수학 전문가 그룹

N.G.D

math whiz

2021학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가

NGD

2021학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가 문제지

수학 영역
(나 형)

성명	

수험번호	

○ 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정확히 기재하시오.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 유형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 정답에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점, 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

NGD

수학 영역(나 형)

제2교시

5지선다형

1. $\sqrt[3]{2}\times 2^{\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

2. 함수 $f(x)=x^3-2x-7$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)+\tan^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)$의 값은? [2점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ 3 ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

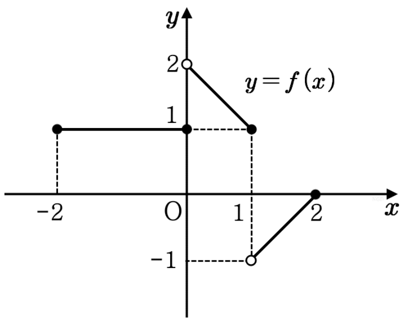
4. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+9x+8}{x+1}$ 의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

5. 두 사건 A, B에 대하여 $P(A)=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{4}{5}$, $P(A\cup B)=\frac{9}{10}$ 일 때, $P(B|A)$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{7}{12}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

6. 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0^+} f(x)+\lim_{x\to 2^-} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

7. 공차가 -3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3a_7=64,\quad a_8>0$$

일 때, a_2의 값은? [3점]

① 17 ② 18 ③ 19
④ 20 ⑤ 21

8. 네 개의 수 1, 3, 5, 7 중에서 임의로 선택한 한 개의 수를 a라 하고, 네 개의 수 4, 6, 8, 10 중에서 임의로 선택한 한 개의 수를 b라 하자. $1 < \frac{b}{a} < 4$일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{5}{8}$
④ $\frac{11}{16}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

9. $\overline{\mathrm{AB}} = 8$이고 $\angle \mathrm{A} = 45^\circ$, $\angle \mathrm{B} = 15^\circ$인 삼각형 ABC에서 선분 BC의 길이는? [3점]

① $2\sqrt{6}$ ② $\frac{7\sqrt{6}}{3}$ ③ $\frac{8\sqrt{6}}{3}$
④ $3\sqrt{6}$ ⑤ $\frac{10\sqrt{6}}{3}$

10. $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax + b & (x < 1) \\ bx + 4 & (x \ge 1) \end{cases}$ 이 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a + b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

11. n이 자연수일 때, x에 대한 이차방정식 $(n^2+6n+5)x^2-(n+5)x-1=0$의 두 근의 합을 a_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k}$의 값은? [3점]

① 65 ② 70 ③ 75 ④ 80 ⑤ 85

12. 어느 회사에서 일하는 플랫폼 근로자의 일주일 근무 시간은 평균이 m시간, 표준편차가 5시간 인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 일하는 플랫폼 근로자 중에서 임의추출한 36명의 질주일 근무시간의 표본평균이 38시간 이상 일 확률을 오른쪽 정규분포표를 이용하여 구한 값이 0.9332일 때, m의 값은? [3점]

표준정규분포표

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 38.25 ② 38.75 ③ 39.25 ④ 39.75 ⑤ 40.25

13. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = t^2 - at \quad (a > 0)$$

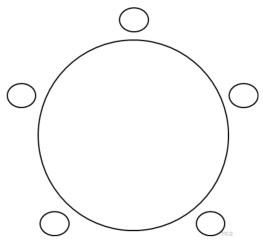
이다. 점 P가 시각 $t = 0$일 때부터 움직이는 방향이 바뀔 때까지 움직인 거리가 $\frac{9}{2}$이다. 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

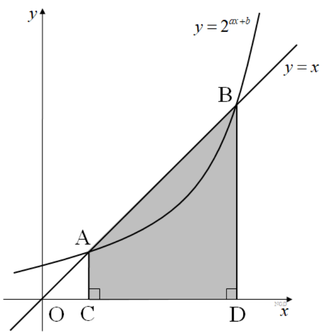
14. 다섯 명이 둘러앉을 수 있는 원 모양의 탁자와 두 학생 A, B를 포함한 8명의 학생이 있다. 이 8명의 학생 중에서 A, B를 포함하여 5명을 선택하고 이 5명의 학생 모두를 일정한 간격으로 탁자에 둘러앉게 할 때, A와 B가 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

[4점]

① 180 ② 200 ③ 220 ④ 240 ⑤ 260



15. 곡선 $y=2^{ax+b}$과 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AB}=6\sqrt{2}$이고 사각형 ACDB의 넓이가 30일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

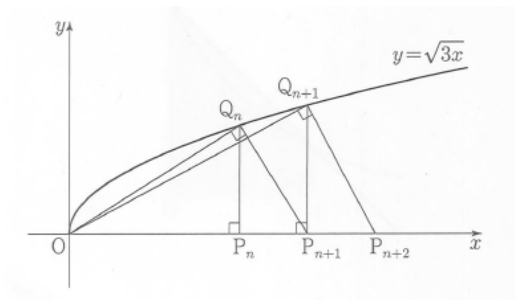


① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

16. 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 x축 위의 점 $\mathrm{P_n}$과 곡선 $y=\sqrt{3x}$ 위의 점 $\mathrm{Q_n}$이 있다.

- 선분 $\mathrm{OP_n}$과 선분 $\mathrm{P_nQ_n}$이 서로 수직이다.
- 선분 $\mathrm{OQ_n}$과 선분 $\mathrm{Q_nP_{n+1}}$이 서로 수직이다.

다음은 점 $\mathrm{P_1}$의 좌표가 $(1,\ 0)$일 때, 삼각형 $\mathrm{OP_{n+1}Q_n}$의 넓이 $\mathrm{A_n}$을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)



모든 자연수 n에 대하여 점 $\mathrm{P_n}$의 좌표를 $(a_n,\ 0)$이라 하자. $\overline{\mathrm{OP_{n+1}}}=\overline{\mathrm{OP_n}}+\overline{\mathrm{P_nP_{n+1}}}$이므로

$a_{n+1}=a_n+\overline{\mathrm{P_nP_{n+1}}}$

이다. 삼각형 $\mathrm{OP_nQ_n}$과 삼각형 $\mathrm{Q_nP_nP_{n+1}}$이 닮음이므로

$\overline{\mathrm{OP_n}} : \overline{\mathrm{P_nQ_n}} = \overline{\mathrm{P_nQ_n}} : \overline{\mathrm{P_nP_{n+1}}}$

이고, 점 $\mathrm{Q_n}$의 좌표는 $(a_n,\ \sqrt{3a_n})$이므로

$\overline{\mathrm{P_nP_{n+1}}}=\boxed{(가)}$

이다. 따라서 삼각형 $\mathrm{OP_{n+1}Q_n}$의 넓이 $\mathrm{A_n}$은

$\mathrm{A_n}=\frac{1}{2}\times(\boxed{(나)})\times\sqrt{9n-6}$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p+f(8)$의 값은? [4점]

① 20 ② 22 ③ 24
④ 26 ⑤ 28

17. $\angle A = 90^\circ$ 이고 $\overline{AB} = 2\log_2 x$, $\overline{AC} = \log_4 \frac{16}{x}$ 인 삼각형 ABC 의 넓이를 $S(x)$라 하자. $S(x)$가 $x = a$에서 최댓값 M를 가질 때, $a + M$의 값은? (단, $1 < x < 16$) [4점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

18. 최고차항의 계수가 a인 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$|f'(x)| \le 4x^2 + 5$$

를 만족시킨다. 함수 $y = f(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x = 1$일 때, 실수 a의 최댓값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$　④ 3　⑤ $\frac{7}{2}$

19. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 두 장의 카드를 동시에 꺼내어 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 두 번 반복한다. 첫 번째 시행에서 확인한 두 수 중 작은 수를 a_1, 큰 수를 a_2라 하고, 두 번째 시행에서 확인한 두 수 중 작은 수를 b_1, 큰 수를 b_2라 하자. 두 집합 A, B를

$$A=\{x \mid a_1 \le x \le a_2\}, \quad B=\{x \mid b_1 \le x \le b_2\}$$

라 할 때, $A \cap B \ne \varnothing$일 확률은? [4점]

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{11}{15}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{13}{15}$

20. 실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) \ge g(x)$
(나) $f(x)+g(x)=x^2+3x$
(다) $f(x)g(x)=(x^2+1)(3x-1)$

$\int_0^2 f(x)dx$의 값은? [4점]

① $\frac{23}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{29}{6}$ ④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$

21. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases}2a_n+a_{n+1} & (a_n \le a_{n+1}) \\ a_n+a_{n+1} & (a_n > a_{n+1})\end{cases}$$ 을 만족시킨다.

$a_3=2$, $a_6=19$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

단답형

22. 다항식 $(x+3)^8$ 의 전개식에서 x^7의 계수를 구하시오. [3점]

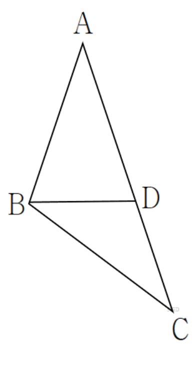
23. 함수 $f(x)$가

$$f'(x)=-x^3+3,\ f(2)=10$$

을 만족시킬 때, $f(0)$의 값을 구하시오. [3점]

24. $\log_5 40 + \log_5 \frac{5}{8}$ 의 값을 구하시오 [3점]

25. $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{AC}}=10$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위에 점 D를 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}$가 되도록 잡는다. $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{15}$ 일 때, 선분 BC의 길이를 k라 하자. k^2의 값을 구하시오. [3점]



26. 방정식 $x^3-x^2-8x+k=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2일 때, 양수 k의 값을 구하시오. [4점]

27. 두 이산확률변수 X, Y의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	d	1

Y	11	21	31	41	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	a	b	c	d	1

$\mathrm{E}(X)=2$, $\mathrm{E}(X^2)=5$일 때, $\mathrm{E}(Y)+\mathrm{V}(Y)$의 값을 구하시오. [4점]

28. 함수 $f(x)=-x^2-4x+a$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

가 닫힌구간 $[0, 1]$에서 증가하도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오. [4점]

29. 흰 공 4개와 검은 공 6개를 세 상자 A, B, C에 남김없이 나누어 넣을 때, 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

30. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=f(3)=0$
> (나) 집합 $\{x \mid x \geq 1$이고 $f'(x)=0\}$의 원소의 개수는 1이다.

상수 a에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)f(a-x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\dfrac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}$의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2021년도
대수능
9월 모평

수학 전문가 그룹

N.G.D

math whiz

강유식 - 대전 - 헤럴드영수학원 - ☎ 010.2585.2997
강혁 - 서울대치 - 모아시스수학 - ☎ 010.3790.1715
구덕문 - 부산해운대 - 아연학원 - ☎ 010.3558.6123
권도형 - 울산옥동 - 더플러스수학학원 - ☎ 052.260.9981
권세욱 - 경기광명 - 하피수학 - ☎ 02.899.7360
김광수 - 경남양산 - 넥서스영어수학전문학원 - ☎ 055.381.0582
김광현 - 인천송도 - 선심수학학원 - ☎ 032.8181.999
김대호 - 충북청주 - 온수학전문학원 - ☎ 010.2709.0502
김문수 - 경기용인 - 생각의창수학학원 - ☎ 010.2105.8463
김미선 - 경기분당 - 패러다임수학 - ☎ 031.715.5715
김상운 - 대구수성 - 진솔수학 - ☎ 053.742.0553
김성민 - 충남천안 - GoMSLab.수학학원 - ☎ 010.6315.3720
김영민 - 서울서초 - 다온수학학원 - ☎ 02.532.6650
김영제 - 서울대치 - 상산브레인학원 - ☎ 010.2737.7997
김지선 - 서울반포 - 에프엑스수학학원 - ☎ 02.594.4888
김태현 - 서울대치 - 미투스카이 - ☎ 010.4953.1211
김하늘 - 서울대치 - 역경패도수학전문 - ☎ 02.566.7854
김훈 - 부산부산진구 - 매쓰힐수학학원 ☎ 051.816.1705
나혜미 - 서울광진 - 늘푸른수학원 - ☎ 010.9161.8595
남기석 - 위례 - 더착한수학 - ☎ 010.2771.3822
남호성 - 서울은평 - 퍼씰수학 - - ☎ 02.385.9101
노인주 - 서울대치 - CMS - ☎ 010.2723.7885
류병욱 - 성남분당 - 엘피수학 - ☎ 031.711.2534
박경남 - 경남김해 - 김해율하고등학교 - ☎ 010.8495.7811
박보석 - 서울동대문 - 매쓰멘토스학원 - ☎ 02.3390.4806
박원식 - 서울중계 - 수아인학원 - ☎ 02.933.1211
박정균 - 하당교연학원 - ☎ 010.7370.7719
박정수 - 서울대치 - 해름학원•개념상상 - ☎ 010.9043.8353
박준석 - 서울대치 - 해냄학원 - ☎ 010.8644.1080
박현철 - 서울마포 - 시그마식스수학학원 - ☎ 02.322.4786
반영민 - 서울대치 - 시대인재 - ☎ 010.5414.1028
서민국 - 서울대치 - 시대인재 - ☎ 010.8346.7440
송동일 - 서울대치 - 뷰티풀마인드수학학원 - - ☎ 02.6338.1210
신동관 - 성남분당 - 올림피아드에듀신샘수학 - ☎ 031.712.4312
신동휘 - 대구수성/달서 - 알파학원 - ☎ 010.9847.1793
신헌섭 - 부산화명 - 신수학전문학원 - ☎ 051.361.2154
윤영호 - 서울은평 - SP학원 - ☎ 010.5344.6057
윤혜영 - 서울대치 - 수수배학원 - ☎ 010.7497.3235
윤홍식 - 서울송파 - 구주이배수학학원 - ☎ 02.424.9624
이경덕 - 부산동래 - 수딴's수학 - ☎ 051.924.2358
이광희 - 서울대치 - 메이드학원 - ☎ 010.4134.7134
이동훈 - 서울대치 - 아카데미아학원 - ☎ 02.508.6971
이상학 - 경기일산 - 이투스네오 - ☎ 010.8891.0043
이상혁 - 광주수완 - SH수학 - ☎ 010.6399.0910
이소연 - 서울대치 - SY전문교육 - ☎ 010.9968.2190
이수동 - 경기부천 - E&T수학전문학원
이수민 - 경기오산 - 스마트쎈큰수학 - ☎ 010.9790.9731
이용우 - 강원홍천 - 블루밍타임클래스 - ☎ 010.3126.9531
이정환 - 온라인 - 이투스•분당청솔•강남하이퍼 - ☎ 010.3266.3884
이종환 - 서울마포 - 카이수학전문학원 - ☎ 02.706.6173
이중현 - 성남분당 - 수이학원 - ☎ 010.4029.7138
이충안 - 서울성북 - 채움수학 - ☎ 010.7919.3536
장규만 - 세종충청 - UTOEDU - ☎ 010.6226.7268
장석원 - 서울목동 - 목동미래탐구 - ☎ 010.4744.2481
정영기 - 경기의정부 - 정영기수학 - ☎ 010.6398.8856
정은혁 - 경기부천 - 퀸즈아카데미 - ☎ 010.7311.0710
정하윤 - 서울중계 - 랑수학 - ☎ 02.939.3420
조기찬 - 울산 - 동은학원(남구•중구) - ☎ 011.488.0870
조용호 - 대전둔산 - 오르고수학학원 - ☎ 010.6474.3800
조훈진 - 서울목동 - 바람수학학원 - ☎ 02.2647.2511
지요한 - 부산사직 - 트리플(Tri.pl)수학학원 - ☎ 010.9074.5658
최승인 - 서울마포 - 종로학원 - ☎ 010.3787.7779
한연호 - 서울서초 - 상운학원 - ☎ 02.3472.9452
허접 - 상도•대방•노량진 - 수준별맞춤과외 - ☎ 010.6471.0175
허진 - 경기수원 - 이자경수학 - ☎ 031.236.8558
황완수 - 경기안양 - 황선생수학 - ☎ 010.5549.1138
황은지 - 경기안산 - 멘토수학 - ☎ 031.495.0419
Ray - 세종새롬 - 4차원수학 - ☎ 010.8449.1974
<객원 member>
류용수 - 대치분당 - 러셀 - ☎ 010.3311.5577
송명석 - 경기안산 - 명석수학학원 - ☎ 031.487.7311
이세진 - 부산동래 - 이세진수학학원 - ☎ 010.8012.1021
채종원 - 분석수학•강서1관 - ☎ 010.8994.2002
최자호 - 동탄신도시 - 자호수학전문학원 - ☎ 031.8003.4533
최재영 - 대구달서 - 세르파수학교습소 - ☎ 010.2577.4221
최지혜 - 경기안양 - 아르케학원 - ☎ 010.9110.0701

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

〈2021학년도 9월 평가원 수학(나 형)〉

2021학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가									
1	②	2	①	3	④	4	②	5	⑤
6	⑤	7	③	8	②	9	③	10	④
11	①	12	③	13	③	14	④	15	④
16	⑤	17	①	18	②	19	⑤	20	③
21	②	22	24	23	8	24	2	25	41
26	12	27	121	28	5	29	168	30	105

1) **정답** ②

문제 해설

$$\sqrt[3]{2}\times 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2}\times \sqrt[3]{2^2}$$
$$= \sqrt[3]{2^3}$$
$$= 2$$

다른 풀이

$$\sqrt[3]{2}\times 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{2}{3}}$$
$$= 2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}$$
$$= 2^1$$
$$= 2$$

2) **정답** ①

문제 해설

$f(x)=x^3-2x-7$ 에서

$f'(x)=3x^2-2$이므로 $f'(1)=3\times 1^2-2=1$

3) **정답** ④

문제 해설

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)+\tan^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+(-\sqrt{3})^2=\frac{3}{4}+3=\frac{15}{4}$$

4) **정답** ②

문제 해설

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+9x+8}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+8)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1}(x+8)$$
$$=7$$

5) **정답** ⑤

문제 해설

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ 에서

$$\frac{9}{10}=\frac{2}{5}+\frac{4}{5}-P(A\cap B)$$
$$P(A\cap B)=\frac{6}{5}-\frac{9}{10}=\frac{3}{10}$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}}=\frac{3}{4}$$

6) **정답** ⑤

문제 해설

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)+\lim_{x\to 2^-}f(x)= 2+0=2$$

7) **정답** ③

문제 해설

$a_3a_7=(a_1+(3-1)\cdot(-3))\times(a_1+(7-1)\cdot(-3))$

$=(a_1-6)(a_1-18)=64$가 된다.

정리하면 $a_1^2-24a_1+108=64$

$(a_1-2)(a_1-22)=0$이고 $a_8>0$이므로 $a_1=22$이다.

$\therefore\ a_2=a_1+(-3)=19$

8) **정답** ②

문제 해설

$a=1$일 때 $1<\frac{b}{a}<4$를 만족하는 b는 없다.

$a=3$일 때 $1<\frac{b}{a}<4$를 만족하는 $b=4,\ 6,\ 8,\ 10$

$a=5$일 때 $1<\frac{b}{a}<4$를 만족하는 $b=6,\ 8,\ 10$

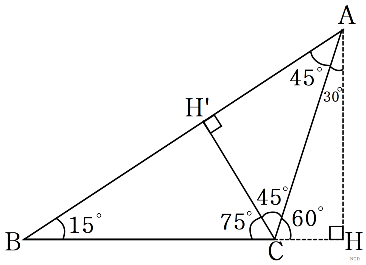
$a=7$일 때 $1<\frac{b}{a}<4$를 만족하는 $b=8,\ 10$

이므로 조건을 만족하는 가짓수는 9가지이다.

$\therefore\ \frac{9}{4\times 4}=\frac{9}{16}$

9) **정답** ③

문제 해설



$\overline{CH}=x$라 하면

$\triangle ACH$에서 특수각의 비에 의해 $\overline{AH}=\sqrt{3}x$

$\triangle ACH'$에서 특수각의 비에 의해 $\overline{CH'}=\sqrt{2}x$이다.

$\angle A=\angle BCH'$, $\angle B$는 공통

$\triangle ABH \backsim \triangle CH'B$ (AA닮음)

$\sin 15^\circ = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{CH'}}{\overline{BC}}$

$\dfrac{\sqrt{3}x}{8} = \dfrac{\sqrt{2}x}{\overline{BC}}$

$\overline{BC} = \dfrac{8\sqrt{6}}{3}$

10) 정답 ④

문제 해설

$f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능 하므로

$x=1$에서 연속이고 $x=1$에서 미분계수가 존재한다.

(i) $x=1$에서 연속이다.

$\lim\limits_{x\to1-}(x^3+ax+b)=1+a+b$,

$\lim\limits_{x\to1+}(bx+4)=b+4$, $f(1)=b+4$이므로

$1+a+b=b+4$에서 $a=3$이다.

(ii) $x=1$에서 미분계수가 존재한다.

$f'(x)=\begin{cases} 3x^2+a & (x>1) \\ b & (x<1) \end{cases}$에서

$\lim\limits_{x\to1+}f'(x)=3+a$, $\lim\limits_{x\to1-}f'(x)=b$에서

$b=3+a$이고 $a=3$이므로 $b=6$이다.

따라서 $a+b=9$이다.

11) 정답 ①

문제 해설

$(n^2+6n+5)x^2-(n+5)x-1=0$에서 두 근을 $x=\alpha$, $x=\beta$라 고 하면, $a_n=\alpha+\beta=\dfrac{n+5}{(n+1)(n+5)}=\dfrac{1}{n+1}$

$\sum\limits_{k=1}^{10}\dfrac{1}{a_k}=\sum\limits_{k=1}^{10}(k+1)=\sum\limits_{k=1}^{10}k+\sum\limits_{k=1}^{10}1=\dfrac{10(1+10)}{2}+10=65$

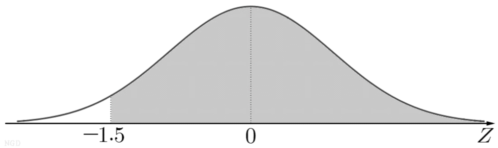
12) 정답 ③

문제 해설

$N(m,\ 5^2)$ $n=36$ 에서 $N\left(m,\ \left(\dfrac{5}{6}\right)^2\right)$

$P(\overline{X}\geq 38)=0.9332$

$P\left(Z\geq \dfrac{38-m}{\frac{5}{6}}\right)=0.9332$



$\dfrac{38-m}{\frac{5}{6}}=-\dfrac{3}{2}$

$38-m=-\dfrac{5}{4}$

$m=39.25$

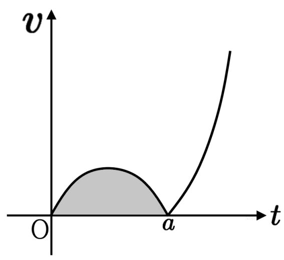
13) 정답 ③

문제 해설 점 P의 속도 $v(t)=t^2-at$이므로, 움직이는 방향이 바뀌는 시각은 $v(t)=0$의 해와 같고, 그래프가 음에서 양, 또는 양에서 음으로 변하는 점의 t값과 같다.

$v(t)=t^2-at=t(t-a)$에서 $t=0$, $t=a$ 점에서 움직이는 방향이 바뀌게 되며, $t\neq0$이므로 $t=a$ 일 때 방향이 바뀐다.

이 때 $0\leq t\leq a$ 에서 $v(t)\leq 0$ 이므로,

$t=0$에서 $t=a$까지 움직인 거리는 $\int_0^a |t^2-at|dt$로 둘 수 있고, 그래프로 표현해 보면 아래 그래프의 음영 부분의 넓이와 같다.



$$\int_0^a |t^2-at|dt=-\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}at^2\right]_0^a$$
$$=-\left(\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^3\right)$$
$$=\frac{1}{6}a^3=\frac{9}{2}$$ 이므로

$a^3 = 27$

$\therefore\ a = 3$

14) 정답 ④

문제해설

먼저 A, B를 제외한 6명 중에서 3명을 선택하는 경우의 수는

$_6C_3 = 20$

A, B를 포함한 5명을 A, B를 이웃하게 하여 원 모양의 탁자에 둘러앉게 하는 경우의 수는

$(4-1)! \times 2! = 12$

따라서 구하고자 하는 경우의 수는

$20 \times 12 = 240$

15) 정답 ④

문제해설 직선 $y = x$의 두 점 A, B의 x좌표를 α, β (단, $\alpha < \beta$)라 하면 A(α, α), B(β, β)이다.

(ⅰ) $\overline{AB} = 6\sqrt{2}$이므로 $\sqrt{(\beta-\alpha)^2 + (\beta-\alpha)^2} = 6\sqrt{2}$

$\therefore\ \beta - \alpha = 6$

(ⅱ) 사각형 ACDB의 넓이가 30이므로 $(\alpha+\beta)(\beta-\alpha) \times \frac{1}{2} = 30$,

$\therefore\ \alpha + \beta = 10$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\alpha = 2$, $\beta = 8$ … ㉠

또한, 두 점 A, B는 곡선 $y = 2^{ax+b}$위의 점이므로

$\alpha = 2^{a\alpha+b}$, $\beta = 2^{a\beta+b}$ … ㉡

㉠, ㉡에서 $2 = 2^{2a+b}$, $8 = 2^{8a+b}$

따라서 $2a + b = 1$, $8a + b = 3$

두 식을 연립하면 $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{3}$

$\therefore\ a + b = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

16) 정답 ⑤

문제해설

$\overline{OP_n} : \overline{P_nQ_n} = \overline{P_nQ_n} : \overline{P_nP_{n+1}}$ 에서

$(\overline{P_nQ_n})^2 = \overline{OP_n} \times \overline{P_nP_{n+1}}$이고, $\overline{OP_n} = a_n$, $\overline{P_nQ_n} = \sqrt{3a_n}$

이므로 $(\sqrt{3a_n})^2 = a_n \times \overline{P_nP_{n+1}}$이다.

따라서 $\overline{P_nP_{n+1}} = 3$, $\boxed{(가)} = 3$

그리고 $\overline{OP_{n+1}} = \overline{OP_n} + \overline{P_nP_{n+1}}$이므로

$a_{n+1} = a_n + \overline{P_nP_{n+1}}$

$a_{n+1} = a_n + 3$이 된다. a_n은 등차수열이므로

$a_n = a_1 + (n-1) \times 3 = 3n - 2$

삼각형 $OP_{n+1}Q_n$의 넓이

$A_n = \frac{1}{2} \times \overline{OP_{n+1}} \times \overline{P_nQ_n} = \frac{1}{2} \times a_{n+1} \times \sqrt{3a_n}$

$= \frac{1}{2} \times (3n+1) \times \sqrt{9n-6}$, $\boxed{(나)} = 3n+1$

따라서 $p = 3$, $f(n) = 3n + 1$

$p + f(8) = 28$

17) 정답 ①

문제해설

$S(x) = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC}$

$= \frac{1}{2} \times 2\log_2 x \times \log_4 \frac{16}{x}$

$= \frac{1}{2} \times 2\log_2 x \times \frac{1}{2}(\log_2 16 - \log_2 x)$

$= \frac{1}{2} \times \log_2 x \times (4 - \log_2 x)\ \ (1 < x < 16)$

$\log_2 x = t$로 치환하면

$S(x) = \frac{1}{2} t(4-t)\ \ (0 < t < 4)$

$= \frac{1}{2}(t-2)^2 + 2$

$t = 2$일 때, 즉 $\log_2 x = 2$, $x = 4$일 때,

$S(x)$는 최댓값 2를 갖는다.

$a = 4$, $M = 2$

$\therefore\ a + M = 6$

18) 정답 ②

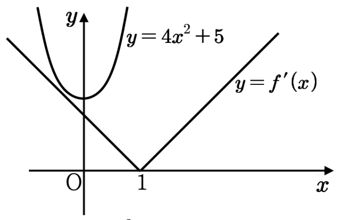
문제해설

대칭축이 $x = 1$이므로

$f(x) = a(x-1)^2 + b$라 하면

$f'(x) = 2ax - 2a = 2a(x-1)$이다.

그래프가 아래와 같이 그려지므로 $a \geq 0$, $x \leq 1$인 경우에만 판별식을 사용하여 확인해주면 된다.



$|f'(x)| \leq 4x^2 + 5$

$-2ax + 2a \leq 4x^2 + 5$

$4x^2 + 2ax - 2a + 5 \geq 0$에서

$D/4 = a^2 - 4(-2a+5) \leq 0$

$a+8a-20 \le 0$

$(a-2)(a+10) \le 0$

$-10 \le a \le 2$이므로 a의 최댓값은 2이다.

19) 정답 ⑤

문제 해설 구하는 확률을 $\mathrm{P}(X)$라 하면 전체에서 $A \cap B = \varnothing$인 경우를 제외하는 여사건의 확률이므로 $1-\mathrm{P}(X^c)$을 구하면 된다.

(1) $a_2=2$일 때, a_1은 1가지이고 b_1, b_2는 3, 4, 5, 6중 두 개를 선택하는 ${}_4\mathrm{C}_2$이므로 이 경우의 수는 $1 \times {}_4\mathrm{C}_2 = 6$가지이다.

(2) $a_2=3$일 때, a_1은 1, 2중 한 개를 선택하는 ${}_2\mathrm{C}_1$이고, b_1, b_2는 4, 5, 6중 두 개를 선택하는 ${}_3\mathrm{C}_2$이므로 이 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_2 = 6$이다.

(3) $a_2=4$일 때, a_1은 1, 2, 3중 한 개를 선택하는 ${}_3\mathrm{C}_1$이고, b_1, b_2는 5, 6중 두 개를 선택하는 ${}_2\mathrm{C}_2$이므로 이 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_2 = 3$이다.

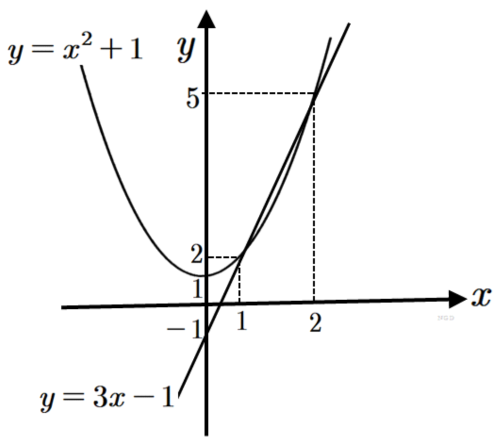
그리고 A와 B는 순서가 바뀔 수 도 있으므로, $A \cap B = \varnothing$인 경우의 수는 $(6+6+3) \times 2 = 30$이고, 전체 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_2 \times {}_6\mathrm{C}_2 = 225$이다.

따라서 $\mathrm{P}(X^c) = \dfrac{30}{225} = \dfrac{2}{15}$이고, 구하는 확률은 다음과 같다.

$\mathrm{P}(X) = 1-\mathrm{P}(X^c) = 1-\dfrac{2}{15} = \dfrac{13}{15}$이다.

20) 정답 ③

문제 해설



연속인 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수에서 성립할 조건은

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x<1,\ x \ge 2) \\ 3x-1 & (1 \le x < 2) \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} 3x-1 & (x<1,\ x \ge 2) \\ x^2+1 & (1 \le x < 2) \end{cases}$$

따라서

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 (x^2+1)dx + \int_1^2 (3x-1)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1 + \left[\frac{3}{2}x^2-x\right]_1^2 = \left(\frac{1}{3}+1\right)-0+(6-2)-\left(\frac{3}{2}-1\right)$$

$$= \frac{4}{3}+\frac{7}{2} = \frac{29}{6}$$

21) 정답 ②

문제 해설

$$a_5 = \begin{cases} 2a_3+a_4 = a_4+4 & (a_4 \ge 2) \\ a_3+a_4 = a_4+2 & (a_4 < 2) \end{cases}$$에서 $a_3=2$이므로

항상 $a_4 \le a_5$이고 $a_6 = 2a_4+a_5$이다.

$$a_6 = \begin{cases} 2a_4+(a_4+4) = 3a_4+4 & (a_4 \ge 2) \\ 2a_4+(a_4+2) = 3a_4+2 & (a_4 < 2) \end{cases}$$

(1) $a_4 \ge 2$인 경우

$a_6 = 3a_4+4 = 19$

$a_4 = 5$이고 $a_4 \ge 2$이므로 성립한다.

$$a_4 = \begin{cases} 2a_2+2 & (a_2 \le 2,\ a_4 \le 6) \\ a_2+2 & (a_2 > 2,\ a_4 > 4) \end{cases}$$에서

① $2a_2+2=5$이면 $a_2 = \dfrac{3}{2}$이고

$$a_3 = \begin{cases} 2a_1+a_2 = 2 & (a_1 \le a_2) \\ a_1+a_2 = 2 & (a_1 > a_2) \end{cases}$$이므로

$2a_1+\dfrac{3}{2}=2$ (단, $a_1 \le a_2$) 또는 $a_1+\dfrac{3}{2}=2$ (단, $a_1 > a_2$)

$a_1 = \dfrac{1}{4}$일 때는 성립하고 $a_1 = \dfrac{1}{2}$일 때는 성립하지 않는다.

② $a_2+2=5$이면 $a_2=3$이고

$$a_3 = \begin{cases} 2a_1+a_2 = 2 & (a_1 \le a_2) \\ a_1+a_2 = 2 & (a_1 > a_2) \end{cases}$$이므로

$2a_1+3=2$ (단, $a_1 \le a_2$) 또는 $a_1+3=2$ (단, $a_1 > a_2$)에서

$a_1 = -\dfrac{1}{2}$일 때는 성립하고 $a_1 = -1$일 때는 성립하지 않는다.

(2) $a_4 < 2$인 경우

$a_6 = 3a_4+2 = 19$

$a_4 = \dfrac{17}{3}$인데 $a_4 < 2$이므로 성립하지 않는다.

따라서 성립하는 a_1은 $\dfrac{1}{4}$, $-\dfrac{1}{2}$이고

모든 a_1값의 합은 $\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$이다.

다른 풀이

$n=3$ 일 때를 먼저 생각해보면, $a_5=\begin{cases}2a_3+a_4 & (a_3 \le a_4)\\ a_3+a_4 & (a_3 > a_4)\end{cases}$이고,

$a_3=2$이므로 항상 $a_5 \ge a_4$를 만족한다.

따라서 $n=4$일 때, $a_6=2a_4+a_5=\begin{cases}3a_4+4 & (a_4 \ge 2)\\ 2a_4+2 & (a_4 < 2)\end{cases}$

$a_6=19$이므로,

i) $a_4 \ge 2$ 일 때. $19=3a_4+4$, $a_4=5$이고 $a_4 \ge 2$를 만족한다.

ii) $a_4 < 2$ 일 때, $19=2a_4+2$, $a_4=\frac{17}{2}$이므로 $a_4<2$를 만족하지 않는다. 따라서 $a_4=5$이다.

다시 $n=2$일 때, $a_4=\begin{cases}2a_2+a_3 & (a_2 \le a_3)\\ a_2+a_3 & (a_2 > a_3)\end{cases}$ 이므로,

iii) $a_2 \ge a_3$ 일 때, $5=2a_2+2$, $a_2=\frac{3}{2}$이고 $a_3 \ge a_2$ 를 만족한다.

이때 $n=1$인 경우 $a_3=\begin{cases}2a_1+a_2 & (a_1 \le a_2)\\ a_1+a_2 & (a_1 > a_2)\end{cases}$ 이고

a) $a_1 \le a_2$ 일 때, $2=2a_1+\frac{3}{2}$, $a_1=\frac{1}{4}$이고 $a_1 \le a_2$ 를 만족한다.

b) $a_1 > a_2$ 일 때, $2=a_1+\frac{3}{2}$, $a_1=\frac{1}{2}$이고 $a_1 > a_2$ 를 만족하지 않으므로, $a_1=\frac{1}{4}$

iv) $a_2 < a_3$ 일 때, $5=a_2+2$, $a_2=3$이고 $a_2 > a_3$을 만족한다.

이때 $n=1$인 경우 $a_3=\begin{cases}2a_1+a_2 & (a_1 \le a_2)\\ a_1+a_2 & (a_1 > a_2)\end{cases}$이고

a) $a_1 \le a_2$ 일 때, $2=2a_1+3$, $a_1=-\frac{1}{2}$ 이고 $a_1 \le a_2$를 만족한다.

b) $a_1 > a_2$ 일 때,$2=a_1+3$, $a_1=-1$이고 $a_1 > a_2$를 만족하지 않으므로 $a_1=-\frac{1}{2}$

따라서 모든 a_1의 값의 합은 $\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$

다른 풀이

i) $a_2 > a_3$일 경우

$a_4=a_2+a_3=a_2+2>a_3$

$a_5=2a_3+a_4=a_2+6>a_4$

$a_6=2a_4+a_5=3a_2+10=19$

$\therefore\ a_2=3$

$a_3=\begin{cases}2a_1+a_2 & (a_1 \le a_2)\\ a_1+a_2 & (a_1 > a_2)\end{cases}$

a) $a_1 \le a_2$ 일 때, $2=2a_1+3$, $a_1=-\frac{1}{2}$ 이고 $a_1 \le a_2$를 만족한다.

b) $a_1 > a_2$ 일 때,$2=a_1+3$, $a_1=-1$이고 $a_1 > a_2$를 만족하지 않는다.

i)-a), b)에서 $a=-\frac{1}{2}$이다.

ii) $0 \le a_2 \le a_3$일 경우

$a_4=2a_2+a_3=2a_2+2>a_3$

$a_5=2a_3+a_4=2a_2+6>a_4$

$a_6=2a_4+a_5=6a_2+10=19$

$\therefore\ a_2=\frac{3}{2}$

$a_3=\begin{cases}2a_1+a_2 & (a_1 \le a_2)\\ a_1+a_2 & (a_1 > a_2)\end{cases}$

a) $a_1 \le a_2$ 일 때, $2=2a_1+\frac{3}{2}$, $a_1=\frac{1}{4}$이고 $a_1 \le a_2$를 만족한다.

b) $a_1 > a_2$ 일 때, $2=a_1+\frac{3}{2}$, $a_1=\frac{1}{2}$이고 $a_1 > a_2$를 만족하지 않는다.

ii)-a), b)에서 $a_1=\frac{1}{4}$이다.

iii) $a_2<0$일 경우

$a_4=2a_2+a_3=2a_2+2<a_3$

$a_5=a_3+a_4=2a_2+4>a_4$

$a_6=2a_4+a_5=6a_2+8=19$

$\therefore\ a_2=\frac{11}{6}$, 그러나 이는 $a_2<0$인 조건을 만족하지 못한다.

따라서 i), ii), iii)에서 a_1이 될 수 있는 값은 $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$이므로 이들의 합은 $-\frac{1}{4}$이다.

다른 풀이

1) $a_2 \ge 0, a_1 \ge 0$
$a_3 \ge 0, a_6=6a_2+10=19$
$a_2=\frac{3}{2}, a_1=\frac{1}{4}$
2) $a_2 \ge 0, a_1 < 0$
$a_3 \ge 0, a_6=3a_2+10=19$
$a_2=3, a_1=-\frac{1}{2}$
3) $a_2 < 0, a_1 \ge 0$
$a_3 \ge 0$
$a_5=a_3+a_4, a_4=2a_2+a_3\ a_6=6a_2+8=19$
$a_2=\frac{11}{6}$
4) $a_2 < 0, a_1 < 0$
$a_5=a_3+a_4, a_4=a_2+a_3$
$a_6=3a_2+10=19$
$a_2=3$

22) **정답** 24

문제 해설

$(x+a)^n$의 전개식에서 x^r의 계수는 ${}_nC_r(x)^r(a)^{n-r}$임을 이용하여 식을 정리하면 x^7의 계수는 ${}_8C_7(x)^7(3)^1$로 계산할 수 있다. 그러므로 x^7의 계수는 24이다.

23) **정답** 8

문제 해설

$$f(x)=\int(-x^3+3)dx$$
$$=-\frac{1}{4}x^4+3x+C$$
$$f(2)=-\frac{1}{4}\times2^4+3\times2+C=10$$
$$C=8$$
$f(x)=-\frac{1}{4}x^4+3x+8$이므로
$$f(0)=8$$

24) **정답** 2

문제 해설

$$\log_5 40+\log_5\frac{5}{8}=\log_5\left(40\times\frac{5}{8}\right)$$
$$=\log_5 25=2$$

25) **정답** 41

문제 해설 $\cos A=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-\overline{BD}^2}{2\overline{AB}\times\overline{AD}}$
$$=\frac{6^2+6^2-(\sqrt{15})^2}{2\times6\times6}$$
$$=\frac{57}{72}=\frac{19}{24}$$
$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos A$$
$$=6^2+10^2-2\times6\times10\times\frac{19}{24}$$
$$=36+100-95$$
$$=41$$
$$=k^2$$

26) **정답** 12

문제 해설

주어진 방정식을 $-x^3+x^2+8x=k$로 변형한다.

$f(x)=-x^3+x^2+8x$라 하면 방정식 $-x^3+x^2+8x=k$의 실근은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x 좌표와 같다.

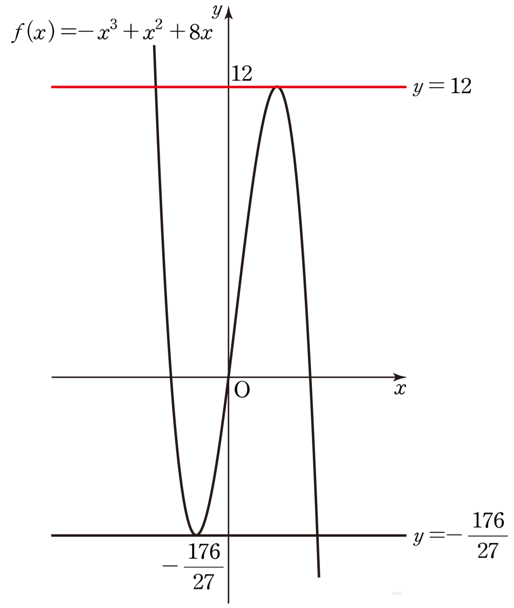
$$f'(x)=-3x^2+2x+8$$
$$=-(3x^2-2x-8)$$
$$=-(x-2)(3x+4)$$

$f'(x)=0$에서 함수 $y=f(x)$는 각각 $x=2,\ x=-\frac{4}{3}$에서 극값을 갖는다.

다음과 같이 증감표를 작성하여 극댓값과 극솟값을 구하도록 하자.

x		$-\frac{4}{3}$		2		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	↘	$-\frac{176}{27}$	↗	12	↘	

위의 증감표에서 $x=-\frac{4}{3}$에서 극솟값 $-\frac{176}{27}$, $x=2$에서 극댓값 12를 갖는다.



위의 그림에서 $y=f(x)$와 $y=12$, $y=-\frac{176}{27}$의 그래프가 각각 교점을 2개 갖는데 이 중 $y=12$일 때가 k의 값이 양수이므로 구하는 양수 k의 값은 12이다.

27) **정답** 121

문제 해설

$$V(X)=5-2^2=1$$

$Y=10X+1$이므로,
$E(Y)=10E(X)+1=21$이고,
$V(Y)=100V(X)=100$ 이다.
따라서 $E(Y)+V(Y)=121$

28) 정답 5

문제해설 $g'(x)=f(x)=-x^2-4x+a$
$g(x)$가 $[0,1]$에서 증가하려면 $[0,1]$에서 $g'(x)\geq 0$이어야 한다.
$y=-x^2-4x+a$는 위로 볼록하면서 축이 $x=-2$이므로
$f(1)\geq 0$ 이면 $[0,1]$에서 함수값이 항상 0보다 크거나 같게 된다.
$f(1)=a-5\geq 0$
$a\geq 5$
a의 최솟값은 5이다.

29) 정답 168

문제해설

흰 공을 각 상자에 넣는 개수를 기준으로 나누어 생각해 보자
(ⅰ) 흰 공을 넣는 개수가 4, 0, 0인 경우
흰 공을 넣는 상자를 선택하는 경우 3가지
(A에 4개의 흰 공을 넣었다고 가정하고)
A, B, C에 넣는 검은공의 개수를 a, b, c라 하면
$a+b+c=6$인데 b, c는 2이상의 자연수 이므로
${}_3H_2={}_4C_2=6$
구하는 경우의 수는 $3\times 6=18$
(ⅱ) 흰 공을 넣는 개수가 3, 1, 0인 경우
흰 공을 넣는 상자를 선택하는 경우 3×2
(A에 3개의 흰 공을 B에 1개의 흰 공을 넣었다고 가정하고)
A, B, C에 넣는 검은공의 개수를 a, b, c라 하면
$a+b+c=6$인데 b는 1이상의 자연수이고 c는 2이상의 자연수 이므로 ${}_3H_3={}_5C_3=10$
구하는 경우의 수는 $6\times 10=60$
(ⅲ) 흰 공을 넣는 개수가 2, 2, 0인 경우
흰 공을 넣는 상자를 선택하는 경우 ${}_3C_2$
(A, B에 각 2개의 흰 공을 넣었다고 가정하고)
A, B, C에 넣는 검은공의 개수를 a, b, c라 하면
$a+b+c=6$인데 c는 2이상의 자연수 이므로
${}_3H_4={}_6C_4=15$
구하는 경우의 수는 $3\times 15=45$
(ⅳ) 흰 공을 넣는 개수가 2, 1, 1인 경우
흰 공을 넣는 상자를 선택하는 경우 3가지
(A에 2개의 공을 B, C에 각 1개의 흰 공을 넣었다고 가정하고)
A, B, C에 넣는 검은공의 개수를 a, b, c라 하면
$a+b+c=6$인데 b, c는 1이상의 자연수 이므로
${}_3H_4={}_6C_4=15$
구하는 경우의 수는 $3\times 15=45$
따라서 전체 경우의 수는 $18+60+45+45=168$

다른 풀이

흰 공을 넣는 경우를 먼저 생각하고 검은 공을 생각해보면
① 흰 공을 (4, 0, 0)로 넣는 경우
흰 공 4개를 한 상자에 넣는 경우의 수 : ${}_3C_1$
검은 공을 흰공을 넣지 않은 상자에 먼저 2개씩 넣고
나머지 검은 공을 넣는 경우의 수 ${}_3H_2$
${}_3C_1\times{}_3H_2=3\times 6=18$
② 흰 공을 (3, 1, 0)로 넣는 경우
흰 공을 3개, 1개로 넣는 경우의 수 : 3!
검은 공을 흰 공 1개, 0개 넣은 상자에 먼저 1개, 2개를 각각 넣고 남은 검은 공 3개를 넣는 경우의 수 ${}_3H_3$
$3!\times{}_3H_3=6\times{}_5C_2=60$
③ 흰 공을 (2, 2, 0)로 넣는 경우
흰 공을 2개, 2개로 나누어 넣는 경우의 수 : $\frac{3!}{2!}$
빈 상자에 먼저 검은 공 2개를 넣고 나머지 검은 공 4개를 세 상자에 넣는 경우의 수 :${}_3H_4$
${}_3C_1\times{}_3H_4=3\times{}_6C_2=3\times 15=45$
④ 흰 공을 (2, 1, 1)로 넣는 경우
흰 공을 2개, 1개, 1개로 나누어 넣는 경우의 수 : $\frac{3!}{2!}$
흰 공이 1개씩 들어있는 상자에 먼저 검은 공 1개씩 넣고
나머지 검은 공 4개를 넣는 경우의 수 : ${}_3H_4$
$\frac{3!}{2!}\times{}_3H_4=3\times{}_6C_2=3\times 15=45$
전체 경우의 수는 $18+60+45+45=168$

다른 풀이

(ⅰ) 전체경우의 수
${}_3H_4\times{}_3H_6={}_6C_2\times{}_8C_2=420$

(ⅱ) 1개 이하의 상자가 2개 존재 하는 경우
1개 이하가 들어갈 상자를 정하는 경우의 수 ${}_3C_2$
1개 이하의 상자가 나올 수 있는 경우의 수 7가지
(0,0), (흰, 0), (검, 0), (0,흰), (0,검), (흰,검), (검,흰), (흰,흰), (검,검)
${}_3C_2\times 9=27$

(ⅲ) 1개 이하의 상자가 1개 존재 하는 경우는 1개 이하가 들어갈 상자를 정하고 나머지 두 상자에 나누어 넣는 경우에서 두 상자 중에 한 개 이하가 들어가는 경우를 빼주면 된다.

1개 이하의 상자를 정하는 경우의 수 ${}_3\mathrm{C}_1$
한 개의 상자에 공이 없는 경우
${}_3\mathrm{C}_1 \times ({}_2\mathrm{H}_4 \times {}_2\mathrm{H}_6 - {}_2\mathrm{C}_1 \times 3) = 87$
한 개의 상자에 공이 흰공인 경우
${}_3\mathrm{C}_1 \times ({}_2\mathrm{H}_3 \times {}_2\mathrm{H}_6 - {}_2\mathrm{C}_1 \times 3) = 66$
한 개의 상자에 공이 검은공인 경우
${}_3\mathrm{C}_1 \times ({}_2\mathrm{H}_4 \times {}_2\mathrm{H}_5 - {}_2\mathrm{C}_1 \times 3) = 72$

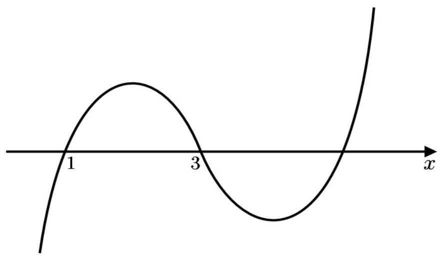
$\therefore 420 - (27 + 87 + 66 + 72) = 168$

30) **정답** 105

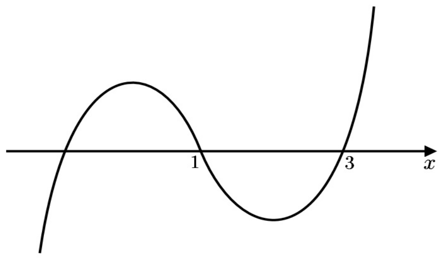
문제해설

조건 (가)에서 $f(1) = f(3) = 0$이므로 삼차함수 $f(x)$의 개형을 그려보면 아래와 같다. (최고차항의 계수가 양수인 경우)

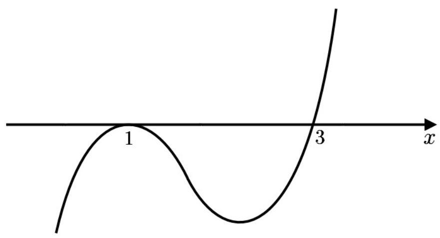
(i)



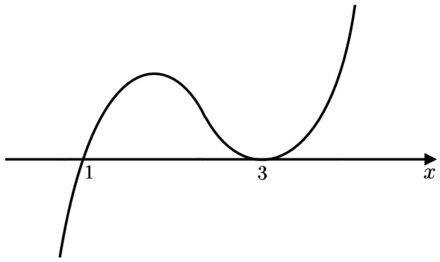
(ii)



(iii)



(iv)



이 중 조건 (나)를 만족하려면 $x \ge 1$에서 극값의 개수가 1개이어야 하므로 삼차함수 $f(x)$의 개형은 (ii) 이다.

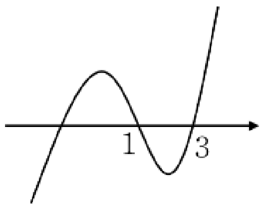
$f(x) = k(x-1)(x-3)(x-t)$, $(k > 0,\ t < 1)$라 하자.
(이때 $k > 0$인 경우만 생각해도 일반성을 잃지 않는다.)
$g(x) = |f(x)f(a-x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $f(x)f(a-x)$가 두 삼차함수의 곱이므로 모든 해가 중근이어야한다.

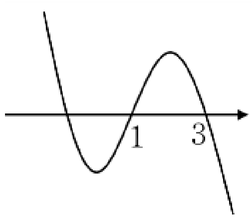
$f(a-x)$는 $f(x)$와 $x = \dfrac{a}{2}$에 대한 선대칭을 이루므로
$f(x)$의 해가 $x = t, 1, 3$, $(t < 1 < 3)$일 때
$f(x)f(a-x)$의 모든 해가 중근이 되기 위해서는
$f(a-x)$의 해인 $x = a-t, a-1, a-3$, $(a-t > a-1 > a-3)$ 이 $f(x)$의 해인 $x = t, 1, 3$, $(t < 1 < 3)$과 대칭이어야 한다.
따라서 $1 = a-1$ 이므로 $a = 2$
$3 = a-t = 2-t$이므로 $t = -1$ 이다.
$f(x) = k(x-1)(x-3)(x+1)$
$g(x) = |f(x)f(a-x)|$
$= -f(x)f(2-x)$

$$\therefore \frac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)} = \frac{g(8)}{f(0)\times f(8)} = \frac{-f(8)\times f(-6)}{f(0)\times f(8)} = \frac{-k(-7)(-9)(-5)}{k(-1)(-3)1} = 105$$

다른 풀이

(가)조건과 (나)조건을 동시에 만족하는 함수 $y = f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.





$f(x) = 0$은 세 개의 실근을 가지며 임의의 실근 p에 대해 $f'(p) \neq 0$이다.
$g(x) = |f(x)f(a-x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $h(x) = f(x)f(a-x)$가 x축과 만나는 점에서 미분계수가 0이어야

한다.

$f'(a-x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a-(x+h))-f(a-x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a-x-h)-f(a-x)}{-h}\times(-1)=-f'(a-x)$

임을 이용하여 $h(x)=f(x)f(a-x)$의 도함수를 구하면

$h'(x)=f'(x)f(a-x)-f(x)f'(a-x)$

$f(x)=0$ 또는 $f(a-x)=0$ 의 실근은 $h(x)=0$의 실근이므로 $g(x)$가 실수 전체에서 미분가능하려면 $f(x)=0$의 임의의 실근 p에 대해서 $h'(p)=0$이어야 한다.

$f'(p)f(a-p)-f(p)f'(a-p)=0$

그런데, $f(p)=0$이고 $f'(p)\neq 0$이므로 $f(a-p)=0$이어야 한다.

즉, $f(x)=0$의 세 실근은 모두 $f(a-x)=0$의 세 실근이어야 한다.

한편, $y=f(a-x)$의 그래프와 $y=f(x)$의 그래프는 $x=\dfrac{a}{2}$에 대하여 서로 대칭이므로 $f(x)=0$의 세 실근도 $x=\dfrac{a}{2}$에 대해서 대칭이어야 한다.

$\therefore$ $a=2$이고 $f(x)=0$의 세 실근은 $-1,\ 1,\ 3$ 이므로

$f(x)=k(x+1)(x-1)(x-3)$

문제에서 구하고자 하는 값을 계산하면

$f(0)=3k,\ f(4a)=f(8)=k\times 9\times 7\times 6$

$g(4a)=g(8)=|f(8)f(-6)|$

$f(-6)=k\times(-5)\times(-7)\times(-9)$

따라서 $\dfrac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}=\dfrac{f(8)\times 5\times 7\times 9\times k}{3\times k\times f(8)}=105$

다른 풀이

$f(x)=k(x-1)(x-3)(x-\alpha)$라 하자.

이때 $f'(x)=0$을 만족하는 근은 $1\le x$에 하나만 있어야 하므로 $f(x)=0$의 또다른 실근 α는 1보다 작다.

$y=f(a-x)$는 $y=f(x)$ 그래프를 $x=\dfrac{a}{2}$에 선대칭이동 시킨 그래프인데

$g(x)=|f(x)f(a-x)|$가 실수 전체에서 미분가능하려면

$y=g(x)$ 그래프가 $x=1,\ x=3,\ x=\alpha$에서 접해야 한다.

따라서 $f(a-x)=0$의 실근 또한 $\alpha,\ 1,\ 3$이다.

즉, $y=f(a-x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 $\alpha,\ 1,\ 3$ 중 가운데 있는 $x=1$에 대칭이동한 그래프이고 $(\alpha,\ 0)$는 $(3,\ 0)$을 $x=1$에 대칭이동 시킨 $(-1,\ 0)$ 이다.

$\therefore$ $a=2,\ f(x)=k(x+1)(x-1)(x-3)$이다.

$g(x)=|k^2(x+1)^2(x-1)^2(x-3)^2|$이므로

$\therefore$ $\dfrac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}=\dfrac{g(8)}{f(0)\times f(8)}=\dfrac{k^2\times 9^2\times 7^2\times 5^2}{k\times 3\times k\times 9\times 7\times 5}$

$=105$이다.