2018학년도 대학수학능력시험 EBS 모의평가 문제지

수학 영역(나형) 정답과 풀이

제 1 회

정 답

1	③	2	⑤	3	②	4	④	5	③
6	③	7	⑤	8	④	9	①	10	②
11	④	12	②	13	②	14	③	15	⑤
16	②	17	①	18	①	19	②	20	②
21	⑤	22	15	23	14	24	9	25	247
26	144	27	729	28	16	29	13	30	116

풀 이

1. 지수와 로그 정답 ③

[풀이] $2^{\frac{1}{2}}\times\sqrt[6]{8}=2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{3}{6}}$

$=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$

$=2$

2. 집합과 명제 정답 ⑤

[풀이] $(A-B)\cup B=A\cup B$

$=\{1,\ 2,\ 3\}\cup\{2,\ 4,\ 6\}$

$=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$

이므로 모든 원소의 합은

$1+2+3+4+6=16$

3. 지수와 로그 정답 ②

[풀이] $\log_2 12+\log_{\frac{1}{2}} 3=\log_2 12-\log_2 3$

$=\log_2 \frac{12}{3}$

$=\log_2 2^2$

$=2$

4. 확률 정답 ④

[풀이] $\mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{3}$에서

$1-\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$

따라서

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$

$=\frac{5}{6}$

5. 수열 정답 ③

[풀이] 세 수 2^{-2}, a, 36이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a^2=2^{-2}\times36=2^{-2}\times2^2\times3^2=3^2$

이때 a가 양수이므로

$a=3$

6. 함수 정답 ③

[풀이] $f(1)=3$

$(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(2)=1$

따라서

$f(1)+(f\circ f)(3)=3+1=4$

7. 집합과 명제 정답 ⑤

[풀이] 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\,|\,|x|<a\}$

$=\{x\,|\,-a<x<a\}$

$Q=\{x\,|\,x^2-5x<6\}$

$=\{x\,|\,x^2-5x-6<0\}$

$=\{x\,|\,(x+1)(x-6)<0\}$

$=\{x\,|\,-1<x<6\}$

이때 p가 q이기 위한 필요조건이려면 $Q\subset P$이어야 한다.

그러므로 $a\geq6$이어야 한다.

따라서 a의 최솟값은 6이다.

8. 함수의 극한과 연속 정답 ④

[풀이] $\lim_{x\to-1-}f(x)=2$이고 $\lim_{x\to1+}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to-1-}\{f(x)+1\}+\lim_{x\to1+}\{f(x)\}^2$

$=\lim_{x\to-1-}f(x)+1+\lim_{x\to1+}f(x)\times\lim_{x\to1+}f(x)$

$=2+1+1^2$

$=4$

9. 다항함수의 적분법 정답 ①

[풀이] $\int_0^2 3x(x+2)dx=\int_0^2(3x^2+6x)dx$

$=\Big[x^3+3x^2\Big]_0^2$

$=8+12=20$

10. 함수 정답 ②

[풀이] $y=\frac{2x+3}{x-1}+a=\frac{2(x-1)+5}{x-1}+a$

$=\frac{5}{x-1}+a+2$

이 함수의 그래프와 역함수의 그래프가 일치하므로 이 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 두 점근선의 교점 $(1,\ a+2)$는 직선 $y=x$ 위에 있어야 하므로

$a+2=1$

따라서 $a=-1$

11. 확률 정답 ④

[풀이] 주사위를 한 번 던졌을 때, 2 이하의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

12. 다항함수의 적분법 정답 ②

[풀이] 점 P가 $t=0$에서 $t=2$까지 움직인 거리는

$\int_0^2|v(t)|dt=\int_0^2|3t^2-3|dt$

$=\int_0^1(-3t^2+3)dt+\int_1^2(3t^2-3)dt$

$=\Big[-t^3+3t\Big]_0^1+\Big[t^3-3t\Big]_1^2$

$=2+4$

$=6$

13. 확률 정답 ②

[풀이] 방과후학교에 참여를 희망하는 학생은 남학생이 60명, 여학생이 40명이므로 방과후학교에 참여를 희망하지 않는 남학생 수를 a, 여학생 수를 b라 하면 다음 표와 같다.

(단위 : 명)

	남학생	여학생	합계
참여 희망	60	40	100
참여 희망 안함	a	b	200
합계	$a+60$	$b+40$	300

위의 표에서

$a+b=200$ …… ㉠

이 학교의 학생 중 임의로 뽑은 1명이 남학생일 때, 이 학생이 방과후학교에 참여를 희망하는 학생일 확률 p는

$p=\frac{60}{a+60}$

또, 이 학교의 학생 중 임의로 뽑은 1명이 여학생일 때, 이 학생이 방과후학교에 참여를 희망하는 학생일 확률 q는

$q=\frac{40}{b+40}$

이때 $p=q$이므로

$\frac{60}{a+60}=\frac{40}{b+40}$

$3b+120=2a+120$, $3b=2a$

$a=\frac{3}{2}b$이므로 ㉠에 대입하면

$\frac{5}{2}b=200$, $b=80$

따라서 전체 여학생의 수는

$b+40=80+40=120$

14. 함수의 극한과 연속 정답 ③

[풀이] 함수 $f(x)$는 $(-\infty,\ 1)$, $(1,\ \infty)$에서 연속이고 함수 $g(x)$는 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이므로 연속함수의 성질에 의해 함수 $f(x)g(x)$는 $(-\infty,\ 1)$, $(1,\ \infty)$에서 연속이다.

그러므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서만 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)\times\lim_{x\to1-}g(x)=2(3-a)$

$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}f(x)\times\lim_{x\to1+}g(x)=3(3-a)$

$f(1)g(1)=2(3-a)$

따라서 $2(3-a)=3(3-a)$이므로

$a=3$

15. 수열 정답 ⑤

[풀이] $a_2+a_4=6$에서 $\frac{a_2+a_4}{2}=3$

등차중항을 이용하면 $a_3=3$

한편, 등차수열의 공차를 d라 하면 첫째항부터 제 5항까지의 합은

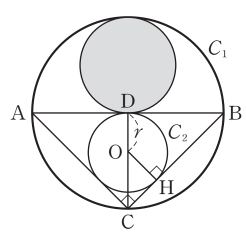
$$\frac{5(a_1+a_5)}{2}=\frac{5\{a_1+(a_1+4d)\}}{2}$$
$$=\frac{5\times2\times(a_1+2d)}{2}$$
$$=\frac{5\times2\times a_3}{2}$$
$$=\frac{5\times2\times3}{2}$$
$$=15$$

16. 통계 정답 ②

[풀이] 어느 지역의 고등학교 학생이 한 달 동안 인터넷을 이용하는 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따른다.
이때 크기가 49인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{2}{7}\right)^2\right)$을 따른다.
그러므로 표본평균 70을 이용하여 신뢰도 95%로 추정한 신뢰구간은
$$70-1.96\times\frac{2}{7}\le m\le70+1.96\times\frac{2}{7}$$
$$70-2\times0.28\le m\le70+2\times0.28$$
이때 $a=70-2\times0.28,\ b=70+2\times0.28$이므로
$$\frac{a+b}{b-a}=\frac{2\times70}{2\times2\times0.28}$$
$$=125$$

17. 수열의 극한 정답 ①

[풀이] 그림 R_1에서 원 C_1의 지름의 길이가 4이므로 색칠된 원의 지름의 길이는 2이다.
그러므로 색칠된 원의 넓이 S_1은
$S_1=1^2\times\pi=\pi$
그림 R_2에서 새로 그려진 이등변삼각형의 한 꼭짓점을 C라 하면 선분 AB가 지름이므로
$\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$
또, 새로 그려진 원 C_2의 중심을 O라 하면 삼각형 ACB가 이등변삼각형이므로
$\angle\mathrm{OCB}=45^\circ$



점 O에서 선분 CB에 내린 수선의 발을 H, 원 C_2의 반지름의 길이를 r라 하면 삼각형 OCH에서
$\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{2}r$
한편, 선분 OC의 연장선이 AB와 만나는 점을 D라 하면 D는 선분 AB를 지름으로 하는 원 C_1의 중심이므로
$\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{CO}}+\overline{\mathrm{OD}}$
$2=\sqrt{2}r+r$
그러므로
$$r=\frac{2}{\sqrt{2}+1}=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=2(\sqrt{2}-1)$$
그러므로 그림 R_2에서 새로 색칠된 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}-1$이다.
이때 색칠된 원의 반지름의 길이의 비는 $1:(\sqrt{2}-1)$이므로 넓이의 비는 $1:(3-2\sqrt{2})$이다.
따라서
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\pi}{1-(3-2\sqrt{2})}$$
$$=\frac{\pi}{2(\sqrt{2}-1)}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}\pi$$

18. 함수의 극한과 연속 정답 ①

[풀이] $x\longrightarrow2$일 때, $f(x)$의 극한값에 따라 다음 두 가지로 나눌 수 있다.
(i) $\lim_{x\to2}f(x)\ne0$일 때,
주어진 극한값은
$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)+8(\sqrt{x+2}-2)}{f(x)+(x-2)}=\frac{f(2)}{f(2)}=1$$
그러므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $\lim_{x\to2}f(x)=0$일 때,
함수 $f(x)$는 이차함수이므로 $x=2$에서 연속이다.
즉, $f(2)=0$이어야 하므로
$f(x)=(x-2)(x-a)$ (a는 상수)이다.
이 식을 주어진 식에 대입하면
$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)+8(\sqrt{x+2}-2)}{f(x)+(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-a)+\frac{8(x-2)}{\sqrt{x+2}+2}}{(x-2)(x-a)+(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-a)+\frac{8}{\sqrt{x+2}+2}}{x-a+1}$$
$$=\frac{4-a}{3-a}$$
$$=\frac{1}{2}$$
$8-2a=3-a,\ a=5$
따라서 $f(x)=(x-2)(x-5)$이므로
$f(7)=10$

19. 통계 정답 ②

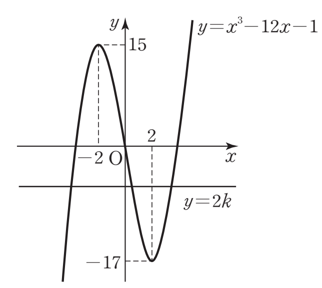
[풀이] 공에 적혀 있는 수 중 큰 수가 $k\,(2\le k\le n)$일 확률은
$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{k-1}{{}_n\mathrm{C}_2}=\frac{\boxed{2(k-1)}}{n(n-1)}$$
그러므로
$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=2}^{n}\left\{k\times\frac{\boxed{2(k-1)}}{n(n-1)}\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{k\times\frac{\boxed{2(k-1)}}{n(n-1)}\right\}$$
$$=\frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)$$
$$=\frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k\right)$$
$$=\frac{2}{n(n-1)}\times\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$
$$=\frac{2}{n(n-1)}\times\frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$
$$=\frac{2}{3}(\boxed{n+1})$$
이다. 또,
$$\mathrm{E}(X^2)=\sum_{k=2}^{n}\left\{k^2\times\frac{\boxed{2(k-1)}}{n(n-1)}\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{k^2\times\frac{\boxed{2(k-1)}}{n(n-1)}\right\}$$
$$=\frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(k^3-k^2)$$
$$=\frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{k=1}^{n}k^3-\sum_{k=1}^{n}k^2\right)$$
$$=\frac{2}{n(n-1)}\times\left[\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$
$$=\frac{2}{n(n-1)}\times\frac{n(n-1)(n+1)(3n+2)}{12}$$
$$=\frac{(\boxed{n+1})(3n+2)}{6}$$
이다. 따라서
$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=\frac{(n+1)(3n+2)}{6}-\left\{\frac{2}{3}(n+1)\right\}^2$$
$$=\frac{(n+1)(\boxed{n-2})}{18}$$
따라서 $f(k)=2(k-1),\ g(n)=n+1,\ h(n)=n-2$이므로
$f(3)+g(4)+h(5)=4+5+3=12$

20. 다항함수의 미분법 정답 ②

[풀이] $f'(x)=2x+1$이므로
$y=2x+1$에서 $x=\frac{y-1}{2}$
이때 x와 y를 바꾸면 $y=\frac{x-1}{2}$이므로
$g(x)=\frac{x-1}{2}$
이때 $f(x)g(x)=6x+k$에 대입하면
$(x^2+x+1)\left(\frac{x-1}{2}\right)=6x+k$
$x^3-1=12x+2k,\ x^3-12x-1=2k$
이 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=x^3-12x-1,\ y=2k$의 그래프의 교점의 개수와 같다.
한편, $y=x^3-12x-1$에서
$y'=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$
이므로 $y'=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$이다.
이 함수의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	15	↘	-17	↗

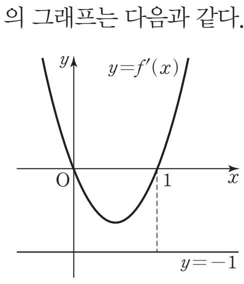
그러므로 두 함수 $y=x^3-12x-1,\ y=2k$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나도록 그리면 다음과 같다.



이때
$$-17<2k<15,\ -\frac{17}{2}<k<\frac{15}{2}$$
따라서 정수 k의 값은 $-8,\ -7,\ \cdots,\ 7$이므로 그 개수는 16이다.

21. 다항함수의 적분법 정답 ⑤

[풀이] ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지므로 조건 (나)에서 $t=0$을 대입하면
$$\int_0^0|f'(x)+1|dx=f(0)$$
$f(0)=0$ (참)
ㄴ. 조건 (나)에서 양변을 t에 대하여 미분하면
$|f'(t)+1|=f'(t)+1$
그러므로
$f'(t)+1\ge0,\ f'(t)\ge-1$
이때 조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고, $x=1$에서 극솟값을 가지므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때 네 점 $(0,\ 0),\ (0,\ -1),\ (1,\ 0),\ (1,\ -1)$을 네 꼭짓점으로 하는 정사각형의 넓이는 1이고

18만점수학(나)해설1, 2-ok.indd 2 2017-07-12 오전 10:05:54

$\int_0^1 |f'(x)|dx$는 곡선 $y=f'(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이이므로

$\int_0^1 |f'(x)|dx<1$ (참)

ㄷ. 조건 (가)에서 $x=0$에서 극댓값을 갖고, $x=1$에서 극솟값을 가지므로

$f'(x)=ax(x-1)$ $(a>0)$

이때 ㄴ에서 $f'(x)\ge -1$이므로 $f'\left(\frac{1}{2}\right)\ge -1$이어야 한다. 그러므로

$-\frac{1}{4}a\ge -1$, $a\le 4$

한편,

$f(x)=\int f'(x)dx=\int ax(x-1)dx$

$=\frac{a}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2+C$ (C는 적분상수)

이때 ㄱ에서 $f(0)=0$이므로 $C=0$

즉, $f(x)=\frac{a}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2$이고 $0<a\le 4$이다.

따라서 극솟값은

$f(1)=\frac{a}{3}-\frac{a}{2}=-\frac{1}{6}a$

이때 $0<a\le 4$에서 $-\frac{2}{3}\le -\frac{a}{6}<0$

그러므로 극솟값의 최솟값은 $-\frac{2}{3}$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

22. 순열과 조합 정답 15

[풀이] ${}_3\Pi_2+{}_3P_2=3^2+3\times 2=9+6=15$

23. 다항함수의 미분법 정답 14

[풀이] $f(x)=(x+3)(x+3)+4x+5$에서

$f'(x)=(x+3)+(x+3)+4=2x+10$이므로

$f'(2)=2\times 2+10=14$

24. 집합과 명제 정답 9

[풀이] $n(A^C\cup B^C)=8$에서

$n((A\cap B)^C)=8$

$n(U)-n(A\cap B)=8$

$n(U)=10$이므로 $n(A\cap B)=2$

따라서

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=5+6-2=9$

25. 수열 정답 247

[풀이] $\sum_{k=1}^{7}\frac{4^k-2^k}{2^k}=\sum_{k=1}^{7}(2^k-1)=\sum_{k=1}^{7}2^k-7$

$=\frac{2(2^7-1)}{2-1}-7$

$=254-7$

$=247$

26. 다항함수의 미분법 정답 144

[풀이] $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$이다.

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 2를 가지므로

$a=-1$

이때 직선 $y=2$와 곡선 $y=x^3-3x$가 만나는 점의 x좌표는

$x^3-3x=2$, $x^3-3x-2=0$

$(x+1)^2(x-2)=0$

에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

그러므로 $A(2, 2)$이다.

따라서 접선의 방정식은

$y=9(x-2)+2=9x-16$

이므로 $m=9$, $n=-16$

따라서 $a\times m\times n=(-1)\times 9\times(-16)=144$

27. 순열과 조합 정답 729

[풀이] $a\times b\times c=4$가 되는 수는 다음과 같다.

(i) 1, 1, 4일 때,

1, 1, 4를 나열하는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!1!}=3$

이 각각에 대하여 a, b, c의 값에 따른 a_i, b_i, c_i를 결정하는 경우의 수는

${}_3H_1\times{}_3H_1\times{}_3H_4={}_3C_1\times{}_3C_1\times{}_6C_4=9\times{}_6C_2$

$=9\times 15=135$

그러므로 이 경우의 수는

$3\times 135=405$

(ii) 1, 2, 2일 때,

1, 2, 2를 나열하는 경우의 수는 $\frac{3!}{1!2!}=3$

이 각각에 대하여 a, b, c의 값에 따른 a_i, b_i, c_i를 결정하는 경우의 수는

${}_3H_1\times{}_3H_2\times{}_3H_2={}_3C_1\times{}_4C_2\times{}_4C_2$

$=3\times 6\times 6=108$

그러므로 이 경우의 수는

$3\times 108=324$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$405+324=729$

28. 수열의 극한 정답 16

[풀이] 함수 $y=x^2$에서 $y'=2x$이므로

점 $P_n(2^n, 2^{2n})$에서의 접선의 방정식은

$y-2^{2n}=2\cdot 2^n(x-2^n)$

점 Q_n의 x좌표는 $y=0$에서

$-2^{2n}=2\cdot 2^n x-2\cdot 2^{2n}$

$-2^n=2x-2\cdot 2^n$, $x=2^{n-1}$

따라서 점 Q_n의 좌표는 $(2^{n-1}, 0)$

직선 $x=2^n$이 x축과 만나는 점을 H_n이라 하면

$\overline{H_nQ_n}=2^n-2^{n-1}=\frac{2^n}{2}$

또, $\overline{P_nH_n}=2^{2n}$이므로

$l_n^2=\overline{P_nH_n}^2+\overline{H_nQ_n}^2=2^{4n}+\frac{2^{2n}}{4}$

그러므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(l_{n+1})^2}{(l_n)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{4(n+1)}+\frac{2^{2(n+1)}}{4}}{2^{4n}+\frac{2^{2n}}{4}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^4+\frac{1}{2^{2n}}}{1+\frac{1}{4\cdot 2^{2n}}}$$

$=16$

29. 통계 정답 13

[풀이] 확률변수 X가 이항분포 $B\left(72, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로 확률변수 X는 정규분포 $N(24, 4^2)$을 따른다.

그러므로 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여

$P(20\le X\le 24)$

$=P\left(\frac{20-24}{4}\le\frac{X-24}{4}\le\frac{24-24}{4}\right)$

$=P(-1\le Z\le 0)$ …… ㉠

또, 확률변수 Y는 정규분포 $N(10, 9)$를 따르므로

$P(10\le Y\le a)$

$=P\left(\frac{10-10}{3}\le\frac{Y-10}{3}\le\frac{a-10}{3}\right)$

$=P\left(0\le Z\le\frac{a-10}{3}\right)$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$P(-1\le Z\le 0)=P(0\le Z\le 1)$

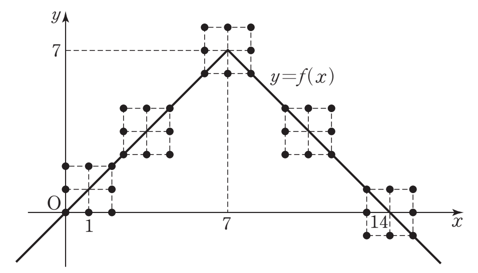
$=P\left(0\le Z\le\frac{a-10}{3}\right)$

에서 $\frac{a-10}{3}=1$

따라서 $a=13$

30. 수열 정답 116

[풀이] 함수 $y=f(x)$의 그래프와 한 변의 길이가 2인 정사각형을 나타내면 그림과 같다.



(i) $1\le n\le 6$일 때,

정사각형의 변 위의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점 중 함수 $y=f(x)$의 그래프의 윗부분에 있는 세 점과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 아랫부분에 있는 세 점은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

이때 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 두 점의 x좌표와 y좌표의 합은 같다.

따라서 $A_n-B_n=0$

(ii) $n=7$일 때,

정사각형의 변 위의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점 중 함수 $y=f(x)$의 그래프의 윗부분에 있는 점은 $(6, 7)$, $(6, 8)$, $(7, 8)$, $(8, 7)$, $(8, 8)$이므로

$A_7=13+14+15+15+16=73$

또, 정사각형의 변 위의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점 중 함수 $y=f(x)$의 그래프의 아랫부분에 있는 점은 $(7, 6)$이므로

$B_7=13$

그러므로

$A_7-B_7=73-13=60$

(iii) $8\le n\le 14$일 때,

대각선의 교점이 $(n, 14-n)$이다.

이때 정사각형의 변 위의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점 중 함수 $y=f(x)$의 그래프의 윗부분에 있는 점은 $(n, -n+15)$, $(n+1, -n+14)$, $(n+1, -n+15)$이므로

$A_n=n+(-n+15)+(n+1)+(-n+14)$
$+(n+1)+(-n+15)$
$=46$

또, 정사각형의 변 위의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점 중 함수 $y=f(x)$의 그래프의 아랫부분에 있는 점은 $(n-1, -n+14)$, $(n-1, -n+13)$, $(n, -n+13)$이므로

$B_n=(n-1)+(-n+14)+(n-1)+$
$(-n+13)+n+(-n+13)$
$=38$

그러므로

$A_n-B_n=46-38=8$

(i), (ii), (iii)에서

$\sum_{n=1}^{14}(A_n-B_n)$

$=\sum_{n=1}^{6}(A_n-B_n)+(A_7-B_7)+\sum_{n=8}^{14}(A_n-B_n)$

$=0+60+8\times 7=116$

18만점수학(나)해설1, 2-ok.indd 3 2017-07-12 오전 10:05:55

제 2 회

정 답

1	④	2	②	3	③	4	⑤	5	①
6	④	7	③	8	⑤	9	⑤	10	①
11	①	12	②	13	④	14	③	15	②
16	②	17	②	18	③	19	④	20	②
21	①	22	17	23	10	24	32	25	41
26	14	27	76	28	186	29	11	30	664

풀 이

1. 지수와 로그 정답 ④

[풀이] $8^{\frac{5}{3}}\times4^{-\frac{3}{2}}=(2^3)^{\frac{5}{3}}\times(2^2)^{-\frac{3}{2}}$
$=2^5\times2^{-3}$
$=2^{5-3}$
$=2^2$
$=4$

2. 집합과 명제 정답 ②

[풀이] $A^C=U-A$
$=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}-\{1, 2, 3, 4\}$
$=\{5, 6, 7, 8\}$
$A^C\cap B=\{5, 6, 7, 8\}\cap\{2, 4, 6, 8\}$
$=\{6, 8\}$
따라서 구하는 모든 원소의 합은
$6+8=14$
[다른 풀이]
$A^C\cap B=B\cap A^C$
$=B-A$
$=\{2, 4, 6, 8\}-\{1, 2, 3, 4\}$
$=\{6, 8\}$
따라서 구하는 모든 원소의 합은
$6+8=14$

3. 지수와 로그 정답 ③

[풀이] $2\log_2\sqrt{12}-\log_2\frac{3}{2}=\log_2\left\{(\sqrt{12})^2\div\frac{3}{2}\right\}$
$=\log_2\left(12\times\frac{2}{3}\right)$
$=\log_2 8$
$=\log_2 2^3$
$=3$

4. 확률 정답 ⑤

[풀이] $\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{4}$이므로
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$
두 사건 A와 B가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$
$\mathrm{P}(B)=\frac{4}{9}$
$\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$
두 사건 A와 B가 서로 독립이면 두 사건 A와 B^C도 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cup B^C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B^C)-\mathrm{P}(A\cap B^C)$
$=\frac{3}{4}+\frac{5}{9}-\frac{3}{4}\times\frac{5}{9}$
$=\frac{27+20-15}{36}$
$=\frac{32}{36}=\frac{8}{9}$

5. 수열 정답 ①

[풀이] 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면 일반항 a_n은
$a_n=a\times2^{n-1}$
$a_2\times a_5=(a\times2)\times(a\times2^4)=162$
$a^2=\frac{81}{16}$
$a>0$이므로 $a=\frac{9}{4}$
따라서
$a_7-a_4=\frac{9}{4}\times2^6-\frac{9}{4}\times2^3$
$=144-18$
$=126$

6. 집합과 명제 정답 ④

[풀이] $P^C\subset Q$이므로 $Q^C\subset P$ …… ㉠
$R\subset P^C$이므로 $P\subset R^C$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $Q^C\subset P\subset R^C$
즉, $\sim q \Longrightarrow p$, $p\Longrightarrow\sim r$
따라서 보기에서 명제 $\sim q \longrightarrow \sim r$는 항상 참이다.
[다른 풀이] $P^C\subset Q$, $R\subset P^C$에서 $R\subset Q$
즉, $Q^C\subset R^C$
따라서 명제 $\sim q\longrightarrow\sim r$는 항상 참이다.

7. 함수 정답 ③

[풀이] $f(1)=1$, $g(1)=4$, $f^{-1}(3)=4$, $g^{-1}(4)=1$이므로
$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(1)=4$
$(f\circ g)^{-1}(3)=(g^{-1}\circ f^{-1})(3)=g^{-1}(f^{-1}(3))$
$=g^{-1}(4)=1$
따라서
$(g\circ f)(1)+(f\circ g)^{-1}(3)=4+1=5$

8. 함수의 극한과 연속 정답 ⑤

[풀이] $\lim\limits_{x\to0-}f(x)-\lim\limits_{x\to2+}\{f(x)-f(2)\}$
$=1-(-1-2)$
$=1+3=4$

9. 다항함수의 적분법 정답 ⑤

[풀이] $\int_1^2(9x^2+4x+a)dx$
$=\left[3x^3+2x^2+ax\right]_1^2$
$=(24+8+2a)-(3+2+a)$
$=a+27=a^2-5a$
$a^2-6a-27=0$, $(a+3)(a-9)=0$
$a>0$이므로 $a=9$

10. 함수 정답 ①

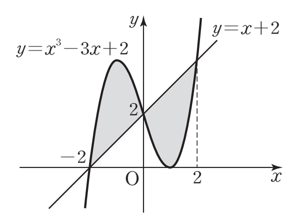
[풀이] 함수 $y=\frac{ax+ab+1}{x+b}=\frac{1}{x+b}+a$의 그래프는 두 직선 $y=x$와 $y=-x$에 대하여 대칭인 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-b$만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.
따라서 함수 $y=\frac{1}{x+b}+a$의 그래프는 두 직선 $y=x$와 $y=-x$를 x축의 방향으로 $-b$만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 두 직선
$y=(x+b)+a$, $y=-(x+b)+a$
에 대하여 각각 대칭이다.
이때 두 직선은 $y=x-3$, $y=-x+5$이므로
$a+b=-3$, $a-b=5$
두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-4$
따라서
$3a+2b=3\times1+2\times(-4)=-5$

11. 확률 정답 ①

[풀이] 서로 다른 주사위 세 개를 동시에 던질 때
(i) 5 이하의 자연수에서 중복을 허락하여 세 개가 나올 확률은 $\frac{5^3}{6^3}$
(ii) 4 이하의 자연수에서 중복을 허락하여 세 개가 나올 확률은 $\frac{4^3}{6^3}$
(i), (ii)에서 구하는 확률은
$\frac{5^3}{6^3}-\frac{4^3}{6^3}=\frac{125-64}{216}=\frac{61}{216}$

12. 다항함수의 적분법 정답 ②

[풀이]



곡선 $y=x^3-3x+2$와 직선 $y=x+2$의 교점의 x좌표는
$x^3-3x+2=x+2$
$x^3-4x=0$
$x(x+2)(x-2)=0$
$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$
$-2\le x\le0$에서 $x^3-3x+2\ge x+2$
$0\le x\le2$에서 $x^3-3x+2\le x+2$
이므로 곡선 $y=x^3-3x+2$와 직선 $y=x+2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면
$S=\int_{-2}^{0}\{(x^3-3x+2)-(x+2)\}dx$
$+\int_0^2\{(x+2)-(x^3-3x+2)\}dx$
$=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx+\int_0^2(4x-x^3)dx$
$=2\int_0^2(4x-x^3)dx$
$=2\left[2x^2-\frac{x^4}{4}\right]_0^2$
$=2\times(8-4)=8$

13. 함수의 극한과 연속 정답 ④

[풀이] $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{(x+1)(x-3)}=1$에서 $f(x)$는 x^2의 계수가 1인 이차함수이다.
$f(x)+g(x)=a(x+1)^2$ …… ㉠
$f(x)-g(x)=b(x-3)^2$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$f(x)=\frac{a(x+1)^2+b(x-3)^2}{2}$이므로 $a+b=2$
$ab=1$, $a+b=2$에서 $a=b=1$
따라서
$f(x)=\frac{(x+1)^2+(x-3)^2}{2}=x^2-2x+5$
$g(x)=(x+1)^2-f(x)$
$=x^2+2x+1-(x^2-2x+5)$
$=4x-4$

이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{\{f(x)-5\}\times g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-2x)(4x-4)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}(x-2)(4x-4)=8$$

14. 수열 　정답 ③

[풀이] 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$n=1$일 때, $a_1=a=2-9=-7$

$n=2$일 때,

$$\begin{aligned}a_1+a_3&=a+(a+2d)\\&=2a+2d\\&=-14+2d\\&=2\times2^2-9\times2=-10\end{aligned}$$

$2d=4$, $d=2$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=-7+2(n-1)=2n-9$

이므로

$$\begin{aligned}&|a_2|+|a_4|+|a_6|+|a_8|+|a_{10}|\\&=|-5|+|-1|+|3|+|7|+|11|\\&=5+1+3+7+11\\&=27\end{aligned}$$

15. 함수의 극한과 연속 　정답 ②

[풀이] 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$

$\lim_{x\to1-}(-3x+1)=\lim_{x\to1+}(x^2+ax+b)=f(1)$

$-2=1+a+b$

즉, $a+b=-3$ 　…… ㉠

또한, 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to3-}f(x)=\lim_{x\to3+}f(x)=f(3)$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+4)$이므로

$\lim_{x\to3-}(x^2+ax+b)=\lim_{x\to3+}\{-3(x-4)+1\}=f(3)$

$9+3a+b=4$

즉, $3a+b=-5$ 　…… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-1$, $b=-2$

따라서 $a^2+b^2=5$

16. 통계 　정답 ②

[풀이] 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값이 $\overline{x}$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\times\frac{200}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{200}{\sqrt{n}}$$

즉, $\alpha=\overline{x}-1.96\times\frac{200}{\sqrt{n}}$, $\beta=\overline{x}+1.96\times\frac{200}{\sqrt{n}}$

이므로

$$\beta-\alpha=2\times1.96\times\frac{200}{\sqrt{n}}=98$$

$\sqrt{n}=8$

따라서 $n=64$

17. 수열의 극한 　정답 ②

[풀이] 그림 R_1에서 사분원의 반지름의 길이는 1이므로 색칠한 부분의 넓이는

$$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

한편, 그림 R_2에서 새로 그려진 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 한 변의 길이는

$$4-2\times\overline{A_1A_2}\times\cos60^\circ=4-2\times1\times\frac{1}{2}=3$$

그러므로 그림 R_1에 있는 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 한 변의 길이와 그림 R_2에 있는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 한 변의 길이의 비는 $4:3$, 즉 $1:\frac{3}{4}$이다.

이때 그림 R_2에서 크기가 다른 두 사분원의 넓이의 비는 $1:\frac{9}{16}$이다.

따라서

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{2}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{8}{7}\pi$$

18. 확률 　정답 ③

[풀이] 학교 체육복 디자인 변경에 반대하는 여학생의 수를 a라 할 때, 학생 200명의 학교 체육복 디자인 변경 찬반 여부를 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위 : 명)

구분	남학생	여학생	합계
찬성	$2a+30$		
반대	$\frac{1}{3}a$	a	
합계	$\frac{7}{3}a+30$		

따라서 임의로 한 명을 뽑았을 때 남학생일 사건을 Y, 체육복 디자인 변경에 찬성하는 사건을 X라 하면

$$\mathrm{P}(X|Y)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(Y)}=\frac{2a+30}{\frac{7}{3}a+30}=\frac{9}{10}$$

$20a+300=21a+270$

$a=30$

이 고등학교의 전체 학생 수가 200이므로 위의 표를 완성하면 다음과 같다.

(단위 : 명)

구분	남학생	여학생	합계
찬성	90	70	160
반대	10	30	40
합계	100	100	200

따라서 조사 대상자 중 학교 체육복 디자인 변경에 찬성하는 여학생의 수는 70이다.

19. 통계 　정답 ④

[풀이] $\mathrm{E}(X)=\sum_{k=0}^{n-1}k\mathrm{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{n-1}k\frac{{}_{k+1}\mathrm{C}_1}{{}_{n+1}\mathrm{C}_2}$

$$\begin{aligned}&=\frac{2}{(n+1)n}\sum_{k=0}^{n-1}k(k+1)\\&=\frac{2}{(n+1)n}\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+k)\\&=\frac{2}{(n+1)n}\\&\quad\times\left\{\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{(n-1)n}{2}\right\}\\&=\frac{2}{(n+1)n}\times\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)\\&=\boxed{\frac{2}{3}(n-1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge m)&=\sum_{k=m}^{n-1}\mathrm{P}(X=k)=\sum_{k=m}^{n-1}\frac{{}_{k+1}\mathrm{C}_1}{{}_{n+1}\mathrm{C}_2}\\&=\frac{2}{(n+1)n}\sum_{k=m}^{n-1}{}_{k+1}\mathrm{C}_1\\&=\frac{2}{(n+1)n}\times\frac{(n-m)(m+1+n)}{2}\\&=\frac{(n-m)(m+1+n)}{\boxed{(n+1)n}}\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(X\ge m)\ge\frac{1}{2}$에서 $\frac{(n-m)(m+1+n)}{\boxed{(n+1)n}}\ge\frac{1}{2}$

$\Longleftrightarrow (n-m)(m+1+n)\ge\frac{1}{2}(n+1)n$

$\Longleftrightarrow m(m+1)\le\frac{1}{2}n(n+1)$

을 만족시키는 정수 m의 최댓값이 M_n이므로

$$M_n(M_n+1)\le\frac{1}{2}n(n+1)<(M_n+1)(M_n+2)$$

이고

$M_n{}^2<\frac{1}{2}n(n+1)<(M_n+2)^2$ 　…… ㉠

이라 할 수 있다.

㉠에서 $\sqrt{\frac{1}{2}n(n+1)}-2<M_n<\sqrt{\frac{1}{2}n(n+1)}$이고

$\mathrm{E}(X)=\boxed{\frac{2}{3}(n-1)}$이므로 2 이상의 자연수 n에 대하여

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{2}n(n+1)}-2}{\frac{2}{3}(n-1)}<\frac{M_n}{\mathrm{E}(X)}<\frac{\sqrt{\frac{1}{2}n(n+1)}}{\frac{2}{3}(n-1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{2}n(n+1)}-2}{\frac{2}{3}(n-1)}=\frac{3}{4}\sqrt{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{2}n(n+1)}}{\frac{2}{3}(n-1)}=\frac{3}{4}\sqrt{2}$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{M_n}{\mathrm{E}(X)}=\boxed{\frac{3}{4}\sqrt{2}}$

따라서 $f(n)=\frac{2}{3}(n-1)$, $g(n)=n(n+1)$,

$a=\frac{3}{4}\sqrt{2}$이므로

$$\frac{f(10)\times g(9)}{a^2}=\frac{6\times9\times10}{\frac{18}{16}}=480$$

20. 다항함수의 적분법 　정답 ②

[풀이] 두 점 P, Q의 좌표는 $\mathrm{P}(t-1,\ 0)$, $\mathrm{Q}(t,\ 0)$이다.

(i) $0\le t<1$일 때, $t-1<0\le t$이므로
두 삼각형 OAB와 삼각형 PQR가 겹쳐지는 영역의 넓이 $f(t)$는

$$f(t)=\frac{1}{2}t^2\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}t^2$$

(ii) $1\le t<2$일 때, $0\le t-1<t<2$이므로
두 삼각형 OAB와 삼각형 PQR가 겹쳐지는 영역의 넓이 $f(t)$는

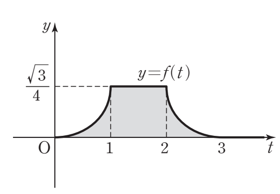
$$f(t)=\frac{1}{2}\times1^2\times\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

(iii) $2\le t<3$일 때, $t-1<2\le t$이므로
두 삼각형 OAB와 삼각형 PQR가 겹쳐지는 영역의 넓이 $f(t)$는

$$f(t)=\frac{1}{2}\{2-(t-1)\}^2\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}(t-3)^2$$

(iv) $t\ge3$일 때, $2\le t-1<t$이므로
두 삼각형 OAB와 삼각형 PQR가 겹쳐지는 영역의 넓이 $f(t)$는
$f(t)=0$

(i)~(iv)에서 함수 $y=f(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=f(t)$와 t축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned}S&=\int_0^1\frac{\sqrt{3}}{4}t^2dt+\int_1^2\frac{\sqrt{3}}{4}dt+\int_2^3\frac{\sqrt{3}}{4}(t-3)^2dt\\&=\left[\frac{\sqrt{3}}{12}t^3\right]_0^1+\left[\frac{\sqrt{3}}{4}t\right]_1^2+\left[\frac{\sqrt{3}}{12}(t-3)^3\right]_2^3\\&=\frac{\sqrt{3}}{12}+\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2-1)+\left\{0-\frac{\sqrt{3}}{12}\times(-1)^3\right\}\\&=\frac{5}{12}\sqrt{3}\end{aligned}$$

21. 다항함수의 미분법

정답 ①

[풀이] $f(x)=x^3-3ax$에서

$|f(-x)|=|-x^3+3ax|=|x^3-3ax|=|f(x)|$

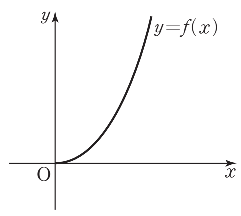
이므로 곡선 $y=|f(x)|$는 y축에 대하여 대칭이다.

따라서 $x\ge 0$에서만 생각해도 충분하다.

$f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$

(i) $a\le 0$일 때,

$f'(x)\ge 0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.



(ii) $a>0$일 때,

$f'(x)=3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})=0$에서 $x=\sqrt{a}$

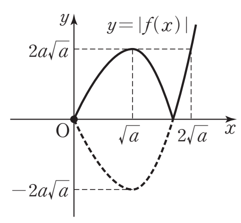
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↘	$-2a\sqrt{a}$	↗

또한,

$f(2\sqrt{a})=8a\sqrt{a}-6a\sqrt{a}=2a\sqrt{a}=-f(\sqrt{a})$

따라서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 다음과 같다.



$0\le x\le 1$에서 $|f(x)|$의 최댓값 $g(a)$를 a의 값에 따라 나타내면 다음과 같다.

① $a\le 0$일 때

(i)에서 $g(a)=f(1)=1-3a$

② $a>0$이고 $2\sqrt{a}<1$, 즉 $0<a<\frac{1}{4}$일 때

(ii)에서 $g(a)=f(1)=1-3a$

③ $\sqrt{a}\le 1\le 2\sqrt{a}$, 즉 $\frac{1}{4}\le a\le 1$일 때

(ii)에서 $g(a)=-f(\sqrt{a})=2a\sqrt{a}$

④ $1<\sqrt{a}$, 즉 $a>1$일 때

(ii)에서 $g(a)=-f(1)=-1+3a$

①~④에서 $g(a)$의 값은 $a\le\frac{1}{4}$에서 감소, $a\ge\frac{1}{4}$에서 증가한다.

따라서 $g(a)$는 $a=\frac{1}{4}$일 때 최솟값

$2\times\frac{1}{4}\times\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}$

을 갖는다.

22. 순열과 조합

정답 17

[풀이] $\frac{{}_6\mathrm{P}_4+3\times{}_4\Pi_2}{4!}=\frac{6\times5\times4\times3+3\times4^2}{4\times3\times2\times1}$

$=15+2$

$=17$

23. 다항함수의 미분법

정답 10

[풀이] $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=4$이므로

$f'(x)=(2x+a)(x+3)+(x^2+ax)$에서

$f'(1)=(2+a)\times4+1+a$

$=5a+9=4$

$a=-1$

따라서 $f(x)=(x^2-x)(x+3)$이므로

$f(2)=2\times5=10$

24. 집합과 명제

정답 32

[풀이] $A\cap(A-B)^C=A\cap(A\cap B^C)^C$

$=A\cap(A^C\cup B)$

$=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)$

$=A\cap B=\{3\}$

이므로 집합 B는 원소 3을 가지고 원소 1, 5는 갖지 않는 U의 부분집합이다.

따라서 구하는 집합 B의 개수는 집합 $\{2, 4, 6, 7, 8\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^5=32$

25. 다항함수의 미분법

정답 41

[풀이] 함수 $f(x)=x^3+ax^2+b$의 그래프 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기가 6이므로

$f'(x)=3x^2+2ax$에서

$f'(1)=3+2a=6$

$a=\frac{3}{2}$

따라서 $f'(x)=3x^2+3x$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값

$f(-1)=-1+\frac{3}{2}+b=\frac{1}{2}+b$,

$x=0$에서 극솟값 $f(0)=b$를 갖는다.

그런데 함수 $f(x)$의 극댓값이 극솟값의 2배이므로

$\frac{1}{2}+b=2b$

$b=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}$이므로

$f(3)=27+\frac{27}{2}+\frac{1}{2}=41$

26. 수열

정답 14

[풀이] $\sum_{k=1}^{10}f(3k-2)$

$=f(1)+f(4)+f(7)+\cdots+f(28)$

$=(a+b)+(4a+b)+(7a+b)+\cdots+(28a+b)$

$=a\times\frac{10\times(1+28)}{2}+10b$

$=145a+10b=155$

$29a+2b=31$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\sum_{k=1}^{20}f(3k)$

$=f(3)+f(6)+f(9)+\cdots+f(60)$

$=(3a+b)+(6a+b)+(9a+b)+\cdots+(60a+b)$

$=a\times\frac{20\times(3+60)}{2}+20b$

$=630a+20b=990$

$63a+2b=99$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2$, $b=-\frac{27}{2}$이므로

$f(x)=2x-\frac{27}{2}$

따라서

$\sum_{k=1}^{n}2f(k)=\sum_{k=1}^{n}2\left(2k-\frac{27}{2}\right)=\sum_{k=1}^{n}(4k-27)$

$=2n(n+1)-27n$

$=2n^2-25n=42$

$2n^2-25n-42=0$, $(2n+3)(n-14)=0$

따라서 $n=-\frac{3}{2}$ 또는 $n=14$이고 n이 자연수이므로

$n=14$

27. 통계

정답 76

[풀이] 정규분포 $\mathrm{N}(m, 8^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다. 모든 실수 x에 대하여

$f(20-x)=f(40+x)$이므로

$m=\frac{(20-x)+(40+x)}{2}=30$

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(30, 8^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-30}{8}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(-2\le Z\le -1)=\mathrm{P}(38\le X\le a)$에서

$\mathrm{P}(-2\le Z\le -1)=\mathrm{P}\left(\frac{38-30}{8}\le Z\le\frac{a-30}{8}\right)$

$=\mathrm{P}\left(1\le Z\le\frac{a-30}{8}\right)$

따라서 $\frac{a-30}{8}=2$, $a=46$이므로

$m+a=30+46=76$

28. 순열과 조합

정답 186

[풀이] $f(2)f(5)=36$을 만족시키는 함수 f의 개수는 다음과 같다.

(i) $f(2)=4$, $f(5)=9$인 경우

$f(1)$의 값은 3, 4 중 하나이고,

$f(3)$, $f(4)$의 값은 4, 5, 6, 7, 8, 9 중에서 중복을 허락하여 두 개를 택하여 작거나 같은 수는 $f(3)$, 나머지는 $f(4)$의 값이 되어야 하고,

$f(6)$, $f(7)$의 값은 9, 10 중에서 중복을 허락하여 두 개를 택하여 작거나 같은 수는 $f(6)$, 나머지는 $f(7)$의 값이 되어야 하므로

${}_2\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{H}_2\times{}_2\mathrm{H}_2=2\times{}_7\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2$

$=2\times\frac{7\times6}{2\times1}\times3=126$

(ii) $f(2)=6$, $f(5)=6$인 경우

$f(1)$의 값은 3, 4, 5, 6 중 하나이고,

$f(3)=f(4)=6$이고,

$f(6)$, $f(7)$의 값은 6, 7, 8, 9, 10 중에서 중복을 허락하여 두 개를 택하여 작거나 같은 수는 $f(6)$, 나머지는 $f(7)$의 값이 되어야 하므로

${}_4\mathrm{C}_1\times1\times{}_5\mathrm{H}_2=4\times{}_6\mathrm{C}_2$

$=4\times15=60$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$126+60=186$

29. 수열의 극한

정답 11

[풀이] $\mathrm{A}_n(n, 0)$, $\mathrm{B}_n(0, \sqrt{n})$이므로 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 방정식은

$\frac{x}{n}+\frac{y}{\sqrt{n}}=1$

$x+\sqrt{n}y-n=0$

점 $\mathrm{O}(0, 0)$과 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ 사이의 거리 a_n은

$a_n=\frac{|-n|}{\sqrt{1+n}}=\frac{n}{\sqrt{n+1}}$

$a_{2n}=\frac{2n}{\sqrt{2n+1}}$, $a_{2n+1}=\frac{2n+1}{\sqrt{2n+2}}$

$(a_{2n}+a_{2n+1})^2=\left(\frac{2n}{\sqrt{2n+1}}+\frac{2n+1}{\sqrt{2n+2}}\right)^2$

$=\frac{4n^2}{2n+1}+\frac{4n(2n+1)}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+2}}$

$+\frac{4n^2+4n+1}{2n+2}$

18만점수학(나)해설1, 2-ok.indd 6 2017-07-12 오전 10:05:57

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_{2n}+a_{2n+1})^2}{3n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{4n^2}{(3n+1)(2n+1)}+\frac{4n(2n+1)}{(3n+1)\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+2}}+\frac{4n^2+4n+1}{(3n+1)(2n+2)}\right\}$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}$$

$$=\frac{8}{3}$$

이므로 $p=3$, $q=8$

따라서 $p+q=11$

30. 다항함수의 적분법 (정답 664)

[풀이] $f(x)-f(0)=4x^3-5x^2+2x$에서

$f'(x)=12x^2-10x+2=2(3x-1)(2x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극솟값 $\frac{9}{4}$를 가지므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)=4\left(\frac{1}{2}\right)^3-5\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\frac{1}{2}$

$\frac{9}{4}-f(0)=\frac{1}{4}$, $f(0)=2$

따라서 $f(x)=4x^3-5x^2+2x+2$이므로

$(2x-1)\{g(x)-g(0)\}$

$=f(x)+2\int_0^x(x-t)g'(t)dt+\int_0^2 g(t)dt$

$=f(x)+2x\int_0^x g'(t)dt-2\int_0^x tg'(t)dt+\int_0^2 g(t)dt$

에서

$2x\int_0^x g'(t)dt=2x\Big[g(t)\Big]_0^x=2x\{g(x)-g(0)\}$

이므로

$-\{g(x)-g(0)\}=f(x)-2\int_0^x tg'(t)dt+\int_0^2 g(t)dt$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$-g'(x)=f'(x)-2xg'(x)$

$(2x-1)g'(x)=f'(x)=2(3x-1)(2x-1)$

$g(x)$가 다항함수이므로

$g'(x)=2(3x-1)$

$g(x)=\int g'(x)dx=\int 2(3x-1)dx$

$=2\left(\frac{3}{2}x^2-x\right)+C$ (C는 적분상수)

$=3x^2-2x+C$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=f(0)+\int_0^2 g(t)dt$

$f(0)=2$이므로

$\int_0^2 g(t)dt=-2$

$\int_0^2(3t^2-2t+C)dt=\Big[t^3-t^2+Ct\Big]_0^2=4+2C=-2$

$C=-3$

따라서 $g(x)=3x^2-2x-3$이므로

$f(5)+g(10)$

$=(500-125+10+2)+(300-20-3)$

$=387+277$

$=664$

제 3 회

정 답

1	①	2	③	3	⑤	4	①	5	②
6	④	7	④	8	②	9	③	10	①
11	⑤	12	④	13	⑤	14	①	15	③
16	④	17	⑤	18	③	19	④	20	②
21	②	22	20	23	16	24	350	25	32
26	72	27	816	28	16	29	9	30	17

풀 이

1. 지수와 로그 (정답 ①)

[풀이] $2^{-1}\times\log_3 9=2^{-1}\times\log_3 3^2$

$=2^{-1}\times 2$

$=1$

2. 집합과 명제 (정답 ③)

[풀이] $A=\{1, 2, 3\}$에서 $A^C=\{4, 5\}$이므로

$A^C\cup B=\{3, 4, 5\}$

따라서 $n(A^C\cup B)=3$

3. 수열의 극한 (정답 ⑤)

[풀이] $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{3^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{1+2\left(\frac{1}{3}\right)^n}=3$

4. 다항함수의 미분법 (정답 ①)

[풀이] $f(x)=(x-2)(x^2+x)$에서

$f'(x)=(x^2+x)+(x-2)(2x+1)$이므로

$f'(2)=(2^2+2)+0=6$

5. 수열 (정답 ②)

[풀이] $\sum_{k=2}^{6}(k^2-3k)=\sum_{k=1}^{6}(k^2-3k)-(1-3)$

$=\frac{6\times7\times13}{6}-3\times\frac{6\times7}{2}+2$

$=91-63+2$

$=30$

6. 확률 (정답 ④)

[풀이] $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(B)$이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로 두 사건 A와 B^C도 서로 독립이다.

따라서

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$

$=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}$

$\frac{1}{3}=\mathrm{P}(A)\times\left(1-\frac{5}{12}\right)$

따라서 $\mathrm{P}(A)=\frac{4}{7}$

7. 함수 (정답 ④)

[풀이] $g^{-1}(1)=a$라 하면 $g(a)=1$

$-a^3+9=1$, $a^3-8=0$, $(a-2)(a^2+2a+4)=0$

따라서 $a=2$이므로

$(f\circ g^{-1})(1)=f(g^{-1}(1))$

$=f(2)=\frac{4}{2-1}$

$=4$

8. 순열과 조합 (정답 ②)

[풀이] 같은 종류의 선물세트 9개를 같은 종류의 쇼핑백 3개에 빈 쇼핑백이 없도록 나누어 담는 방법의 수는 자연수 9를 3개의 자연수의 합으로 분할하는 방법의 수인 $P(9, 3)$과 같다.

$9=7+1+1$

$=6+2+1$

$=5+3+1=5+2+2$

$=4+4+1=4+3+2$

$=3+3+3$

이므로 구하는 방법의 수는

$P(9, 3)=7$

9. 통계 (정답 ③)

[풀이] 이 고등학교 학생의 수면시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(320, 40^2)$을 따르고

$Z=\frac{X-320}{40}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X\geq360)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{360-320}{40}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq1)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq1)$

$=0.5-0.3413$

$=0.1587$

10. 함수의 극한과 연속 (정답 ①)

[풀이] 주어진 그래프에서

$\lim_{x\to1+}f(x)\times\lim_{x\to0-}f(-x)$

$=(-1)\times\lim_{t\to0+}f(t)$

$=(-1)\times2$

$=-2$

11. 다항함수의 미분법 (정답 ⑤)

[풀이] $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$의 극댓값은

$f(1)=1-6+9+1=5$

12. 수열의 극한 (정답 ④)

[풀이] $4n-1<2na_n$에서

$\frac{4n-1}{2n}<a_n$이고, $\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{2n}=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n\geq2$

$\sum_{n=1}^{\infty}(na_n-b_n)=3$에서 $\sum_{n=1}^{\infty}(na_n-b_n)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(na_n-b_n)=0$

$na_n-b_n=c_n$이라 하면 $\lim_{n\to\infty} c_n=0$

$2na_n<2n+b_n$에서 $2na_n<2n+na_n-c_n$

$na_n<2n-c_n$, $a_n<2-\frac{c_n}{n}$

이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n\le 2$

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n=2$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n(na_n-c_n)}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(a_n^2-\frac{a_nc_n}{n}\right)\\&=4-0=4\end{aligned}$$

13. 다항함수의 적분법 정답 ⑤

[풀이] $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^2(4x^3+a)dx\\&=\frac{1}{2}\Big[x^4+ax\Big]_0^2=8+a\end{aligned}$$

따라서 $8+a=13$이므로

$a=5$

14. 통계 정답 ①

[풀이] $a+\frac{1}{2}+2a=1$이므로 $a=\frac{1}{6}$

$E(X)=0\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{3}=2$

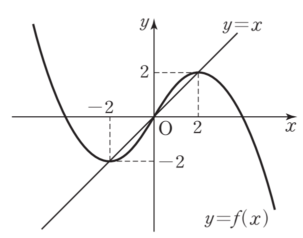
$V(X)=\left(0^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{2}+3^2\times\frac{1}{3}\right)-2^2=1$

따라서

$V(\overline{X})=\frac{V(X)}{4}=\frac{1}{4}$

15. 함수 정답 ③

[풀이]



$f(f(x))=f(x)$에서 $f(x)=t$라 하면 $f(t)=t$이므로 그림에서

$t=2$ 또는 $t=0$ 또는 $t=-2$

그림에서 방정식 $f(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이고, 방정식 $f(x)=-2$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

이때 방정식 $f(x)=2$, $f(x)=0$, $f(x)=-2$의 실근이 서로 다르다.

따라서 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 서로 다른 실근의 개수는

$2+3+2=7$

16. 수열 정답 ④

[풀이] (ⅰ) $n=1$일 때,

(좌변)$=a_1=4$, (우변)$=2\times3^1-2^1=4$

따라서 ㉠이 성립한다.

(ⅱ) $n=m(m=1, 2, 3, \cdots)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m+1} a_k-2\sum_{k=1}^{m} a_k=3^{m+1}+1$

에서 $\sum_{k=1}^{m+1} a_k-\sum_{k=1}^{m} a_k=3^{m+1}+1+\sum_{k=1}^{m} a_k$이므로

$$\begin{aligned}a_{m+1}&=\boxed{3^{m+1}+1}+\sum_{k=1}^{m} a_k\\&=3^{m+1}+1+\sum_{k=1}^{m}(2\times3^k-2^k)\\&=\boxed{3^{m+1}+1}+2\times\frac{3(3^m-1)}{3-1}-\frac{2(\boxed{2^m-1})}{2-1}\\&=3^{m+1}+1+3^{m+1}-3-2^{m+1}+2\\&=2\times3^{m+1}-2^{m+1}\end{aligned}$$

따라서 $n=m+1$일 때에도 ㉠이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

따라서 $f(m)=3^{m+1}+1$, $g(m)=2^m-1$이므로

$f(2)=3^3+1=28$, $g(4)=2^4-1=15$

따라서 $f(2)g(4)=420$

17. 지수와 로그 정답 ⑤

[풀이] $\log_m n=k$(k는 자연수)라 하면

$\log_{\sqrt{n}} m^2=4\log_n m=\frac{4}{\log_m n}=\frac{4}{k}$

에서 $\frac{4}{k}$가 자연수이므로 k는 4의 양의 약수인 1, 2, 4이다.

(ⅰ) $k=1$일 때,

$n=m$이므로 $2\le m\le100$에서 순서쌍 (m, n)의 개수는 99

(ⅱ) $k=2$일 때,

$n=m^2$이므로 $2\le m^2\le100$, $\sqrt{2}\le m\le10$에서 순서쌍 (m, n)의 개수는 9

(ⅲ) $k=4$일 때,

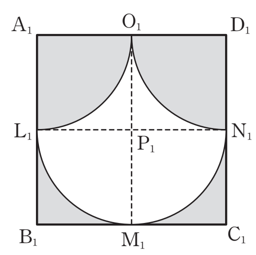
$n=m^4$이므로 $2\le m^4\le100$, $\sqrt[4]{2}\le m\le\sqrt[4]{100}$에서 순서쌍 (m, n)의 개수는 2

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는

$99+9+2=110$

18. 수열의 극한 정답 ③

[풀이] 그림 R_1에서 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 두 대각선의 교점을 P_1이라 하면

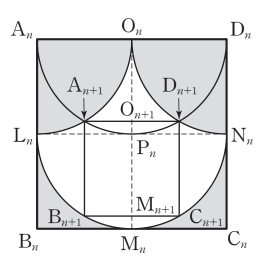


네 부채꼴 $A_1L_1O_1$, $P_1L_1M_1$, $P_1M_1N_1$, $D_1O_1N_1$의 넓이가 서로 같으므로 그림 R_1에 색칠되어 있는 모든 도형의 넓이의 합은 직사각형 $L_1B_1C_1N_1$의 넓이와 같다.

따라서

$S_1=3\times6=18$

그림 R_n과 그림 R_{n+1}에서 새로 그린 정사각형만을 그린 그림은 다음과 같다.



선분 L_nN_n이 선분 A_nD_n과 일치하도록 반원 $L_nM_nN_n$을 평행이동하여 생기는 두 호 A_nP_n, O_nL_n의 교점이 A_{n+1}이다.

$\overline{A_{n+1}O_{n+1}}=\frac{1}{2}\overline{A_nO_n}$,

$\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=\overline{L_nB_n}=\overline{A_nO_n}$

이므로 사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$은 정사각형이다.

$\overline{A_{n+1}D_{n+1}}=\frac{1}{2}\overline{A_nD_n}$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 18이고 공비가 $\left(\frac{1}{2}\right)^2$인 등비급수이므로

$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{18}{1-\frac{1}{4}}=24$

19. 확률 정답 ④

[풀이] 1부터 10까지의 자연수 중 소수는 2, 3, 5, 7의 4개이다.

한 번의 게임에서 소수가 적혀 있는 공이 나오지 않을 확률은

$$\frac{{}_6C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}}{\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}}=\frac{1}{6}$$

이므로 소수가 적혀 있는 공이 나올 확률은

$1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

이 게임을 5번 하여 상품을 3번 받는 사건을 A, 첫 번째 게임에서 상품을 받는 사건을 B라 하면

$P(A)={}_5C_3\left(\frac{5}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^2$

이고

$P(A\cap B)=\frac{5}{6}\times{}_4C_2\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2$

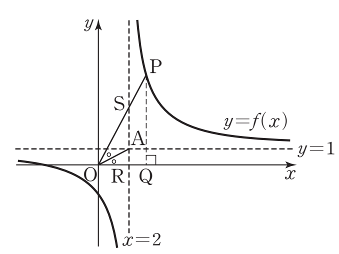
이므로

$$\begin{aligned}P(B|A)&=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\\&=\frac{\frac{5}{6}\times{}_4C_2\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2}{{}_5C_3\left(\frac{5}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^2}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

20. 함수 정답 ②

[풀이] $f(x)=\frac{x+k}{x-2}=1+\frac{k+2}{x-2}$이므로 곡선 $y=f(x)$의 두 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=1$이다.

$\angle POA=\angle AOQ$이므로 직선 OA가 $\angle POQ$의 이등분선이다.



직선 $x=2$가 x축 및 직선 OP와 만나는 점을 각각 R, S라 하면 내각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{OR}:\overline{OS}=\overline{RA}:\overline{SA}$, $2:\overline{OS}=1:\overline{SA}$

$\overline{OS}=2\overline{SA}$

삼각형 SOR에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{OR}^2+\overline{RS}^2=\overline{OS}^2$

$2^2+(1+\overline{SA})^2=(2\overline{SA})^2$, $3\overline{SA}^2-2\overline{SA}-5=0$

$(3\overline{SA}-5)(\overline{SA}+1)=0$

$\overline{SA}=\frac{5}{3}$이므로 점 S의 좌표는 $\left(2, \frac{8}{3}\right)$이다.

점 P는 직선 OS, 즉 $y=\frac{4}{3}x$ 위의 점이고, 점 P의 x좌표는 3이므로 점 P의 좌표는 $(3, 4)$이다.

$f(3)=\frac{3+k}{3-2}=4$에서

$k=1$

21. 다항함수의 미분법 　정답 ②

[풀이] ㄱ. $g(-1)=-f(-1)=f(1)=-1$ (참)

ㄴ. 함수 $g(x)$가 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 연속이고, 열린 구간 $(0, 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

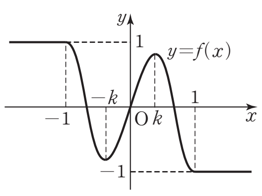
$$\frac{g(1)-g(0)}{1-0}=g'(a)$$

$g(1)=1\times f(1)=-1$, $g(0)=0\times f(0)=0$이므로 $g'(a)=-1$을 만족시키는 a가 열린 구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

그런데 $g(-x)=-xf(-x)=xf(x)=g(x)$에서 함수 $g(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로 $g'(-a)=1$을 만족시키는 $-a$가 열린 구간 $(-1, 0)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 $g'(a)g'(-a)=-1$을 만족시키는 a가 열린 구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다. (참)

ㄷ. (반례)



$g'(x)=f(x)+xf'(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 열린 구간 $(-k, k)$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$(-k)$		0		(k)
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	극소	↗	

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

22. 함수의 극한과 연속 　정답 20

[풀이] $$\lim_{x\to 2}\frac{5x^2-20}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{5(x^2-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{5(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}5(x+2)=20$$

23. 통계 　정답 16

[풀이] 이항분포 $\mathrm{B}\left(16, \frac{1}{3}\right)$에서

$$\mathrm{E}(X)=16\times\frac{1}{3}=\frac{16}{3}$$

$$\mathrm{E}(3X)=3\,\mathrm{E}(X)=3\times\frac{16}{3}=16$$

24. 순열과 조합 　정답 350

[풀이] 남학생 7명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_7\mathrm{C}_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$$

여학생 5명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$${}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

따라서 구하는 경우의 수는

$35\times10=350$

25. 다항함수의 적분법 　정답 32

[풀이] 곡선 $y=3x^2-4x-5$와 직선 $y=2x+4$의 교점의 x좌표는

$3x^2-4x-5=2x+4$, $3x^2-6x-9=0$

$3(x+1)(x-3)=0$

$x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{3}|(3x^2-4x-5)-(2x+4)|dx$$
$$=\int_{-1}^{3}(-3x^2+6x+9)dx$$
$$=\Big[-x^3+3x^2+9x\Big]_{-1}^{3}$$
$$=(-27+27+27)-(1+3-9)$$
$$=32$$

26. 순열과 조합 　정답 72

[풀이] 빈 의자를 한 사람으로 보고 원탁의 둘레에 6명이 앉는 경우의 수는

$5!=120$

여학생 2명이 이웃하는 경우의 수는 $4!\times2=48$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-48=72$

27. 수열 　정답 816

[풀이] 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_7-a_3=4d=24$이므로 $d=6$

$a_7+a_3=2a+8d=24$이므로 $a=-12$

$a_n=-12+6(n-1)=6n-18$

$0<6n-18\le100$에서 $3<n\le\frac{59}{3}$

집합 $\{a_n|a_n$은 100 이하의 자연수$\}$의 모든 원소의 합은 등차수열 $\{a_n\}$의 제4항부터 제19항까지의 합이다.

$a_4=6$, $a_{19}=96$이므로 구하는 모든 원소의 합은

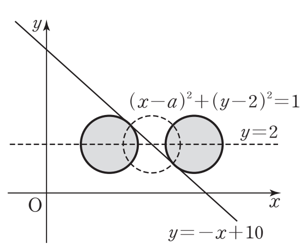
$$\frac{16(6+96)}{2}=816$$

28. 집합과 명제 　정답 16

[풀이] 집합 A는 점 $(a, 2)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점들의 모임이고, 집합 B는 직선 $y=-x+10$ 위의 점들의 모임이다.

'어떤 $(x, y)\in A$에 대하여 $(x, y)\in B$이다.'

가 참이려면 $A\cap B\neq\varnothing$이어야 하므로 그림과 같이 원 $(x-a)^2+(y-2)^2=1$이 직선 $y=-x+10$과 만나야 한다.



즉, 원의 중심 $(a, 2)$와 직선 $x+y-10=0$ 사이의 거리가 1 이하이어야 하므로

$$\frac{|a+2-10|}{\sqrt{1+1}}\le1,\ |a-8|\le\sqrt{2}$$

$8-\sqrt{2}\le a\le8+\sqrt{2}$

따라서 구하는 실수 a의 최댓값과 최솟값의 합은

$(8+\sqrt{2})+(8-\sqrt{2})=16$

[참고]

두 직선 $y=-x+10$, $y=2$의 교점이 $(8, 2)$이므로 실수 a의 최댓값을 $8+k\,(k>0)$라 하면 실수 a의 최솟값은 $8-k$이다.

따라서 실수 a의 최댓값과 최솟값의 합은

$(8+k)+(8-k)=16$

29. 함수의 극한과 연속 　정답 9

[풀이] $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2}{x^{2n}+1}$에서

(i) $|x|>1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{a}{x^{2n-2}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{1}{x}$$

(ii) $|x|<1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}x^{2n-1}=0$, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로 $f(x)=ax^2$

(iii) $x=1$일 때,

$$f(1)=\frac{1+a}{2}$$

(iv) $x=-1$일 때,

$$f(-1)=\frac{-1+a}{2}$$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}ax^2=a$,

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}\frac{1}{x}=1$,

$f(1)=\frac{1+a}{2}$

에서 $a=1$ ...... ㉠

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}ax^2=a$,

$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}\frac{1}{x}=-1$,

$f(-1)=\frac{-1+a}{2}$

에서 $a=-1$ ...... ㉡

㉠, ㉡은 동시에 성립할 수 없다.

따라서 $a=-1$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이고, $x=1$에서 불연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속, 즉 $g(1)=0$이어야 한다.

그런데 $g(1)=3+b^2\neq0$이므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 불연속이다.

또, $a=1$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이고, $x=-1$에서 불연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 함수 $f(x)g(x)$가 $x=-1$에서 연속, 즉 $g(-1)=0$이어야 한다.

$g(-1)=3-b^2=0$이므로 $b^2=3$

따라서

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4},\ g(3)=3\times3^2+3\times3=36$$

이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right)g(3)=\frac{1}{4}\times36=9$$

[참고] 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 불연속이고, 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면서

$\lim_{x\to a+}f(x)=p$, $\lim_{x\to a-}f(x)=q$, $f(a)=r$

(단, p, q, r는 상수)

를 만족시킬 때, $g(a)=0$이면 함수 $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 연속이고 그 역도 성립한다.

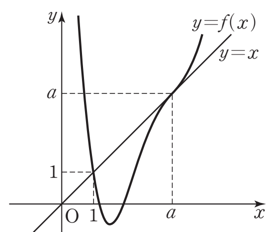
30. 다항함수의 적분법 　정답 17

[풀이] 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=f(x)$이거나 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=x$이면 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=x$의 그래프의 교점에서 함수가 바뀜을 알 수 있다.

조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 오직 $x=1$에서만 미분가능하지 않으므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=x$의 그래프의 교점 중 x좌표가 1이 아닌 모든 점에서의 함수 $y=f(x)$의 접선이 $y=x$이다.

조건 (다)에서 $1\le x<a$일 때 $g(x)=f(x)$이고, $x\ge a$일 때 $g(x)=x$이다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

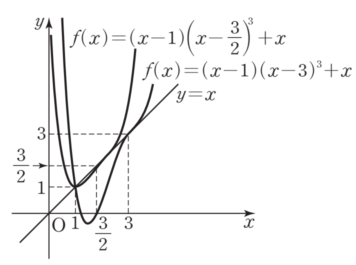


$f(x)-x=(x-1)(x-a)^3$ (a는 상수)라 하면
$f(x)-x=(x-1)(x^3-3ax^2+3a^2x-a^3)$에서
$f'(x)-1=(x^3-3ax^2+3a^2x-a^3)$
$\qquad+(x-1)(3x^2-6ax+3a^2)$
이므로

$$f'\left(\frac{3}{2}\right)-1=\left(\frac{27}{8}-\frac{27}{4}a+\frac{9}{2}a^2-a^3\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{27}{4}-9a+3a^2\right)$$
$$=\frac{27}{4}-\frac{45}{4}a+6a^2-a^3$$
$$=\left(\frac{3}{2}-a\right)^2(3-a)$$

$\left(\frac{3}{2}-a\right)^2(3-a)=0$에서 $a=\frac{3}{2}$ 또는 $a=3$

함수 $f(x)=(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)^3+x$와
$f(x)=(x-1)(x-3)^3+x$의 그래프는 그림과 같다.



$\int_0^2 g(x)dx$의 값은

$$g(x)=\begin{cases} x & (x\le 1) \\ (x-1)(x-3)^3+x & (1<x\le 3) \\ x & (x>3)\end{cases}$$

일 때 최소이므로 $\int_0^2 g(x)dx$의 최솟값은

$$\int_0^1 xdx+\int_1^2 \{(x-1)(x-3)^3+x\}dx$$
$$=\int_0^2 xdx+\int_1^2 (x-1)(x-3)^3dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2+\int_1^2 (x^4-10x^3+36x^2-54x+27)dx$$
$$=\frac{4-0}{2}+\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{5}{2}x^4+12x^3-27x^2+27x\right]_1^2$$
$$=2+\left\{\frac{32-1}{5}-\frac{5(16-1)}{2}\right.$$
$$\left.+12(8-1)-27(4-1)+27(2-1)\right\}$$
$$=2+\left(\frac{31}{5}-\frac{75}{2}+84-81+27\right)$$
$$=\frac{31}{5}-\frac{75}{2}+32$$
$$=\frac{7}{10}$$

따라서 $p=10$, $q=7$이므로
$p+q=17$

제 4 회

정 답

1	①	2	③	3	②	4	①	5	③
6	③	7	③	8	④	9	②	10	①
11	⑤	12	⑤	13	③	14	①	15	①
16	①	17	④	18	④	19	②	20	⑤
21	④	22	200	23	12	24	24	25	21
26	35	27	34	28	4	29	228	30	50

풀 이

1. 지수와 로그 　정답 ①

[풀이] $27^{\frac{1}{3}}\times\sqrt[3]{8}=(3^3)^{\frac{1}{3}}\times(2^3)^{\frac{1}{3}}$
$\qquad=3\times2=6$

2. 집합과 명제 　정답 ③

[풀이] $A\cap B=\{1, 2, 3, 4, 5\}\cap\{2, 4, 6, 8\}$
$\qquad=\{2, 4\}$
따라서 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합은
$2+4=6$

3. 지수와 로그 　정답 ②

[풀이] $\log_4 2+\log_2 4-\log_6 \frac{1}{6}$
$=\log_{2^2} 2+\log_2 2^2+\log_6 6$
$=\frac{1}{2}\log_2 2+2\log_2 2+\log_6 6$
$=\frac{1}{2}+2+1$
$=\frac{7}{2}$

4. 확률 　정답 ①

[풀이] $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$\qquad=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$
$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$
또한, $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$이므로
$\{\mathrm{P}(A)\}^2+\{\mathrm{P}(B)\}^2$
$=\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\}^2-2\,\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$=\left(\frac{5}{6}\right)^2-2\times\frac{1}{6}$
$=\frac{25}{36}-\frac{1}{3}$
$=\frac{13}{36}$

5. 수열 　정답 ③

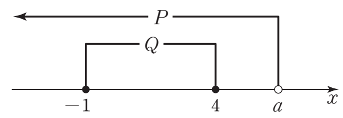
[풀이] $2a-4$가 등차중항이므로
$2a-4=\frac{a+(12-a)}{2}=6$
$2a=10$
따라서 $a=5$

6. 함수 　정답 ③

[풀이] 함수 f는 일대일 대응이고
$(f\circ f)(a)=f(f(a))=3$에서 $f(1)=3$이므로
$f(a)=1$
따라서 $a=3$

7. 집합과 명제 　정답 ③

[풀이] q : $x^2-3x-4\le 0$에서
$(x-4)(x+1)\le 0$
$-1\le x\le 4$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 p가 q이기 위한 필요조건이 되기 위해서는 다음 그림과 같다.



즉, $a>4$이다.
따라서 정수 a의 최솟값은 5이다.

8. 함수의 극한과 연속 　정답 ④

[풀이] $\lim_{x\to-2-} f(x)=\lim_{x\to-2+} f(x)=0$이므로
$\lim_{x\to-2} f(x)=0$
또한, $\lim_{x\to1-} f(x)=3$이므로
$\lim_{x\to-2} f(x)+\lim_{x\to1-} f(x)=0+3=3$

9. 다항함수의 적분법 　정답 ②

[풀이] $\int_{-2}^{2} (x^3+3x^2-1)dx$
$=2\int_0^2 (3x^2-1)dx$
$=2\left[x^3-x\right]_0^2$
$=2(2^3-2)$
$=12$

10. 함수 　정답 ①

[풀이] $y=\frac{bx-1}{x-a}$
$\quad=\frac{b(x-a)+ab-1}{x-a}$
$\quad=\frac{ab-1}{x-a}+b$
에서 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=b$이므로
$a=2$, $b=6$
따라서 $ab=2\times6=12$

11. 확률 　정답 ⑤

[풀이] 주사위 한 개를 4번 던지는 시행에서 3의 배수가 한 번도 나오지 않는 사건을 A라 하면
$\mathrm{P}(A)={}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$
따라서 주사위 한 개를 4번 던지는 시행에서 3의 배수가 적어도 한 번 나올 확률은
$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$
$\qquad=1-\frac{16}{81}=\frac{65}{81}$

12. 다항함수의 미분법 　정답 ⑤

[풀이] 점 P의 시각 $t\,(t\ge0)$에서의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라 하면
$v(t)=x'(t)=20t-4$
$a(t)=v'(t)=20$

이므로

$a=v(1)=16$, $b=a(4)=20$

따라서 $a+b=16+20=36$

13. 함수의 극한과 연속 정답 ③

[풀이] 함수 $f(x)$는 $x=0$에서만 불연속일 가능성이 있고 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=0$에서만 연속이면 된다.

$\lim_{x\to 0+} f(x)g(x)=(1-a)\times 1=1-a$

$\lim_{x\to 0-} f(x)g(x)=a\times 1=a$

$f(0)g(0)=(1-a)\times 1=1-a$

즉, $1-a=a$에서 $a=\frac{1}{2}$이므로

$g(10)=\frac{1}{2}\times 10+1=6$

14. 확률 정답 ①

[풀이] 주머니에서 3개의 공을 동시에 꺼내는 모든 경우의 수는 ${}_{10}C_3=120$

(ⅰ) $m=1$, 2인 경우
부등식 $M<2m$을 만족시킬 수 없다.

(ⅱ) $m=3$인 경우
4, 5 중에서 2개를 택하는 경우의 수는
${}_2C_2=1$

(ⅲ) $m=4$인 경우
5, 6, 7 중에서 2개를 택하는 경우의 수는
${}_3C_2=3$

(ⅳ) $m=5$인 경우
6, 7, 8, 9 중에서 2개를 택하는 경우의 수는
${}_4C_2=\frac{4\times 3}{2}=6$

(ⅴ) $m=6$인 경우
7, 8, 9, 10 중에서 2개를 택하는 경우의 수는
${}_4C_2=\frac{4\times 3}{2}=6$

(ⅵ) $m=7$인 경우
8, 9, 10 중에서 2개를 택하는 경우의 수는
${}_3C_2=3$

(ⅶ) $m=8$인 경우
9, 10 중에서 2개를 택하는 경우의 수는
${}_2C_2=1$

(ⅰ)~(ⅶ)에서 구하는 확률은

$\frac{1+3+6+6+3+1}{120}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$

15. 수열 정답 ①

[풀이] 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

조건 (가)에 의하여 $\frac{a(r^n-1)}{r-1}=27$ …… ㉠

조건 (나)에 의하여 $\frac{a(r^{2n}-1)}{r-1}=36$ …… ㉡

이때 ㉡에서

$\frac{a(r^{2n}-1)}{r-1}=\frac{a(r^n-1)(r^n+1)}{r-1}$
$=27(r^n+1)=36$

$27r^n=9$, $r^n=\frac{1}{3}$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$\frac{a\left(\frac{1}{3}-1\right)}{r-1}=27$

$\frac{a}{r-1}=27\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{81}{2}$

따라서 제$(2n+1)$항부터 제$3n$항까지의 합을 S라 하면 $36+S$는 첫째항부터 제$3n$항까지의 합이므로

$36+S=\frac{a(r^{3n}-1)}{r-1}=\frac{a}{r-1}\times(r^{3n}-1)$
$=-\frac{81}{2}\times\left(\frac{1}{27}-1\right)$
$=-\frac{81}{2}\times\left(-\frac{26}{27}\right)$
$=39$

따라서 $S=3$

16. 통계 정답 ①

[풀이] 학사과정 성적의 평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\bar{x}-1.96\times\frac{0.4}{\sqrt{100}}\le m\le\bar{x}+1.96\times\frac{0.4}{\sqrt{100}}$

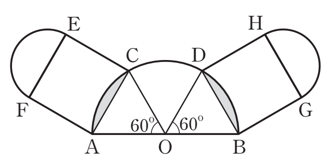
즉, $a=\bar{x}-1.96\times\frac{0.4}{\sqrt{100}}$, $b=\bar{x}+1.96\times\frac{0.4}{\sqrt{100}}$

이므로

$b-a=\left(\bar{x}+1.96\times\frac{0.4}{\sqrt{100}}\right)-\left(\bar{x}-1.96\times\frac{0.4}{\sqrt{100}}\right)$
$=2\times 1.96\times\frac{0.4}{\sqrt{100}}$
$=2\times 1.96\times\frac{0.4}{10}$
$=1.96\times 0.08$
$=0.1568$

17. 수열의 극한 정답 ④

[풀이]



그림과 같이 선분 AB의 중점을 O라 하면 $\angle AOC=\angle BOD=60°$이므로 삼각형 AOC, OBD는 모두 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.

따라서 $\overline{AB}:\overline{EF}=2:1$이고 도형의 개수는 2배씩 늘어나므로 수열 $\{S_n\}$의 공비는

$\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 2=\frac{1}{2}$

또한,

$S_1=2\times\left(\pi\times 2^2\times\frac{60°}{360°}-\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\right)$
$=\frac{4}{3}\pi-2\sqrt{3}$

이므로

$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\frac{4}{3}\pi-2\sqrt{3}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{8}{3}\pi-4\sqrt{3}$

18. 다항함수의 적분법 정답 ④

[풀이] $f(x)=-x^2$, $g(x)=x^2+ax+b$라 하면
$f'(x)=-2x$, $g'(x)=2x+a$이고 접선 l의 방정식은

$y=-2t(x-t)-t^2$

$y=-2tx+t^2$

또한, 점 $P(t, -t^2)$을 지나고 직선 l에 수직인 직선 m의 방정식은

$y=\frac{1}{2t}(x-t)-t^2$, $y=\frac{1}{2t}x-t^2-\frac{1}{2}$

또한, $f'(t)=g'(t)$, $f(t)=g(t)$이므로

$-2t=2t+a$, $-t^2=t^2+at+b$에서

$a=-4t$, $b=2t^2$

즉, $g(x)=x^2-4tx+2t^2=(x-2t)^2-2t^2$이다.

점 Q의 좌표가 $(0, t^2)$이므로

$S_1=\frac{1}{2}\times t^2\times t=\frac{1}{2}t^3$,

$S_2=\int_t^{2t}\left\{\frac{1}{2t}x-t^2-\frac{1}{2}-g(x)\right\}dx$
$=\int_t^{2t}\left\{-x^2+\left(4t+\frac{1}{2t}\right)x-3t^2-\frac{1}{2}\right\}dx$
$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\left(2t+\frac{1}{4t}\right)x^2-\left(3t^2+\frac{1}{2}\right)x\right]_t^{2t}$
$=-\frac{1}{3}\times 7t^3+\left(2t+\frac{1}{4t}\right)\times 3t^2-\left(3t^2+\frac{1}{2}\right)\times t$
$=\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{4}t$

따라서 $\lim_{t\to\infty}\frac{S_2}{S_1}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{4}t}{\frac{1}{2}t^3}=\frac{4}{3}$

19. 통계 정답 ②

[풀이] 확률변수 X의 값은 0, 2, 5이므로

$P(X=0)=\frac{1\times{}_{n+1}C_1}{{}_{n+2}C_2}=\frac{2}{\boxed{n+2}}$

$P(X=2)=\frac{{}_nC_2}{{}_{n+2}C_2}=\frac{n(n-1)}{(\boxed{n+2})(n+1)}$

$P(X=5)=\frac{{}_nC_1\times 1}{{}_{n+2}C_2}=\frac{2n}{(\boxed{n+2})(n+1)}$

따라서

$E(X)=0\times P(X=0)+2\times P(X=2)$
$+5\times P(X=5)$
$=2\times\frac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)}$
$+5\times\frac{2n}{(n+2)(n+1)}$
$=\frac{2n(\boxed{n+4})}{(\boxed{n+2})(n+1)}$

이므로

$\lim_{n\to\infty}E(X)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n(n+4)}{(n+2)(n+1)}=\boxed{2}$

따라서 $f(n)=n+2$, $g(n)=n+4$, $a=2$이므로

$f(a)+g(a)=f(2)+g(2)$
$=4+6=10$

20. 다항함수의 적분법 정답 ⑤

[풀이] $\int_0^1 f(x)dx=a$라 하면 $f'(x)=x^2+2ax$이므로

$f(x)=\int(x^2+2ax)dx=\frac{1}{3}x^3+ax^2+C$

(단, C는 적분상수)

ㄱ. $f(0)=1$이므로

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+1$

$\int_0^1\left(\frac{1}{3}x^3+ax^2+1\right)dx=\left[\frac{1}{12}x^4+\frac{a}{3}x^3+x\right]_0^1$
$=\frac{1}{12}+\frac{a}{3}+1$
$=a$

이므로 $a=\int_0^1 f(x)dx=\frac{13}{8}$ (참)

ㄴ. $f'(x)=x^2+2ax=x(x+2a)$이고

$\int_0^1 f(x)dx=a<0$

따라서 $x=-2a$일 때 함수 $f(x)$는 극솟값을 가지므로 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 최댓값이 $f(1)$이 되기 위해서는 $f(1)\ge f(0)$이어야 한다.

즉, $\frac{1}{3}+a+C\ge C$에서

$a=\int_0^1 f(x)dx\ge-\frac{1}{3}$

따라서 $\int_0^1 f(x)dx$의 최솟값은 $-\frac{1}{3}$이다. (참)

ㄷ. $y=-\frac{3}{4}\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2 x-\frac{1}{12}$에서

접선의 기울기는 $-\frac{3}{4}a^2$

$f'(-1)=1-2a=-\frac{3}{4}a^2$, $3a^2-8a+4=0$

$(3a-2)(a-2)=0$

따라서 $a=\frac{2}{3}$ 또는 $a=2$

그런데 $a=\frac{2}{3}$이면

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2+C$, $y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{12}$에서

$-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+C=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}$

따라서 $C=-\frac{1}{12}$

이때

$\int_0^1\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{12}\right)dx$

$=\left[\frac{1}{12}x^4+\frac{2}{9}x^3-\frac{1}{12}x\right]_0^1$

$=\frac{2}{9}$

이므로 모순이다.

$a=2$일 때 같은 방법으로 생각하면

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+\frac{5}{4}$

이므로

$\int_0^1\left(\frac{1}{3}x^3+2x^2+\frac{5}{4}\right)dx$

$=\left[\frac{1}{12}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{4}x\right]_0^1$

$=2$

따라서 만족한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

21. 수열 정답 ④

[풀이] $m\le\sqrt{n}<m+1$이므로

$m^2\le n<(m+1)^2=m^2+2m+1$

즉, $b_n=\frac{n}{a_n}=\frac{n}{m}$에서

$\frac{m^2}{m}, \frac{m^2+1}{m}, \frac{m^2+2}{m}, \cdots, \frac{m^2+2m}{m}$ …… ㉠

따라서 ㉠은 첫째항이 m, 끝항인 제$(2m+1)$항이 $m+2$인 등차수열이므로 첫째항부터 끝항까지의 합은

$\frac{(2m+1)(m+m+2)}{2}=(2m+1)(m+1)$

또한, $100=10^2$이므로

$\sum_{i=1}^{99}b_i=\sum_{m=1}^{9}(2m+1)(m+1)$

$=\sum_{m=1}^{9}(2m^2+3m+1)$

$=2\sum_{m=1}^{9}m^2+3\sum_{m=1}^{9}m+\sum_{m=1}^{9}1$

$=2\times\frac{9\times10\times19}{6}+3\times\frac{9\times10}{2}+9\times1$

$=570+135+9$

$=714$

22. 순열과 조합 정답 200

[풀이] ${}_5C_2\times{}_5P_2=\frac{5\times4}{2}\times(5\times4)$

$=10\times20$

$=200$

23. 다항함수의 미분법 정답 12

[풀이] $\lim_{h\to0}\frac{f(-1+2h)-f(-1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+2h)-f(-1)}{2h}\times2$

$=2f'(-1)$

이고 $f'(x)=3x^2+3$이므로

$2f'(-1)=2\{3\times(-1)^2+3\}=12$

24. 집합과 명제 정답 24

[풀이] $(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B^C)$

$=(A\cup A^C)\cap B^C$

$=U\cap B^C$

$=B^C$

$=\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$

따라서 $B=U-B^C=\{5, 9, 10\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합은

$5+9+10=24$

25. 수열 정답 21

[풀이] $a_2=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

$a_3=2-\frac{3}{\frac{1}{2}}=-4$

$a_4=2-\frac{3}{-4}=\frac{11}{4}$

$a_5=2-\frac{3}{\frac{11}{4}}=\frac{10}{11}$

따라서 $p=11$, $q=10$이므로

$p+q=21$

26. 다항함수의 미분법 정답 35

[풀이] $c=\frac{4\times5+1\times0}{4+1}=4$이고

$d=\frac{4\times f(5)+1\times0}{4+1}=\frac{4}{5}f(5)$에서

$64+16a+4b=\frac{4}{5}(125+25a+5b)$

$=100+20a+4b$

이므로 $a=-9$

또한, 함수 $y=f(x)$가 $x=4$에서 극값을 가지므로

$f'(x)=3x^2-18x+b$

에서

$f'(4)=3\times4^2-18\times4+b=0$

즉, $b=24$

$d=f(4)=64+(-9)\times16+24\times4$

$=64-144+96=16$

따라서

$a+b+c+d=-9+24+4+16$

$=35$

27. 순열과 조합 정답 34

[풀이] $a+b+c+d=(a+b)+(c+d)=6$이므로 조건 (나)에 의하여

(i) $a+b=0$, $c+d=6$인 경우

$1\times{}_2H_6={}_{2+6-1}C_6={}_7C_6={}_7C_1=7$

(ii) $a+b=1$, $c+d=5$인 경우

${}_2H_1\times{}_2H_5$

$={}_{2+1-1}C_1\times{}_{2+5-1}C_5$

$={}_2C_1\times{}_6C_5$

$={}_2C_1\times{}_6C_1$

$=2\times6=12$

(iii) $a+b=2$, $c+d=4$인 경우

${}_2H_2\times{}_2H_4$

$={}_{2+2-1}C_2\times{}_{2+4-1}C_4$

$={}_3C_2\times{}_5C_4$

$={}_3C_1\times{}_5C_1$

$=3\times5=15$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$7+12+15=34$

28. 수열의 극한 정답 4

[풀이] 두 점 A_n, B_n의 좌표는 각각

$A_n\left(n, \frac{1}{n-1}\right)$, $B_n\left(n, -\frac{3}{n-1}\right)$

또한, 점 C_n의 x좌표는

$-\frac{3}{x-1}=\frac{1}{n-1}$, $-\frac{x-1}{3}=n-1$

$-x+1=3n-3$, $x=4-3n$

이므로 $C_n\left(4-3n, \frac{1}{n-1}\right)$이다.

따라서

$\overline{B_nC_n}=\sqrt{(4-4n)^2+\left(\frac{4}{n-1}\right)^2}$

$=4\sqrt{\frac{1}{(n-1)^2}+(n-1)^2}$

이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{B_nC_n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{\frac{1}{(n-1)^2}+(n-1)^2}}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}4\sqrt{\frac{1}{n^2(n-1)^2}+\frac{(n-1)^2}{n^2}}$

$=4\sqrt{0+1}$

$=4$

29. 통계 정답 228

[풀이] 1200번의 시행 후 양의 방향으로 이동한 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(1200, \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

따라서

$E(X)=1200\times\frac{1}{4}=300$,

$V(X)=1200\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=225$

이고 시행 횟수 1200번은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(300, 15^2)$을 따른다.

또한, 1200번의 시행 후 점 A의 좌표를 확률변수 Y라 하면

$Y=3X+(-1)(1200-X)=4X-1200$

$p=P(Y\ge120)$

$=P(4X-1200\ge120)$

$=P(X\ge330)$

$=P\left(Z\ge\frac{330-300}{15}\right)$

$=P(Z\ge2)$

$=0.5-P(0\le Z\le2)$

$=0.5-0.4772$

$=0.0228$

따라서

$10000p=10000\times0.0228=228$

30. 다항함수의 미분법 정답 50

[풀이] 곡선 $y=x^3-3ax$는 원점에 대하여 대칭이고 함수 $f(x)=x^3-3ax+1$의 그래프는 곡선 $y=x^3-3ax$를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 (0, 1)에 대하여 대칭이다.

(i) $a>0$인 경우

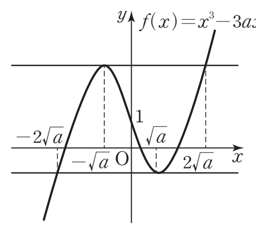
$f'(x)=3x^2-3a=0$에서

$x=-\sqrt{a}$ 또는 $x=\sqrt{a}$

$f(2\sqrt{a})=2a\sqrt{a}+1=f(-\sqrt{a})$

$f(-2\sqrt{a})=-2a\sqrt{a}+1=f(\sqrt{a})$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



① $2\sqrt{a}<1$인 경우, 즉 $0<a<\frac{1}{4}$일 때

$f(-1)=-1+3a+1=3a>0$

$f(\sqrt{a})=-2a\sqrt{a}+1>0$

따라서 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 $|f(x)|=f(x)$이므로 $|f(x)|$의 최댓값은

$f(1)>f(2\sqrt{a})=f(-\sqrt{a})$에서 $f(1)$이다.

$f(1)=1-3a+1=2-3a=4$

즉, $a=-\frac{2}{3}$인데 $0<a<\frac{1}{4}$라는 조건에 모순이다.

② $\sqrt{a}<1\le 2\sqrt{a}$인 경우, 즉 $\frac{1}{4}\le a<1$일 때

$f(-\sqrt{a})=2a\sqrt{a}+1>0$

$f(\sqrt{a})=-2a\sqrt{a}+1$이므로

$|f(-\sqrt{a})|>|f(\sqrt{a})|$

따라서 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 $|f(x)|$의 최댓값은

$f(-\sqrt{a})=2a\sqrt{a}+1=4,\ a\sqrt{a}=\frac{3}{2}$

양변을 제곱하면 $a^3=\frac{9}{4}$

그런데 $\frac{1}{4}\le a<1$에서 $\frac{1}{64}\le a^3<1$이므로 모순이다.

③ $\sqrt{a}\ge 1$인 경우, 즉 $a\ge 1$일 때

$f(x)$는 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 감소하고

$|f(-1)|=f(-1)=3a$,

$|f(1)|=|2-3a|=3a-2$이므로

$|f(-1)|>|f(1)|$

따라서 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 $|f(x)|$의 최댓값은

$f(-1)=3a=4$

즉, $a=\frac{4}{3}$이다.

이것은 $a\ge 1$을 만족시킨다.

(ii) $a<0$인 경우

$f'(x)=3x^2-3a>0$이므로 $f(x)$는 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 증가하고

$|f(1)|=f(1)=2-3a>-3a=|f(-1)|$

따라서 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 $|f(x)|$의 최댓값은 $f(1)=2-3a=4$

즉, $a=-\frac{2}{3}$이다.

이것은 $a<0$을 만족시킨다.

(i), (ii)에서

$f(x)=x^3-4x+1$ 또는 $f(x)=x^3+2x+1$

$f(x)=x^3-4x+1$일 때, $f(3)=16$

$f(x)=x^3+2x+1$일 때, $f(3)=34$

따라서 $f(3)$의 모든 값의 합은

$16+34=50$

제 5 회

정 답

1	①	2	⑤	3	①	4	⑤	5	④
6	⑤	7	①	8	②	9	③	10	④
11	②	12	④	13	③	14	④	15	③
16	②	17	③	18	⑤	19	②	20	①
21	③	22	56	23	6	24	10	25	21
26	43	27	11	28	9	29	513	30	27

풀 이

1. 지수와 로그 정답 ①

[풀이] $\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{3}{4}}=(3^{-4})^{\frac{3}{4}}$

$=3^{(-4)\times\frac{3}{4}}$

$=3^{-3}=\frac{1}{27}$

2. 집합과 명제 정답 ⑤

[풀이] $A=\{1,\ 2,\ 3\}$이고 $B^C=\{1,\ 2,\ 4\}$이므로

$A\cup B^C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

따라서 집합 $A\cup B^C$의 모든 원소의 합은

$1+2+3+4=10$

3. 수열의 극한 정답 ①

[풀이] $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2(n+2)^2-n^2}{3n^2+2n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n^2+8n+8)-n^2}{3n^2+2n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+8n+8}{3n^2+2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{8}{n}+\frac{8}{n^2}}{3+\frac{2}{n}}$

$=\frac{1+0+0}{3+0}=\frac{1}{3}$

4. 확률 정답 ⑤

[풀이] $\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)$이므로

$\mathrm{P}(B^C)-\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)=\frac{1}{9}$

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{8}{9}$

두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=0$

따라서

$\mathrm{P}(A\cup B)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{8}{9}$

5. 함수 정답 ④

[풀이] 함수 $f(x)=\frac{2x-5}{x-3}$에서

$f(x)=2+\frac{1}{x-3}$

이므로 두 점근선의 방정식은 $x=3,\ y=2$이다.

$y=x+1$에 $x=3$을 대입하면 $y=4$이고, $y=2$를 대입하면 $x=1$이므로 두 점 A, B의 좌표는 $(1,\ 2)$와 $(3,\ 4)$이다.

따라서

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3-1)^2+(4-2)^2}$

$=2\sqrt{2}$

6. 지수와 로그 정답 ⑤

[풀이] $\log_a 2=\frac{1}{3}$에서 $a^{\frac{1}{3}}=2,\ a=2^3=8$

$\log_b 6=3$에서 $b^3=6,\ b=6^{\frac{1}{3}}$

따라서

$\log_6 a+\log_b 3$

$=\log_6 8+\log_{6^{\frac{1}{3}}} 3$

$=\log_6 2^3+\frac{1}{\frac{1}{3}}\log_6 3$

$=3\log_6 2+3\log_6 3$

$=3\log_6 6=3$

7. 수열 정답 ①

[풀이] 수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 세 수 $a_2,\ a_5,\ a_8$은 이 순서대로 공차가 $3d$인 등차수열을 이루므로

$2a_5=a_2+a_8=16$

$a_5=8$

세 수 $a_3,\ a_5,\ a_7$은 이 순서대로 공차가 $2d$인 등차수열을 이루므로

$a_3+a_7=2a_5=2\times8=16$

세 수 $a_4,\ a_5,\ a_6$은 이 순서대로 공차가 d인 등차수열을 이루므로

$a_4+a_6=2a_5=2\times8=16$

따라서

$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=(a_3+a_7)+(a_4+a_6)+a_5$

$=16+16+8$

$=40$

8. 함수의 극한과 연속 정답 ②

[풀이] $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=0$

한편, $t=-x$로 놓으면 $x\longrightarrow1+$일 때 $t\longrightarrow-1-$이므로

$\lim\limits_{x\to1+}f(-x)=\lim\limits_{t\to-1-}f(t)=0$

따라서

$\lim\limits_{x\to1+}f(-x)+\lim\limits_{x\to0-}f(x)=0+0=0$

9. 수열 정답 ③

[풀이] 첫째항이 1이고 공비가 2이므로

$S_n=\frac{1\times(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$ …… ㉠

$\sum\limits_{n=1}^{10}S_n=S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{10}$

$=a_1+(a_1+a_2)+(a_1+a_2+a_3)+\cdots$

$+(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})$

$=10a_1+9a_2+8a_3+\cdots+2a_9+a_{10}$ …… ㉡

$\sum\limits_{n=1}^{9}(10-n)a_n=9a_1+8a_2+7a_3+\cdots+a_9$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

$\sum\limits_{n=1}^{10}S_n-\sum\limits_{n=1}^{9}(10-n)a_n$

$=(10a_1+9a_2+8a_3+\cdots+2a_9+a_{10})$

$-(9a_1+8a_2+7a_3+\cdots+a_9)$

$=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$

$=S_{10}=2^{10}-1$(㉠에 의해)

$=1023$

10. 함수의 극한과 연속 정답 ④

[풀이] $h(x)=f(x)g(x)$라 하면

$\lim_{x\to1-}h(x)=\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=1\times(-2+a)$

$=-2+a$

$\lim_{x\to1+}h(x)=\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=2\times0=0$

$h(1)=f(1)g(1)=1\times(-2+a)=-2+a$

함수 $h(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-}h(x)=\lim_{x\to1+}h(x)=h(1)$

즉 $-2+a=0$

따라서 $a=2$

11. 순열과 조합　　정답 ②

[풀이] $f(1)\times f(2)+f(3)$의 값이 짝수이므로

$f(1)\times f(2)$의 값이 짝수이면 $f(3)$의 값이 짝수이고,

$f(1)\times f(2)$의 값이 홀수이면 $f(3)$의 값도 홀수이다.

(i) $f(1)\times f(2)$의 값이 짝수이고 $f(3)$의 값도 짝수일 때 $f(3)$의 값이 될 수 있는 값은 2, 4로 2가지이고, $f(1)\times f(2)$의 값은 짝수이므로 $f(1)$, $f(2)$의 값 중 적어도 하나는 짝수이다. 즉, 두 수 모두 홀수가 아니면 된다. $f(1)$, $f(2)$의 값이 모두 홀수인 경우의 수는 3^2이므로 $f(1)$, $f(2)$의 값 중 적어도 하나가 짝수인 경우의 수는 5^2-3^2이다.

이때 $f(4)$의 값은 1, 2, 3, 4, 5로 5가지가 있으므로 이 경우의 함수의 개수는

$2\times(5^2-3^2)\times5=2\times16\times5=160$

(ii) $f(1)\times f(2)$의 값이 홀수이고 $f(3)$의 값도 홀수일 때 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값이 모두 홀수이므로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값은 각각 1, 3, 5 중 하나가 될 수 있다. 이때 $f(4)$의 값은 1, 2, 3, 4, 5로 5가지가 있으므로 이 경우의 함수의 개수는

${}_3\Pi_3\times5=3^3\times5=27\times5=135$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$160+135=295$

12. 다항함수의 미분법　　정답 ④

[풀이] 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표는 방정식 $xf(x)=f(x)$에서

$f(x)(x-1)=0$

$(-x^2+a)(x-1)=0$

$x=-\sqrt{a}$ 또는 $x=\sqrt{a}$ 또는 $x=1$

이므로 교점의 좌표는 $(-\sqrt{a},\ 0)$ 또는 $(\sqrt{a},\ 0)$ 또는 $(1,\ -1+a)$이다.

이때 점 P는 제1사분면에 있는 점이므로

$\mathrm{P}(1,\ -1+a)$

따라서 $b=1$, $c=-1+a$　　…… ㉠

한편, $f'(x)=-2x$, $g'(x)=-3x^2+a$이므로 점 $\mathrm{P}(1,\ -1+a)$에서의 두 접선의 기울기는 각각 -2, $-3+a$이다.

두 접선이 수직이므로

$(-2)\times(-3+a)=-1$

$a=\dfrac{7}{2}$　　…… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$c=\dfrac{5}{2}$

따라서

$a+b+c=\dfrac{7}{2}+1+\dfrac{5}{2}=7$

13. 집합과 명제　　정답 ③

[풀이] 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

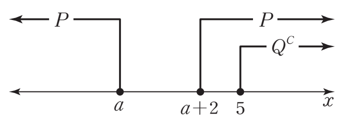
$p:(x-a)(x-a-2)\ge0$에서

$a<a+2$이므로 $x\le a$ 또는 $x\ge a+2$

즉, $P=\{x\,|\,x\le a$ 또는 $x\ge a+2\}$

조건 q의 진리집합은 $Q=\{x\,|\,x<5\}$이므로 조건 $\sim q$의 진리집합은 $Q^C=\{x\,|\,x\ge5\}$이다.

p가 $\sim q$이기 위한 필요조건이 되려면 다음 그림과 같이 $Q^C\subset P$이어야 한다.



$a+2\le5$, $a\le3$

따라서 실수 a의 최댓값은 3이다.

14. 확률　　정답 ④

[풀이] 회원 16명 중에서 임의로 동시에 3명을 선택하는 경우의 수는

${}_{16}\mathrm{C}_3=\dfrac{16\times15\times14}{3\times2\times1}=560$

(i) 1학년 2명과 2학년, 3학년 11명 중 1명을 선택하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_2\times{}_{11}\mathrm{C}_1=\dfrac{5\times4}{2\times1}\times11=110$

(ii) 2학년 2명과 1학년, 3학년 11명 중 1명을 선택하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_2\times{}_{11}\mathrm{C}_1=\dfrac{5\times4}{2\times1}\times11=110$

(iii) 3학년 2명과 1학년, 2학년 10명 중 1명을 선택하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_2\times{}_{10}\mathrm{C}_1=\dfrac{6\times5}{2\times1}\times10=150$

(i), (ii), (iii)에서 선택한 3명 중 2명만 학년이 같은 경우의 수는

$110+110+150=370$

한편, 선택한 3명 중 2명만 같은 학년인 사건을 A, 선택한 3명 중 3학년이 2명, 다른 학년이 1명인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

이때 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{370}{560}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{150}{560}$이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{150}{560}}{\frac{370}{560}}=\dfrac{15}{37}$

15. 수열　　정답 ③

[풀이] $\sum_{k=1}^{8}\{(a_k)^2-(a_{k+1})^2\}$

$=\{(a_1)^2-(a_2)^2\}+\{(a_2)^2-(a_3)^2\}$
$+\{(a_3)^2-(a_4)^2\}+\cdots+\{(a_8)^2-(a_9)^2\}$

$=(a_1)^2-(a_9)^2$

$=24$

$a_1=7$이므로

$7^2-(a_9)^2=24$

$(a_9)^2=25$

$a_9>0$이므로 $a_9=5$

16. 통계　　정답 ②

[풀이] 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 18^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$\mathrm{E}(\overline{X})=m$, $\sigma(\overline{X})=\dfrac{18}{\sqrt{9}}=6$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 6^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\le96)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{96-m}{6}\right)$　　…… ㉠

$\mathrm{P}(\overline{X}\le m-9)$

$=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{(m-9)-m}{6}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\le-\dfrac{3}{2}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{3}{2}\right)$　　…… ㉡

㉠, ㉡을 $\mathrm{P}(\overline{X}\le96)+\mathrm{P}(\overline{X}\le m-9)=1$에 대입하면

$\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{96-m}{6}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{3}{2}\right)=1$

이므로 $\dfrac{96-m}{6}=\dfrac{3}{2}$이어야 한다.

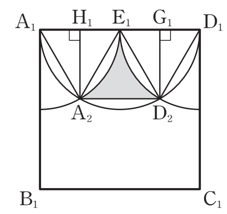
따라서 $m=87$

17. 수열의 극한　　정답 ③

[풀이] 그림 R_1에서

$\overline{\mathrm{A_1A_2}}=\overline{\mathrm{A_1E_1}}=\overline{\mathrm{E_1A_2}}=\overline{\mathrm{E_1D_2}}=\overline{\mathrm{D_1E_1}}=\overline{\mathrm{D_1D_2}}=1$

이므로 두 삼각형 $\mathrm{A_1A_2E_1}$, $\mathrm{D_1E_1D_2}$는 모두 정삼각형이다.



점 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{D_2}$에서 변 $\mathrm{A_1D_1}$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{G_1}$이라 하면

$\overline{\mathrm{G_1E_1}}=\overline{\mathrm{H_1E_1}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{A_1E_1}}=\dfrac{1}{2}$

이므로

$\overline{\mathrm{A_2D_2}}=2\times\overline{\mathrm{H_1E_1}}=2\times\dfrac{1}{2}=1$

또한, $\angle\mathrm{E_1A_1A_2}=\angle\mathrm{D_2D_1E_1}=60^\circ$이므로

$\overline{\mathrm{A_2H_1}}=\overline{\mathrm{A_1A_2}}\times\sin60^\circ=1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

이고, S_1은 사다리꼴 $\mathrm{A_1A_2D_2D_1}$의 넓이에서 중심각의 크기가 60°이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴 2개의 넓이를 빼면 된다.

따라서

$S_1=\dfrac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{A_1D_1}}+\overline{\mathrm{A_2D_2}})\times\overline{\mathrm{A_2H_1}}$

$-2\times\pi\times\overline{\mathrm{A_1A_2}}^2\times\dfrac{60^\circ}{360^\circ}$

$=\dfrac{1}{2}\times(2+1)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-2\times\pi\times1\times\dfrac{60^\circ}{360^\circ}$

$=\dfrac{3}{4}\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$

한편, $\overline{\mathrm{A_1D_1}}:\overline{\mathrm{A_2D_2}}=2:1$이므로 두 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$, $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 넓이의 비는 $4:1$이다.

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{3}{4}\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$, 공비가 $\dfrac{1}{4}$인 등비수열이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=S_1\times\dfrac{1}{1-\frac{1}{4}}$

$=\left(\dfrac{3}{4}\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)\times\dfrac{4}{3}$

$=\sqrt{3}-\dfrac{4}{9}\pi$

$=\dfrac{1}{9}(9\sqrt{3}-4\pi)$

18. 수열　　정답 ⑤

[풀이] 직선 $x=n$과 x축이 만나는 점을 R_n이라 하면 점 R_n의 좌표는 $(n,\ 0)$이고, $\mathrm{P}_n(n,\ n^2)$, $\mathrm{Q}_n(n,\ -n)$이므로

$\overline{\mathrm{OR}_n}=n$,

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=n^2-(-n)=n^2+n$

따라서 삼각형 $\mathrm{OQ}_n\mathrm{P}_n$의 넓이 a_n은

$a_n=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}\times\overline{\mathrm{OR}_n}$

$=\dfrac{1}{2}\times(n^2+n)\times n=\dfrac{n^3+n^2}{2}$

따라서

$\sum_{n=1}^{10}\dfrac{n}{a_n}=\sum_{n=1}^{10}\left(n\times\dfrac{2}{n^3+n^2}\right)$

$=\sum_{n=1}^{10}\dfrac{2}{n(n+1)}$

$$=2\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{11}\right)$$
$$=\frac{20}{11}$$

19. 통계 정답 ②

[풀이] 20장의 카드 중에서 서로 다른 2장의 카드를 선택하는 모든 경우의 수는 ${}_{20}C_2$이다. 선택된 2장의 카드에 적혀 있는 두 수를 각각 a, $b(a<b)$라 하자.
$b-a=2k(k=1, 2, 3, \cdots, 9)$일 때, $b=a+2k$이고 $b\le 20$이므로 $1\le a\le 20-2k$이다.
따라서 $b-a=2k$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$\boxed{20-2k}$

이므로 $\mathrm{P}(X=2k)=\dfrac{\boxed{20-2k}}{{}_{20}C_2}$이다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{9}\mathrm{P}(X=2k)=\sum_{k=1}^{9}\frac{\boxed{20-2k}}{{}_{20}C_2}$$
$$=\frac{1}{190}\left(20\times 9-2\times\frac{9\times 10}{2}\right)$$
$$=\boxed{\frac{9}{19}}$$

이다. 이때

$$\sum_{k=1}^{10}\mathrm{P}(X=2k-1)+\sum_{k=1}^{9}\mathrm{P}(X=2k)=\sum_{k=1}^{19}\mathrm{P}(X=k)$$

이고 $\sum_{k=1}^{19}\mathrm{P}(X=k)=1$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}\mathrm{P}(X=2k-1)=1-\sum_{k=1}^{9}\mathrm{P}(X=2k)$$
$$=1-\frac{9}{19}$$
$$=\boxed{\frac{10}{19}}$$

이다. 그러므로

$$\sum_{k=1}^{10}\mathrm{P}(X=2k-1)-\sum_{k=1}^{9}\mathrm{P}(X=2k)=\frac{10}{19}-\frac{9}{19}=\frac{1}{19}$$

따라서 $f(k)=20-2k$, $p=\dfrac{9}{19}$, $q=\dfrac{10}{19}$이므로

$$\frac{9q}{p}\times f(5)=\frac{9\times\frac{10}{19}}{\frac{9}{19}}\times 10=100$$

20. 통계 정답 ①

[풀이] X는 정규분포 $\mathrm{N}(350, \sigma^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-350}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1^2)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(X\ge 342)=\mathrm{P}\left(Z\ge -\frac{8}{\sigma}\right)$$

Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m, 2^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{Y-m}{2}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1^2)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(Y\le m+4)=\mathrm{P}\left(\frac{Y-m}{2}\le\frac{(m+4)-m}{2}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\le 2)$$

조건 (가)에서 $\mathrm{P}(X\ge 342)=\mathrm{P}(Y\le m+4)$이므로

$$\mathrm{P}\left(Z\ge -\frac{8}{\sigma}\right)=\mathrm{P}(Z\le 2)$$
$$\mathrm{P}\left(Z\ge -\frac{8}{\sigma}\right)=\mathrm{P}(Z\ge -2)$$

이어야 한다.

따라서 $-\dfrac{8}{\sigma}=-2$, $\sigma=4$

한편,

$$\mathrm{P}(220\le Y\le m+3)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{220-m}{2}\le\frac{Y-m}{2}\le\frac{m+3-m}{2}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{220-m}{2}\le Z\le 1.5\right)$$

$\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 1.5)=2\times 0.4332=0.8664$이므로

$\dfrac{220-m}{2}=-1.5$, $m=223$

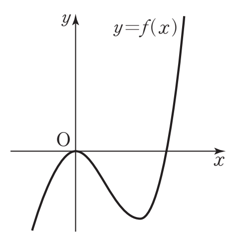
따라서 $m+\sigma=223+4=227$

21. 다항함수의 미분법 정답 ③

[풀이] $g(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$g(0)=0$

또한, 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이고 조건 (다)에 의해서 $x<0$일 때 $g(x)>0$, $0<x<4$에서 $g(x)<0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같고, $f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이다.



ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이므로
$f'(0)=0$ (참)

ㄴ. $f'(0)=0$이고 $f'(2)=0$이므로
$f'(x)=ax(x-2)$ (a는 상수)
로 놓을 수 있다. 이때

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int(ax^2-2ax)dx$$
$$=\frac{a}{3}x^3-ax^2+C \text{ (}C\text{는 적분상수)}$$

$f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=\dfrac{a}{3}(x^3-3x^2)$이므로

$f(3)=0$ (거짓)

ㄷ. $g(1)=-\dfrac{1}{2}$이므로

$$g(1)=\int_0^1 f(t)dt$$
$$=\frac{a}{3}\int_0^1(t^3-3t^2)dt$$
$$=\frac{a}{3}\left[\frac{1}{4}t^4-t^3\right]_0^1$$
$$=\frac{a}{3}\times\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{2}$$

$-\dfrac{a}{4}=-\dfrac{1}{2}$, $a=2$

따라서 $f(x)=\dfrac{2}{3}(x^3-3x^2)$

$g(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)$

$g'(x)=f(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$
$x=3$의 좌우에서 $g'(x)$의 값이 음에서 양으로 변하므로 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극소이다.
따라서 $g(x)$의 극솟값은

$$g(3)=\int_0^3 f(t)dt$$
$$=\frac{2}{3}\int_0^3(t^3-3t^2)dt$$
$$=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{4}t^4-t^3\right]_0^3$$
$$=\frac{2}{3}\times\left(-\frac{27}{4}\right)=-\frac{9}{2} \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

22. 순열과 조합 정답 56

[풀이] ${}_6H_3={}_{6+3-1}C_3={}_8C_3$

$$=\frac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1}$$
$$=56$$

23. 다항함수의 미분법 정답 6

[풀이] $f(x)=(x^2-1)(2x+1)$에서
$f'(x)=2x(2x+1)+(x^2-1)\times 2$
따라서 $f'(1)=2\times 1\times 3+0\times 2=6$

24. 함수 정답 10

[풀이] $f^{-1}(-5)=k$로 놓으면 $f(k)=-5$이므로
$2k-1=-5$, $k=-2$
따라서

$$(g\circ f^{-1})(-5)=g(f^{-1}(-5))$$
$$=g(-2)$$
$$=(-2)^2-3\times(-2)$$
$$=10$$

25. 다항함수의 적분법 정답 21

[풀이] $\int_0^x f(t)dt=3x^3+2x^2$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=9x^2+4x$
따라서

$$\int_{-2}^1 f(x)dx=\int_{-2}^1(9x^2+4x)dx$$
$$=\left[3x^3+2x^2\right]_{-2}^1$$
$$=5-(-24+8)$$
$$=21$$

26. 확률 정답 43

[풀이] 한 개의 주사위를 세 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는
$6\times 6\times 6=216$
한 개의 주사위를 세 번 던져서 나온 세 눈의 수 중 가장 큰 수를 a, 나머지 두 수를 각각 b, c라 하자.
$a>b+c$를 만족시키기 위해서는 $4\le a\le 6$이어야 한다. 따라서 a, b, c가 서로 다르고 $a>b+c$를 만족시키는 경우의 수는

(i) $a=6$일 때,
a, b, c는 서로 다르고 $b+c<6$이므로 b와 c를 순서쌍으로 나타내면 $(4, 1)$ 또는 $(3, 2)$ 또는 $(3, 1)$ 또는 $(2, 1)$이다.
이때 한 개의 주사위를 세 번 던져서 세 수 a, b, c가 나오는 순서를 정하는 경우의 수는 $3!$이므로
$4\times 3!=24$

(ii) $a=5$일 때,
a, b, c는 서로 다르고 $b+c<5$이므로 b와 c를 순서쌍으로 나타내면 $(3, 1)$ 또는 $(2, 1)$이다.
이때 한 개의 주사위를 세 번 던져서 세 수 a, b, c가 나오는 순서를 정하는 경우의 수는 $3!$이므로
$2\times 3!=12$

(iii) $a=4$일 때,
a, b, c는 서로 다르고 $b+c<4$이므로 b와 c를 순서쌍으로 나타내면 $(2, 1)$이다.
이때 한 개의 주사위를 세 번 던져서 세 수 a, b, c가 나오는 순서를 정하는 경우의 수는 $3!$이므로
$1\times 3!=6$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나온 세 눈의 수가 서로 다르고 한 수가 다른 두 수의 합보다 큰 경우의 수는

$24+12+6=42$

이므로 구하는 확률은

$\frac{42}{216}=\frac{7}{36}$

따라서 $p=36$, $q=7$이므로

$p+q=43$

27. 집합과 명제 정답 11

[풀이] $A=\{x\,|\,(x-5)(x-9)\geq 0\}$

$=\{x\,|\,x\leq 5$ 또는 $x\geq 9\}$

$A\cup B=A$를 만족시키려면 $B\subset A$이어야 한다.

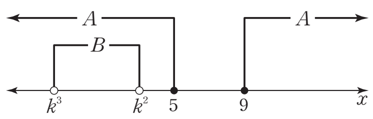
(ⅰ) $k=0$일 때, $B=\{x\,|\,x^2<0\}$, 즉 $B=\varnothing$이므로 $A\cup B=A$를 만족시킨다.

(ⅱ) k가 0보다 작은 정수일 때, $k^3<0<k^2$이므로

$B=\{x\,|\,(x-k^2)(x-k^3)<0\}$

$=\{x\,|\,k^3<x<k^2\}$

이고, $A\cup B=A$를 만족시키도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



$k<0$, $k^3<k^2$이고 $k^2\leq 5$이어야 하므로 조건을 만족시키는 정수 k는 -2, -1이다.

(ⅲ) $k=1$일 때, $B=\{x\,|\,(x-1)^2<0\}$, 즉 $B=\varnothing$이므로 $A\cup B=A$를 만족시킨다.

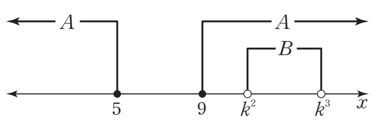
(ⅳ) k가 1보다 큰 정수일 때,

$k^2<k^3$, $k^2\geq 4$, $k^3\geq 8$이므로

$B=\{x\,|\,(x-k^2)(x-k^3)<0\}$

$=\{x\,|\,k^2<x<k^3\}$

이고, $A\cup B=A$를 만족시키도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



$k^2\geq 9$이어야 하므로 $k\geq 3$이다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 10보다 작은 모든 정수 k의 개수는 -2, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9로 11이다.

28. 다항함수의 적분법 정답 9

[풀이] $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}f\left(-1+\frac{2k}{n}\right)=\int_{-1}^{1}f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(x^2+ax+b)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_{-1}^{1}$$
$$=\frac{2}{3}+2b$$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}f\left(-1+\frac{2k}{n}\right)=0$이므로

$\frac{2}{3}+2b=0$, $b=-\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=x^2+ax-\frac{1}{3}$이므로

$f(0)=-\frac{1}{3}$

따라서 $81\{f(0)\}^2=81\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2=9$

29. 수열 정답 513

[풀이] 3, 3^2, 3^3, 3^4, $\cdots$를 각각 2로 나누면 나머지가 모두 1이므로

$A_1=\{1, 2, 3, \cdots\}$, $a_1=1$

3, 3^2, 3^3, 3^4, $\cdots$를 2^2으로 나누면 나머지는 3, 1, 3, 1, 3, 1, $\cdots$와 같이 3, 1이 반복되므로

$A_2=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$, $a_2=2$

3, 3^2, 3^3, 3^4, $\cdots$를 2^3으로 나누면 나머지는 3, 1, 3, 1, 3, 1, $\cdots$와 같이 3, 1이 반복되므로

$A_3=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$, $a_3=2$

즉 $3^2=2^3\times 1+1$

이때 $q_1=1$로 놓으면

$3^2=2^3\times q_1+1$ …… ㉠

㉠의 양변을 제곱하면

$3^4=(2^3\times q_1+1)^2=2^6\times q_1^2+2^4\times q_1+1$

$=2^4(2^2\times q_1^2+q_1)+1$

$q_2=2^2\times q_1^2+q_1$으로 놓으면

$3^4=2^4\times q_2+1$ …… ㉡

이므로 $4\in A_4$

㉡의 양변을 제곱하면

$3^8=(2^4\times q_2+1)^2=2^8\times q_2^2+2^5\times q_2+1$

$=2^5(2^3\times q_2^2+q_2)+1$

$q_3=2^3\times q_2^2+q_2$로 놓으면

$3^8=2^5\times q_3+1$

이므로 $8\in A_5$

마찬가지로 계산하면 $n\geq 4$일 때

$3^{2^{n-2}}=2^n\times q_{n-2}+1$ (q_{n-2}는 홀수) …… ㉢

이므로 $2^{n-2}\in A_n$

이때 $a_n=k$($1\leq k\leq 2^{n-2}$, k는 자연수)라 하면

$3^k=2^n\times p+1$(p는 자연수)이고, A_n은 k의 배수의 집합이다.

이때 2^{n-2}은 k의 배수이어야 하므로 k는 1, 2, 2^2, 2^3, $\cdots$, 2^{n-2} 중 하나이다.

그런데 $k=2^{n-3}$일 때, ㉠과 ㉢에서

$3^{2^{n-3}}=2^{n-1}\times q_{n-3}+1$

이고, q_{n-3}은 홀수이므로

$3^k=2^n\times p+1$ …… ㉣

을 만족시키는 자연수 p가 존재하지 않는다.

마찬가지로 k가 1, 2, 2^2, 2^3, $\cdots$, 2^{n-4}일 때에도 ㉣을 만족시키는 자연수 p가 존재하지 않는다.

따라서 $k=2^{n-2}(n\geq 4)$, $a_3=2$이므로 $a_n=2^{n-2}(n\geq 3)$

따라서

$$\sum_{n=1}^{10}a_n=a_1+a_2+\sum_{n=3}^{10}a_n$$
$$=1+2+\sum_{n=3}^{10}2^{n-2}$$
$$=3+\frac{2(2^8-1)}{2-1}$$
$$=3+2^9-2=513$$

30. 다항함수의 미분법 정답 27

[풀이] 조건 (가)에서 $f(0)=0$이므로

$f(x)=x(x^2+px+q)$ (p, q는 상수)

로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2px+q$

$f'(0)=0$이므로 $q=0$

따라서 $f(x)=x^2(x+p)$

$3f(1)=g(1)$이므로

$3(1+p)=3+3a$, $p=a$

$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$h(x)=x^3+(a-3)x^2-3ax=x(x-3)(x+a)$

$h'(x)=3x^2+2(a-3)x-3a$

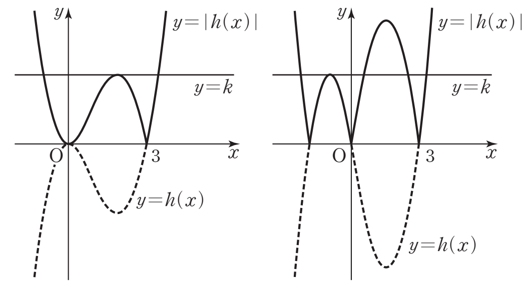
이차방정식 $3x^2+2(a-3)x-3a=0$ …… ㉠

의 판별식을 D라 하면

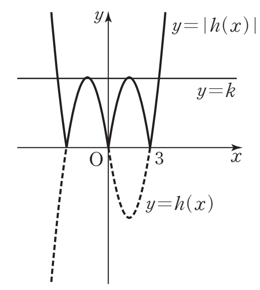
$$\frac{D}{4}=(a-3)^2+9a$$
$$=a^2+3a+9$$
$$=\left(a+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{4}>0$$

이므로 함수 $h(x)$는 항상 극댓값과 극솟값을 갖는다.

함수 $h(x)$의 극댓값 또는 극솟값이 0인 경우와 극댓값과 극솟값의 절댓값의 크기가 다른 경우는 그림과 같이 함수 $y=|h(x)|$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 홀수인 경우가 나올 수 있다.



따라서 조건 (다)를 만족시키기 위해서는 함수 $h(x)$의 극댓값과 극솟값, 즉 그림과 같이 함수 $|h(x)|$의 두 극댓값이 같아야 한다.



이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면 $h(\alpha)=-h(\beta)$이어야 한다.

$\alpha^3+(a-3)\alpha^2-3a\alpha=-\{\beta^3+(a-3)\beta^2-3a\beta\}$

$\alpha^3+\beta^3+(a-3)(\alpha^2+\beta^2)-3a(\alpha+\beta)=0$

이차방정식 ㉠의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=-\frac{2(a-3)}{3}$, $\alpha\beta=-a$

이므로

$$\alpha^3+\beta^3+(a-3)(\alpha^2+\beta^2)-3a(\alpha+\beta)$$
$$=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$
$$\quad+(a-3)\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}-3a(\alpha+\beta)$$
$$=-\frac{8(a-3)^3}{27}-2a(a-3)$$
$$\quad+(a-3)\left\{\frac{4(a-3)^2}{9}+2a\right\}+2a(a-3)$$
$$=\frac{4(a-3)^3}{27}+2a(a-3)$$
$$=\frac{2}{27}(a-3)(2a+3)(a+6)=0$$

따라서 $a=3$ 또는 $a=-\frac{3}{2}$ 또는 $a=-6$이므로 모든 실수 a의 값의 곱은

$3\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times(-6)=27$