(미분법)은 음함수와 역함수의 미분법이 섞인 문제, 기하 30번(평면벡터)은 자취와 내적의 융합 문제로 출제되어 개념에 대한 정확한 이해가 부족하면 접근이 힘들었을 것으로 보인다.

전체적으로 킬러 문항과 준킬러 문항의 난이도 격차가 줄어들었고 도형, 그래프의 활용과 추론 문제의 출제 비중이 높아지는 출제 기조는 유지되고 있다.

이번 모의평가에서는 수능의 출제 기조를 확인하고 부족한 부분을 파악할 수 있는 기회로 삼아 시험 결과에 대한 좌절보다는 자신의 약점을 파악할 수 있어야 한다. 지금부터는 어렵고, 새로운 공식이나 성질을 익히기 보다는 자주 출제되는 필수 개념에 대한 이해를 높여야 한다. 또한 기출 문제의 반복적 풀이 보다는 풀이에 대한 해석을 통해 약점을 찾아 보완하고, 고난도 문제의 난이도가 적정 수준으로 조절되어 출제되니 연산 실수를 줄이고 킬러 문제와 준킬러 문제의 적절한 시간 배분을 통해 개인별 학습 전략을 수립하도록 하자.

[분석 동영상 보기]

이번 시험의 분석 동영상을 바로 확인 할 수 있습니다.



$$\begin{aligned} 01 \mid \left(\frac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\sqrt{3}+1} &= (2^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1} \\ &= 2^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = 2^{3-1} \\ &= 2^2 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 02 \mid f'(x) &= 4x \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= f'(2) = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 03 \mid \sin(\pi - \theta) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} \times 2 - \theta\right) \\ &= \sin\theta = \frac{5}{13} \end{aligned}$$

이고, $\cos\theta < 0$ 이므로 θ 는 제2사분면의 각이다.

$$\cos\theta = -\sqrt{1 - \sin^2\theta} = -\frac{12}{13} \text{ 이므로}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}$$

$$\begin{aligned} 04 \mid f(a) &= \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -2a + a = -a \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) &= a^2 - 6 \text{ 이므로} \\ -a &= a^2 - 6 \\ a^2 + a - 6 &= 0 \\ a = 2 \text{ 또는 } a &= -3 \\ \text{모든 상수 } a \text{의 값의 합은 } &-1 \text{이다.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 05 \mid \text{등차수열 } \{a_n\} \text{의 공차를 } d \text{라 하자.} \\ a_1 = 2a_5 \text{에서 } a_1 &= 2(a_1 + 4d) \text{이므로} \\ a_1 &= -8d \dots\dots \textcircled{1} \\ a_8 + a_{12} &= -6 \text{에서} \\ (a_1 + 7d) + (a_1 + 11d) &= -6 \text{이므로} \\ a_1 + 9d &= -3 \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하면 } a_1 &= 24, d = -3 \text{이므로} \\ a_2 &= a_1 + d = 24 - 3 = 21 \text{이다.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 06 \mid f'(x) &= 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) \\ x = 0 \text{에서 } f(x) \text{가 극댓값을 갖고 } x &= 2 \text{에서} \\ f(x) \text{가 극솟값을 갖는다.} \\ f(0) &= k = 9 \\ f(2) &= k - 4 = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 07 \mid S_k - a_k &= S_{k-1} (k \geq 2) \text{이고} \\ S_1 - a_1 &= 0 \text{이므로} \\ \sum_{k=1}^{10} (S_k - a_k) &= \sum_{k=2}^{10} S_{k-1} = \sum_{k=1}^9 S_k \\ &= \sum_{k=1}^9 \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^9 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 08 \mid f(x) &= x^3 - 4x + 5 \text{라 하면 점 } (1, 2) \text{에서의} \\ \text{접선의 방정식은 } y &= f'(1)(x - 1) + f(1) \text{이다.} \\ f'(x) &= 3x^2 - 4 \text{이므로 } f'(1) = -1, f(1) = 2 \\ \text{접선의 방정식은} \\ y &= -(x - 1) + 2 = -x + 3 \\ g(x) &= x^4 + 3x + a \text{라 하면 } g'(x) = 4x^3 + 3 \\ \text{곡선 } y = g(x) \text{와 직선 } y &= -x + 3 \text{의 접점의} \\ x \text{좌표를 } t \text{라 하면} \\ g'(t) &= -1 \\ 4t^3 + 3 &= -1 \\ \therefore t &= -1 \\ g(-1) &= -(-1) + 3 \\ a - 2 &= 4 \\ a &= 6 \end{aligned}$$

09 | 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 모두 직선 $x=6$ 에 대하여 대칭이므로 α_1, α_2 도 직선 $x=6$ 에 대하여 대칭이다.

$|\alpha_1 - \alpha_2| = 8$ 이므로 α_1, α_2 는 2, 10이다.

$f(2) = f(10) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ 이므로 $k = \frac{1}{2}$ 이다.

$-3\cos \frac{\pi}{6}x - 1 = \frac{1}{2}$ 에서 $\cos \frac{\pi}{6}x = -\frac{1}{2}$ 이므로

$\frac{\pi}{6}x = \frac{2}{3}\pi$ 에서 $x=4$, $\frac{\pi}{6}x = \frac{4}{3}\pi$ 에서

$x=8$ 이다.

따라서 $|\beta_1 - \beta_2| = |4 - 8| = 4$ 이다.

10 | 시각 t 에서의 점 P의 위치를 $x(t)$ 라 하면

$x(t) = t^3 + \frac{1}{2}at^2 + C$ (단, C 는 적분상수)

$x(0) = 0$ 이므로 $C=0$ 이다.

$|x(2) - 6| = 10$

$|(2a+8) - 6| = 10$

$\therefore a=4$ 또는 $a=-6$

$a > 0$ 이므로 $a=4$ 이다.

11 | $\sqrt{3}^{f(n)}$ 의 네제곱근 중 실수인 것은

$\pm \{ \sqrt{3}^{f(n)} \}^{\frac{1}{4}}$ 이다.

$$\begin{aligned} \sqrt{3}^{\frac{f(n)}{4}} \times \left(-\sqrt{3}^{\frac{f(n)}{4}} \right) &= -\sqrt{3}^{\frac{f(n)}{2}} \\ &= -3^{\frac{f(n)}{4}} \\ &= -9 \end{aligned}$$

이므로 $f(n) = 8$ 이다.

$-(n-2)^2 + k = 8$ 이므로 $(n-2)^2 = k-8$ 을 만족하는 자연수 n 의 개수가 2이려면 $k-8=1$ 이다. 따라서 $k=9$ 이다.

12 | 점 A의 x 좌표를 $\alpha(t)$, 점 B의 x 좌표를 $\beta(t)$ 라 하자. 점 C의 x 좌표는 $-\alpha(t)$ 이므로

$\overline{AH} = \alpha(t) - \beta(t)$

$\overline{HC} = \beta(t) - \{-\alpha(t)\} = \alpha(t) + \beta(t)$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\overline{AH} - \overline{CH}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{-2\beta(t)}{t}$$

방정식 $x^2 = x+t$ 의 두 근 중 작은 근이 $\beta(t)$ 이다.

$$x^2 - x - t = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4t}}{2}$$

$$\therefore \beta(t) = \frac{1 - \sqrt{1+4t}}{2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{-2\beta(t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{1+4t} - 1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{4t}{t\{\sqrt{1+4t} + 1\}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{4}{\sqrt{1+4t} + 1} = 2 \end{aligned}$$

13 | 삼각형 CED에서 코사인법칙을 이용하면

$$\begin{aligned} \overline{CD}^2 &= \overline{CE}^2 + \overline{ED}^2 - 2 \cdot \overline{CE} \cdot \overline{ED} \cdot \cos \frac{\pi}{4} \\ &= 16 + 18 - 2 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 10 \end{aligned}$$

따라서 $\overline{CD} = \sqrt{10}$ 이다.

반원의 반지름의 길이를 R 라 하고, $\angle OCD$ 를 θ 라 하자.

삼각형 OCD에서 $\cos \theta = \frac{\sqrt{10}}{2R}$ 이다.

또한 $\frac{\overline{ED}}{\sin \theta} = \frac{\overline{CD}}{\sin \frac{\pi}{4}}$ 에서

$$\sin \theta = \frac{\overline{ED}}{\overline{CD}} \times \sin \frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{10}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

이다.

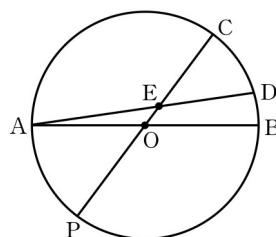
$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{9}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

이므로 $\frac{\sqrt{10}}{2R} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ 에서 $R=5$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 직선 CO가 원과 만나는 점을 P라 하면

$$\overline{AE} \times \overline{ED} = \overline{CE} \times \overline{EP}$$

에서



$$\overline{AE} \times 3\sqrt{2} = 4 \times 6$$

이므로 $\overline{AE} = 4\sqrt{2}$ 이다.

삼각형 AEC에서 코사인법칙을 이용하면

$$\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EC}^2 - 2 \cdot \overline{AE} \cdot \overline{EC} \cdot \cos \frac{3}{4}\pi$$

에서

$$\overline{AC}^2 = 32 + 16 - 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 80$$

$$\overline{AC} = 4\sqrt{5} \text{ 이므로}$$

$$\overline{AC} \times \overline{CD} = 4\sqrt{5} \times \sqrt{10} = 20\sqrt{2}$$

14 | \neg . $g(0) = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 |f(x)|dx = 0$

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 |f(x)|dx$$

$$\therefore f(x) \geq 0 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

따라서 $f(x)$ 는 0과 1 사이에 유일한 극댓값을

가진다. $x < 0$ 에서 함수 $f(x)$ 는 증가하므로

$$f(-1) < f(0) = 0 \quad \therefore \text{참}$$

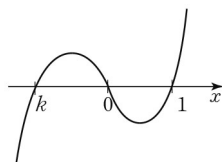
\neg . $g(-1) = \int_{-1}^0 f(x)dx - \int_0^1 |f(x)|dx > 0$

$$\int_{-1}^0 f(x)dx > \int_0^1 |f(x)|dx$$

$$\int_0^1 |f(x)|dx > 0 \text{ 이므로}$$

$$\int_{-1}^0 f(x)dx > 0 \text{ 이어야 한다.}$$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$0 \leq x \leq 1$ 에서 $|f(x)| = -f(x)$ 이므로

$$\int_{-1}^0 f(x)dx - \int_0^1 |f(x)|dx$$

$$= \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx$$

$$= \int_{-1}^1 f(x)dx$$

$$= \int_{-1}^1 (x-k)x(x-1)dx \quad (\text{단, } k < 0)$$

$$= \int_{-1}^1 \{x^3 - (k+1)x^2 + kx\}dx$$

$$= 2 \int_0^1 -(k+1)x^2dx$$

$$(\because \int_{-1}^1 (x^3 + kx)dx = 0)$$

$$= -2(k+1) \int_0^1 x^2dx$$

$$= -\frac{2}{3}(k+1)$$

$$\therefore -\frac{2}{3}(k+1) > 0$$

$$k < -1 \quad \therefore \text{참}$$

\sqcup . $g(-1) > 1$ 이면 \neg 에 의해

$$g(-1) = -\frac{2}{3}(k+1)$$

$$-\frac{2}{3}(k+1) > 1 \text{ 이므로 } k < -\frac{5}{2}$$

$$g(0) = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 |f(x)|dx$$

$$= 2 \int_0^1 f(x)dx$$

$$(\because 0 \leq x \leq 1 \text{에서 } f(x) \leq 0)$$

$$= 2 \int_0^1 \{x^3 - (k+1)x^2 + kx\}dx$$

$$= 2 \left[\frac{x^4}{4} - \frac{k+1}{3}x^3 + \frac{k}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$= \frac{2k-1}{6}$$

$$k < -\frac{5}{2} \text{ 이므로}$$

$$g(0) = \frac{2k-1}{6} < \frac{-5-1}{6} = -1 \quad \therefore \text{참}$$

따라서 옳은 것은 \neg , \neg , \sqcup 이다.

15 | $a_{4k} = r^k$ 에서 $a_4 = r$, $a_8 = r^2$ 이다.
 $|a_4| < 5$ 이므로 $a_5 = r + 3$ 이다.
 $|a_5| < 5$ 이므로 $a_6 = r + 6$ 이다.
 $|a_6| \geq 5$ 이므로 $a_7 = -\frac{1}{2}r - 3$ 이다.
 $|a_7| < 5$ 이므로 $a_8 = -\frac{1}{2}r$ 이다.
따라서 $a_8 = -\frac{1}{2}r = r^2$ 이므로 $r = -\frac{1}{2}$ 이다.
 $a_n = \begin{cases} a_{n+1} - 3 & (|a_n| < 5) \\ -2a_{n+1} & (|a_n| \geq 5) \end{cases}$ 이므로 a_3, a_2, a_1 을
구해보자.
 $a_4 = -\frac{1}{2}$ 에서 $a_3 = -\frac{7}{2}$ 이다.
($\because | -2a_4 | \geq 5$ 를 만족시키지 않는다.)
 $a_3 = -\frac{7}{2}$ 에서 $a_2 = 7$ 이다.
($\because |a_3 - 3| < 5$ 를 만족시키지 않는다.)
 $a_2 = 7$ 에서 $a_1 = -14$ 이다. ($\because a_1 < 0$)
 $a_{4k} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k$ 에서 $0 < |a_{4k}| < 1$ 이다.
 $a_{4k+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k + 3$ 에서 $|a_{4k+1}| < 5$ 이다.
 $a_{4k+2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k + 6$ 에서 $|a_{4k+2}| \geq 5$ 이다.
 $a_{4k+3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} - 3$ 에서 $|a_{4k+3}| < 5$ 이다.
따라서 $|a_m| \geq 5$ 인 $m = 4k + 2$ 이다. (단, k 는
자연수)
 $a_1 = -14$, $a_2 = 7$ 이므로
 $m = 1, 2, 6, 10, 14, \dots, 98$ 이다.
따라서 $p = 26$ 이다.
 $p + a_1 = 26 + (-14) = 12$

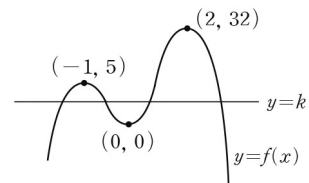
16 | $\log_3(x-4) = \log_9(x+2)$ 에서
 $\log_9(x-4)^2 = \log_9(x+2)$ 이므로
 $(x-4)^2 = x+2$

$x^2 - 8x + 16 = x + 2$ 에서 $x^2 - 9x + 14 = 0$
이므로 $x = 7$ 또는 $x = 2$
 $x - 4 > 0$ 이어야 하므로 $x = 7$ 이다.

17 | $\int_1^2 f'(x) dx = f(2) - f(1)$
 $\int_1^2 (6x^2 - 4x + 3) dx = f(2) - 5$
 $\left[2x^3 - 2x^2 + 3x\right]_1^2 = f(2) - 5$
 $\therefore f(2) = 11 + 5 = 16$

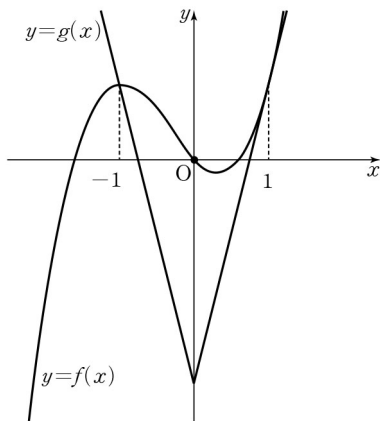
18 | $\sum_{k=1}^5 ca_k = 65 + \sum_{k=1}^5 c$
 $c \times \sum_{k=1}^5 a_k = 65 + \sum_{k=1}^5 c$
 $c \times 10 = 65 + 5c$
 $c = 13$

19 | $-3x^4 + 4x^3 + 12x^2 = k$
 $f(x) = -3x^4 + 4x^3 + 12x^2$ 이라 하자.
 $f'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 24x$
 $= -12x(x^2 - x - 2)$
 $= -12x(x+1)(x-2)$
함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = k$ 의 서로 다른 교점의
개수가 4이려면 $0 < k < 5$ 이다.
자연수 $k = 1, 2, 3, 4$ 이므로 4개이다.

20 | $k < 0$ 일 때, 두 그래프가 두 점에서 만나는 경우
는 다음과 같다.



곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=4x+k$ 가 $x=t$ 에서 접한다고 하면

$$t^3 + t^2 - t = 4t + k \dots\dots \textcircled{㉑}$$

$$3t^2 + 2t - 1 = 4 \dots\dots \textcircled{㉒}$$

$\textcircled{㉑}$, $\textcircled{㉒}$ 에서 $t=1$, $k=-3$

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-4x-3$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^3 + x^2 - x = -4x - 3 \quad (x < 0)$$

$$x = -1$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^0 \{(x^3 + x^2 - x) - (-4x - 3)\} dx + \int_0^1 \{(x^3 + x^2 - x) - (4x - 3)\} dx$$

$$= \int_{-1}^0 (x^3 + x^2 + 3x + 3) dx + \int_0^1 (x^3 + x^2 - 5x + 3) dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 3x \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 3x \right]_0^1$$

$$= \frac{19}{12} + \frac{13}{12} = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$$

$$\therefore 30 \times S = 80$$

21 | 직선 PQ가 x 축과 만나는 점을 R라 하자.

삼각형 PRA는 $\overline{PR} = \overline{PA}$ 인 이등변삼각형이고, 삼각형 QRC는 $\overline{QR} = \overline{QC}$ 인 이등변삼각형이다.

또한 삼각형 PRA와 삼각형 QRC는 서로 닮음이다. 두 점 P, Q에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 H_1 , H_2 라 하자.

삼각형 BOA와 삼각형 PH_1A 는 서로 닮음이고 $\overline{AB} = 4\overline{PB}$ 이므로 점 A의 좌표는 $A(4a, 0)$ 이다.

직선 \overline{AP} 의 기울기가 $-m$ 이므로

$$\frac{0 - 2^a}{4a - a} = -m \text{에서 } \frac{2^a}{3a} = m \dots\dots \textcircled{㉑}$$

직선 PQ의 기울기가 m 이므로

$$\frac{2^b - 2^a}{b - a} = m \dots\dots \textcircled{㉒}$$

$$\overline{CQ} = 3\overline{AB} \text{이므로 } \overline{CQ} = 3 \times \left(\frac{4}{3} \overline{AP} \right) \text{에서}$$

$$\overline{CQ} = 4\overline{AP} \text{이다. } \overline{QH_2} = 4\overline{PH_1} \text{이므로}$$

$$2^b = 4 \times 2^a \text{에서 } 2^b = 2^{a+2}$$

$$\text{따라서 } b = a + 2 \dots\dots \textcircled{㉓}$$

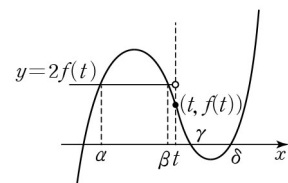
$$\textcircled{㉑}, \textcircled{㉒} \text{에서 } \frac{2^a}{3a} = \frac{2^b - 2^a}{b - a} \text{이므로 } \textcircled{㉓} \text{을 대입하면}$$

$$\frac{2^a}{3a} = \frac{2^{a+2} - 2^a}{2}$$

$$\frac{2^a}{3a} = \frac{3 \times 2^a}{2} \text{이므로 } a = \frac{2}{9} \text{이다.}$$

$$\therefore 90 \times (a + b) = 90 \times \left(\frac{2}{9} + \frac{2}{9} + 2 \right) = 220$$

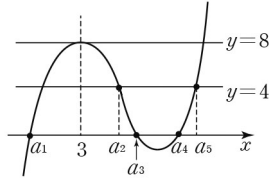
22 | 방정식 $g(x)=0$ 을 풀면 $x \geq t$ 일 때, $f(x)=0$ 이거나 $x < t$ 일 때, $f(x)=2f(t)$ 이다.



예를 들어 그림과 같이 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(t, f(t))$ 가 있을 때, $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$, $x=\delta$ 에서 방정식 $g(x)=0$ 을 만족시키고 $h(t)=4$ 이다.

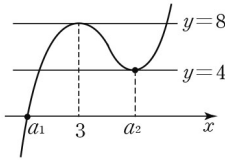
따라서 $h(t)$ 가 불연속이 될 수 있는 점은 $t > 3$ 이면서 $f(t)=4$ (\because 극댓값이 8)이거나 방정식 $f(t)=0$ 의 실근이다.

- (i) 방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 실근을 2개 이상 갖는 경우



위 그림과 같이 $t > 3$ 이면서 $f(t)=4$ 를 만족시키는 점이 2개이고 방정식 $f(t)=0$ 의 실근도 2개 이상이므로 $h(t)$ 는 적어도 4개 이상의 불연속점을 갖는다.

- (ii) 방정식 $f(x)=0$ 이 하나의 실근을 갖는 경우



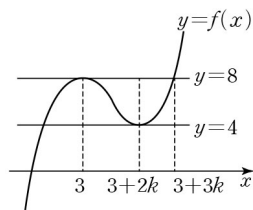
위 그림과 같이 극솟값이 4일 때 $h(t)$ 는 $t=a_1$, $t=a_2$ 에서 불연속이다.

(참고)

$$h(t) = \begin{cases} 2 & (t < a_1) \\ 1 & (t = a_1) \\ 0 & (a_1 < t < a_2) \\ 1 & (t = a_2) \\ 0 & (t > a_2) \end{cases}$$

극솟값이 4보다 크면 $h(t)$ 는 오직 하나의 불연속점을 갖고, 극솟값이 4보다 작으면 3개의 불연속점을 갖는다.

삼차함수의 비율 관계를 이용하여 다음과 같이 좌표를 두자.



$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= (x-3)^2(x-3-3k)+8 \\ f(3+2k) &= 4k^2(-k)+8=4 \\ \therefore k &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } f(x) &= (x-3)^2(x-6)+8 \\ f(8) &= 25 \times 2 + 8 = 58 \end{aligned}$$

선택(확률과 통계) 해설

- 23 | $(x^2+2)^6$ 의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r \times (x^2)^r \times 2^{6-r} \quad (r=0, 1, \dots, 6)$$

이므로 x^4 의 계수는

$${}_6C_2 \times 2^{6-2} = 15 \times 16 = 240 \text{이다.}$$

- 24 | $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \text{ 이므로 } P(A) + P(B) = \frac{5}{4}$$

$P(A|B) = P(B|A)$ 에서

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ 이므로}$$

$$P(A) = P(B)$$

$$\therefore P(A) + P(B) = 2P(A) = \frac{5}{4}$$

$$\therefore P(A) = \frac{5}{8}$$

- 25 | 제품 A의 무게를 확률변수 X 라 하면 X 는 정규

분포 $N(9, 0.4^2)$ 을 따르고

제품 B의 무게를 확률변수 Y 라 하면 Y 는 정규분포 $N(20, 1^2)$ 을 따른다.

$$P(8.9 \leq X \leq 9.4)$$

$$= P\left(\frac{8.9-9}{0.4} \leq Z \leq \frac{9.4-9}{0.4}\right)$$

$$= P\left(-\frac{1}{4} \leq Z \leq 1\right)$$

이고

$$P(19 \leq Y \leq k)$$

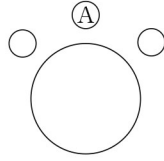
$$= P\left(\frac{19-20}{1} \leq Z \leq \frac{k-20}{1}\right)$$

$$= P(-1 \leq Z \leq k-20)$$

$$\text{이므로 두 확률이 같으려면 } k-20 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore k = 20 + \frac{1}{4} = 20.25$$

26 | A가 B, C와 이웃하지 않을 확률을 구하자.



A를 고정하고 B, C가 이웃하지 않을 확률을 구하면
B, C가 자리를 선택하는 경우의 수는 $6 \times 5 = 30$
이고 A와 이웃하지 않게 자리를 선택하는 경우의
수는 $4 \times 3 = 12$ 이므로 A와 B, C가 이웃하지 않
을 확률은 $\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$ 이다.

따라서 A가 B 또는 C와 이웃할 확률은
 $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

27 | $\sigma(X) = E(X)$ 에서 $V(X) = \{E(X)\}^2$ 이므로

$$E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \{E(X)\}^2$$

$$E(X^2) = 2\{E(X)\}^2$$

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{1}{2} + a \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{5}a \end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \times \frac{1}{10} + 1^2 \times \frac{1}{2} + a^2 \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{5}a^2 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{2}{5}a^2 &= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5}a\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{4}{5}a + \frac{8}{25}a^2 \end{aligned}$$

$$\frac{2}{25}a^2 = \frac{4}{5}a \text{ 이므로 } a = 10 (\because a > 1) \text{이다.}$$

$$\begin{aligned} \therefore E(X^2) + E(X) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times 100\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times 10\right) \\ &= 45 \end{aligned}$$

28 | 합이 3의 배수일 확률에서 합이 3의 배수이고 곱
은 5의 배수가 아닐 확률을 빼면 된다.

먼저 1부터 10까지 자연수를 3으로 나눈 나머지에
따라 분류하면 다음과 같이 분류 할 수 있다.

나머지 0 : 3, 6, 9

나머지 1 : 1, 4, 7, 10

나머지 2 : 2, 5, 8

세 수의 합이 3의 배수가 되려면 세 수의 나머지가
모두 같거나 모두 달라야 하므로

$${}_3C_3 + {}_4C_3 + {}_3C_3 + {}_3C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 = 42(\text{가지}) \text{이다.}$$

세 수의 합이 3의 배수이고 곱이 5의 배수가 아니
려면 5의 배수를 제외하고 세 수의 합이 3의 배수
가 되도록 뽑아야 하므로

$${}_3C_3 + {}_3C_3 + {}_3C_1 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 20(\text{가지}) \text{이다.}$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{42}{10C_3} - \frac{20}{10C_3} = \frac{11}{60}$$

29 | 네 개의 수의 합이 11이 되는 경우는

(1, 1, 3, 6), (1, 1, 4, 5), (1, 2, 2, 6),

(1, 2, 3, 5), (1, 2, 4, 4), (1, 3, 3, 4),

(2, 2, 2, 5), (2, 2, 3, 4), (2, 3, 3, 3)

의 9가지가 있다.

이 중에서 (1, 2, 3, 5)는 서로 다른 네 개의 수이
므로 $4! = 24$,

(2, 2, 2, 5), (2, 3, 3, 3)은 세 수가 같으므로

$$\frac{4!}{3!} = 4,$$

나머지 여섯 경우는 두 수가 같으므로 $\frac{4!}{2!} = 12$ 의
경우가 있다.

$$\begin{aligned} \therefore P\left(\overline{X} = \frac{11}{4}\right) &= \frac{1 \times 24 + 2 \times 4 + 6 \times 12}{6^4} = \frac{13}{162} \end{aligned}$$

$$\therefore p + q = 162 + 13 = 175$$

30 | 조건 (가)에서 $n(A)=1$ 또는 $n(A)=2$ 또는 $n(A)=3$ 이고

조건 (다)에서 $n(A)=1$ 이면 $f(x)=x$ 인 경우가 생기므로 $n(A)=2$ 또는 $n(A)=3$ 이다.

$A \supset B$ 이므로 조건 (나)에서 $n(A)=n(B)$ 이라면 $A=B$

(i) $n(A)=2$ 인 경우

$A=B=\{1, 2\}$ 라 하면

$f(1)=2, f(2)=1$ 이어야 하고

$f(3), f(4), f(5)$ 의 함숫값은 1 또는 2이어야 한다. 또, $n(A)=2$ 인 A 를 결정하는 방법은 ${}_5C_2$ 이므로 $n(A)=2$ 인 경우의 수는

$${}_5C_2 \times 2^3 = 80$$

(ii) $n(A)=3$ 인 경우

$A=B=\{1, 2, 3\}$ 이라 하면

$f(1)=2$ 라 하면 $f(3)=1, f(2)=3$ 이어야 하고 $f(1)=3$ 이라 하면

$f(2)=1, f(3)=2$ 이어야 한다.

이때 $f(4), f(5)$ 의 함숫값은 1 또는 2 또는 3이고 $n(A)=3$ 인 A 를 결정하는 방법은

${}_5C_3$ 이므로 $n(A)=3$ 인 경우의 수는

$${}_5C_3 \times 2 \times 3^2 = 180$$

따라서 구하는 함수 f 의 개수는

$$80 + 180 = 260$$

선택(미적분) 해설

$$\begin{aligned} 23 \mid \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 2^x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x(2^x - 1)}{x} \\ &= 1 \times \ln 2 \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24 \mid \int_0^\pi x \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx \\ &= \int_0^\pi x \sin x dx \\ &= \int_0^\pi x(-\cos x)' dx \\ &= [-x \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x) dx \\ &= \pi + [\sin x]_0^\pi \\ &= \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25 \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 2}{2} = 6 \text{에서 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 10 \text{이다.} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n + 1}{a_n + 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + \frac{1}{n}}{\frac{a_n}{n} + 2} \\ = \frac{10 + 0}{0 + 2} = 5 \end{aligned}$$

26 | 부피는

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{kx}{2x^2 + 1} dx &= \int_1^2 \left\{ \frac{k}{4} \times \frac{(2x^2 + 1)'}{2x^2 + 1} \right\} dx \\ &= \left[\frac{k}{4} \ln(2x^2 + 1) \right]_1^2 \\ &= \frac{k}{4} (\ln 9 - \ln 3) \\ &= \frac{k}{4} \ln 3 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{k}{4} \ln 3 = 2 \ln 3$ 에서 $k=8$ 이다.

27 | $\overline{B_1D_1} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$ 이므로

$$\overline{D_1E_1} = \overline{C_1E_1} = \frac{\sqrt{17}}{2}, \quad \overline{A_2E_1} = \overline{B_2E_1} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \triangle A_2D_1E_1 = \triangle B_2C_1E_1$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{17}}{2} \right)^2 = \frac{17}{8}$$

$$\angle C_1A_1B_1 = \alpha \text{라 하면 } \angle D_1E_1A_1 = 2\alpha \text{이고,}$$

$$\angle A_2E_1D_1 = \angle B_2E_1C_1 = \frac{\pi}{4} \text{이므로}$$

$$\angle A_2E_1B_2 = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}, \quad \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{17}} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) &= \sin 2\alpha \\ &= 2\sin \alpha \cos \alpha \\ &= \frac{8}{17} \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{A_2B_2}^2$$

$$= \frac{17}{2} + \frac{17}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}} \times \frac{8}{17}$$

$$= 9$$

$$\therefore \overline{A_2B_2} = 3$$

그림 R_1 의 색칠된 도형의 넓이는 $2 \times \frac{17}{8} = \frac{17}{4}$ 이

고, 그림 R_1 의 색칠된 도형과 그림 R_2 에 추가되는

색칠된 도형의 넓음비는 $\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{3}{4}$ 이므로 등비급

수의 공비는 $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ 이다.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{17}{4}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{68}{7}$$

28 | \overline{PA} 의 중점을 M이라 하면 $\angle AOM = \frac{\theta}{2}$ 이

로 $\overline{AM} = \sin \frac{\theta}{2}$ 이다.

$$\therefore \overline{PA} = \overline{PC} = \overline{PD} = 2\sin \frac{\theta}{2}$$

삼각형 OAP와 삼각형 PAD는 닮음이므로

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{PA}}, \quad \overline{DA} = 4\sin^2 \frac{\theta}{2} \text{이다.}$$

$$\begin{aligned} \therefore g(\theta) &= \frac{1}{2} \times \left(4\sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^2 \times \sin \theta \\ &= 8\sin^4 \frac{\theta}{2} \sin \theta \end{aligned}$$

$$\angle OPD = \angle OPA - \angle DPA$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) - \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\theta$$

$$\text{이고, } \angle OPC = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \text{이므로}$$

$$\angle DPC = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\theta \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = \pi - 2\theta$$

$$\begin{aligned} \therefore f(\theta) &= \frac{1}{2} \times \left(2\sin \frac{\theta}{2} \right)^2 \times \sin(\pi - 2\theta) \\ &= 2\sin^2 \frac{\theta}{2} \sin 2\theta \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{g(\theta)}{\theta^2 \times f(\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{8\sin^4 \frac{\theta}{2} \sin \theta}{2\theta^2 \times \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin 2\theta}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(4 \times \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\theta^2} \times \frac{\sin \theta}{\sin 2\theta} \right)$$

$$= 4 \times \left(\frac{1}{2} \right)^2 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

29 | 점 $(t, 0)$ 과 점 $(x, f(x))$ 사이의 거리가 최소일

때, 두 점 $(t, 0)$, $(x, f(x))$ 를 지나는 직선과 점 $(x, f(x))$ 에서의 곡선 $y = f(x)$ 의 접선은 서로 수직이다. 이때 $x = s$ 이므로

$$\frac{f(s)}{s-t} \times f'(s) = -1, \quad t = s + f(s) \times f'(s) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$h(1) = a \text{로 놓으면 } g(a) = 1 \text{이고, } h'(1) = \frac{1}{g'(a)}$$

이다.

$t = a$ 일 때, $s = b$ 라 하면 $g(a) = f(b) = 1$ 에서

$$e^b + b = 1, \quad b = 0$$

㉠에서 $a = 0 + f(0) \times f'(0) = 2$ 이다.

㉠의 양변을 s 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= 1 + f'(s) \times f'(s) + f(s) \times f''(s) \\ &= 1 + (e^s + 1)^2 + (e^s + s)e^s \end{aligned}$$

이므로 $t = 2, s = 0$ 일 때 $\frac{dt}{ds} = 6$ 이다.

$g(t) = f(s)$ 의 양변을 s 에 대하여 미분하면

$$g'(t) \times \frac{dt}{ds} = f'(s) \text{이므로}$$

$$g'(2) \times 6 = f'(0), \quad g'(2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore h'(1) = \frac{1}{g'(2)} = 3$$

30 | $x > 0$ 일 때 $g(x) \geq 0$ 이므로 $x > -3$ 일 때

$g(x+3) \geq 0$ 이다.

따라서 조건 (나)에서 $x > -3$ 일 때 $f'(x) \geq 0$ 이다.

또, 조건 (가)에서 $f(x) \geq f(-3)$ 이므로

함수 $f(x)$ 는 $x = -3$ 에서 극소이면서 최소이다.

조건 (나)에 $x = 0$ 을 대입하면 $f'(0) = 0$ 이므로

$$f'(x) = 4x^2(x+3) = 4x^3 + 12x^2,$$

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_4^5 g(x) dx &= \int_1^2 g(x+3) dx \\ &= \int_1^2 \frac{f'(x)}{\{f(x) - f(0)\}^2} dx \end{aligned}$$

$f(x) - f(0) = t$ 로 치환하면

$$f(1) - f(0) = 5, \quad f(2) - f(0) = 48,$$

$$f'(x) dx = dt \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{f'(x)}{\{f(x) - f(0)\}^2} dx &= \int_5^{48} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_5^{48} \\ &= -\frac{1}{48} + \frac{1}{5} \\ &= \frac{48-5}{240} = \frac{43}{240} \end{aligned}$$

$$\therefore p + q = 240 + 43 = 283$$

선택(기하) 해설

23 | 두 점 A, B의 중점은

$$\left(\frac{a-5}{2}, \frac{1+b}{2}, \frac{-1+3}{2} \right) = (8, 3, 1) \text{이므로}$$

$$a = 21, \quad b = 5$$

$$\therefore a + b = 26$$

24 | 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ 위의 점 $(2a, \sqrt{3})$ 에서의

접선의 방정식은 $\frac{2x}{a} - \sqrt{3}y = 1$ 이므로 기울기는

$$\frac{2}{\sqrt{3}a} \text{이다.}$$

$$\therefore \frac{2}{\sqrt{3}a} \times (-\sqrt{3}) = -1 \text{이므로 } a = 2$$

$$\begin{aligned} \text{25} \quad \overline{FF'}^2 &= \overline{AF'}^2 - \overline{AF}^2 \\ &= 16 \end{aligned}$$

$$\text{또, } a^2 - 5 = \overline{OF}^2 = 4 \text{에서 } a^2 = 9$$

$$\therefore a = 3$$

따라서 삼각형 PF'F의 둘레의 길이는

$$\overline{F'F} + \overline{FP} + \overline{PF'} = 4 + 2a = 10$$

26 | $\overrightarrow{OP} = (x, y)$ 라 하면

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (x-3, y) \text{이므로}$$

$$(x-3, y) \cdot (x-3, y) = 5$$

에서 점 P는 원 $(x-3)^2 + y^2 = 5$ 위의 점이다.

원과 직선 $y = \frac{1}{2}x + k$ 가 접하면 되므로 원의 중

심 (3, 0)과 직선 $x - 2y + 2k = 0$ 사이의 거리가

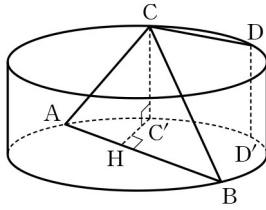
반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 와 같으면 된다.

$$\frac{|3+2k|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$2k+3 = \pm 5$$

$$\therefore k = 1 \quad (\because k > 0)$$

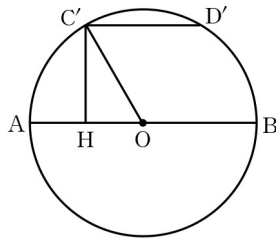
27 |



두 점 C, D에서 다른 밑면에 내린 수선의 발을 각각 C', D'이라 하고 점 C'에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ 이다. 삼각형 ABC의 넓이는 16이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CH} = 16 \text{에서 } \overline{CH} = 4$$

$$\overline{C'H} = \sqrt{\overline{CH}^2 - \overline{CC'}^2} = \sqrt{7}$$



원의 중심을 O라 하면

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OC'}^2 - \overline{C'H}^2} = 3$$

$$\therefore \overline{CD} = \overline{C'D'} = 2\overline{OH} = 6$$

28 | 두 포물선 C_1 , C_2 의 교점 A의 x 좌표를 x_1 이라

하자. 두 포물선의 준선은 각각 $x = -1$,

$x = -p + f(p)$ 이므로

$$\overline{AF_1} = x_1 + 1, \overline{AF_2} = x_1 + p - f(p)$$

$$\overline{AF_1} = \overline{AF_2} \text{에서}$$

$p^2 + (2a-1)p + a^2 + 1 = 0$ 이고, 이 식을 만족시키는 p 가 오직 하나이기 위해서는 판별식이 0이어야 하므로

$$D = (2a-1)^2 - 4(a^2 + 1) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{3}{4}$$

29 | 점 $(\sqrt{5}, 0, 0)$ 을 지나고 zx 평면에 수직인 평면과 구 S_1 의 접점은 zx 평면 위에 존재하므로 zx 평면에 의한 단면을 보자.

구 S_1 의 단면 C_1 은 $x^2 + (z-2)^2 = 4$,

구 S_2 의 단면 C_2 는 $x^2 + (z+7)^2 = 49$

점 $(\sqrt{5}, 0, 0)$ 을 지나는 구 S_1 의 접평면과 zx 평면의 교선 l 은 $m(x - \sqrt{5}) + z = 0$ 이라 할 수 있다.

원 C_1 과 직선 l 은 접하므로

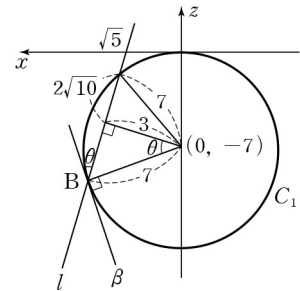
$$\frac{|-\sqrt{5}m + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2$$

$$m = 4\sqrt{5}$$

따라서 직선 l 의 방정식은 $4\sqrt{5}x + z - 20 = 0$ 이

므로 직선 l 과 원 C_2 의 중심 사이의 거리는

$$\frac{27}{\sqrt{81}} = 3 \text{이다.}$$



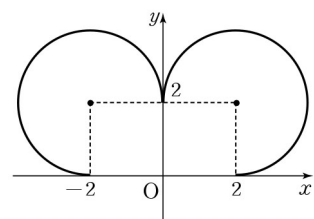
위 그림에서 단면인 원 C 의 반지름의 길이는 $2\sqrt{10}$ 이고 평면 α 와 평면 β 가 이루는 각 θ 에 대

하여 $\cos \theta = \frac{3}{7}$ 이므로 원 C 의 평면 β 로의 정사영의 넓이는

$$\pi \times (2\sqrt{10})^2 \times \frac{3}{7} = \frac{120}{7}\pi$$

따라서 $p + q = 7 + 120 = 127$ 이다.

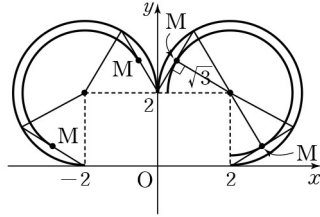
30 | 점 X는 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 또는 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 위에 있으면서 원점으로부터의 거리가 2 이상인 점이므로 자취는 다음과 같다.



조건 (가)에서 두 점 P, Q의 x 좌표는 부호가 같아야 하고 조건 (나)에서 삼각형 APQ 또는 삼각형 BPQ는 정삼각형이다.

따라서 $\overrightarrow{OY} = 2 \times \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}}{2} = \overrightarrow{2OM}$ 이라 하면

점 M의 자취는 다음과 같다.



따라서 점 M은 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ 이고 중심각의 크기가 $\frac{7}{6}\pi$ 인 2개의 부채꼴 위의 점이고

$\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{2OM}$ 이므로 점 Y의 집합이 나타내는 도형의 길이는

$$\sqrt{3} \times \frac{7}{6}\pi \times 2 \times 2 = \frac{14}{3}\sqrt{3}\pi$$

따라서 $p+q=3+14=17$ 이다.

[해설 동영상 보기]

이번 시험의 해설 동영상을 바로 확인 할 수 있습니다.

