2018학년도 대학수학능력시험 EBS 모의평가 문제지

수학 영역(가형) 정답과 풀이

제 1 회

정 답

1	①	2	③	3	①	4	③	5	⑤
6	①	7	⑤	8	⑤	9	②	10	②
11	②	12	④	13	④	14	②	15	②
16	①	17	④	18	④	19	①	20	⑤
21	③	22	35	23	6	24	2	25	1
26	34	27	47	28	9	29	12	30	7

풀 이

1. 평면벡터 정답 ①

[풀이] $\vec{a}+2\vec{b}=(1,\ 2)+2(2,\ -3)$

$=(1,\ 2)+(4,\ -6)$

$=(5,\ -4)$

따라서 모든 성분의 합은

$5+(-4)=1$

2. 지수함수와 로그함수 정답 ③

[풀이] $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{2x^2+3x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\lim_{x\to0}\frac{3}{2x+3}$

$=1$

3. 적분법 정답 ①

[풀이] $\displaystyle\int_0^1 5x\sqrt{x}\,dx$

$\displaystyle=5\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\,dx$

$\displaystyle=5\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$

$=2$

4. 확률 정답 ③

[풀이] $\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{1}{3}$에서

$1-\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{2}{3}$

또, 두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$에서

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{6}$

$\dfrac{2}{3}\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{6}$

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{4}$

따라서

$\mathrm{P}(A\cup B)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}$

$=\dfrac{3}{4}$

5. 순열과 조합 정답 ⑤

[풀이] 일의 자리에는 홀수가 와야 하므로 이 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1=3$

이 각각에 대하여 백의 자리와 십의 자리에 올 수 있는 경우의 수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times25=75$

6. 미분법 정답 ①

[풀이] $g(1)=t$로 놓으면 $f(t)=1$이므로

$e^{t^3+1}=1$

$t^3+1=0$

$t=-1$

따라서 $f'(x)=3x^2e^{x^3+1}$이므로

$g'(1)=\dfrac{1}{f'(-1)}=\dfrac{1}{3}$

7. 확률 정답 ⑤

[풀이] 세 수의 곱이 9의 배수이기 위해서는 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(ⅰ) 3의 배수의 눈이 2번 나오는 경우

${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{9}$

(ⅱ) 3의 배수의 눈이 3번 나오는 경우

${}_3\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\dfrac{2}{9}+\dfrac{1}{27}=\dfrac{7}{27}$

8. 공간도형 정답 ⑤

[풀이] 점 P는 선분 AB 위에 있으며 $\overline{\mathrm{AP}}=2\overline{\mathrm{PB}}$이므로 점 P는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이다.

그러므로

$\mathrm{P}\left(\dfrac{2\times(-2)+1\times1}{2+1},\ \dfrac{2\times5+1\times2}{2+1},\ \dfrac{2\times(-3)+1\times3}{2+1}\right)$

$\mathrm{P}(-1,\ 4,\ -1)$

따라서

$a+b+c=(-1)+4+(-1)=2$

9. 적분법 정답 ②

[풀이] $\displaystyle\int_1^e \ln(x^2)dx$

$\displaystyle=2\int_1^e \ln x\,dx$

$\displaystyle=2\left\{\Big[x\ln x\Big]_1^e-\int_1^e 1\,dx\right\}$

$=2\{e-(e-1)\}$

$=2$

10. 평면벡터 정답 ②

[풀이] 점 P의 시각 t에서의 속도를 $\vec{v}$라 하면

$\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$

$=\left(t^{-\frac{1}{2}},\ -\dfrac{4}{(t+1)^2}\right)$

따라서 $t=1$에서의 속도는 $(1,\ -1)$이므로 속력은

$\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

11. 적분법 정답 ②

[풀이] 점 $(x,\ 0)$에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이는 $(\cos x-\sin x)^2$이므로 구하는 부피를 V라 하면

$\displaystyle V=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos x-\sin x)^2\,dx$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos^2 x-2\cos x\sin x+\sin^2 x)dx$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{6}}1\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{6}}2\cos x\sin x\,dx$

$\displaystyle=\frac{\pi}{6}-\int_0^{\frac{\pi}{6}}2\cos x\sin x\,dx$

한편 $\sin x=t$로 놓으면 $\cos x\dfrac{dx}{dt}=1$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\dfrac{\pi}{6}$일 때 $t=\dfrac{1}{2}$이므로

$\displaystyle V=\frac{\pi}{6}-\int_0^{\frac{\pi}{6}}2\cos x\sin x\,dx$

$\displaystyle=\frac{\pi}{6}-\int_0^{\frac{1}{2}}2t\,dt$

$\displaystyle=\frac{\pi}{6}-\Big[t^2\Big]_0^{\frac{1}{2}}$

$=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{2\pi-3}{12}$

12. 공간벡터 정답 ④

[풀이] 직선 $x=2y+1=z+3$은

$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{z+3}{2}$

이므로 방향벡터는 $(2,\ 1,\ 2)$이다.

또, x축의 방향벡터는 $(1,\ 0,\ 0)$이므로

$\cos\theta=\dfrac{|2\times1+1\times0+2\times0|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\sqrt{1^2+0^2+0^2}}=\dfrac{2}{3}$

13. 통계 정답 ④

[풀이] 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 1)$을 따르므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\dfrac{1}{4}\right)^2\right)$을 따른다.

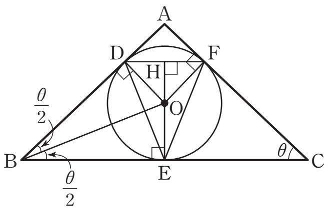
이때 $\mathrm{P}(X\geq5)=\mathrm{P}(\overline{X}\leq1)$에서 확률변수 Z가 표준정규분포를 따를 때

$\mathrm{P}\left(\dfrac{X-m}{1}\geq\dfrac{5-m}{1}\right)=\mathrm{P}\left(\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{1}{4}}\leq\dfrac{1-m}{\frac{1}{4}}\right)$

$\mathrm{P}(Z\ge 5-m)=\mathrm{P}(Z\le 4(1-m))$
이때 $m<5$에서 $5-m>0$이므로
$-(5-m)=4(1-m)$
$5m=9$
따라서 $m=\dfrac{9}{5}$

14. 삼각함수 　정답 ②

[풀이] 원의 중심을 O, 원의 반지름의 길이를 r라 하면 직각삼각형 OBE에서 $\angle\mathrm{OBE}=\dfrac{\theta}{2}$이므로



$r=\overline{\mathrm{OE}}$
$=\overline{\mathrm{BE}}\tan\dfrac{\theta}{2}$
$=1\times\tan\dfrac{\theta}{2}$
$=\tan\dfrac{\theta}{2}$ …… ㉠

또, 삼각형 ADF에서 $\angle\mathrm{DFA}=\theta$이므로 점 O에서 변 DF에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 OFD에서
$\angle\mathrm{OFH}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$
그러므로
$\overline{\mathrm{FH}}=\overline{\mathrm{OF}}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\dfrac{\theta}{2}\times\sin\theta$ …… ㉡
$\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OF}}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\dfrac{\theta}{2}\times\cos\theta$ …… ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{FD}}\times\overline{\mathrm{EH}}$$
$$=\frac{1}{2}\times 2\overline{\mathrm{FH}}\times(\overline{\mathrm{EO}}+\overline{\mathrm{OH}})$$
$$=\left(\tan\frac{\theta}{2}\times\sin\theta\right)\times\left(\tan\frac{\theta}{2}+\tan\frac{\theta}{2}\times\cos\theta\right)$$
$$=\tan^2\frac{\theta}{2}\times\sin\theta\times(1+\cos\theta)$$

따라서
$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan^2\frac{\theta}{2}\times\sin\theta\times(1+\cos\theta)}{\theta^3}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\lim_{\theta\to0+}(1+\cos\theta)$$
$$=\frac{1}{4}\times1^2\times1\times2$$
$$=\frac{1}{2}$$

15. 미분법 　정답 ②

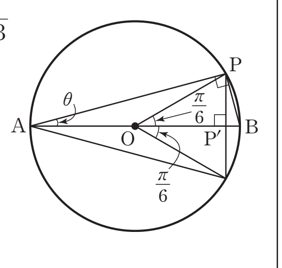
[풀이] 점 Q의 좌표는 $(t,\ 0)$이다.
또, $y=-\ln x$에서 $y'=-\dfrac{1}{x}$이므로 점 $\mathrm{P}(t,\ -\ln t)$에서의 접선의 방정식은
$y=-\dfrac{1}{t}(x-t)-\ln t$
이때 점 R의 x좌표는
$0=-\dfrac{1}{t}(x-t)-\ln t$
$x=-t\ln t+t$
따라서
$\overline{\mathrm{QR}}=(-t\ln t+t)-t=-t\ln t$
삼각형 PQR의 넓이를 $S(t)$라 하면
$$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{QR}}\times\overline{\mathrm{PQ}}$$
$$=\frac{1}{2}\times(-t\ln t)\times(-\ln t)$$
$$=\frac{1}{2}\times t(\ln t)^2$$
이때 $S'(t)=\dfrac{1}{2}(\ln t)^2+\ln t=\dfrac{\ln t(\ln t+2)}{2}$이므로
$S'(t)=0$에서 $t=e^{-2}\ (0<t<1)$
$S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	e^{-2}	$\cdots$	(1)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		$\nearrow$	$\dfrac{2}{e^2}$	$\searrow$	

따라서 $S(t)$는 $t=e^{-2}$일 때 최댓값 $\dfrac{2}{e^2}$를 갖는다.

16. 평면벡터 　정답 ①

[풀이] 조건 (가)에서
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=0$
이므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$는 서로 수직이다.
그러므로 점 P는 지름이 AB인 원 위에 있다.
두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 조건 (나)에서
$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta\ge 2+\sqrt{3}$
한편 $\overline{\mathrm{AB}}=2$이므로
$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta\ge 1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



이때 점 P에서 지름 AB에 내린 수선의 발을 P′이라 하면
$\overline{\mathrm{AP'}}\ge 1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
이때 원의 중심을 O라 하면 삼각형 POP′에서
$\angle\mathrm{POP'}\le\dfrac{\pi}{6}$
그러므로 점 P가 나타내는 도형은 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\dfrac{\pi}{3}$인 부채꼴의 호이다.
따라서 구하는 도형의 길이는
$1\times\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$

17. 통계 　정답 ④

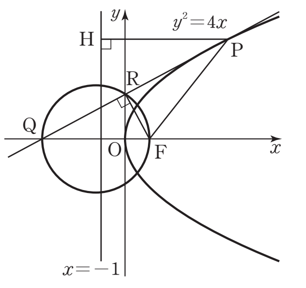
[풀이] n개의 카드 중에서 서로 다른 2개의 카드를 임의로 동시에 꺼낼 때, 특정한 2개의 카드를 꺼내는 확률은
$\dfrac{1}{{}_n\mathrm{C}_2}=\dfrac{2}{\boxed{n(n-1)}}$
이다.
그러므로 꺼낸 2개의 카드에 적혀 있는 두 수의 곱의 합을 S라 하면
$\mathrm{E}(X)=\dfrac{2}{\boxed{n(n-1)}}\times S$
이다.
한편, 꺼낸 2개의 카드에 적힌 두 수 중 큰 수가 $r\ (2\le r\le n)$인 수로 분류하여 S의 값을 구하면
$$S=\sum_{r=2}^{n}[r\times\{1+2+3+\cdots+(r-1)\}]$$
$$=\sum_{r=2}^{n}\left\{r\times\frac{r(r-1)}{2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{r=2}^{n}(r^3-r^2)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}(r^3-r^2)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$
$$=\frac{n(n+1)(3n^2-n-2)}{24}$$
$$=\frac{n(n+1)(n-1)(\boxed{3n+2})}{24}$$
따라서
$$\mathrm{E}(X)=\frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}\times\frac{2}{n(n-1)}$$
$$=\frac{\boxed{(n+1)(3n+2)}}{12}$$
이다.
따라서 $f(n)=n(n-1)$, $g(n)=3n+2$, $h(n)=(n+1)(3n+2)$이므로
$f(2)+g(3)+h(4)=2+11+70=83$

18. 통계 　정답 ④

[풀이] 확률변수 X가 정규분포를 따르므로 이 정규분포를 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$이라 하면 조건 (가)에서
$\sigma(X)=\sigma(a+2Z)$
$=2\sigma(Z)$
$=2$
또, 조건 (나)에서 $\mathrm{P}(X\le1)=\mathrm{P}(X\ge5)$이므로
$m=\dfrac{1+5}{2}=3$
그러므로 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(3,\ 2^2)$을 따른다.
$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(a+2Z)=a+2\mathrm{E}(Z)=a$
따라서 $a=3$이므로 구하는 확률은
$\mathrm{P}(1\le X\le7)$
$=\mathrm{P}\left(\dfrac{1-3}{2}\le\dfrac{X-3}{2}\le\dfrac{7-3}{2}\right)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le2)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)$
$=0.3413+0.4772$
$=0.8185$

19. 평면 곡선 　정답 ①

[풀이] 점 P의 x좌표를 a라 하고 점 P에서 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{\mathrm{PF}}=4$이므로
$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}=a+1=4$
$a=3$
이때 점 P의 y좌표는
$y^2=4\times3$
$y=\pm2\sqrt{3}$
점 P가 제1사분면 위에 있는 점이므로
$\mathrm{P}(3,\ 2\sqrt{3})$



한편, $y^2=4x$에서 $2y\dfrac{dy}{dx}=4$이므로
$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{y}$ (단, $y\ne0$)
따라서 접선의 방정식은
$y-2\sqrt{3}=\dfrac{2}{2\sqrt{3}}(x-3)$
$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+\sqrt{3}$ …… ㉠
이때 점 Q의 좌표는 $(-3,\ 0)$이다.
한편, 선분 QF가 원의 지름이므로
$\overline{\mathrm{RQ}}\perp\overline{\mathrm{FR}}$
직선 ㉠이 x축과 이루는 각의 크기가 $30°$이므로
$\overline{\mathrm{RQ}}=\overline{\mathrm{QF}}\cos30°=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$
$\overline{\mathrm{FR}}=\overline{\mathrm{QF}}\sin30°=4\times\dfrac{1}{2}=2$

따라서 삼각형 FRQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{RQ}}\times\overline{\mathrm{FR}}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2$

$=2\sqrt{3}$

20. 미분법 정답 ⑤

[풀이] ㄱ. $f(1)=(e-1)\cos\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}>0$ (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 미분가능한 함수이므로 평균값 정리에 의해

$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(a)\ (0<a<1)$ …… ㉠

인 a가 적어도 하나 존재한다.

이때 $f(0)=(e^0-1)\cos0+0=0$이고 $f(1)>0$이므로 ㉠의 좌변은 양수이다.

따라서 $f'(a)>0$이다. (참)

ㄷ. $f'(x)=e^x\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\frac{\pi}{2}(e^x-1)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)+\frac{\pi}{2}$

이고 함수 $f'(x)$는 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 연속인 함수이다.

한편, ㄴ에서 $f'(a)>0$인 a가 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나 존재한다.

또, $f'(1)=-\frac{\pi}{2}(e-1)+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}(-e+2)<0$

그러므로 사잇값 정리에 의해 열린 구간 $(a,\ 1)$에서 $f'(b)=0$을 만족시키는 b가 적어도 하나 존재하므로 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나 존재한다. (참)

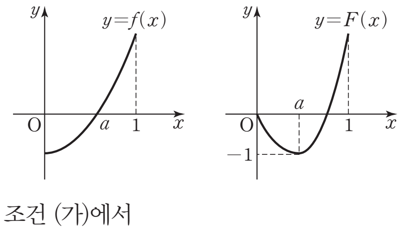
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

21. 적분법 정답 ③

[풀이] $F'(x)=f(x)$

이때 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 증가하고 함수 $F(x)$가 $x=a(0<a<1)$에서 극솟값 -1을 가지므로 함수 $f(x)$는 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 x축과 만나야 한다.

$F(0)=0$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=F(x)$의 그래프는 그림과 같다.



한편, 조건 (가)에서

$\int_0^1\{f(x)+|f(x)|\}dx$

$=\int_0^a\{f(x)+|f(x)|\}dx+\int_a^1\{f(x)+|f(x)|\}dx$

$=2\int_a^1f(x)dx$

$=6$

그러므로

$\int_a^1f(x)dx=3$ …… ㉠

조건 (나)에서 함수 $y=F(x)$는 $x=a$에서 극솟값 -1을 가지므로

$F(a)=\int_0^af(x)dx=-1$ …… ㉡

㉠과 ㉡에서

$F(1)=\int_0^1f(x)dx=2$

한편, $\int_a^1F(x)f(x)dx$에서 $F(x)=t$로 놓으면

$f(x)=\frac{dt}{dx}$이고 $F(a)=-1$, $F(1)=2$이므로

$\int_a^1F(x)f(x)dx$

$=\int_{-1}^2t\,dt$

$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^2$

$=\frac{3}{2}$

22. 순열과 조합 정답 35

[풀이] x^3의 계수는

${}_7\mathrm{C}_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

23. 지수함수와 로그함수 정답 6

[풀이] $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}\geq\log_3 81$에서

$(2^{-1})^{x-5}\geq\log_3 3^4$

$2^{-x+5}\geq2^2$

$-x+5\geq2$

$x\leq3$

따라서 자연수 x의 값은 1, 2, 3으로 그 합은 6이다.

24. 공간도형 정답 2

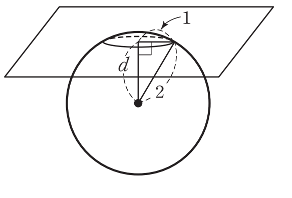
[풀이] $x^2+y^2+z^2-2x-3=0$은

$(x-1)^2+y^2+z^2=4$

따라서 구의 중심은 $(1,\ 0,\ 0)$, 반지름의 길이는 2이다.

이때 구와 평면이 만나서 생기는 원의 반지름의 길이가 1이므로 구의 중심 $(1,\ 0,\ 0)$과 평면 사이의 거리를 d라 하면

$d=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$ …… ㉠



한편, 구의 중심 $(1,\ 0,\ 0)$과 평면 $x+y+z-k=0$ 사이의 거리는

$d=\frac{|1+0+0-k|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}$

$=\frac{|1-k|}{\sqrt{3}}$ …… ㉡

㉠과 ㉡에서

$\frac{|1-k|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$, $|k-1|=3$

$k-1=-3$ 또는 $k-1=3$

$k=-2$ 또는 $k=4$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$(-2)+4=2$

25. 삼각함수 정답 1

[풀이] 두 함수 $y=3\tan x$, $y=2\cos x$의 그래프가 만나는 점의 x좌표는 방정식

$3\tan x=2\cos x$

의 실근과 같다. 이 방정식은

$\frac{3\sin x}{\cos x}=2\cos x$

$3\sin x=2\cos^2x$

$3\sin x=2(1-\sin^2x)$

$2\sin^2x+3\sin x-2=0$

$(\sin x+2)(2\sin x-1)=0$

$\sin x=-2$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$

이때 $-1\leq\sin x\leq1$이므로

$\sin x=\frac{1}{2}$

따라서 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$이므로 그래프가 만나는 모든 점의 x좌표의 값의 합은 π이므로

$a=1$

26. 순열과 조합 정답 34

[풀이] $36=2^2\times3^2$이고 a, b, c, d, e가 자연수이므로 다음 두 경우로 나눌 수 있다.

(ⅰ) $a+b+c=4$, $d+e=3$

$a+b+c=4$에서 $a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$로 놓으면 a', b', c'은 음이 아닌 정수이고

$a'+b'+c'=1$

그러므로 구하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_1={}_{3+1-1}\mathrm{C}_1={}_3\mathrm{C}_1=3$

또, $d+e=3$에서 $d=d'+1$, $e=e'+1$로 놓으면 d', e'은 음이 아닌 정수이고

$d'+e'=1$

그러므로 구하는 경우의 수는

${}_2\mathrm{H}_1={}_{2+1-1}\mathrm{C}_1={}_2\mathrm{C}_1=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times2=6$

(ⅱ) $a+b+c=9$, $d+e=2$

(ⅰ)과 같은 방법으로 생각하면

$a'+b'+c'=6$ (a', b', c'은 음이 아닌 정수)

그러므로 구하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_6={}_{3+6-1}\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$

$d'+e'=0$(d', e'은 음이 아닌 정수)이므로 구하는 경우의 수는 1이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$28\times1=28$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$6+28=34$

27. 확률 정답 47

[풀이] 2개의 공을 꺼내므로 을이 꺼낸 공에 적힌 가장 큰 수를 기준으로 나누면 다음과 같다.

(ⅰ) 을이 3이 적힌 공을 꺼낼 경우

갑은 1, 2가 적힌 공 2개를 꺼내야 하고, 을은 1, 2가 적힌 공 중 하나를 꺼내야 하므로 구하는 확률은

$\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{2}{36}$

(ⅱ) 을이 4가 적힌 공을 꺼낼 경우

갑은 1, 2, 3이 적힌 공 중 2개를 꺼내야 하고, 을은 1, 2, 3이 적힌 공 중 하나를 꺼내야 하므로

$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{9}{36}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\frac{2}{36}+\frac{9}{36}=\frac{11}{36}$

따라서 $p=36$, $q=11$이므로

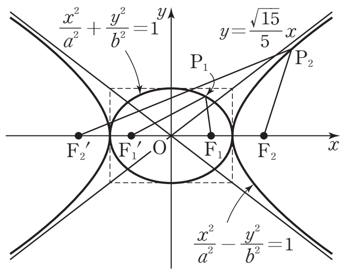
$p+q=36+11=47$

28. 평면 곡선 정답 9

[풀이] 쌍곡선의 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{\sqrt{15}}{5}x$이므로

$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{15}}{5}$

$b=\frac{\sqrt{15}}{5}a$



한편, 타원의 초점 F_1의 좌표는 $(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$이므로

$$\overline{P_1F_1}=\overline{OF_1}=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{15}}{5}a\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}a$$

또, 쌍곡선의 초점 F_2의 좌표는 $(\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$이므로

$$\overline{P_2F_2}=\overline{OF_2}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{5}a\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}a$$

그러므로 $\frac{\overline{P_2F_2}}{\overline{P_1F_1}}=2$

이때 조건 (나)에서 $\overline{P_1F_1}+\overline{P_2F_2}=9$이므로

$\overline{P_1F_1}+2\overline{P_1F_1}=9$

따라서 $\overline{P_1F_1}=3$, $\overline{P_2F_2}=6$

따라서 타원과 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{P_1F_1'}+3=2a$ …… ㉠

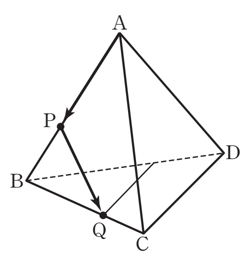
$\overline{P_2F_2'}-6=2a$ …… ㉡

㉡에서 ㉠을 변끼리 빼서 정리하면

$\overline{P_2F_2'}-\overline{P_1F_1'}=9$

29. 공간벡터 정답 12

[풀이] 점 Q가 나타내는 도형은 그림과 같은 선분이고 $|\overrightarrow{PQ}|$가 최대가 될 때는 점 Q가 선분 BC 또는 선분 BD 위에 있을 때이다.



점 Q가 선분 BC 위에 있다고 가정하고

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$라 하면

$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\vec{a}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}&=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}\\&=(\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{BC})-\overrightarrow{AP}\ (0<t<1)\\&=\{\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})\}-\frac{2}{3}\vec{a}\\&=\left(\frac{1}{3}-t\right)\vec{a}+t\vec{b}\end{aligned}$$ …… ㉠

이때 두 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PQ}$가 수직이고

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}=2\times2\times\frac{1}{2}=2$

이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PQ}&=\frac{2}{3}\vec{a}\cdot\left\{\left(\frac{1}{3}-t\right)\vec{a}+t\vec{b}\right\}\\&=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}-t\right)|\vec{a}|^2+\frac{2}{3}t\times\vec{a}\cdot\vec{b}\\&=\frac{8}{3}\left(\frac{1}{3}-t\right)+\frac{4}{3}t\\&=0\end{aligned}$$

$8-24t+12t=0$

$t=\frac{2}{3}$

따라서 ㉠에서 $t=\frac{2}{3}$일 때 $|\overrightarrow{PQ}|$는 최댓값을 가지므로

$$\begin{aligned}M^2&=\left|-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right|^2\\&=\left(-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)\\&=\frac{1}{9}|\vec{a}|^2-\frac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{9}|\vec{b}|^2\\&=\frac{1}{9}\times4-\frac{4}{9}\times2+\frac{4}{9}\times4\\&=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

따라서 $p=3$, $q=4$이므로

$pq=3\times4=12$

30. 미분법 정답 7

[풀이] $g(x)=\ln\frac{f(x)}{x}$

$\qquad=\ln f(x)-\ln x$

이므로

$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{1}{x}$

이때 $g'(x)=0$에서

$\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{1}{x}=0$

$f'(x)=\frac{f(x)}{x}$ …… ㉠

그러므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ f(x))$와 원점을 잇는 직선의 기울기는 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기와 같다.

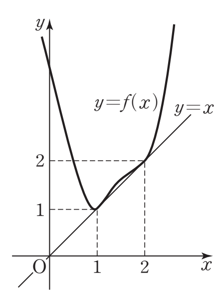
한편, $g(x)$는 $x=1$, $x=2$에서 극솟값 0을 가지므로

$\ln\frac{f(1)}{1}=0$, $\ln\frac{f(2)}{2}=0$

$f(1)=1$, $f(2)=2$

또, ㉠에서 $f'(1)=1$, $f'(2)=1$

그러므로 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 그림과 같아야 한다.



이때 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)-x=(x-1)^2(x-2)^2$

$f(x)=(x-1)^2(x-2)^2+x$

따라서

$f(3)=2^2\times1^2+3=7$

제 2 회

정 답

1	③	2	②	3	④	4	③	5	①
6	②	7	①	8	④	9	③	10	①
11	①	12	④	13	②	14	⑤	15	③
16	②	17	②	18	④	19	⑤	20	②
21	②	22	7	23	195	24	40	25	11
26	880	27	8	28	583	29	31	30	24

풀 이

1. 평면벡터 정답 ③

[풀이] $\vec{a}=(1,\ -2)$, $\vec{b}=(2,\ 1)$에서

$\vec{a}+\vec{b}=(1,\ -2)+(2,\ 1)=(3,\ -1)$

이므로

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})&=(1,\ -2)\cdot(3,\ -1)\\&=3+2=5\end{aligned}$$

2. 삼각함수 정답 ②

[풀이] $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{\sin 6x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+2x)}{2x}\times\frac{1}{\frac{\sin 6x}{6x}}\times\frac{2x}{6x}\right\}$

$=1\times1\times\frac{2}{6}$

$=\frac{1}{3}$

3. 적분법 정답 ④

[풀이] $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이고

$x=1$일 때, $t=0$

$x=e$일 때, $t=1$

이므로

$\int_1^e\frac{4\ln x}{x}\,dx=\int_0^1 4t\,dt=\left[2t^2\right]_0^1=2$

4. 확률 정답 ③

[풀이] $3\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(B)$에서

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)$

두 사건 A와 B는 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

즉, $\{\mathrm{P}(B)\}^2=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(B)\ge0$이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

5. 순열과 조합

정답 ①

[풀이] 300보다 큰 세 자리의 자연수이려면 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 3, 4, 5이고 십의 자리와 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4, 5이므로

$3\times5\times5=75$

이 중에서 숫자 1끼리 서로 이웃하는 세 자리의 자연수는 311, 411, 511의 3개이고, 숫자 3끼리 서로 이웃하는 세 자리의 자연수는 331, 332, 333, 334, 335, 433, 533의 7개이므로 구하는 경우의 수는

$75-(3+7)=65$

6. 미분법

정답 ②

[풀이] $f^{-1}(x)=g(x)$이고 $f(0)=1$이므로

$g(1)=0$

$f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{x^2+1}$에서

$$f'(x)=\frac{3(x+1)^2(x^2+1)-(x+1)^3\times2x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{(x+1)^2(x^2-2x+3)}{(x^2+1)^2}$$

$f'(g(1))=f'(0)=3$

따라서

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x+1)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{g(x+1)-g(1)}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}g'(1)$$

$$=\frac{1}{2f'(g(1))}$$

$$=\frac{1}{6}$$

7. 확률

정답 ①

[풀이] (i) 서로 다른 주사위 세 개를 동시에 던질 때, 나온 눈의 수의 최댓값이 5인 경우

5 이하의 자연수에서 중복을 허락하여 세 개가 나올 확률은 $\dfrac{5^3}{6^3}$

4 이하의 자연수에서 중복을 허락하여 세 개가 나올 확률은 $\dfrac{4^3}{6^3}$

이므로 구하는 확률은

$$\frac{5^3}{6^3}-\frac{4^3}{6^3}=\frac{125-64}{216}$$

$$=\frac{61}{216}$$

(ii) 서로 다른 주사위 세 개를 동시에 던질 때, 나온 눈의 수의 최솟값이 2인 경우

2 이상의 자연수에서 중복을 허락하여 세 개가 나올 확률은 $\dfrac{5^3}{6^3}$

3 이상의 자연수에서 중복을 허락하여 세 개가 나올 확률은 $\dfrac{4^3}{6^3}$

이므로 구하는 확률은

$$\frac{5^3}{6^3}-\frac{4^3}{6^3}=\frac{125-64}{216}$$

$$=\frac{61}{216}$$

(iii) 서로 다른 주사위 세 개를 동시에 던질 때, 나온 눈의 수의 최댓값이 5이고 최솟값이 2인 경우를 순서쌍으로 나타내면

(2, 2, 5), (2, 3, 5), (2, 4, 5), (2, 5, 5)

이므로 구하는 확률은

$$\frac{\frac{3!}{2!}+3!+3!+\frac{3!}{2!}}{6^3}=\frac{18}{216}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{61}{216}+\frac{61}{216}-\frac{18}{216}=\frac{104}{216}=\frac{13}{27}$$

8. 공간도형

정답 ④

[풀이] 선분 AB를 $2:b$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{8+ab}{2+b},\ \frac{12+2b}{2+b},\ \frac{12-2b}{2+b}\right)$$

이 점이 y축 위에 있으므로 이 점의 x좌표와 z좌표가 0이어야 한다.

$$\frac{8+ab}{2+b}=0,\ \frac{12-2b}{2+b}=0$$

즉, $a=-\dfrac{4}{3}$, $b=6$

따라서

$$a+b=-\frac{4}{3}+6=\frac{14}{3}$$

9. 미분법

정답 ③

[풀이] $$\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+2h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+2h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\left\{f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}}{h}$$

$$=2\times\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+2h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2h}+\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-h}$$

$$=2f'\left(\frac{\pi}{2}\right)+f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=3f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

한편, $f(x)=x\sin x$에서

$f'(x)=\sin x+x\cos x$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}=1$$

이므로

$$3f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$$

10. 평면벡터

정답 ①

[풀이] $x=2\sqrt{2}t$에서 $\dfrac{dx}{dt}=2\sqrt{2}$

$y=e^t+2e^{-t}$에서 $\dfrac{dy}{dt}=e^t-2e^{-t}$

점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$$s=\int_0^a\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_0^a\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(e^t-2e^{-t})^2}\,dt$$

$$=\int_0^a\sqrt{(e^t+2e^{-t})^2}\,dt$$

$$=\int_0^a(e^t+2e^{-t})dt$$

$$=\left[e^t-2e^{-t}\right]_0^a$$

$=e^a-2e^{-a}-(1-2)$

$=e^a-2e^{-a}+1$

$=2$

에서

$(e^a)^2-e^a-2=0$

$(e^a-2)(e^a+1)=0$

$e^a+1>0$이므로 $e^a=2$

따라서 $a=\ln 2$

11. 적분법

정답 ①

[풀이] 주어진 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 e^x-1인 정삼각형이므로 이 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(e^x-1)^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(e^{2x}-2e^x+1)$$

따라서 구하는 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^{\ln 3}S(x)dx$$

$$=\int_0^{\ln 3}\frac{\sqrt{3}}{4}(e^{2x}-2e^x+1)dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2x}-2e^x+x\right]_0^{\ln 3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\frac{1}{2}e^{2\ln 3}-2e^{\ln 3}+\ln 3-\left(\frac{1}{2}-2\right)\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{9}{2}-6+\ln 3+\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\ln 3$$

12. 공간벡터

정답 ④

[풀이] 두 점 A$(1,\ -1,\ a)$, B$(3,\ 1,\ b)$를 지나는 직선을 l이라 하고, 직선 l의 방향벡터를 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ 2,\ b-a)$, xy평면의 법선벡터를 $\vec{u}=(0,\ 0,\ 1)$이라 하자.

직선 l이 xy평면과 이루는 각의 크기가 $\dfrac{\pi}{3}$이므로

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{u}|}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\vec{u}|}$$

$$=\frac{|b-a|}{\sqrt{4+4+(b-a)^2}\sqrt{0+0+1}}$$

$$=\frac{|b-a|}{\sqrt{8+(b-a)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$2|b-a|=\sqrt{3}\times\sqrt{8+(b-a)^2}$

$4(b-a)^2=24+3(b-a)^2$

$(b-a)^2=24$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{4+4+(b-a)^2}$

$=\sqrt{8+24}$

$=4\sqrt{2}$

13. 통계

정답 ②

[풀이] 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(120,\ \left(\dfrac{\sigma}{5}\right)^2\right)$을 따르므로 $Z=\dfrac{\overline{X}-120}{\frac{\sigma}{5}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

또, 확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(120,\ \left(\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르므로 $Z=\dfrac{\overline{Y}-120}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(120\le\overline{X}\le126)=\mathrm{P}(117\le\overline{Y}\le120)$에서

$$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{6}{\frac{\sigma}{5}}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{-3}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le Z\le0\right)$$

$$\frac{30}{\sigma}=\frac{3\sqrt{n}}{\sigma},\ \sqrt{n}=10$$

따라서 $n=100$

14. 삼각함수 정답 ⑤

[풀이] 삼각형 ABP는 직각삼각형이므로

$\overline{AP}=\overline{AB}\cos\theta=10\cos\theta$

삼각형 PAH는 직각삼각형이므로

$\overline{AH}=\overline{AP}\cos\theta=10\cos^2\theta$

$\angle PAH=\angle PHT=\theta$이고

$\overline{PH}=\overline{AP}\sin\theta$이므로

$$\begin{aligned}\overline{HT}&=\overline{PH}\cos\theta\\&=\overline{AP}\sin\theta\cos\theta\\&=10\sin\theta\cos^2\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{PT}&=\overline{PH}\sin\theta\\&=\overline{AP}\sin^2\theta\\&=10\cos\theta\sin^2\theta\end{aligned}$$

따라서 삼각형 PTH의 넓이 $S(\theta)$는

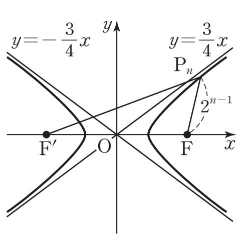
$$\begin{aligned}S(\theta)&=\frac{1}{2}\times10\sin\theta\cos^2\theta\times10\cos\theta\sin^2\theta\\&=50\sin^3\theta\cos^3\theta\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}&\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)\times\overline{AH}}{\theta\times\overline{HB}}\\&=\lim_{\theta\to0+}\frac{50\sin^3\theta\cos^3\theta\times10\cos^2\theta}{\theta\times(10-10\cos^2\theta)}\\&=\lim_{\theta\to0+}\frac{50\sin^3\theta\cos^3\theta\times10\cos^2\theta}{\theta\times10\sin^2\theta}\\&=\lim_{\theta\to0+}\frac{50\sin\theta\cos^5\theta}{\theta}\\&=50\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\times\cos^5\theta\right)\\&=50\times1\times1\\&=50\end{aligned}$$

15. 평면 곡선 정답 ③

[풀이] 쌍곡선의 점근선의 기울기는 $\pm\frac{3}{4}$이고, 원점 O와 점 $A(4\sqrt{2},\ 3)$을 지나는 직선의 기울기가 $\frac{3}{4\sqrt{2}}$이므로 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$로 놓을 수 있다.



점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{b}{a}x$이므로

$\frac{b}{a}=\frac{3}{4},\ b=\frac{3}{4}a$ …… ㉠

쌍곡선이 점 $A(4\sqrt{2},\ 3)$을 지나므로

$\frac{32}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1$

$32b^2-9a^2=a^2b^2$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$32\times\frac{9}{16}a^2-9a^2=a^2\times\frac{9}{16}a^2$

$a^2(a^2-16)=0$

$a\neq0$이므로 $a^2=16,\ b^2=\frac{9}{16}a^2=9$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$이므로 두 초점은 $F(5,\ 0),\ F'(-5,\ 0)$이고, 주축의 길이가 $2\times4=8$이므로

$\overline{P_nF'}-\overline{P_nF}=8$

$\overline{P_nF'}=\overline{P_nF}+8=2^{n-1}+8$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{8}\overline{P_nF'}&=\sum_{n=1}^{8}(2^{n-1}+8)\\&=\frac{1\times(2^8-1)}{2-1}+8\times8\\&=256-1+64\\&=319\end{aligned}$$

16. 통계 정답 ②

[풀이] 정규분포 $N(m,\ 8^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다. 즉, 모든 실수 x에 대하여

$f(20-x)=f(40+x)$이므로

$m=\frac{(20-x)+(40+x)}{2}=30$

확률변수 X가 정규분포 $N(30,\ 8^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-30}{8}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(-2\le Z\le-1)=P(38\le X\le a)$에서

$$\begin{aligned}P(-2\le Z\le-1)&=P\left(\frac{38-30}{8}\le Z\le\frac{a-30}{8}\right)\\&=P\left(1\le Z\le\frac{a-30}{8}\right)\end{aligned}$$

따라서 $\frac{a-30}{8}=2,\ a=46$이므로

$$\begin{aligned}&P(a-20\le X\le a-8)\\&=P(26\le X\le38)\\&=P\left(\frac{26-30}{8}\le Z\le\frac{38-30}{8}\right)\\&=P(-0.5\le Z\le1)\\&=P(0\le Z\le0.5)+P(0\le Z\le1)\\&=0.1915+0.3413\\&=0.5328\end{aligned}$$

17. 적분법 정답 ②

[풀이] $f(x)=\ln x-x\int_1^e\frac{f(t)+1}{t}dt$에서

$\int_1^e\frac{f(t)+1}{t}dt=A$라 하면

$f(x)=\ln x-Ax$

$$\begin{aligned}A&=\int_1^e\frac{\ln t-At+1}{t}dt\\&=\int_1^e\left\{\ln t(\ln t)'-A+\frac{1}{t}\right\}dt\\&=\left[\frac{1}{2}(\ln t)^2-At+\ln t\right]_1^e\\&=\frac{1}{2}-A(e-1)+1\end{aligned}$$

이므로 $A=\frac{3}{2e}$

따라서 $f(x)=\ln x-\frac{3}{2e}x$

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{3}{2e}$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{2e}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{2e}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{2e}{3}$에서 극대이면서 최대이므로 $f(x)$는 $x=\frac{2e}{3}$에서 최댓값을 갖고 최댓값은

$$\begin{aligned}f\left(\frac{2e}{3}\right)&=\ln\frac{2e}{3}-\frac{3}{2e}\times\frac{2e}{3}\\&=\ln\frac{2}{3}+1-1\\&=\ln\frac{2}{3}\end{aligned}$$

18. 통계 정답 ④

[풀이]
$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{k=0}^{n-1}kP(X=k)=\sum_{k=0}^{n-1}k\frac{{}_{k+1}C_1}{{}_{n+1}C_2}\\&=\frac{2}{(n+1)n}\sum_{k=0}^{n-1}k(k+1)\\&=\frac{2}{(n+1)n}\times\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)\\&=\boxed{\frac{2}{3}(n-1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X\ge m)&=\sum_{k=m}^{n-1}P(X=k)\\&=\sum_{k=m}^{n-1}\frac{{}_{k+1}C_1}{{}_{n+1}C_2}\\&=\frac{2}{(n+1)n}\sum_{k=m}^{n-1}{}_{k+1}C_1\\&=\frac{2}{(n+1)n}\times\frac{(n-m)(m+1+n)}{2}\\&=\frac{(n-m)(m+1+n)}{(n+1)n}\ge\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow(n-m)(m+1+n)\ge\frac{1}{2}(n+1)n$

$\Longleftrightarrow m(m+1)\le\boxed{\frac{1}{2}n(n+1)}$

을 만족시키는 정수 m의 최댓값이 M_n이므로

$M_n(M_n+1)\le\boxed{\frac{1}{2}n(n+1)}<(M_n+1)(M_n+2)$

이고

$M_n{}^2<\boxed{\frac{1}{2}n(n+1)}<(M_n+2)^2$ …… ㉠

이라 할 수 있다.

㉠에서 $\sqrt{\boxed{\frac{1}{2}n(n+1)}}-2<M_n<\sqrt{\boxed{\frac{1}{2}n(n+1)}}$

이고 $E(X)=\boxed{\frac{2}{3}(n-1)}$이므로 2 이상의 자연수 n에 대하여

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{2}n(n+1)}-2}{\frac{2}{3}(n-1)}<\frac{M_n}{E(X)}<\frac{\sqrt{\frac{1}{2}n(n+1)}}{\frac{2}{3}(n-1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{2}n(n+1)}-2}{\frac{2}{3}(n-1)}=\frac{3}{4}\sqrt{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{2}n(n+1)}}{\frac{2}{3}(n-1)}=\frac{3}{4}\sqrt{2}$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{M_n}{E(X)}=\boxed{\frac{3}{4}\sqrt{2}}$

따라서 $f(n)=\frac{2}{3}(n-1),\ g(n)=\frac{1}{2}n(n+1),$

$a=\frac{3}{4}\sqrt{2}$이므로

$$\begin{aligned}\frac{f(10)+g(20)}{a^2}&=\frac{6+210}{\frac{18}{16}}\\&=\frac{216\times16}{18}=192\end{aligned}$$

19. 적분법 정답 ⑤

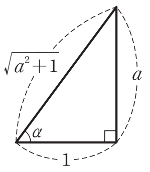
[풀이]
$$\begin{aligned}S_1&=\int_0^\pi\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^\pi\\&=1-(-1)=2\end{aligned}$$

$S_1:S_2=3:1$이므로

$S_2=\frac{2}{3}$

두 함수 $y=a\cos x,\ y=\sin x$의 그래프의 교점의 x좌표는

$a\cos x=\sin x$
$a>0$이므로 교점의 x좌표를 α로 놓으면
$a\cos\alpha=\sin\alpha,\ a=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$ …… ㉠
따라서
$S_2=\int_0^{\alpha}\sin x\,dx+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}a\cos x\,dx$
$=\Big[-\cos x\Big]_0^{\alpha}+\Big[a\sin x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$
$=-\cos\alpha+1+a-a\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$
$a\sin\alpha+\cos\alpha=a+\dfrac{1}{3}$ …… ㉡
㉠에서 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$이므로
$\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$,
$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$



㉡에서
$\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{3a+1}{3}$
$3(a^2+1)=(3a+1)\sqrt{a^2+1}$
양변을 제곱하면
$9(a^2+1)^2=(3a+1)^2(a^2+1)$
$9(a^2+1)=(3a+1)^2$
$9a^2+9=9a^2+6a+1$
$6a=8$
따라서 $a=\dfrac{4}{3}$

20. 공간벡터 정답 ②

[풀이] $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=\vec{c}$라 하면
$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times4\times\cos\dfrac{\pi}{3}=8$
$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}=4\times6\times\cos\dfrac{2}{3}\pi=-12$
$\overrightarrow{OH}=k(\vec{a}+\vec{b})$ (k는 실수)라 하면
$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}=k(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}$
$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{OA}$이므로
$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OA}=\{k(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}\}\cdot\vec{a}=0$
$k|\vec{a}|^2+k\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{c}\cdot\vec{a}=16k+8k+12=0$
$k=-\dfrac{1}{2}$
따라서 $\overrightarrow{CH}=-\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}$이므로
$|\overrightarrow{CH}|^2=\dfrac{1}{4}|\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}|^2$
$=\dfrac{1}{4}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+4|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}\cdot\vec{c}+4\vec{c}\cdot\vec{a})$
$=\dfrac{1}{4}\{16+16+4\times36+2\times8+4\times(-12)+4\times(-12)\}$
$=24$
따라서 $|\overrightarrow{CH}|=2\sqrt{6}$

21. 적분법 정답 ②

[풀이] $f(x)=\int_0^x g(t)\cos t\,dt+2$ …… ㉠
$g(x)=\int_0^x f(t)\cos t\,dt$ …… ㉡
㉠, ㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x)=g(x)\cos x$ …… ㉢
$g'(x)=f(x)\cos x$ …… ㉣
㉠, ㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면
$f(0)=2,\ g(0)=0$
㉢+㉣을 하면
$f'(x)+g'(x)=\{f(x)+g(x)\}\cos x$
$\dfrac{f'(x)+g'(x)}{f(x)+g(x)}=\cos x$
$\int\dfrac{f'(x)+g'(x)}{f(x)+g(x)}\,dx=\int\cos x\,dx$
$\ln|f(x)+g(x)|=\sin x+C_1$ (C_1은 적분상수)
$x\ge0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+g(x)>0$이므로
$f(x)+g(x)=e^{\sin x+C_1}$
$f(0)=2,\ g(0)=0$이므로
$2+0=e^{\sin 0+C_1}=e^{C_1}$
$C_1=\ln 2$
따라서 $f(x)+g(x)=2e^{\sin x}$ …… ㉤
㉢−㉣을 하면
$f'(x)-g'(x)=\{g(x)-f(x)\}\cos x$
$\dfrac{f'(x)-g'(x)}{f(x)-g(x)}=-\cos x$
$\int\dfrac{f'(x)-g'(x)}{f(x)-g(x)}\,dx=-\int\cos x\,dx$
$\ln|f(x)-g(x)|=-\sin x+C_2$ (C_2는 적분상수)
$x\ge0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)-g(x)>0$이므로
$f(x)-g(x)=e^{-\sin x+C_2}$
$f(0)=2,\ g(0)=0$이므로
$2-0=e^{-\sin 0+C_2}=e^{C_2}$
$C_2=\ln 2$
따라서 $f(x)-g(x)=2e^{-\sin x}$ …… ㉥
㉤, ㉥에서
$f(x)=e^{\sin x}+e^{-\sin x}$
$g(x)=e^{\sin x}-e^{-\sin x}$
따라서
$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\times g\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=(e+e^{-1})(e^{-1}-e)$
$=1-e^2+e^{-2}-1$
$=\dfrac{1}{e^2}-e^2$

22. 순열과 조합 정답 7

[풀이] ${}_6\mathrm{H}_4={}_9\mathrm{C}_4=\dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$
${}_5\mathrm{H}_3={}_7\mathrm{C}_3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$
${}_2\Pi_3=2^3=8$
따라서
$\dfrac{{}_6\mathrm{H}_4-2\times{}_5\mathrm{H}_3}{{}_2\Pi_3}=\dfrac{126-2\times35}{8}$
$=\dfrac{56}{8}=7$

23. 지수함수와 로그함수 정답 195

[풀이] $\log_{\frac{1}{2}}(x-5)>-4$에서
$-\log_2(x-5)>-4$
$\log_2(x-5)<4$
진수 조건에 의하여 $x-5>0,\ x>5$ …… ㉠
$\log_2(x-5)<4$에서
$x-5<2^4$
$x<16+5=21$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $5<x<21$
따라서 정수 x의 값은 6, 7, 8, ⋯, 20이고 이들의 합은
$\dfrac{15(6+20)}{2}=195$

24. 공간벡터 정답 40

[풀이] 두 직선 l과 m의 교점을
$\mathrm{P}(5t+1,\ 2t+2,\ 3t+4)$ (t는 실수)라 하자.
점 P는 평면 α : $2x-y+3z+5=0$ 위에 있으므로
$2(5t+1)-(2t+2)+3(3t+4)+5=0$
$17t+17=0,\ t=-1$
따라서 점 P의 좌표는
$(-4,\ 0,\ 1)$
직선 m의 방향벡터를 $\vec{u_1}=(5,\ 2,\ 3)$, 평면
$2x-y+3z+5=0$의 법선벡터를 $\vec{u_2}=(2,\ -1,\ 3)$,
직선 l의 방향벡터를 $\vec{u_3}=(a,\ b,\ c)$라 하자.
$\vec{u_1}\cdot\vec{u_3}=5a+2b+3c=0$ …… ㉠
$\vec{u_2}\cdot\vec{u_3}=2a-b+3c=0$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $b=-a,\ c=-a$
이므로 직선 l의 방정식
$\dfrac{x+4}{a}=\dfrac{y}{-a}=\dfrac{z-1}{-a}$
즉, $x+4=-y=1-z$
직선 l이 점 $(p,\ q,\ 3)$을 지나므로
$p+4=-q=1-3$
$p=-6,\ q=2$
따라서 $p^2+q^2=40$

25. 삼각함수 정답 11

[풀이] $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$
$(\sin x-\sin y)^2=\sin^2x-2\sin x\sin y+\sin^2y$
$=\dfrac{1}{4}$ …… ㉠
$(\cos x-\cos y)^2=\cos^2x-2\cos x\cos y+\cos^2y$
$=1$ …… ㉡
㉠+㉡을 하면
$\sin^2x-2\sin x\sin y+\sin^2y+\cos^2x-2\cos x\cos y+\cos^2y$
$=\dfrac{5}{4}$
$2\sin x\sin y+2\cos x\cos y=\dfrac{3}{4}$
$\sin x\sin y+\cos x\cos y=\dfrac{3}{8}$
따라서 $\cos(x-y)=\dfrac{3}{8}$이므로
$p=8,\ q=3$
따라서 $p+q=11$

26. 순열과 조합 정답 880

[풀이] $6\le|x|+|y|+|z|\le10$
에서
$|x|>0,\ |y|>0,\ |z|>0$
이므로 $|x|=a,\ |y|=b,\ |z|=c$라 하자.
($a,\ b,\ c$는 자연수)
$6\le a+b+c\le10$ …… ㉠
을 만족시키는 세 자연수 $a,\ b,\ c$의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$에서
$a=a'+1,\ b=b'+1,\ c=c'+1$
($a',\ b',\ c'$은 음이 아닌 정수)
라 하고 부등식 ㉠에 대입하면
$3\le a'+b'+c'\le7$ …… ㉡
부등식 ㉡을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a',\ b',\ c'$의 모든 순서쌍 $(a',\ b',\ c')$의 개수는 서로 다른 3개에서 3개, 4개, 5개, 6개, 7개를 택하는 중복조합의 수의 합과 같으므로
${}_3\mathrm{H}_3+{}_3\mathrm{H}_4+{}_3\mathrm{H}_5+{}_3\mathrm{H}_6+{}_3\mathrm{H}_7$
$={}_5\mathrm{C}_3+{}_6\mathrm{C}_4+{}_7\mathrm{C}_5+{}_8\mathrm{C}_6+{}_9\mathrm{C}_7$
$={}_5\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_2+{}_7\mathrm{C}_2+{}_8\mathrm{C}_2+{}_9\mathrm{C}_2$
$=10+15+21+28+36$
$=110$
이때 $x=\pm a,\ y=\pm b,\ z=\pm c$이므로 구하는 순서쌍의 개수는
$110\times2\times2\times2=880$

27. 평면 곡선 　정답 8

[풀이] 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점을

$\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)\ (c>0)$

이라 하면 $c^2=25-9=16$이므로

$\mathrm{F}(4,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-4,\ 0)$

$\overline{\mathrm{FF}'}=8$

$\overline{\mathrm{F}'\mathrm{Q}}:\overline{\mathrm{QP}}=2:1$이므로 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{\mathrm{FF}'}:\overline{\mathrm{FP}}=2:1$

$\overline{\mathrm{FP}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{FF}'}=\frac{1}{2}\times 8=4$

또한, 타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF}'}=2\times 5=10$

즉, $\overline{\mathrm{PF}'}=10-\overline{\mathrm{PF}}=10-4=6$

따라서 $\overline{\mathrm{F}'\mathrm{Q}}:\overline{\mathrm{QP}}=2:1$이므로

$\overline{\mathrm{F}'\mathrm{Q}}=4$, $\overline{\mathrm{QP}}=2$

따라서 $\overline{\mathrm{F}'\mathrm{Q}}\times\overline{\mathrm{QP}}=8$

28. 확률 　정답 583

[풀이] $\overline{\mathrm{OP}}=5$인 경우는 주어진 시행을 5번 했을 때 점 P의 좌표가 $(5,\ 0)$, $(4,\ 3)$, $(3,\ 4)$, $(0,\ 5)$일 때이다.

(i) 점 P의 좌표가 $(5,\ 0)$인 경우

　2가 적힌 공이 5번 나올 확률은 $\left(\frac{1}{4}\right)^5$

(ii) 점 P의 좌표가 $(4,\ 3)$인 경우

　① 1이 적힌 공이 두 번, 4가 적힌 공이 세 번 나올 확률은

　$\frac{5!}{2!3!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^5$

　② 2가 적힌 공이 두 번, 1, 3, 4가 적힌 공이 각각 한 번씩 나올 확률은

　$\frac{5!}{2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^5$

(iii) 점 P의 좌표가 $(3,\ 4)$인 경우

　① 2가 적힌 공이 세 번, 3이 적힌 공이 두 번 나올 확률은

　$\frac{5!}{3!2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^5$

　② 4가 적힌 공이 두 번, 1, 2, 3이 적힌 공이 각각 한 번씩 나올 확률은

　$\frac{5!}{2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^5$

(iv) 점 P의 좌표가 $(0,\ 5)$인 경우

　4가 적힌 공이 5번 나올 확률은 $\left(\frac{1}{4}\right)^5$

(i)~(iv)에서 구하는 확률은

$$2\times\left(\frac{1}{4}\right)^5+2\times\left(\frac{5!}{2!3!}+\frac{5!}{2!}\right)\times\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{2+140}{4^5}$$

$$=\frac{71}{512}$$

이므로

$p=512$, $q=71$

따라서 $p+q=583$

29. 평면벡터 　정답 31

[풀이] $\overrightarrow{\mathrm{OX}_1}=\overrightarrow{\mathrm{OX}_0}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{X}_0\mathrm{A}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{X}_0\mathrm{B}}+\frac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{X}_0\mathrm{C}}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$=\frac{1}{2}(2,\ 3)+\frac{1}{4}(3,\ -1)+\frac{1}{8}(-2,\ -4)$

$=\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{4}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{OX}_{i+1}}=\overrightarrow{\mathrm{OX}_i}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{X}_i\mathrm{A}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{X}_i\mathrm{B}}+\frac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{X}_i\mathrm{C}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{OX}_i}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}_i})+\frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}_i})$

$+\frac{1}{8}(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}_i})$

$=\frac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{OX}_i}+\overrightarrow{\mathrm{OX}_1}$

$\overrightarrow{\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2}=\overrightarrow{\mathrm{OX}_2}-\overrightarrow{\mathrm{OX}_1}$

$=\frac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{OX}_1}+\overrightarrow{\mathrm{OX}_1}-\overrightarrow{\mathrm{OX}_1}$

$=\frac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{OX}_1}$

이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2}|=\frac{1}{8}\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}$

$=\frac{1}{8}\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{16}}$

$=\frac{3}{32}\sqrt{5}$

한편,

$\overrightarrow{\mathrm{X}_i\mathrm{X}_{i+1}}=\overrightarrow{\mathrm{OX}_{i+1}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}_i}$

$=\frac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{OX}_i}+\overrightarrow{\mathrm{OX}_1}-\left(\frac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{OX}_{i-1}}+\overrightarrow{\mathrm{OX}_1}\right)$

$=\frac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{OX}_i}-\frac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{OX}_{i-1}}$

$=\frac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{X}_{i-1}\mathrm{X}_i}$

즉, $|\overrightarrow{\mathrm{X}_i\mathrm{X}_{i+1}}|=\frac{1}{8}|\overrightarrow{\mathrm{X}_{i-1}\mathrm{X}_i}|$이므로

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\overrightarrow{\mathrm{X}_i\mathrm{X}_{i+1}}|=\frac{\frac{3}{32}\sqrt{5}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{3}{28}\sqrt{5}$$

따라서 $p=28$, $q=3$이므로

$p+q=28+3=31$

30. 적분법 　정답 24

[풀이] $g(x)=\int_0^x e^t f(t)dt$ …… ㉠

$x\{f(x)-1\}=2\int_0^x e^{-t}g(t)dt$ …… ㉡

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)-1+xf'(x)=2e^{-x}g(x)$ …… ㉢

㉠을 ㉢에 대입하면

$\{f(x)-1+xf'(x)\}e^x=2\int_0^x e^t f(t)dt$ …… ㉣

㉣의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\{f'(x)+f'(x)+xf''(x)\}e^x$

$+\{f(x)-1+xf'(x)\}e^x$

$=2e^x f(x)$

$e^x>0$이므로

$xf''(x)+(x+2)f'(x)+f(x)-1=2f(x)$

$xf''(x)+(x+2)f'(x)-f(x)=1$ …… ㉤

(i) 다항함수 $f(x)$의 최고차항을 $ax^n(a\neq 0,\ n$은 자연수)이라 하면

　$f'(x)$의 최고차항은 anx^{n-1}

　$f''(x)$의 최고차항은 $an(n-1)x^{n-2}$

　이므로 ㉤에서 좌변은

　$an(n-1)x^{n-1}+an(x+2)x^{n-1}-ax^n$

　$=an(n-1)x^{n-1}+anx^n+2anx^{n-1}-ax^n$

　$=a(n-1)x^n+an(n+1)x^{n-1}$

　의 항을 가지므로 n이 2 이상일 때는 모든 실수 x에 대하여 ㉤이 성립할 수 없다.

(ii) 다항함수 $f(x)$가 상수함수라 하면

　$f'(x)=f''(x)=0$이므로

　㉤에서 $f(x)=-1$

　㉠에서 $g(x)=-e^x+1$

　이를 ㉡에 대입하면

　$-2x=2\int_0^x e^{-t}(-e^t+1)dt$

　$=2\int_0^x(-1+e^{-t})dt$

　$=2\Big[-t-e^{-t}\Big]_0^x$

　$=2(-x-e^{-x}+1)$

　즉, 모든 실수 x에 대하여 등식이 성립하지 않는다.

(i), (ii)에서 $f(x)$는 일차식이다.

$f(x)=mx+k\ (m\neq 0,\ k$는 상수)라 하면

$f'(x)=m$, $f''(x)=0$

㉤에서

$m(x+2)-(mx+k)=1$

$2m-k=1$ …… ㉥

㉣에 $x=0$을 대입하면

$k-1=0$

이므로 $k=1$

㉥에서 $m=1$

따라서 $f(x)=x+1$이고 ㉢에서

$g(x)=\frac{2xe^x}{2}=xe^x$

이므로

$\frac{f(5)\times g(4)}{e^4}=\frac{6\times 4e^4}{e^4}$

$=24$

제 3 회

정 답

1	④	2	②	3	②	4	②	5	①
6	③	7	⑤	8	⑤	9	①	10	①
11	③	12	⑤	13	⑤	14	①	15	④
16	⑤	17	⑤	18	④	19	②	20	④
21	③	22	4	23	27	24	8	25	36
26	45	27	12	28	17	29	20	30	6

풀 이

1. 평면벡터 정답 ④

$4\vec{a}=(4,\ 4k)$이므로 모든 성분의 합은

$4+4k=20$

따라서 $k=4$

2. 삼각함수 정답 ②

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{2x\cos x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times\frac{3}{2\cos x}\right\}$$
$$=\frac{3}{2}$$

3. 적분법 정답 ②

$$\int_1^2\sqrt{x-1}\,dx=\left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2$$
$$=\frac{2}{3}(1-0)=\frac{2}{3}$$

4. 확률 정답 ②

$\mathrm{P}(A\cap B)=p$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}+p$

이고 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로

$p=\left(\frac{1}{3}+p\right)\times\frac{1}{2}$

$2p=\frac{1}{3}+p$

따라서 $p=\frac{1}{3}$

5. 삼각함수 정답 ①

$$\tan\beta=\tan(\alpha+(\beta-\alpha))$$
$$=\frac{\tan\alpha+\tan(\beta-\alpha)}{1-\tan\alpha\ \tan(\beta-\alpha)}$$
$$=\frac{4}{1-3}=-2$$

6. 평면벡터 정답 ③

$x=\frac{1}{2}t^2+\ln t$에서 $\frac{dx}{dt}=t+\frac{1}{t}$

$y=2t^3+\frac{6}{t}$에서 $\frac{dy}{dt}=6t^2-\frac{6}{t^2}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6t^2-\frac{6}{t^2}}{t+\frac{1}{t}}=6\left(t-\frac{1}{t}\right)$$

따라서 $t=3$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$6\left(3-\frac{1}{3}\right)=16$

7. 공간도형 정답 ⑤

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 P라 하면 점 P의 y좌표와 z좌표는 각각

$\frac{2c-6}{2+1},\ \frac{2+a}{2+1}$

이고, 이 점이 x축 위에 있으므로

$\frac{2c-6}{2+1}=0,\ \frac{2+a}{2+1}=0$

따라서 $c=3,\ a=-2$

선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점을 Q라 하면 점 Q의 x좌표는

$\frac{2b-2}{2-1}$

이고, 이 점이 yz평면 위에 있으므로

$\frac{2b-2}{2-1}=0$

따라서 $b=1$

따라서 $a+b+c=-2+1+3=2$

8. 평면벡터 정답 ⑤

두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{d_1},\ \vec{d_2}$라 하면

$\vec{d_1}=(1,\ 2),\ \vec{d_2}=(a,\ -2)$

두 벡터 $\vec{d_1},\ \vec{d_2}$가 이루는 예각의 크기가 $60°$이므로

$\cos60°=\frac{|\vec{d_1}\cdot\vec{d_2}|}{|\vec{d_1}||\vec{d_2}|},\ \frac{1}{2}=\frac{|a-4|}{\sqrt{1+4}\times\sqrt{a^2+4}}$

$5(a^2+4)=4(a-4)^2,\ a^2+32a-44=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 합은 -32이다.

9. 통계 정답 ①

이 고등학교 학생이 어떤 한 권의 책을 읽는데 걸리는 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(360,\ 20^2)$을 따르고 $Z=\frac{X-360}{20}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(330\le X\le380)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{330-360}{20}\le Z\le\frac{380-360}{20}\right)$

$=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le1)$

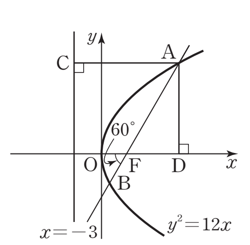
$=\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le1)$

$=0.4332+0.3413$

$=0.7745$

10. 평면 곡선 정답 ①

포물선 $y^2=12x$의 초점 F의 좌표는 $(3,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-3$이다.



점 A에서 준선과 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자.

포물선의 정의에 의하여 $\overline{AC}=\overline{AF}$

$\angle AFD=60°$이므로 $\overline{AF}=2\overline{FD}$

$\overline{FD}=\overline{AC}-2\times\overline{OF}$이므로

$\overline{AC}=2(\overline{AC}-2\times3),\ \overline{AC}=12$

따라서 $\overline{AF}=12$

11. 평면벡터 정답 ③

$x=t+2\cos t$에서 $\frac{dx}{dt}=1-2\sin t$

$y=-2\sin t$에서 $\frac{dy}{dt}=-2\cos t$

점 P의 시각 t에서의 속력은

$\sqrt{(1-2\sin t)^2+(-2\cos t)^2}=\sqrt{5-4\sin t}$

이고 $-1\le\sin t\le1$이므로 속력의 최댓값은

$\sqrt{5-4\times(-1)}=3$

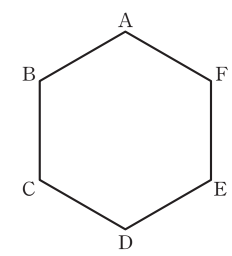
12. 순열과 조합 정답 ⑤

빈 의자를 한 사람으로 보고 원탁의 둘레에 6명이 앉는 경우의 수는

$5!=120$

13. 통계 정답 ⑤

그림과 같이 정육각형의 6개의 꼭짓점을 각각 A, B, C, D, E, F라 하자.



6개의 꼭짓점 중에서 임의로 서로 다른 세 점을 선택하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_3=20$

이등변삼각형(삼각형 ABC꼴)의 넓이는 $\frac{S}{6}$,

직각삼각형(삼각형 ABD꼴)의 넓이는 $\frac{S}{3}$,

정삼각형(삼각형 ACE꼴)의 넓이는 $\frac{S}{2}$이다.

직각삼각형은 변 AB를 기준으로 삼각형 ABD와 삼각형 ABE가 있으므로 그 개수는 $2\times6=12$

따라서 $\mathrm{P}\left(X=\frac{S}{3}\right)=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$

14. 지수함수와 로그함수 정답 ①

점 A의 좌표를 $(a,\ \log_4 a)(a>1)$라 하면

점 C의 좌표는 $(a,\ \log_{\frac{1}{2}}a)$이므로

$\overline{AC}=\log_4 a-\log_{\frac{1}{2}}a=\frac{3}{2}\log_2 a$

$\frac{3}{2}\log_2 a=3,\ \log_2 a=2$

따라서 $a=4$

$\mathrm{A}(4,\ 1)$이므로 $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\ 1\right),\ \mathrm{D}\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

$\overline{AB}=\frac{7}{2},\ \overline{BD}=\frac{3}{2}$ 이므로 삼각형 ABD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{7}{2}=\frac{21}{8}$

15. 평면벡터 정답 ④

선분 AB의 중점을 M이라 하면

$\vec{PA}+\vec{PB}=2\vec{PM}$

이므로 (가)에서 $2\vec{PM}=\frac{2}{3}\vec{CA},\ \vec{PM}=\frac{1}{3}\vec{CA}$

선분 BC의 중점을 N이라 하면

$\vec{MN}=\frac{1}{2}\vec{CA},\ \vec{PM}=\frac{1}{3}\vec{CA}$이므로 $\vec{PN}=\frac{1}{6}\vec{CA}$

점 M이 선분 AB의 중점이므로 (나)에서 삼각형 PMB의 넓이는 3이고, 점 P가 선분 MN을 2 : 1로 내분하는 점이므로 삼각형 PBN의 넓이는 $\frac{3}{2}$이다.

삼각형 MBN의 넓이는 $3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$이고, 삼각형 MBN과 삼각형 ABC의 넓이의 비가 1 : 4이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{9}{2}\times 4=18$

16. 미분법 정답 ⑤

$f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$g(-1)=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 $f(\theta)=-1$

$\sin\theta-2\cos\theta=-1$

$\sin^2\theta=4\cos^2\theta-4\cos\theta+1$

$5\cos^2\theta-4\cos\theta=0$

$\cos\theta(5\cos\theta-4)=0$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\theta=\frac{4}{5}$

$\sin\theta=\frac{3}{5}$이고 $f(x)=\sin x-2\cos x$에서

$f'(x)=\cos x+2\sin x$이므로

$$g'(-1)=\frac{1}{f'(g(-1))}=\frac{1}{f'(\theta)}$$
$$=\frac{1}{\cos\theta+2\sin\theta}$$
$$=\frac{1}{\frac{4}{5}+2\times\frac{3}{5}}$$
$$=\frac{1}{2}$$

17. 미분법 정답 ⑤

$x^2+y^2=e^{2y}$에서 $\ln(x^2+y^2)=2y$이므로

$$\ln\left(x^2+\frac{x^2\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)=\frac{2x\cos x}{\sin x}$$
$$\ln\frac{x^2}{\sin^2 x}=\frac{2x\cos x}{\sin x}$$
$$\ln\frac{\boxed{x}}{\sin x}=\frac{x\cos x}{\sin x}$$

$f(x)=\ln\frac{\boxed{x}}{\sin x}-\frac{x\cos x}{\sin x}$ $(0<x<\pi)$라 하면

$f(x)=\ln x-\ln(\sin x)-\frac{x\cos x}{\sin x}$

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}$$
$$-\frac{(\cos x-x\sin x)\sin x-x\cos^2 x}{\sin^2 x}$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{2\cos x}{\sin x}+\frac{x\cos^2 x}{\sin^2 x}+x$$
$$=\frac{1}{x}\left(1-\frac{2x\cos x}{\sin x}+\frac{x^2\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)+x$$
$$=\frac{1}{x}\left(1-\boxed{\frac{x\cos x}{\sin x}}\right)^2+x>0$$

이므로 함수 $f(x)$는 열린 구간 $(0, \pi)$에서 증가한다.

$\lim_{x\to 0+}f(x)=\boxed{-1}<0$, $\lim_{x\to\pi-}f(x)=\infty$

이므로 두 곡선 $y=\frac{x}{\tan x}$와 $x^2+y^2=e^{2y}$은 열린 구간 $(0, \pi)$에서 오직 하나의 교점을 갖는다.

따라서 $g(x)=x$, $h(x)=x\cos x$, $a=-1$이므로

$$a\times\frac{h\left(\frac{\pi}{3}\right)}{g\left(\frac{\pi}{3}\right)}=(-1)\times\frac{\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{2}$$

18. 삼각함수 정답 ④

$\overline{AB}=2$, $\angle B=\theta$, $\angle C=\frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{AC}=2\sin\theta$

$\angle B=\theta$, $\angle DAB=2\theta$이므로 $\angle ADC=3\theta$

따라서

$\overline{CD}=\frac{2\sin\theta}{\tan 3\theta}$

점 E에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고, 정사각형의 한 변의 길이를 a라 하면 $\overline{DH}=\frac{2\sin\theta}{\tan 3\theta}-a$

이므로 삼각형 EDH에서

$$\overline{EH}=\left(\frac{2\sin\theta}{\tan 3\theta}-a\right)\tan 3\theta$$
$$=2\sin\theta-a\tan 3\theta$$

$2\sin\theta-a\tan 3\theta=a$이므로

$a=\frac{2\sin\theta}{1+\tan 3\theta}$

$f(\theta)=\left(\frac{2\sin\theta}{1+\tan 3\theta}\right)^2$이므로

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{4\sin^2\theta}{\theta^2(1+\tan 3\theta)^2}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{4\times\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\times\frac{1}{(1+\tan 3\theta)^2}\right\}$$
$$=4\times 1\times 1=4$$

19. 적분법 정답 ②

$(x-1)^2+1=t$라 하면

$2(x-1)\frac{dx}{dt}=1$

이므로 곡선 $y=2-\frac{4(x-1)}{(x-1)^2+1}$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^2\left\{2-\frac{4(x-1)}{(x-1)^2+1}\right\}dx$$
$$=\Big[2x\Big]_0^2-\int_0^1\frac{4(x-1)}{(x-1)^2+1}\,dx-\int_1^2\frac{4(x-1)}{(x-1)^2+1}\,dx$$
$$=4-\int_2^1\frac{2}{t}\,dt-\int_1^2\frac{2}{t}\,dt$$
$$=4$$

따라서 곡선 $y=6e^{-kx}-2$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 2이다.

곡선 $y=6e^{-kx}-2$와 x축의 교점의 x좌표는

$6e^{-kx}-2=0$에서 $e^{-kx}=\frac{1}{3}$, $-kx=\ln\frac{1}{3}$이므로

$x=\frac{\ln 3}{k}$

곡선 $y=6e^{-kx}-2$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^{\frac{\ln 3}{k}}(6e^{-kx}-2)\,dx=\left[-\frac{6}{k}e^{-kx}-2x\right]_0^{\frac{\ln 3}{k}}$$
$$=\left(-\frac{6}{k}e^{-\ln 3}-\frac{2\ln 3}{k}\right)$$
$$-\left(-\frac{6}{k}\right)$$
$$=-\frac{6}{k}\times\frac{1}{3}-\frac{2\ln 3}{k}+\frac{6}{k}$$
$$=\frac{4}{k}-\frac{2\ln 3}{k}$$

이므로 $\frac{4}{k}-\frac{2\ln 3}{k}=2$

따라서 $k=2-\ln 3$

20. 공간벡터 정답 ④

점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 B가 y축 위의 점이므로 점 P의 y좌표가

양수일 때 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}=\overline{OB}\times\overline{OH}$,

0일 때 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}=\overline{OB}\times 0$,

음수일 때 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}=-\overline{OB}\times\overline{OH}$이다.

따라서 점 P의 y좌표가 최대일 때 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}$의 값이 최대이다.

점 A가 평면 α와 x축의 교점이므로 $A(-6, 0, 0)$

구 $(x+6)^2+y^2+z^2=16$과 평면 α가 만나서 생기는 원이 C이다.

$x-2y+z+6=0$에서 $x+6=2y-z$이므로

$(2y-z)^2+y^2+z^2=16$, $5y^2-4yz+2z^2=16$

$3y^2+2(z^2-2yz+y^2)=16$, $2(z-y)^2=16-3y^2$

$16-3y^2\geq 0$, $y^2\leq\frac{16}{3}$

$-\frac{4}{\sqrt{3}}\leq y\leq\frac{4}{\sqrt{3}}$

점 P의 y좌표의 최댓값이 $\frac{4}{\sqrt{3}}$이므로 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}$의 최댓값은

$3\times\frac{4}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$

21. 적분법 정답 ③

ㄱ. $f(x)=\int_{-1}^{x}\frac{e^{|t|}-e}{e^t+1}\,dt$에서 $f'(x)=\frac{e^{|x|}-e}{e^x+1}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 열린 구간 $(-1, 1)$에서 감소한다. (참)

ㄴ. $x\geq 0$일 때,

$f'(x)=\frac{e^x-e}{e^x+1}$에서 $f'(0)=\frac{1-e}{2}$, $f'(1)=0$

함수 $f'(x)$가 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 연속이고, 열린 구간 $(0, 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f'(1)-f'(0)}{1-0}=f''(a)$, 즉 $f''(a)=\frac{e-1}{2}>\frac{1}{2}$

을 만족시키는 a가 열린 구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다. (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(-1)$이고 극솟값은 $f(1)$이다.

$$f(-1)=\int_{-1}^{-1}\frac{e^{|t|}-e}{e^t+1}\,dt=0$$
$$f(1)=\int_{-1}^{1}\frac{e^{|t|}-e}{e^t+1}\,dt$$
$$=\int_{-1}^{0}\frac{e^{-t}-e}{e^t+1}\,dt+\int_0^1\frac{e^t-e}{e^t+1}\,dt$$
$$=\int_0^1\frac{e^s-e}{e^{-s}+1}\,ds+\int_0^1\frac{e^t-e}{e^t+1}\,dt$$
$$\left(-t=s\text{에서 }-\frac{dt}{ds}=1\text{이므로}\right)$$
$$=\int_0^1\frac{e^s(e^s-e)}{1+e^s}\,ds+\int_0^1\frac{e^t-e}{e^t+1}\,dt$$
$$=\int_0^1\frac{(e^s+1)(e^s-e)}{e^s+1}\,ds$$
$$=\int_0^1(e^s-e)\,ds$$
$$=\Big[e^s-es\Big]_0^1=-1$$

따라서 모든 극값의 합은 $0+(-1)=-1$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

22. 순열과 조합 정답 4

$7=5+1+1=4+2+1=3+3+1=3+2+2$

이므로 구하는 방법의 수는 4이다.

23. 지수함수와 로그함수 정답 27

$4^x+2^{2x-3}=72$에서

$4^x+\frac{1}{8}\times 4^x=72$, $\frac{9}{8}\times 4^x=72$

$4^x=64$, $x=3$

따라서 $a=3$이므로

$3^a=3^3=27$

24. 공간도형 정답 8

구 $(x-4)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=25$의 xz평면 위로의 정사영인 원의 방정식은

$(x-4)^2+(z+2)^2=25$, $y=0$

점 A가 이 원 위에 있으므로

$(a-4)^2+(1+2)^2=25$, $a^2-8a=0$, $a(a-8)=0$

$a>0$이므로 $a=8$

25. 통계 정답 36

표본평균을 $\overline{X}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\overline{X}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이므로

$\overline{X}-1.96\times\frac{12}{\sqrt{n}}=100.15$, $\overline{X}+1.96\times\frac{12}{\sqrt{n}}=107.99$

$2\times1.96\times\frac{12}{\sqrt{n}}=7.84$

따라서 $n=36$

26. 순열과 조합 정답 45

$a+b+c=13$에서 $a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$

(a', b', c'은 음이 아닌 정수)라 하면

$a'+b'+c'=10$이므로 ${}_3H_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66$

$a+b+c=13$이고 a, b, c가 모두 홀수인 순서쌍의 개수는

$a=2a''+1$, $b=2b''+1$, $c=2c''+1$(a'', b'', c''은 음이 아닌 정수)라 하면

$a''+b''+c''=5$

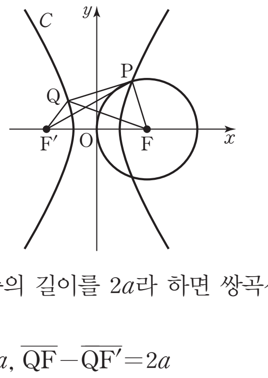
이므로 ${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

따라서 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$66-21=45$

27. 평면 곡선 정답 12

$\overline{PF}=\overline{OF}=3$, $\overline{PQ}=4$이고, $\angle FPQ=90°$이므로 삼각형 FPQ에서 $\overline{QF}=5$



쌍곡선의 주축의 길이를 $2a$라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF'}-\overline{PF}=2a$, $\overline{QF}-\overline{QF'}=2a$

$\overline{PF'}=2a+3$, $\overline{QF'}=5-2a$

따라서 삼각형 PQF′의 둘레의 길이는

$\overline{PQ}+\overline{QF'}+\overline{PF'}=4+(5-2a)+(2a+3)=12$

28. 확률 정답 17

주머니 B에서 꺼낸 공에 적힌 두 수의 합이 소수일 사건을 S, 주머니 A에서 꺼낸 공에 적힌 수가 2일 사건을 T라 하자.

(i) 주머니 A에서 2가 적힌 공을 꺼내고, 주머니 B에서 꺼낸 공에 적힌 두 수의 합이 소수인 경우는 두 수의 합이 7일 때이므로 확률은

$\frac{1}{3}\times\frac{{}_4C_1\times{}_2C_1}{{}_6C_2}=\frac{1}{3}\times\frac{4\times2}{15}=\frac{8}{45}$

(ii) 주머니 A에서 3이 적힌 공을 꺼내고, 주머니 B에서 꺼낸 공에 적힌 두 수의 합이 소수인 경우는 두 수의 합이 5, 7일 때이므로 확률은

$\frac{2}{3}\times\frac{{}_3C_1\times{}_1C_1+{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_6C_2}=\frac{2}{3}\times\frac{3\times1+3\times2}{15}$

$=\frac{2}{5}$

(i), (ii)에서

$P(S)=\frac{8}{45}+\frac{2}{5}=\frac{26}{45}$

$P(S\cap T)=\frac{8}{45}$

이므로

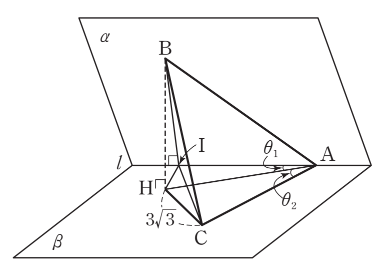
$P(T|S)=\frac{P(T\cap S)}{P(S)}=\frac{\frac{8}{45}}{\frac{26}{45}}=\frac{4}{13}$

따라서 $p=13$, $q=4$이므로

$p+q=17$

29. 공간도형 정답 20

그림과 같이 점 B에서 평면 β와 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하자.



선분 BC의 평면 β 위로의 정사영이 선분 CH이므로

$\overline{CH}=3\sqrt{3}$

$\overline{BC}=6$이므로 삼각형 BCH에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BH}=\sqrt{6^2-(3\sqrt{3})^2}=3$

$\overline{BH}\perp\beta$이고 $\overline{BI}\perp l$이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{HI}\perp l$

두 평면 α, β가 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$\angle HIB=\frac{\pi}{4}$

따라서 $\overline{HI}=\overline{BH}=3$, $\overline{BI}=3\sqrt{2}$

삼각형 AIB에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AI}=\sqrt{6^2-(3\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$

삼각형 AIH에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{HA}=\sqrt{3^2+(3\sqrt{2})^2}=3\sqrt{3}$

$\angle HAI=\theta_1$, $\angle HAC=\theta_2$라 하면

$\cos\theta_1=\frac{\overline{AI}}{\overline{HA}}=\frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$이므로 $\sin\theta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$

삼각형 HAC가 이등변삼각형이므로

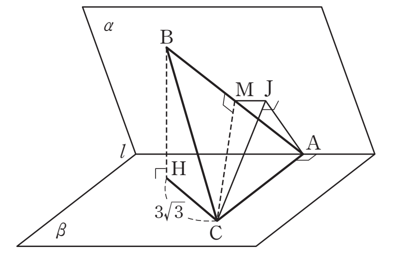
$\cos\theta_2=\frac{\frac{1}{2}\overline{AC}}{\overline{HA}}=\frac{3}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 $\sin\theta_2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\sin(\theta_1+\theta_2)=\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=1$

$\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{CA}\perp l$

점 C에서 평면 α에 내린 수선의 발을 J라 하면



$\overline{CJ}\perp\alpha$이고 $\overline{CA}\perp l$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{JA}\perp l$

삼각형 CAJ는 $\angle CAJ=\frac{\pi}{4}$, $\angle AJC=\frac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{JC}=\overline{AJ}=3\sqrt{2}$

선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\overline{CM}\perp\overline{AB}$이고

$\overline{CJ}\perp\alpha$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{JM}\perp\overline{AB}$

$\sin\theta=\frac{\overline{JC}}{\overline{CM}}=\frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

따라서 $30\sin^2\theta=30\times\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2=20$

30. 미분법 정답 6

$f(x)=\frac{1}{8}(x^4-6x^3+12x^2)$에서

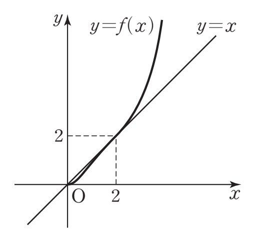
$f'(x)=\frac{1}{8}(4x^3-18x^2+24x)$

$=\frac{1}{4}x(2x^2-9x+12)$

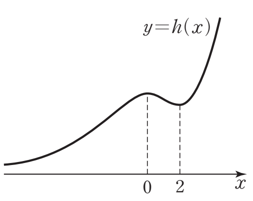
$f'(x)=0$에서 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	+	
$f(x)$	극소	↗	2



(가)에서 함수 $(h\circ g)(x)$는 구간 $(0, 2]$에서 감소하는 함수이고, 함수 $g(x)$는 구간 $(0, 2]$에서 증가하는 함수이므로 함수 $h(x)$는 구간 $(0, 2]$에서 감소하는 함수이다.



$h(x)=(x^2+ax+b)e^x$에서

$h'(x)=\{x^2+(a+2)x+a+b\}e^x$

방정식 $x^2+(a+2)x+a+b=0$의 서로 다른 두 실근 사이에 0과 2가 존재해야 하므로

$a+b\le0$, $4+2(a+2)+a+b\le0$

$a+b\le0$, $3a+b\le-8$ …… ㉠

(나)에서

$(h\circ g)'\left(\frac{7}{8}\right)=h'\left(g\left(\frac{7}{8}\right)\right)\times g'\left(\frac{7}{8}\right)$

$=h'\left(g\left(\frac{7}{8}\right)\right)\times\frac{1}{f'\left(g\left(\frac{7}{8}\right)\right)}$

$=-\frac{8}{5}e^2$

$g\left(\frac{7}{8}\right)=k\,(0<k<2)$라 하면 $f(k)=\frac{7}{8}$

$\frac{1}{8}(k^4-6k^3+12k^2)=\frac{7}{8}$, $k^4-6k^3+12k^2-7=0$

$(k-1)(k^3-5k^2+7k+7)=0$

방정식 $k^4-6k^3+12k^2-7=0$은 1 이외의 양의 실근을 가질 수 없으므로 $k=1$

$g\left(\frac{7}{8}\right)=1$

$f'(1)=\frac{5}{4}$, $h'(1)=(2a+b+3)e$이므로

$h'(1)\times\frac{1}{f'(1)}=(2a+b+3)e\times\frac{4}{5}=-\frac{8}{5}e^2$

$(2a+b+3)e=-2e^2$

$2a+b=-2e-3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a+b=-a-2e-3\le0$, $3a+b=a-2e-3\le-8$

$-2e-3\le a\le 2e-5$ …… ㉢

$h(4)=(16+4a+b)e^4=(2a-2e+13)e^4$

㉢에서 $h(4)$의 최댓값은

$\{2\times(2e-5)-2e+13\}e^4=2e^5+3e^4$

$h(4)$의 최솟값은

$\{2\times(-2e-3)-2e+13\}e^4=-6e^5+7e^4$

이므로 그 합은 $-4e^5+10e^4$

따라서 $m=-4$, $n=10$이므로 $m+n=6$

제 4 회

정 답

1	⑤	2	①	3	③	4	②	5	④
6	③	7	⑤	8	⑤	9	⑤	10	②
11	③	12	④	13	③	14	③	15	②
16	①	17	④	18	⑤	19	④	20	⑤
21	②	22	100	23	7	24	8	25	9
26	441	27	35	28	55	29	28	30	3

풀 이

1. 평면벡터 정답 ⑤

[풀이] $\vec{a}\cdot\vec{b}=(4,\ 2)\cdot(3,\ -1)$

$=4\times3+2\times(-1)$

$=12-2=10$

2. 지수함수와 로그함수 정답 ①

[풀이] $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{e^{4x}-1}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+2x)}{2x}\times\frac{4x}{e^{4x}-1}\times\frac{1}{2}\right\}$

$=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

3. 적분법 정답 ③

[풀이] $2x=t$라 하면 $x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{12}$일 때 $t=\frac{\pi}{6}$이고 $2=\frac{dt}{dx}$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{12}}\cos 2x\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}\cos t\,dt$

$=\left[\frac{1}{2}\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{4}$

4. 확률 정답 ②

[풀이] $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=\frac{5}{6}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

따라서 $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}$

5. 순열과 조합 정답 ④

[풀이] 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자가 모두 다르려면 1, 2, 3 중에서 하나씩 오면 되므로 1, 2, 3의 세 숫자를 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

이 각각에 대하여 나머지 자리에 1, 1, 1, 2, 2의 5개의 숫자를 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!2!}=10$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$6\times10=60$

6. 미분법 정답 ③

[풀이] $g(10)=2$에서 $f(2)=10$이므로

$f(2)=8+2a=10$

$a=1$

또한, $f(g(x))=x$에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1$이므로

$g'(10)=\frac{1}{f'(g(10))}=\frac{1}{f'(2)}$

그런데 $f'(x)=3x^2+1$에서 $f'(2)=13$이므로

$g'(10)=\frac{1}{13}$

따라서 $y=g(x)$의 그래프 위의 점 $(10,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{13}(x-10)+2=\frac{1}{13}x+\frac{16}{13}$

즉, $b=\frac{1}{13}$, $c=\frac{16}{13}$이므로

$\frac{c}{ab}=\frac{\frac{16}{13}}{1\times\frac{1}{13}}=16$

7. 확률 정답 ⑤

[풀이] 동전 1개를 5번 던지는 시행에서 앞면이 한 번도 나오지 않는 사건을 A라 하면

$\mathrm{P}(A)={}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

따라서 동전 1개를 5번 던지는 시행에서 앞면이 적어도 한 번 나올 확률은

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$

$=1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$

8. 공간도형 정답 ⑤

[풀이] 삼각형 ABC의 무게중심이 x축 위에 있으므로 무게중심의 y좌표와 z좌표는 0이다.

즉, $\frac{3+a+(-1)}{3}=0$, $\frac{1+b+4}{3}=0$에서

$a=-2$, $b=-5$

이므로

$ab=(-2)\times(-5)=10$

9. 적분법 정답 ⑤

[풀이] $\int_0^1(e^x-x)^2\,dx$

$=\int_0^1(e^{2x}-2xe^x+x^2)dx$

$=\int_0^1 e^{2x}dx-2\int_0^1 xe^x dx+\int_0^1 x^2 dx$ …… ㉠

이때 $\int_0^1 xe^x dx$에서 $u=x$, $v'=e^x$라 하면 $u'=1$, $v=e^x$이므로

$\int_0^1 xe^x dx=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x dx$

$=e-\left[e^x\right]_0^1$

$=e-(e-1)=1$

따라서 ㉠에서

$\int_0^1(e^x-x)^2\,dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1-2+\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$

$$=\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\right)-2+\frac{1}{3}$$
$$=\frac{e^2}{2}-\frac{13}{6}$$

10. 평면벡터 정답 ②

[풀이] $\frac{dx}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t$,

$\frac{dy}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t$

이므로

$\frac{d^2x}{dt^2}=e^t\cos t-e^t\sin t-e^t\sin t-e^t\cos t$

$=-2e^t\sin t$

$\frac{d^2y}{dt^2}=e^t\sin t+e^t\cos t+e^t\cos t-e^t\sin t$

$=2e^t\cos t$

따라서 시각 t에서의 가속도의 크기를 $|\vec{a}|$라 하면

$|\vec{a}|=\sqrt{(-2e^t\sin t)^2+(2e^t\cos t)^2}$

$=\sqrt{4e^{2t}(\sin^2 t+\cos^2 t)}$

$=2e^t$

이므로 $t=\pi$에서의 점 P의 가속도의 크기는 $2e^{\pi}$이다.

11. 적분법 정답 ③

[풀이] 직선 $x=t\,(1\le t\le 4)$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{1}{2}\pi(t\sqrt{t})^2=\frac{1}{2}\pi t^3$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$V=\int_1^4 \frac{1}{2}\pi t^3\,dt$

$=\pi\left[\frac{t^4}{8}\right]_1^4$

$=\pi\left(\frac{4^4-1}{8}\right)$

$=\frac{255}{8}\pi$

12. 공간벡터 정답 ④

[풀이] 직선 $x=\frac{y-1}{2}=\frac{3-z}{3}$의 방향벡터를 $\vec{v}$라 하면

$\vec{v}=(1,\ 2,\ -3)$

또한, xy평면의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면

$\vec{n}=(0,\ 0,\ 1)$

따라서 두 벡터 $\vec{v}$, $\vec{n}$이 이루는 예각의 크기를 θ'이라 하면

$\cos\theta'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\sin\theta$

$=\frac{|-3|}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}\sqrt{0^2+0^2+1^2}}$

$=\frac{3}{\sqrt{14}}$

$=\frac{3}{14}\sqrt{14}$

13. 미분법 정답 ③

[풀이] $f(x)=\frac{\ln x}{x}\,(x>0)$라 하면

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x\times 1}{x^2}=\boxed{\frac{1-\ln x}{x^2}}$

이때 $\lim_{x\to 0+}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$이고 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 극댓값이 e^{-1}이다.

또한, $m^n=n^m$에서 $\ln m^n=\ln n^m$이므로

$n\ln m=m\ln n$, $\frac{\ln m}{m}=\frac{\ln n}{n}$

즉, $f(m)=f(n)$을 만족시키는 m, n을 구하면 된다.

그런데 $2<e<3$이고

$f(1)=0$, $f(2)=\frac{\ln 2}{2}=\frac{2\ln 2}{2\times 2}=\frac{\ln 4}{4}=f(\boxed{4})$

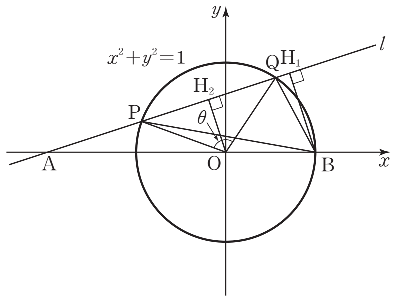
이고 $x>e$에서 $f(x)$는 감소하므로 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 $(2,\ 4)$, $(4,\ 2)$의 $\boxed{2}$이다.

따라서 $g(x)=1-\ln x$, $a=4$, $b=2$이므로

$g(ab)=1-\ln 8=1-3\ln 2$

14. 삼각함수 정답 ③

[풀이] 두 점 B, O에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하자.



이때 삼각형 PBQ의 넓이를 S_1, 삼각형 POQ의 넓이를 S_2라 하면

$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{BH_1}$

$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{OH_2}$

따라서

$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{BH_1}}{\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{OH_2}}=\frac{\overline{BH_1}}{\overline{OH_2}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AO}}=\frac{3}{2}$

그런데 $S_2=\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\sin\theta=\frac{\sin\theta}{2}$이므로

$S_1=\frac{3}{2}\times S_2=\frac{3}{2}\times\frac{\sin\theta}{2}=\frac{3}{4}\sin\theta$

따라서 $S(\theta)=\frac{3}{4}\sin\theta$이므로

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{3}{4}\sin\theta}{\theta}=\frac{3}{4}$

15. 통계 정답 ②

[풀이] 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 100인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값을 $\overline{x_1}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}$

이때 $b-a=2\times 1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=0.392\sigma$ …… ㉠

모표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값을 $\overline{x_2}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$\overline{x_2}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x_2}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이때 $d-c=2\times 2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{5.16\sigma}{\sqrt{n}}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $0.392\sigma\ge\frac{5.16\sigma}{\sqrt{n}}$ 이므로

$\sqrt{n}\ge\frac{5.16}{0.392}=13.16\cdots$

즉, $n\ge 173.27\cdots$ 이므로 자연수 n의 최솟값은 174이다.

16. 평면벡터 정답 ①

[풀이] 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$이다.

따라서 $\vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}=-(\vec{a}+\vec{b})$이므로 조건 (나)에서

$\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$=-(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$=-|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2=-5$

즉, $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=9$ …… ㉠

조건 (다)에서

$\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{c}\cdot(\vec{b}-2\vec{a})$

$=-(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}-2\vec{a})$

$=2|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2=1$

즉, $2|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $|\vec{a}|^2=4$, $|\vec{b}|^2=5$이므로

$\overline{AB}^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2$

$=5-2\times(-2)+4=13$

$\overline{BC}^2=|\vec{c}-\vec{b}|^2=|\vec{a}+2\vec{b}|^2$

$=4+4\times(-2)+4\times 5=16$

$\overline{CA}^2=|\vec{a}-\vec{c}|^2=|2\vec{a}+\vec{b}|^2$

$=4\times 4+4\times(-2)+5=13$

즉, 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{CA}=\sqrt{13}$인 이등변삼각형이므로 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 할 때

$\overline{AH}=\sqrt{(\sqrt{13})^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2}=3$

따라서 구하는 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 4\times 3=6$

17. 확률 정답 ④

[풀이] (i) 세 꼭짓점을 선택하여 만든 삼각형이 정삼각형일 확률은

$\frac{2}{{}_6C_3}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$

이때 정삼각형의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\overline{AC}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sin 60^\circ)^2$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 3=\frac{3}{4}\sqrt{3}$

(ii) 세 꼭짓점을 선택하여 만든 삼각형이 직각삼각형인 경우는 대각선 AD, BE, CF 각각에 대하여 4개씩 만들 수 있으므로 그 확률은

$\frac{3\times 4}{{}_6C_3}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$

이때 직각삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times 1\times 2\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(iii) 세 꼭짓점을 선택하여 만든 삼각형이 둔각삼각형인 경우는 한 꼭짓점에 1개씩 만들 수 있으므로 그 확률은

$\frac{6}{{}_6C_3}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$

이때 둔각삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 $E(X)$의 값은

$E(X)=\frac{1}{10}\times\frac{3}{4}\sqrt{3}+\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{10}\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{9}{20}\sqrt{3}$

18. 평면 곡선 정답 ⑤

[풀이] 원점 O에 대하여 두 직선 OP, OQ가 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=\frac{1}{p}$, $\tan\beta=\frac{1}{q}$

이고 $\angle POQ=\frac{\pi}{4}$이므로 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$에서

$\alpha=\beta+\frac{\pi}{4}$

즉, $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{4}$에서 $0<p<1$, $q>1$이다.

또한, $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=1$에서

$\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}{1+\frac{1}{p}\times\frac{1}{q}}=1$, $q-p=pq+1$

또한, $y^2=x$에서 $2y\frac{dy}{dx}=1$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}$ (단, $y\neq0$)

따라서 두 점 P, Q에서의 접선의 방정식은 각각

$y-p=\frac{1}{2p}(x-p^2)$ …… ㉠

$y-q=\frac{1}{2q}(x-q^2)$ …… ㉡

이고 ㉠, ㉡에서 $x=pq$, $y=\frac{p+q}{2}$이므로

$R\left(pq, \frac{p+q}{2}\right)$이다.

그런데 $0<p<1$, $q>1$에서 $pq>0$, $\frac{p+q}{2}>\frac{1}{2}$이므로 점 R의 x좌표와 y좌표는 각각

$x>0$, $y>\frac{1}{2}$

또한, $q-p=pq+1$의 양변을 제곱하면

$q^2-2pq+p^2=(pq)^2+2pq+1$,

$(p+q)^2-4pq=(pq)^2+2pq+1$이므로

$pq=x$, $p+q=2y$를 대입하여 정리하면

$\frac{(x+3)^2}{8}-\frac{y^2}{2}=1\left(x>0,\ y>\frac{1}{2}\right)$

19. 통계 정답 ④

[풀이] 조건 (가)에 의하여 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=10$에 대하여 대칭이므로

$m=10$

조건 (나)에서

$$P(m\le X\le m+2)=P\left(\frac{m-m}{\sigma}\le Z\le\frac{m+2-m}{\sigma}\right)$$
$$=P\left(0\le Z\le\frac{2}{\sigma}\right)$$
$$=P(0\le Z\le1)$$

이므로 $\frac{2}{\sigma}=1$

즉, $\sigma=2$이다.

따라서 확률변수 X는 정규분포 $N(10,\ 2^2)$을 따르므로

$P(8.8\le X\le12.4)$

$=P\left(\frac{8.8-10}{2}\le Z\le\frac{12.4-10}{2}\right)$

$=P(-0.6\le Z\le1.2)$

$=P(-0.6\le Z\le0)+P(0\le Z\le1.2)$

$=P(0\le Z\le0.6)+P(0\le Z\le1.2)$

$=0.226+0.385=0.611$

20. 미분법 정답 ⑤

[풀이]

ㄱ. $f(x)=\frac{(x+1)^3}{x^2}$에서

$$f'(x)=\frac{3(x+1)^2\times x^2-(x+1)^3\times2x}{x^4}$$
$$=\frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3}$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이고 극솟값은

$f(2)=\frac{3^3}{2^2}=\frac{27}{4}$이다. (참)

ㄴ. $g(x)=\frac{1}{x}-\frac{k}{(x+1)^2}$에서

$$g'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{2k}{(x+1)^3}$$
$$=\frac{1}{(x+1)^3}\left\{2k-\frac{(x+1)^3}{x^2}\right\}$$
$$=\frac{1}{(x+1)^3}\{2k-f(x)\}$$

그런데 ㄱ에서 함수 $f(x)$의 극솟값은 $\frac{27}{4}$이고

$\lim_{x\to0+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로

$f(x)\ge\frac{27}{4}$

따라서 함수 $g(x)$가 극값을 갖기 위해서는

$2k>\frac{27}{4}$, $k>\frac{27}{8}$

즉, 자연수 k의 최솟값은 4이다. (참)

ㄷ. 함수 $g(x)$가 $x=a(a>2)$에서 극댓값을 갖는다고 하면 $g'(a)=0$에서

$2k-f(a)=2k-\frac{(a+1)^3}{a^2}=0$

따라서 $k=\frac{(a+1)^3}{2a^2}$이므로

$g(a)=\frac{1}{a}-\frac{k}{(a+1)^2}=\frac{1}{a}-\frac{a+1}{2a^2}=\frac{a-1}{2a^2}$

즉, $t=\frac{a-1}{2a^2}$이므로

$$\frac{1}{8}-t=\frac{1}{8}-\frac{a-1}{2a^2}=\frac{a^2-4(a-1)}{8a^2}$$
$$=\frac{(a-2)^2}{8a^2}>0$$

따라서 $t<\frac{1}{8}$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

21. 적분법 정답 ②

[풀이] $f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t-x)}{1+\sin|t-x|}dt$

$$=\int_0^x\frac{\cos|t-x|}{1+\sin|t-x|}dt+\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos|t-x|}{1+\sin|t-x|}dt$$

(i) $0\le x\le\frac{\pi}{2}$일 때 $0\le t\le x$이면 $|t-x|=x-t$,

$x\le t\le\frac{\pi}{2}$이면 $|t-x|=t-x$이므로

$$f(x)=\int_0^x\frac{\cos(x-t)}{1+\sin(x-t)}dt+\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t-x)}{1+\sin(t-x)}dt$$
$$=-\int_0^x\frac{\{1+\sin(x-t)\}'}{1+\sin(x-t)}dt+\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{\{1+\sin(t-x)\}'}{1+\sin(t-x)}dt$$
$$=-\Big[\ln\{1+\sin(x-t)\}\Big]_0^x+\Big[\ln\{1+\sin(t-x)\}\Big]_x^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\ln(1+\sin x)+\ln\left\{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}$$
$$=\ln(1+\sin x)+\ln(1+\cos x)$$

따라서

$$f'(x)=\frac{\cos x}{1+\sin x}-\frac{\sin x}{1+\cos x}$$
$$=\frac{\cos x(1+\cos x)-\sin x(1+\sin x)}{(1+\sin x)(1+\cos x)}$$
$$=\frac{(\cos x-\sin x)(1+\sin x+\cos x)}{(1+\sin x)(1+\cos x)}$$

이고 $f'(x)=0$에서 $1+\sin x+\cos x>0$이므로

$\cos x-\sin x=0$

즉, $x=\frac{\pi}{4}$에서 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.

(ii) $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$일 때 $0\le t\le\frac{\pi}{2}$이므로 $x-t\ge0$

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t-x)}{1+\sin|t-x|}dt$$
$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\{1+\sin(x-t)\}'}{1+\sin(x-t)}dt$$
$$=-\Big[\ln\{1+\sin(x-t)\}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=-\ln\left\{1+\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}+\ln(1+\sin x)$$
$$=-\ln(1-\cos x)+\ln(1+\sin x)$$

따라서

$$f'(x)=-\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}$$
$$=\frac{\cos x-\cos^2x-\sin x-\sin^2x}{(1+\sin x)(1-\cos x)}$$
$$=\frac{\cos x-\sin x-1}{(1+\sin x)(1-\cos x)}$$

이때 $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$에서 $\cos x-1<0$, $-\sin x\le0$이므로

$f'(x)<0$

즉, $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

따라서 최댓값은 $x=\frac{\pi}{4}$일 때

$M=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\ln\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

최솟값은 $x=\pi$일 때

$m=f(\pi)=-\ln2$

이므로

$$M-m=2\ln\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\ln2$$
$$=\ln\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\ln2$$
$$=\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)+\ln2$$
$$=\ln(3+2\sqrt{2})$$

22. 순열과 조합 정답 100

[풀이] ${}_5C_2\times{}_4H_2$

$={}_5C_2\times{}_5C_2$

$=\frac{5\times4}{2}\times\frac{5\times4}{2}$

$=100$

23. 지수함수와 로그함수 정답 7

[풀이] 진수 조건에 의하여 $x>2$ …… ㉠

$\log_2x+\log_2(x-2)\le3$, $\log_2x(x-2)\le3$에서

$x(x-2)\le8$, $x^2-2x-8\le0$

$(x-4)(x+2)\le0$

$-2\le x\le4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2<x\le4$이므로 모든 정수 x의 값의 합은

$3+4=7$

24. 공간도형 정답 8

[풀이] 구 $x^2+y^2+z^2=1$의 중심 $O(0,\ 0,\ 0)$와 평면 $\sqrt{2}x+\sqrt{3}y+2z=12$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\frac{|-12|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2+2^2}}=\frac{12}{3}=4$

따라서 구 $x^2+y^2+z^2=1$의 반지름의 길이는 1이므로

$M=d+1=4+1=5$, $m=d-1=4-1=3$

따라서 $M+m=8$

25. 삼각함수 정답 9

[풀이] $x-\frac{\pi}{4}=t$라 하면 $-\frac{\pi}{4}\le t<\frac{3}{4}\pi$이고 주어진 방정식은

$2\sin^2 t+\sqrt{3}\cos t-2=0$

$2(1-\cos^2 t)+\sqrt{3}\cos t-2=0$

$2\cos^2 t-\sqrt{3}\cos t=0$, $\cos t(2\cos t-\sqrt{3})=0$

따라서 $\cos t=0$ 또는 $\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(i) $\cos t=0$일 때, $t=\frac{\pi}{2}$이므로 $x=\frac{3}{4}\pi$

(ii) $\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때, $t=\pm\frac{\pi}{6}$이므로

$x=\frac{\pi}{12}$ 또는 $x=\frac{5}{12}\pi$

(i), (ii)에서 모든 x의 값의 합은

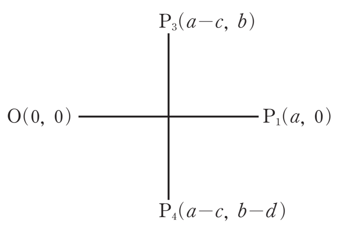
$\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{12}+\frac{5}{12}\pi=\frac{5}{4}\pi$

따라서 $p=4$, $q=5$이므로

$p+q=9$

26. 순열과 조합 정답 441

[풀이] $P_1(a,\ 0)$, $P_2(a,\ b)$, $P_3(a-c,\ b)$, $P_4(a-c,\ b-d)$이고 두 선분 OP_1, P_3P_4가 만나는 경우는 그림과 같다.



따라서 위와 같은 경우가 되기 위해서는 $a-c\ge 0$, $b-d\le 0$이므로

$a\ge c$, $b\le d$

이때 $a\ge c$를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ c)$의 개수는 $(1,\ 1)$, $(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 1)$, $\cdots$, $(6,\ 6)$에서

$1+2+3+4+5+6=21$

같은 방법으로 $b\le d$를 만족시키는 순서쌍 $(b,\ d)$의 개수는 $(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $\cdots$, $(6,\ 6)$에서

$6+5+4+3+2+1=21$

따라서 구하는 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

$21\times 21=441$

27. 순열과 조합 정답 35

[풀이] $(1+x+x^2+x^3+x^4)^4$은 다항식

$1+x+x^2+x^3+x^4$

을 네 번 곱한 것이므로 네 개의 다항식

$1+x+x^2+x^3+x^4$

중에서 각각 x^p, x^q, x^r, x^s을 택하여 곱하면

$x^p\times x^q\times x^r\times x^s=x^{p+q+r+s}$

이므로 x^4의 계수는 $p+q+r+s=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $p,\ q,\ r,\ s$의 순서쌍 $(p,\ q,\ r,\ s)$의 개수와 같다.

따라서 구하는 x^4의 계수는

$_4H_4={}_{4+4-1}C_4$

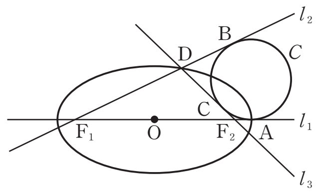
$={}_7C_4$

$={}_7C_3$

$=\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}=35$

28. 평면 곡선 정답 55

[풀이] 직선 l_2, l_3와 원 C의 두 접점을 각각 B, C, 두 직선 l_2, l_3의 교점을 D라 하자.



$\overline{BD}=\overline{CD}$, $\overline{CF_2}=\overline{AF_2}$, $\overline{BF_1}=\overline{AF_1}$이고 타원의 장축의 길이가 $2n$이므로

$\overline{DF_1}+\overline{DF_2}=\overline{DF_1}+\overline{DC}+\overline{CF_2}$

$=\overline{DF_1}+\overline{DB}+\overline{AF_2}$

$=\overline{BF_1}+\overline{AF_2}$

$=\overline{AF_1}+\overline{AF_2}=2n$

따라서 점 A는 타원 위의 점이므로

$\overline{OA}=f(n)=\frac{2n}{2}=n$

따라서

$\sum_{n=1}^{10} f(n)=\sum_{n=1}^{10} n=\frac{10\times 11}{2}=55$

29. 공간벡터 정답 28

[풀이] $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$라 하면

$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OA}|^2$

이므로

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2)$

$=\frac{1}{2}(2^2+3^2-3^2)=2$

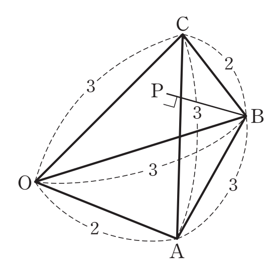
같은 방법으로

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2)$

$=\frac{1}{2}(3^2+3^2-2^2)=7$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{OC}|^2+|\overrightarrow{OA}|^2-|\overrightarrow{CA}|^2)$

$=\frac{1}{2}(3^2+2^2-3^2)=2$



이때 점 B에서 평면 OAC에 내린 수선의 발을 P라 하면

$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OC}$ ($k,\ l$은 실수)

$\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BO}=k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{BP}=k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BO}=k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$

그런데 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{OA}=0$, $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{OC}=0$이므로

$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{OA}=(k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OA}=0$

$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{OC}=(k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}=0$

즉, $4k+2l-2=0$, $2k+9l-7=0$에서

$k=\frac{1}{8}$, $l=\frac{3}{4}$

따라서 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OC}$

$|\overrightarrow{BP}|^2=|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}|^2$

$=\left|\frac{1}{8}\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OC}\right|^2$

$=\frac{1}{64}|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+\frac{9}{16}|\overrightarrow{OC}|^2$

$-\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$

$+\frac{3}{16}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$

$=\frac{1}{64}\times 2^2+3^2+\frac{9}{16}\times 3^2-\frac{1}{4}\times 2-\frac{3}{2}\times 7$

$+\frac{3}{16}\times 2$

$=\frac{1}{16}+9+\frac{81}{16}-\frac{1}{2}-\frac{21}{2}+\frac{3}{8}$

$=\frac{7}{2}$

$|\overrightarrow{BP}|=\frac{\sqrt{14}}{2}$

또한, 이등변삼각형 OAC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

이므로 사면체 OABC의 부피 V는

$V=\frac{1}{3}\times 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{14}}{2}=\frac{2\sqrt{7}}{3}$

따라서 $9V^2=9\times\frac{28}{9}=28$

30. 적분법 정답 3

[풀이] 직선 PR의 방정식은

$y-2=-\frac{1}{k}(x-1)$, $y=-\frac{1}{k}x+\frac{1}{k}+2$

이므로 점 R의 x좌표는

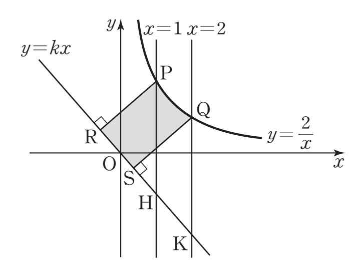
$kx=-\frac{1}{k}x+\frac{1}{k}+2$, $x=\frac{2k+1}{k^2+1}$

직선 QS의 방정식은

$y-1=-\frac{1}{k}(x-2)$, $y=-\frac{1}{k}x+\frac{2}{k}+1$

이므로 점 S의 x좌표는

$kx=-\frac{1}{k}x+\frac{2}{k}+1$, $x=\frac{k+2}{k^2+1}$



이때 두 직선 $x=1$, $x=2$와 직선 $y=kx$가 만나는 점을 각각 H, K라 하면 세 선분 PH, HK, QK 및 곡선 $y=\frac{2}{x}$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_1^2\left(\frac{2}{x}-kx\right)dx$

$=\left[2\ln x-\frac{k}{2}x^2\right]_1^2$

$=(2\ln 2-2k)+\frac{k}{2}$

$=2\ln 2-\frac{3}{2}k$

따라서 구하는 넓이를 $f(k)$라 하면

$f(k)=\frac{1}{2}(2-k)\left(1-\frac{2k+1}{k^2+1}\right)+2\ln 2-\frac{3}{2}k$

$-\frac{1}{2}(1-2k)\left(2-\frac{k+2}{k^2+1}\right)$

$=\frac{3k(k-1)(k+1)}{2(k^2+1)}-\frac{3}{2}k+2\ln 2$

$=\frac{-3k}{k^2+1}+2\ln 2$

이때

$f'(k)=\frac{-3(k^2+1)+3k\times 2k}{(k^2+1)^2}$

$=\frac{3k^2-3}{(k^2+1)^2}$

$=\frac{3(k-1)(k+1)}{(k^2+1)^2}$

이므로 $f'(k)=0$에서 $k=-1$이고 $f(k)$는 $k=-1$에서 극대이면서 최댓값을 갖는다.

즉, 최댓값은 $f(-1)=\frac{3}{2}+2\ln 2$이므로

$a=\frac{3}{2}$, $b=2$

따라서 $ab=\frac{3}{2}\times 2=3$

제 5 회

정 답

1	③	2	④	3	②	4	④	5	④
6	⑤	7	③	8	①	9	③	10	③
11	②	12	④	13	②	14	①	15	⑤
16	②	17	①	18	⑤	19	③	20	①
21	⑤	22	8	23	21	24	2	25	9
26	75	27	7	28	13	29	10	30	264

풀 이

1. 평면벡터 정답 ③

[**풀이**] $\vec{a}-2\vec{b}=(1, 3)-(-4, 10)=(5, -7)$
이므로 벡터 $\vec{a}-2\vec{b}$의 모든 성분의 합은
$5+(-7)=-2$

2. 삼각함수 정답 ④

[**풀이**] $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{2x}-1}{2x}}{\frac{\sin 2x}{2x}}$

$=\frac{\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}$

$=\frac{1}{1}=1$

3. 적분법 정답 ②

[**풀이**] $\int_0^1 4^{x+1}\,dx=4\int_0^1 4^x\,dx$

$=4\left[\frac{4^x}{\ln 4}\right]_0^1$

$=4\left(\frac{4}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 4}\right)$

$=4\times\frac{3}{2\ln 2}$

$=\frac{6}{\ln 2}$

4. 삼각함수 정답 ④

[**풀이**] $f(x)=\sin^2(ax)$에서
$f'(x)=2\sin(ax)\times\cos(ax)\times a$

$f'\left(\frac{\pi}{4a}\right)=2a\sin\left(a\times\frac{\pi}{4a}\right)\cos\left(a\times\frac{\pi}{4a}\right)=2$

$2a\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=2$

$2a\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$

따라서 $a=2$

5. 순열과 조합 정답 ④

[**풀이**] 중복하여 사용할 숫자를 선택하는 경우의 수는 ${}_5C_1$

(i) 선택된 숫자가 2번 사용되는 경우
나머지 사용할 한 숫자를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_1$
이므로 이 숫자와 2번 사용할 숫자를 일렬로 나열하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는
${}_4C_1\times\frac{3!}{2!}=12$

(ii) 선택된 숫자가 3번 사용되는 경우의 수는 1이므로 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는 1이다.

(i), (ii)에서 구하는 세 자리의 자연수의 개수는
${}_5C_1\times(12+1)=65$

[**다른 풀이**]
모두 다른 수로 만들어진 자연수의 개수는 ${}_5P_3$이므로
${}_5\Pi_3-{}_5P_3=5^3-5\times4\times3=125-60=65$

6. 확률 정답 ⑤

[**풀이**] 두 사건 A와 B는 서로 독립이므로 두 사건 A와 B^C도 서로 독립이다.
따라서
$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$
$=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}$
$=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)-\frac{1}{4}$ …… ㉠

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{2}$에서
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\left\{\mathrm{P}(A)-\frac{1}{4}\right\}$
$=\mathrm{P}(B)+\frac{1}{4}$
$=\frac{1}{2}$

이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$ …… ㉡

㉠에 ㉡을 대입하면
$\frac{1}{4}\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A)-\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$

따라서 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$

7. 삼각함수 정답 ③

[**풀이**] 이차방정식 $x^2+ax-\frac{a}{9}=0$의 근과 계수의 관계에 의해서
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=-a$, $\sin^2\theta\cos^2\theta=-\frac{a}{9}$
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $a=-1$
이때 $\sin^2\theta\cos^2\theta=-\frac{a}{9}=-\frac{-1}{9}=\frac{1}{9}$
$0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$
$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$
$=1+2\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$
이므로 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{15}}{3}$
따라서
$\sin^3\theta+\cos^3\theta$
$=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$
$=\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right)^3-3\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{15}}{3}$
$=\frac{2}{9}\sqrt{15}$

8. 미분법 정답 ①

[**풀이**] 함수 $f(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}$$
$$=f'(1)\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{f'(1)}{2}$$

한편,

$$f'(x)=(2x+1)\ln x+(x^2+x)\times\frac{1}{x}$$
$$=(2x+1)\ln x+x+1$$

이므로 $f'(1)=3\times0+2=2$

따라서 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\frac{f'(1)}{2}=\frac{2}{2}=1$

9. 미분법

정답 ③

[풀이] $h'(x)=g'(x)-f'(x)$에서

$$h'(x)=x^2-5x+8-\frac{4}{x}$$
$$=\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x}$$
$$=\frac{(x-1)(x-2)^2}{x}$$

이므로 함수 $h(x)$는 $1\le x\le2$에서 증가한다.

따라서 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 최소이고, 최솟값은

$h(1)=\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+8-5-0=\frac{5}{6}$

10. 공간벡터

정답 ③

[풀이] $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$라 하면

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$

정사면체 OABC의 각 면은 정삼각형이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}=2\times2\times\frac{1}{2}=2$

한편, 점 M, N은 각각 선분 AB, BC의 중점이므로

$\overrightarrow{OM}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{ON}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$

점 P는 선분 OM의 연장선 위의 점이므로

$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OM}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}t$ (단, $t>1$)

이때 $\angle ONP=\frac{\pi}{2}$이므로

$\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{NP}=0$, $\overrightarrow{ON}\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{ON})=0$

$\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OP}-|\overrightarrow{ON}|^2=0$

$\overline{OM}=\overline{ON}=2\times\sin\frac{\pi}{3}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$이므로

$|\overrightarrow{ON}|^2=3$

$$\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OP}-|\overrightarrow{ON}|^2$$
$$=\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}t\right)-3$$
$$=\frac{1}{4}\{(\vec{b}\cdot\vec{a})t+(\vec{b}\cdot\vec{b})t+(\vec{c}\cdot\vec{a})t+(\vec{c}\cdot\vec{b})t\}-3$$
$$=\frac{1}{4}\{2t+4t+2t+2t\}-3$$
$$=0$$

$\frac{5}{2}t-3=0$, $t=\frac{6}{5}$

따라서

$|\overrightarrow{OP}|=t|\overrightarrow{OM}|=\frac{6}{5}\times\sqrt{3}=\frac{6}{5}\sqrt{3}$

11. 통계

정답 ②

[풀이] 카드 7장 중 임의로 동시에 서로 다른 4장의 카드를 꺼내는 경우의 수는

${}_7C_4=\frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}=35$

(i) $X=6$인 경우

가장 큰 수는 5, 가장 작은 수는 1, 나머지 두 수는 2, 3, 4 중 서로 다른 두 수를 선택하면 되므로 이 경우의 수는

${}_3C_2=3$

따라서 $P(X=6)=\frac{3}{35}$

(ii) $X=7$인 경우

가장 큰 수는 6, 가장 작은 수는 1, 나머지 두 수는 2, 3, 4, 5 중 서로 다른 두 수를 선택하면 되므로 이 경우의 수는

${}_4C_2=6$

또, 네 수가 2, 3, 4, 5이면 되므로 이 경우의 수는 1이다.

따라서 $P(X=7)=\frac{6+1}{35}=\frac{1}{5}$

(iii) $X=8$인 경우

가장 큰 수는 7, 가장 작은 수는 1, 나머지 두 수는 2, 3, 4, 5, 6 중 서로 다른 두 수를 선택하면 되므로 이 경우의 수는

${}_5C_2=10$

또, 가장 큰 수는 6, 가장 작은 수는 2, 나머지 두 수는 3, 4, 5 중 서로 다른 두 수를 선택하면 되므로 이 경우의 수는

${}_3C_2=3$

따라서 $P(X=8)=\frac{10+3}{35}=\frac{13}{35}$

(i), (ii), (iii)에서

$$P(6\le X\le8)=P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)$$
$$=\frac{3}{35}+\frac{1}{5}+\frac{13}{35}=\frac{23}{35}$$

12. 확률

정답 ④

[풀이] 조사에 참여한 학생 30명 중 임의로 선택한 1명이 남학생인 사건을 A, P 지역을 선택한 학생인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(A^C|B^C)$이다.

조사에 참여한 학생 30명 중 남학생이 여학생보다 2명이 많으므로 남학생은 16명, 여학생은 14명이다. 이때

$P(A)=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$

이 조사에 참여한 학생 중에서 임의로 선택한 1명이 남학생일 때, 이 학생이 P 지역을 선택한 학생일 확률이 $\frac{1}{4}$이므로

$P(B|A)=\frac{1}{4}$

이때

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{8}{15}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{15}$

P 지역을 선택한 남학생의 수는

$30\times P(A\cap B)=30\times\frac{2}{15}=4$

P 지역을 선택한 학생이 10명이므로 P 지역을 선택한 여학생의 수는 6이고 Q 지역을 선택한 학생은 20명이다.

따라서 $P(B^C)=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$

학생 30명 중 여학생의 수는 14이므로 Q 지역을 선택한 여학생의 수는 8이다. 그러므로

$P(A^C\cap B^C)=\frac{8}{30}$

따라서 $P(A^C|B^C)=\frac{P(A^C\cap B^C)}{P(B^C)}=\frac{\frac{8}{30}}{\frac{2}{3}}=\frac{2}{5}$

13. 통계

정답 ②

[풀이] 300명을 조사하여 구한 표본비율의 값을 $\hat{p}$이라 하면

$\hat{p}=\frac{k}{100}$

이 도시 자가용 운전자 전체 중 하루 평균 운전 거리가 20 km 이상인 자가용 운전자의 비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\hat{p}-1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{300}}\le p\le\hat{p}+1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{300}}$$

이때

$$a+b$$
$$=\hat{p}-1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{300}}+\hat{p}+1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{300}}$$
$$=2\hat{p}$$
$$=\frac{1}{2}$$

이므로 $\hat{p}=\frac{1}{4}$, 즉 $\frac{k}{100}=\frac{1}{4}$

$k=25$

$$b-a=2\times1.96\times\sqrt{\frac{\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}{300}}$$
$$=2\times1.96\times\frac{1}{40}=0.098$$

따라서 $k(b-a)=25\times0.098=2.45$

14. 미분법

정답 ①

[풀이] $x^2+y^2+xy+x-2=0$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면 음함수의 미분법에 의하여

$2x+2y\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx}+1=0$

$(x+2y)\frac{dy}{dx}+(2x+y+1)=0$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+y+1}{x+2y}$ (단, $x+2y\ne0$)

$x=1$, $y=-1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은 2이고,

$x=a$, $y=b$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은 $-\frac{2a+b+1}{a+2b}$이다.

점 $P(a, b)$에서의 접선과 점 $(1, -1)$에서의 접선이 서로 수직이므로

$2\times\left(-\frac{2a+b+1}{a+2b}\right)=-1$

$4a+2b+2=a+2b$

$3a=-2$, $a=-\frac{2}{3}$

$x=-\frac{2}{3}$, $y=b$를 ㉠에 대입하면

$\frac{4}{9}+b^2-\frac{2}{3}b-\frac{2}{3}-2=0$

$b^2-\frac{2}{3}b-\frac{20}{9}=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 b의 값의 합은 $\frac{2}{3}$이다.

15. 적분법

정답 ⑤

[풀이] 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로

$\int_2^4 f(x)dx=\int_2^4\{-f(-x)\}dx$

$-x=t$로 놓으면 $-1=\frac{dt}{dx}$이고

$x=2$일 때 $t=-2$, $x=4$일 때 $t=-4$이므로

$$\int_2^4 f(x)dx=\int_2^4\{-f(-x)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{-4}f(t)dt$$
$$=-\int_{-4}^{-2}f(t)dt \quad \cdots\cdots ㉡$$

$\int_{-4}^{2}f(x)dx=3$에서

$$\int_{-4}^{2}f(x)dx=\int_{-4}^{-2}f(x)dx+\int_{-2}^{2}f(x)dx$$
$$=\int_{-4}^{-2}f(x)dx+0$$

$=3$

따라서 $\int_{-4}^{-2} f(x)dx=3$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int_{2}^{4} f(x)dx=-3$

$\int_{1}^{2} f(x)dx=8$이므로

$\int_{1}^{4} f(x)dx=\int_{1}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{4} f(x)dx$

$=8+(-3)=5$

16. 순열과 조합 정답 ②

[풀이] 서로 다른 7개의 사탕을 서로 다른 k개의 상자에 모두 나누어 넣는 경우의 수(단, 빈 상자가 있을 수 있다.)를 b_k라 하면

$b_k={}_k\Pi_7=\boxed{k^7}$

한편, 상자 k개 중 $m(m=0,\ 1,\ \cdots,\ k-1)$개가 빈 상자가 되도록 서로 다른 7개의 사탕을 나누어 넣는 경우의 수는

${}_k\mathrm{C}_m\times a_{k-m}$

b_3의 경우의 수는 사탕 7개를 나누어 넣을 때 3개의 상자 중 빈 상자의 개수가 각각 0, 1, 2인 경우의 수의 합과 같다.

$a_1=1$이므로

$b_3=a_3+\boxed{{}_3\mathrm{C}_1}\times a_2+{}_3\mathrm{C}_2\,a_1$ …… ㉠

$3^7=a_3+3a_2+3a_1$

또, 서로 다른 7개의 사탕을 서로 다른 2개의 상자에 모두 나누어 넣는 경우의 수(단, 빈 상자가 있을 수 있다.)는 2개의 상자 중 빈 상자의 개수가 각각 0, 1인 경우의 수의 합과 같다. 즉,

$b_2=a_2+{}_2\mathrm{C}_1\,a_1$이므로

$a_2=2^7-2\times1=\boxed{126}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$a_3=3^7-3\times126-3\times1=1806$

따라서 $f(2)=2^7=128$, $p={}_3\mathrm{C}_1=3$, $q=126$이므로

$p+q+f(2)=3+126+128=257$

17. 통계 정답 ①

[풀이] 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 또한, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m+5,\ 3^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{Y-m-5}{3}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

조건 (가)에서 $\mathrm{P}(X\le4\sigma)=\mathrm{P}(Y\le m+8)$이므로

$\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{4\sigma-m}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{m+8-m-5}{3}\right)$

$\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{4\sigma-m}{\sigma}\right)=\mathrm{P}(Z\le1)$

따라서 $\dfrac{4\sigma-m}{\sigma}=1$, $m=3\sigma$

조건 (나)에서

$\mathrm{P}(2\sigma\le X\le3\sigma+2)+2\mathrm{P}(Y\ge3\sigma+8)=1$이므로

$\mathrm{P}\left(\dfrac{2\sigma-m}{\sigma}\le Z\le\dfrac{3\sigma+2-m}{\sigma}\right)$

$+2\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{3\sigma+8-m-5}{3}\right)=1$

$\mathrm{P}\left(\dfrac{2\sigma-3\sigma}{\sigma}\le Z\le\dfrac{3\sigma+2-3\sigma}{\sigma}\right)$

$+2\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{3\sigma+8-3\sigma-5}{3}\right)=1$

$\mathrm{P}\left(-1\le Z\le\dfrac{2}{\sigma}\right)+2\mathrm{P}(Z\ge1)=1$

$\mathrm{P}(-1\le Z\le0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{2}{\sigma}\right)+2\mathrm{P}(Z\ge1)=1$

$\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{2}{\sigma}\right)+2\mathrm{P}(Z\ge1)=1$

$\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}(Z\ge1)$

$+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{2}{\sigma}\right)+\mathrm{P}(Z\ge1)=1$

$\dfrac{1}{2}+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{2}{\sigma}\right)+\mathrm{P}(Z\ge1)=1$

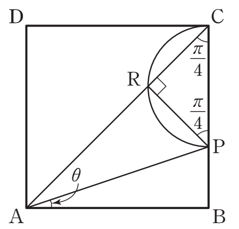
$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{2}{\sigma}\right)+\mathrm{P}(Z\ge1)=\dfrac{1}{2}$

이때 $\dfrac{2}{\sigma}=1$이어야 하므로 $\sigma=2$

따라서 $m+\sigma=4\sigma=4\times2=8$

18. 삼각함수 정답 ⑤

[풀이] 선분 PR를 긋고 $\overline{\mathrm{CR}}=x$라 하자.



선분 CP가 지름이므로

$\angle\mathrm{CRP}=\dfrac{\pi}{2}$, $\angle\mathrm{RPC}=\angle\mathrm{RCP}=\dfrac{\pi}{4}$

삼각형 CRP는 $\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{CR}}=x$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{2}\,\overline{\mathrm{CR}}=\sqrt{2}x$ …… ㉠

한편, $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AB}}\tan\theta=\tan\theta$이므로

$\overline{\mathrm{CP}}=\overline{\mathrm{BC}}-\overline{\mathrm{BP}}=1-\tan\theta$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\sqrt{2}x=1-\tan\theta$

$x=\dfrac{1-\tan\theta}{\sqrt{2}}$

$\dfrac{\pi}{4}-\theta=\alpha$라 하면 $\theta=\dfrac{\pi}{4}-\alpha$이므로

$x=\dfrac{1-\tan\theta}{\sqrt{2}}=\dfrac{1-\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$

$\theta\to\dfrac{\pi}{4}-$일 때, $\alpha\to0+$이므로

$\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\dfrac{\overline{\mathrm{CR}}}{\frac{\pi}{4}-\theta}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\dfrac{x}{\frac{\pi}{4}-\theta}$

$\displaystyle=\lim_{\alpha\to0+}\dfrac{\sqrt{2}\tan\alpha}{\alpha(1+\tan\alpha)}$

$\displaystyle=\sqrt{2}\lim_{\alpha\to0+}\left(\dfrac{\tan\alpha}{\alpha}\times\dfrac{1}{1+\tan\alpha}\right)$

$=\sqrt{2}\times1\times\dfrac{1}{1}=\sqrt{2}$

19. 평면벡터 정답 ③

[풀이] $x=1+4\sqrt{t}$에서 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{\sqrt{t}}$,

$y=t-\ln t$에서 $\dfrac{dy}{dt}=1-\dfrac{1}{t}$이므로

$t=1$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$s=\displaystyle\int_1^2\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

$=\displaystyle\int_1^2\sqrt{\left(\dfrac{2}{\sqrt{t}}\right)^2+\left(1-\dfrac{1}{t}\right)^2}\,dt$

$=\displaystyle\int_1^2\sqrt{\dfrac{4}{t}+1-\dfrac{2}{t}+\dfrac{1}{t^2}}\,dt$

$=\displaystyle\int_1^2\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^2}\,dt$

$=\displaystyle\int_1^2\left(1+\dfrac{1}{t}\right)dt$

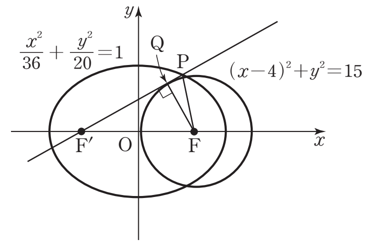
$=\Big[t+\ln|t|\Big]_1^2$

$=(2+\ln2)-1$

$=1+\ln2$

20. 평면 곡선 정답 ①

[풀이]



타원 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$에서 $\mathrm{F}'(-4,\ 0)$, $\mathrm{F}(4,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{F'F}}=8$

접선 PF′과 원이 만나는 점을 Q라 하면

$\overline{\mathrm{FQ}}=\sqrt{15}$

이때 삼각형 F′FQ는 $\angle\mathrm{FQF'}=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{F'Q}}=\sqrt{\overline{\mathrm{F'F}}^2-\overline{\mathrm{FQ}}^2}=\sqrt{8^2-(\sqrt{15})^2}=7$

$\overline{\mathrm{F'P}}=a$, $\overline{\mathrm{PF}}=b$로 놓으면

$\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{F'P}}-\overline{\mathrm{F'Q}}=a-7$

삼각형 PQF는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$b^2=\overline{\mathrm{FQ}}^2+\overline{\mathrm{QP}}^2=15+(a-7)^2$ …… ㉠

한편, 타원의 장축의 길이가 12이므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{F'P}}+\overline{\mathrm{PF}}=a+b=12$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=8$, $b=4$

즉 $\overline{\mathrm{F'P}}=8$, $\overline{\mathrm{PF}}=4$

따라서 삼각형 PF′F의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{F'P}}\times\overline{\mathrm{FQ}}=\dfrac{1}{2}\times8\times\sqrt{15}$

$=4\sqrt{15}$

21. 적분법 정답 ⑤

[풀이] ㄱ. 조건 (가)에서 양변에 $x=\dfrac{1}{4}$을 대입하면

$\displaystyle\int_0^0\{f(t)\}^2\,dt=-\dfrac{1}{8\pi}f\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}$

$0=-\dfrac{1}{8\pi}f\left(\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{8}$

$f\left(\dfrac{1}{4}\right)=0$

조건 (나)에서 양변에 $x=\dfrac{1}{4}$을 대입하면

$\left\{f\left(\dfrac{1}{4}\right)\right\}^2=-\dfrac{1}{2}f\left(2\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}$

$0=-\dfrac{1}{2}f(1)+\dfrac{1}{2}$

$f(1)=1$ (참)

ㄴ. 조건 (가)에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$\left\{f\left(x-\dfrac{1}{4}\right)\right\}^2=-\dfrac{1}{4\pi}f'\left(2x-\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{2}$

$x-\dfrac{1}{4}=t$로 놓으면

$\left\{f\left(x-\dfrac{1}{4}\right)\right\}^2=\{f(t)\}^2$,

$-\dfrac{1}{4\pi}f'\left(2x-\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{4\pi}f'\left(2t+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{2}$

이므로

$\{f(t)\}^2=-\dfrac{1}{4\pi}f'\left(2t+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{2}$

즉, $\{f(x)\}^2=-\frac{1}{4\pi}f'\left(2x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}$ …… ㉠

조건 (나)와 ㉠에 의해서

$-\frac{1}{2}f\left(2x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=-\frac{1}{4\pi}f'\left(2x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}$

이므로

$f\left(2x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\pi}f'\left(2x+\frac{1}{4}\right)$ (참) …… ㉡

ㄷ. ㉡에서 $2x+\frac{1}{4}=s$로 놓으면

$f\left(s+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2\pi}f'(s)$

$\{f'(s)\}^2=4\pi^2\left\{f\left(s+\frac{1}{4}\right)\right\}^2$

이므로

$\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{8}}\{f'(x)\}^2\,dx=4\pi^2\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{8}}\left\{f\left(x+\frac{1}{4}\right)\right\}^2dx$

이때 $x+\frac{1}{4}=u$로 놓으면 $\frac{dx}{du}=1$이고

$x=-\frac{1}{4}$일 때 $u=0$, $x=\frac{1}{8}$일 때 $u=\frac{3}{8}$이므로

$\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{8}}\{f'(x)\}^2\,dx=4\pi^2\int_{0}^{\frac{3}{8}}\{f(u)\}^2\,du$

조건 (가)의 양변에 $x=\frac{5}{8}$를 대입하면

$\int_{0}^{\frac{3}{8}}\{f(t)\}^2\,dt$

$=-\frac{1}{8\pi}f\left(2\times\frac{5}{8}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{5}{8}-\frac{1}{8}$

$=-\frac{1}{8\pi}f(1)+\frac{3}{16}$

$=-\frac{1}{8\pi}+\frac{3}{16}$

이므로

$\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{8}}\{f'(x)\}^2\,dx=4\pi^2\left(-\frac{1}{8\pi}+\frac{3}{16}\right)$

$=\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{2}\right)\pi$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

22. 순열과 조합 정답 8

[풀이] ${}_nH_2={}_{n+2-1}C_2={}_{n+1}C_2=\frac{(n+1)\times n}{2}$

이므로 $\frac{n(n+1)}{2}=36$

$n^2+n-72=0$, $(n+9)(n-8)=0$

n은 자연수이므로 $n=8$

23. 지수함수와 로그함수 정답 21

[풀이] $a>0$이고, $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$의 밑이 1보다 작으므로 함수 $f(x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값 45를 가지므로

$a\left(\frac{1}{2}\right)^{0-1}+3=45$

$2a+3=45$

따라서 $a=21$

24. 공간도형 정답 2

[풀이] 점 P가 선분 OA를 3 : 2로 외분하는 점이므로

$\overline{OA}=\frac{1}{2}\overline{AP}$

$\overline{AP}=6$이므로 $\overline{OA}=\frac{1}{2}\times6=3$

$\overline{OA}=\sqrt{(-2)^2+a^2+1^2}=3$

$5+a^2=9$, $a^2=4$

$a>0$이므로 $a=2$

25. 확률 정답 9

[풀이] 1부터 7까지의 자연수 중 서로 다른 네 수를 선택하고 큰 수부터 차례로 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 배열하여 만든 네 자리의 자연수의 개수는 7개의 자연수 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7에서 4개의 자연수를 선택하는 경우의 수와 같으므로

${}_7C_4=\frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}=35$

선택된 자연수가 6000 이상이고 7000 이하의 자연수이어야 하므로 이 자연수의 천의 자리의 수는 6이고, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 들어갈 수는 자연수 1, 2, 3, 4, 5 중 서로 다른 세 수를 택하여 큰 수부터 차례로 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 배열하면 된다. 이 경우의 수는

${}_5C_3=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$

따라서 구하는 확률은

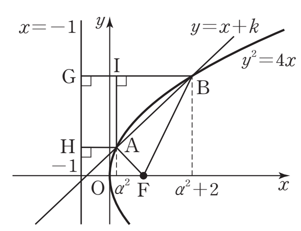
$\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$

따라서 $p=7$, $q=2$이므로

$p+q=7+2=9$

26. 평면 곡선 정답 75

[풀이] 두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, G라 하고, 점 A에서 선분 BG에 내린 수선의 발을 I라 하자.



점 A의 좌표를 $(a^2, 2a)(a>0)$이라 하면 포물선 $y^2=4x$의 준선의 방정식은 $x=-1$이므로

$\overline{AH}=a^2+1$

포물선의 정의에 의하여

$\overline{FA}=\overline{AH}$, $\overline{FB}=\overline{BG}$

이므로 $\overline{BI}=\overline{BG}-\overline{AH}=\overline{FB}-\overline{FA}=2$

또, 직선 $y=x+k$의 기울기가 1이므로

$\overline{AI}=\overline{BI}=2$

따라서 점 B의 좌표는 $(a^2+2, 2a+2)$이다.

점 B는 포물선 $y^2=4x$ 위의 점이므로

$(2a+2)^2=4(a^2+2)$

$8a=4$, $a=\frac{1}{2}$

따라서 점 A의 좌표는 $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$이다.

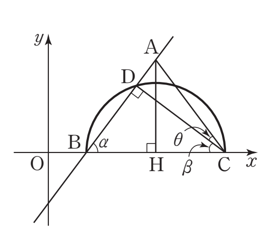
점 A는 직선 $y=x+k$ 위의 점이므로

$1=\frac{1}{4}+k$, $k=\frac{3}{4}$

따라서 $100k=100\times\frac{3}{4}=75$

27. 삼각함수 정답 7

[풀이]



점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 (5, 0)이고, $\overline{AB}=\overline{AC}$이므로 점 C의 좌표는 (8, 0)이다.

직선 AB의 기울기는

$\frac{4-0}{5-2}=\frac{4}{3}$

이고 직선 CD는 직선 AB와 수직이므로 직선 CD의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이다.

삼각형 BCD에서 $\angle ABH=\alpha$, $\angle BCD=\beta$라 하면

$\tan\alpha=\frac{4}{3}$

$\tan(\pi-\beta)=-\frac{3}{4}$, $\tan\beta=\frac{3}{4}$

이때 $\angle ABH=\angle ACH$이므로

$\theta=\angle ACD=\angle ACH-\angle BCD=\alpha-\beta$

따라서

$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$

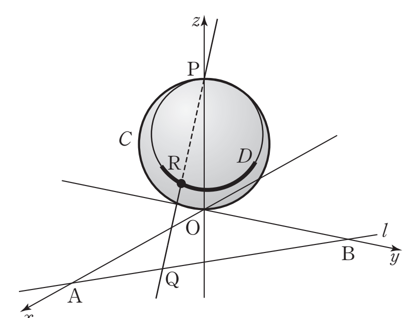
$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{\frac{4}{3}-\frac{3}{4}}{1+\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}}=\frac{7}{24}$

이므로 $24\tan\theta=24\times\frac{7}{24}=7$

28. 공간도형 정답 13

[풀이] 점 Q가 선분 AB 위를 움직일 때, 점 R가 나타내는 도형은 세 점 P, A, B를 지나는 평면 PAB와 구 C가 만나서 생기는 원의 일부이다. 이 원을 D라 하자.

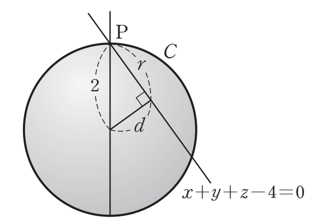


P(0, 0, 4), A(4, 0, 0), B(0, 4, 0)이므로 세 점 P, A, B를 지나는 평면 PAB의 방정식은

$x+y+z-4=0$

구 C의 중심 (0, 0, 2)와 평면 PAB 사이의 거리를 d라 하면

$d=\frac{|0+0+2-4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$



원 D의 반지름의 길이를 r라 하면 구 C의 반지름의 길이가 2이므로

$r^2=2^2-d^2=4-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{8}{3}$

$r=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

점 Q가 점 B의 위치에 있을 때 점 R를 R′이라 하면 점 R′은 yz평면 위에 있다. 또, yz평면과 구가 만나는 도형과 직선 PQ는 각각 yz평면 위의 원

$y^2+(z-2)^2=4$ …… ㉠

와 yz평면 위의 직선

$z=-y+4$ …… ㉡

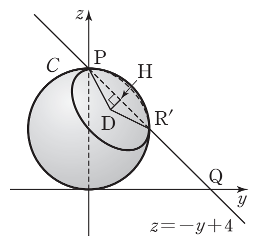
이다. ㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$y=z=2$ 또는 $y=0$, $z=4$

이므로 점 R′의 좌표는 (0, 2, 2)이다.

따라서 $\overline{PR'}=\sqrt{0^2+2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$

이때 원 D의 중심을 D라 하자.



점 D에서 선분 PR′에 내린 수선의 발을 H라 하면
삼각형 PDR′은 $\overline{PD}=\overline{R'D}$인 이등변삼각형이므로
$\angle PDH=\angle R'DH$,
$\overline{PH}=\frac{1}{2}\overline{PR'}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}=\sqrt{2}$
이다. 이때

$$\sin(\angle PDH)=\frac{\overline{PH}}{\overline{PD}}=\frac{\sqrt{2}}{r}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{2\sqrt{6}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이므로 $\angle PDH=\angle R'DH=\frac{\pi}{3}$

따라서 $\angle PDR'=\frac{2}{3}\pi$

점 Q가 점 A의 위치에 있을 때 점 R를 R″이라 하고 마찬가지로 생각하면

$\angle PDR''=\frac{2}{3}\pi$

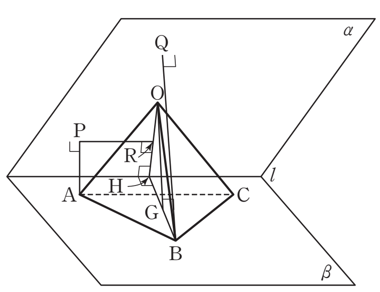
따라서 $\angle ADB=\frac{2}{3}\pi$이므로 점 R가 나타내는 도형은 원 D의 점 P를 포함하지 않는 호 R′R″이고 이 호의 길이는

$\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{9}\sqrt{6}\pi$

따라서 $p=9$, $q=4$이므로
$p+q=9+4=13$

29. 공간도형 정답 10

[풀이]



점 O에서 평면 β와 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 G, H라 하자. 점 G는 정삼각형 ABC의 무게중심이고, 삼수선의 정리에 의하여 직선 l과 직선 BH는 수직이다.
정사면체 OABC에서 $\overline{OG}=2\sqrt{6}$이고, 두 평면 α와 β가 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$이므로 직각삼각형 OHG에서
$\overline{OH}=4\sqrt{6}$, $\overline{GH}=6\sqrt{2}$
한편, 점 A에서 평면 α에 내린 수선의 발을 P, 점 B에서 평면 α에 내린 수선의 발을 Q, 점 P에서 선분 OH에 내린 수선의 발을 R라 하자.
직선 l과 직선 PR는 모두 평면 α 위에 있고 각각 직선 OH와 수직이므로 직선 l과 선분 PR는 평행하다.
따라서 $\overline{PR}=\frac{1}{2}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\times 6=3$

또, $\overline{BG}=\frac{2}{3}\times\left(6\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{3}$이므로
$\overline{BH}=\overline{BG}+\overline{GH}=2\sqrt{3}+6\sqrt{2}$
점 Q는 직선 OH 위의 점이므로 직각삼각형 BQH에서

$$\overline{QH}=\cos\frac{\pi}{6}\times\overline{BH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times(2\sqrt{3}+6\sqrt{2})=3+3\sqrt{6}$$

이때 $\overline{OQ}=\overline{QH}-\overline{OH}$
$=(3+3\sqrt{6})-4\sqrt{6}=3-\sqrt{6}$
삼각형 OAB의 평면 α 위로의 정사영이 삼각형 OPQ이므로 삼각형 OAB의 넓이를 S, 삼각형 OPQ의 넓이를 S'이라 하면

$$\cos\theta=\frac{S'}{S}=\frac{\frac{1}{2}\times\overline{OQ}\times\overline{PR}}{\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2}=\frac{\frac{1}{2}\times(3-\sqrt{6})\times 3}{9\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6}$$

따라서 $p=\frac{1}{6}$, $q=\frac{1}{6}$이므로

$30(p+q)=30\times\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)=10$

30. 미분법 정답 264

[풀이] $g(x)=(x^2+6x+a)e^{\frac{1}{4}x}$이라 하면
$g'(x)=\frac{1}{4}(x^2+14x+a+24)e^{\frac{1}{4}x}$
$g'(x)=0$에서 $x^2+14x+a+24=0$ …… ㉠
이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

(i) $D\le 0$일 때, 즉 $\frac{D}{4}=7^2-(a+24)\le 0$, $a\ge 25$이면
모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\ge 0$이므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고 극값을 갖지 않는다. 이때
$x^2+6x+a=(x+3)^2+a-9\ge 16$
이므로 $g(x)>0$, 즉 $f(x)=|g(x)|=g(x)$
따라서 함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

(ii) $D>0$, 즉 $a<25$이면 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 두 실근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면 구간 $(-\infty, \alpha)$에서 $g'(x)>0$, 구간 (α, β)에서 $g'(x)<0$, 구간 (β, ∞)에서 $g'(x)>0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=\alpha$에서 극댓값 $g(\alpha)$, $x=\beta$에서 극솟값 $g(\beta)$를 갖는다.
이차방정식 ㉠의 근의 공식에 의하여
$x=-7\pm\sqrt{25-a}$
이므로 $\alpha=-7-\sqrt{25-a}$, $\beta=-7+\sqrt{25-a}$
한편, $x<\alpha$일 때, $x^2+14x+a+24>0$이므로
$x^2+6x+a>-8x-24$
$-8\alpha-24=32+8\sqrt{25-a}>32$이므로
$x^2+6x+a>32$
따라서 $x<\alpha$일 때
$g(x)=(x^2+6x+a)e^{\frac{1}{4}x}>0$
이므로 함수 $f(x)=|g(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $g(\beta)\ge 0$이어야 한다.
$g(\beta)=(\beta^2+6\beta+a)e^{\frac{\beta}{4}}=(-8\beta-24)e^{\frac{\beta}{4}}\ge 0$
$-8\beta-24\ge 0$
$-8\beta-24=32-8\sqrt{25-a}\ge 0$
$\sqrt{25-a}\le 4$
$a\ge 9$
$a<25$이므로 $9\le a<25$

(i), (ii)에서 정수 a는 9, 10, 11, …, 24이므로 모든 정수 a의 값의 합은

$9+10+11+\cdots+24=\frac{16(9+24)}{2}=264$