

2000학년도 제 1학기 1차 고사

2000년 0월 0일 0교시

수학과 원안 제 1학년

출
제
자

- ▷ 객관식 1번부터 17 번까지의 문제에 맞는 답을 OMR 답안지에 정확
하게 표시하고, 서답형 1번부터 4번까지는 답안지에 정답만 쓰시오.
▷ 서술형 5-6번 문제는 답안지에 풀이 과정을 자세히 서술하시오.
▷ 객관식 컴퓨터용 검정색 사인펜, 서답형, 서술형 검은색이나 파란색
볼펜을 사용하시오.

1. 두 다항식 $A = 2x^3 + x^2 - 3$, $B = -5x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ 에 대
하여 두 다항식의 합은 $A + B = -3x^3 + ax^2 - 2x + b$ 이다. 이때,
 $a + b$ 의 값은? () (2.5점)

- ① -1 ② 1 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

$$\begin{aligned} A+B &= 2x^3 + x^2 - 3 - 5x^3 + 3x^2 - 2x + 4 \\ &= -3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \\ a &= 4 \quad b = 1 \\ \therefore a+b &= 5 \end{aligned}$$

2. 다항식 $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x + 8$ 을 일차식 $x - 2$ 로 나누었을
때의 나머지는 얼마인가? () (3점)

- ① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

$$\begin{aligned} P(2) &= 16 - 16 + 10 + 8 \\ &= 18 \end{aligned}$$

3. 다음 복소수에 대한 설명 중 옳지 않은 것은? () (3점)

(단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

- ① 실수는 복소수이다.
② 허수단위는 i 는 0보다 작다.
③ $\sqrt{-4} = 2i$ 이다.
④ 허수부분이 0인 복소수는 모두 실수이다.
⑤ 제곱하여 -5가 되는 수는 $\pm \sqrt{5}i$ 이다.

4. 다항식 $(x^2 + 4x)^2 - 2(x^2 + 4x) - 15$ 의 인수가 아닌 것은? ()

- ① $x - 1$ ② $x + 1$ ③ $x + 3$ (3점)
④ $x + 5$ ⑤ $x + 7$

$$\begin{aligned} x^2 + 4x &= X \\ X^2 - 2X - 15 &= (X - 5)(X + 3) \\ &= (x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x + 3) \\ &= (x + 5)(x - 1)(x + 1)(x + 3) \end{aligned}$$

5. $(\sqrt{(-2)^2}) + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}} + \frac{\sqrt{-54}}{\sqrt{-3}} + \sqrt{-3} \sqrt{-6}$ 을 간단히

계산하여 나타낸 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.) () (3점)

- ① $2+3i$ ② $-2+3i$ ③ $3i$
 ④ $2-3i$ ⑤ $-2-3i$

$$= 2 - 3i + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$$

$$= 2 - 3i$$

6. $2x^2 + 5xy - 3y^2 + 3x - 5y - 2$ 를 인수분해 하였더니 $(ax+by-1)(x+cy+2)$ 이었다. 이 때 상수 a, b, c 의 합 $a+b+c$ 의 값은? ()

- ① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

$$= 2x^2 + (5y+3)x - 3y^2 - 5y - 2$$

$$= 2x^2 + (5y+3)x - (3y+2)(y+1) \quad (y^2 + 5y + 2)$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} -(5y+1) \\ 3y-2 \end{array}$$

$$= (2x - y - 1)(x + 3y + 2)$$

$$a=2 \quad b=-1 \quad c=3$$

$$a+b+c = 2-1+3 = 4$$

7. $-1 \leq x \leq 3$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라고 할 때, $M+m$ 의 값은? ()

(3점)

- ① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

$$f(x) = (x-1)^2 + 2$$



$$M = 4 \quad m = 2$$

$$M+m = 6$$

8. 이차방정식 $x^2 + kx + k + 3 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 모든 정수 k 의 합은? () (3.5점)

- ① 4 ② 7 ③ 10 ④ 13 ⑤ 16

$$k^2 - 4k - 12 = 0$$

$$(k-6)(k+2) = 0 \quad k = 6, -2$$

$$6-2=4$$

9. 다항식 $f(x)$ 를 $x - \frac{1}{4}$ 로 나눈 몫과 나머지를 각각 $Q(x), R$ 이라고 할 때, 다항식 $f(x)$ 를 $4x - 1$ 로 나눈 몫과 나머지를 순서대로 적은 것은? () (4점)

- ① $Q(x), R$ ② $Q(x), \frac{1}{4}R$ ③ $\frac{1}{4}Q(x), R$
 ④ $\frac{1}{4}Q(x), 4R$ ⑤ $4Q(x), \frac{1}{4}R$

$$f(x) = (x - \frac{1}{4})Q(x) + R$$

$$= (4x - 1)\frac{1}{4}Q(x) + R$$

$$\therefore \frac{1}{4}Q(x), R$$

10. 이차방정식 $x^2 - 2x + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때,

$\alpha + 2, \beta + 2$ 를 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 + ax + b = 0$ 이다. 두 상수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은? () (4점)

- ① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

$$\alpha + \beta = 2 \quad \alpha\beta = 3$$

$$a = -(\alpha + \beta + 4) = -6$$

$$b = (\alpha + 2)(\beta + 2) = \alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4 \\ = 3 + 4 + 4 \\ = 11$$

$$a + b = -6 + 11 = 5$$

11. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2(k-a)x + k^2 + 2k - 2b = 0$ 가 k 의 값에 관계없이 중근을 갖도록 하는 실수 a, b 에 대하여 $a + 2b$ 의 값은? () (4점)

- ① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

$$\Delta/4 = (k-a)^2 - k^2 - 2k + 2b = 0$$

$$k^2 - 2ak + a^2 - k^2 - 2k + 2b = 0$$

$$(-2a-2)k + a^2 + 2b = 0$$

$$-2a-2=0 \quad a^2+2b=0$$

$$\therefore a = -1 \quad b = -\frac{1}{2}$$

$$a + 2b = -1 - 1 = -2$$

12. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 - xy + 2y^2 = 4 \end{cases}$ 의 해를 $x = \alpha$, $y = \beta$ 라고 할 때, $\alpha + \beta$ 의 최댓값은 M , 최솟값은 m 이다. 이때, $M - m$ 의 값은? () (4점)

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 4 ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

$$(x+y)(x-y)=0$$

$$x = -y \text{ or } x = y$$

$$(i) x = -y$$

$$(ii) x = y$$

$$y^2 + y^2 + 2y^2 = 4$$

$$y^2 - y^2 + 2y^2 = 4$$

$$y^2 = 1$$

$$y^2 = 2$$

$$y = \pm 1$$

$$y = \pm \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} x = 1 & y = -1 \\ x = -1 & y = 1 \end{cases}$$

$$x = \sqrt{2}, y = \sqrt{2}$$

$$x = -\sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$$

$$M = \alpha + \beta = 2\sqrt{2}$$

$$m = \alpha + \beta = -2\sqrt{2}$$

$$M - m = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

13. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 - \sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은? () (4.5점)

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

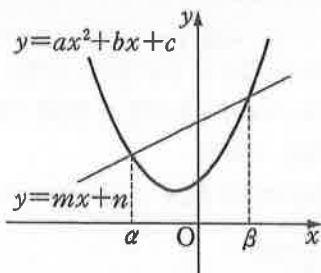
$$\text{다른 한 근 } 2 + \sqrt{2}$$

$$a = -(2 - \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2}) = -4$$

$$b = (2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) = 4 - 2 = 2$$

$$a + b = -4 + 2 = -2$$

14. 아래 두 함수 $y=ax^2+bx+c$, $y=mx+n$ 의 그래프에 대하여
<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? () (5점)



<보기>

- ㄱ. $b^2-4ac < 0$
 ㄴ. $am^2+bm+c > 0$
 ㄷ. $\alpha+\beta = \frac{m-b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c-n}{a}$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

① $b^2-4ac < 0$ (ㄱ)

$y=ax^2+bx+c$ 와 x 축과 만나는 점 없음.

② $am^2+bm+c > 0$ (ㄴ)
 $\therefore mx^2+bx+c > 0$ (ㄱ)

③ α 와 β 는 이차함수의 근과 교점의 x 좌표이므로

$ax^2+bx+c = mx+n$

$ax^2+(b-m)x+c-n=0$ 의 두근

$\alpha+\beta = \frac{m-b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c-n}{a}$ (ㄷ)

15. 다음 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.) ()

(5점)

<보기>

- ㄱ. $i+i^2+i^3+\dots+i^{100}=0$
 ㄴ. $(1+i)^{20}=1024$
 ㄷ. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n = 2$ 을 만족하는 자연수 n 의
 최솟값은 4이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

① $i+i^2+i^3+i^4+\dots+i^{100}=i-i+i-i+\dots+i-i=0$

$\therefore i+i^2+\dots+i^{100}=0$ (ㄱ)

② $(1+i)^{20} = \{(1-i)^2\}^{10} = (2i)^{10}$
 $= 2^{10} i^{10}$
 $= -1024$ (ㄴ)

③ $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$
 $= i^n + (-i)^n$

$\therefore i^n + (-i)^n = 2$

$n=4$ $i^4=1$ $(-i)^4=1$ (ㄷ)

16. x, y, z 에 대한 연립방정식

$$\begin{cases} x+2y-3z=2 & \text{--- ①} \\ x+y-z=1 & \text{--- ②} \\ ax+by+5z=1 & \text{--- ③} \end{cases}$$

의 해가 존재하지 않을 때, $a+b^2=8$ 을 만족하는 상수 a, b 에 대하여

ab 의 값은? ()

(5점)

- ① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

① - 3 × ② $x+2y-3z=2$

$-3x-3y+3z=3$

$-2x-y=-1 \Rightarrow 2x+y=1$

② × 5 + ③ $5x+5y-5z=5$

$ax+by+5z=1$

$(a+5)x+(b+5)y=6$

$\frac{a+5}{2} = b+5 \neq b$

$\begin{cases} a \neq 7 \\ b \neq 1 \end{cases}$

$a+5=2b+10$

$a=2b+5$

$a+b^2=8$

$b^2+2b-3=0$

$(b+3)(b-1)=0$

$\begin{cases} b=-3 \\ b=1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \times \\ \times \end{matrix}$

$a=3$

17. 삼차식 $f(x)=x^3+x^2+3(a-2)x-6a$ 에 관한 보기의 설명 중 옳은 것만을 모두 고른 것은? () (5.5점)

<보기>

- ㄱ. 삼차방정식 $f(x)=0$ 의 세 근의 합은 -1 이다.
 ㄴ. 삼차방정식 $f(x)=0$ 가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 a 의 최댓값은 -1 이다.
 ㄷ. 삼차방정식 $f(x)=0$ 가 중근을 갖도록 하는 실수 a 값의 모든 곱은 $-\frac{5}{4}$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ $x^3+x^2+3(a-2)x-6a=0$ (정)

ㄷ $f(2)=8+4+6a-12-6a=0$

$\therefore f(x)=(x-2)(x^2+3x+3a)$

$4+6+3a=0 \quad a=-\frac{10}{3}$

$x^2+3x+3a=0$

$\Delta=9-12a \geq 0 \quad a \leq \frac{3}{4}$

정수 a 의 최댓값은 0 이다 (거짓)

ㄴ $x^3+x^2+3(a-2)x-6a=0$

$0=9-12a=0 \quad a=\frac{3}{4}$

$x^2+3x+3a=0$ 가 2중근을 갖도록 하자

$4+6+3a=0 \quad a=-\frac{10}{3}$

$\frac{3}{4} \times (-\frac{10}{3}) = -\frac{5}{2}$ (거짓)

▷여기서부터는 서답형입니다.

답안지에 검정색이나 파란색 볼펜으로 정답만 쓰시오. (1번에서 4번)

1. 두 실수 x, y 에 대하여 $(x-2) + (y+1)i = 4-3i$ 가 성립할 때, $x+y$ 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.) (3점)

$$x-2=4 \quad \therefore x=6$$

$$y+1=-3 \quad y=-4$$

$$x+y=2$$

2. 이차함수 $y = x^2 - 3x + a$ 의 그래프가 x 축과 접하도록 하는 실수 a 의 값을 구하시오. (3점)

$$b^2 - 4ac = 0 \quad a = \frac{9}{4}$$

3. 방정식 $x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$ 의 해를 구하시오. (4점)

$$x=1 \text{ 대입 } 1 - 15 - 10 + 24 = 0$$

$$x=2 \text{ 대입 } 16 - 60 + 20 + 24 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 0 & -15 & 10 & 24 \\ & & -1 & 1 & 14 & -24 \\ \hline 2 & 1 & -1 & -14 & 24 & 0 \\ & & 2 & 2 & -24 & \\ \hline & 1 & 1 & -12 & 0 & \end{array}$$

$$= (x+1)(x-2)(x^2+x-12)$$

$$= (x+1)(x-2)(x+4)(x-3)$$

$$\therefore x = -4, -1, 2, 3$$

4. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 의 그래프와 x 축의 교점이

$(1,0), (3,0)$ 이다. $-1 \leq x \leq 4$ 에 서 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라고 할 때, $M^2 + m^2$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.) (5점)

$$y = x^2 - 4x + 3$$

$$= (x-2)^2 - 1$$



$$x = -1 \quad y = 8$$

$$x = 2 \quad y = -1$$

$$M^2 + m^2 = 64 + 1 = 65$$

▷여기서부터는 서술형 문항입니다.

검정색이나 파란색 볼펜으로 답안지에 기록하시오. 풀이과정에 따라 부분점수가 부여 되니 반드시 풀이를 기록하세요.

5. 삼차식 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(단 $i = \sqrt{-1}$ 이고 a, b, c 는 실수이다.) (10점)

- (가) $x^3 + ax^2 + bx + c$ 는 $x - 2$ 로 나누어떨어진다.
(나) 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 의 한 근이 i 이다.

(1) 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 의 나머지 두 근을 구하시오. (3점)

답) (가) 조건에 의해서 2, i 는
 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근이라
제약이 심하하므로 나머지 한 근은 $-i$ 라
가정해서 나머지 두 근은 2와 $-i$ 이다.

(2) 실수 a, b, c 의 값을 구하시오. (3점)

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 의 세 근이 2, i, $-i$ 이므로
그라 제타의 관계에 의해
 $2 + i - i = -a \Rightarrow a = -2$
 $2 \cdot i - i^2 - i^2 = -b \Rightarrow b = 1$
 $2 \cdot i \cdot (-i) = c \Rightarrow c = 2$

(3) 삼차방정식 $f(2x) = 0$ 의 세 근의 곱을 구하시오. (4점)

답) (가)에 의해서 함수 $f(x)$ 는
 $f(x) = (x-2)(x^2+1)$
 $f(2x) = (2x-2)(4x^2+1)$ 이다 $f(1) = 0$
 $f(2x)$ 의 근은 x 이 $1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$
세 근의 곱은 $(1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times (-\frac{\sqrt{2}}{2})) = -\frac{1}{4}$
 $= -\frac{1}{4}$

6. 이차함수 $y = -x^2 + 2mx - m^2 - 2m + 10$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점 $(\alpha, 0), (\beta, 0)$ 에서 만날 때, $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$ 의 최솟값을 구하고 그 과정을 상세하게 쓰시오. (단, m 은 실수이다.) (10점)

이차함수의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나므로

$$\frac{b^2}{4} = m^2 - m^2 - 2m + 10 > 0$$

$$m < 5$$

$$x^2 - 2mx + m^2 + 2m - 10 = 0 \text{ 의 근이 } \alpha, \beta \text{ 이므로}$$

$$\alpha + \beta = 2m \quad \alpha\beta = m^2 + 2m - 10$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta$$

$$= 4m^2 - 3m^2 - 6m + 30$$

$$= m^2 - 6m + 30$$

$$= (m-3)^2 + 21$$

$$m=3 \text{ 일 때 최솟값 21 (} \because m < 5 \text{)}$$

모두 수고했어요^^

이 시험문제의 저작권은 ○○고등학교에 있습니다. 저작권법에 의해 보호받는 저작물이므로 전재와 복제는 금지되며, 이를 어길시 저작권법에 의거 처벌될 수 있습니다.