수능, 모의고사 연도별 문제모음

단원 : 수2-적분

반: 번호: 이름:

기본유형

1. 함수 $y=4x^3-12x^2+8x$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

[4점][2012년 5월 나26]

2. 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 에서의 접선의 기울기가 $3x^2-12$이고 함수 $f(x)$의 극솟값이 3일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오.

[3점][2012년 7월 나24]

3. 함수 $f(x)=\int(x^2+2x)\,dx$일 때,

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$ 의 값은?

[3점][2012년 7월 나05]

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

4. $f(x)=3x^2+x+\int_0^2 f(t)dt$ 를 만족시키는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(2)$의 값을 구하시오.

[3점][2012년 7월 가25]

5. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{x^2-4}\int_2^x(t^2+3t-2)\,dt$ 의 값을 구하시오.

[3점][2012년 10월 나26]

6. 함수 $f(x)=x+1$에 대하여

$$\int_{-1}^1\{f(x)\}^2dx=k\left(\int_{-1}^1 f(x)\,dx\right)^2$$

일 때, 상수 k의 값은?

[3점][2013학년도 수능 나11]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

7. 함수 $f(x)$가 $f(x)=x^2-2x+\int_0^1 tf(t)dt$를 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값은?

[3점][2013년 7월 나12]

① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{17}{6}$ ④ $\frac{19}{6}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

8. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\int_0^x f(t)\,dt=x^3-2x^2-2x\int_0^1 f(t)\,dt$$

일 때, $f(0)=a$ 라 하자. $60a$ 의 값을 구하시오.

[4점][2013년 9월 나28]

9. 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

$$\int_{12}^{x} f(t)\,dt = -x^3+x^2+\int_{0}^{1} xf(t)\,dt$$

$\int_{0}^{1} f(x)\,dx$의 값을 구하시오.

[3점][2014년 10월 나24]

10. 다항함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=6x^2+4$이다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,6)$을 지날 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

[4점][2015학년도 수능 나26]

11. 곡선 $y=x^3-2x^2+k$와 직선 $y=k$로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, k는 상수이다.)

[3점][2015년 10월 나10]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

12. 함수 $f(x)=\int_{0}^{x}(3t^2+5)\,dt$에 대하여

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ 의 값을 구하시오.

[3점][2017년 7월 나25]

13. 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$xf(x)=\int_{-1}^{x}\{f(t)+2t^2+t\}dt$$

일 때, $f(3)$의 값은?

[4점][2017년 경남10월 나15]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

14. 함수 $f(x)=\int_{2}^{x}(t^2-3t+2)\,dt$에 대하여

$$\lim_{x\to 1+}\frac{|f'(x)|}{x-1}$$

의 값은?

[3점][2017년 전북10월 나12]

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

15. 함수 $f(x)=\int_{0}^{x}(-6t^2+6t)\,dt$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

[4점][2017년 전북10월 나15]

① $\frac{21}{32}$ ② $\frac{23}{32}$ ③ $\frac{25}{32}$ ④ $\frac{27}{32}$ ⑤ $\frac{29}{32}$

16. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_a^x f(t)dt = \frac{1}{3}x^3 - 9$$

를 만족시킬 때, $f(a)$의 값을 구하시오. (단, a는 실수이다.)

[3점][2018년 10월 나25]

17. $\int_{-a}^{a}(5x^3+3x^2+4x+a)\,dx = (a+1)^2$을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은?

[3점][2018년 대구11월 나09]

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{5}$

18. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x \left\{ \frac{d}{dt} f(t) \right\} dt = x^3 + ax^2 - 2$$

를 만족시킬 때, $f'(a)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

[4점][2019학년도 수능 나14]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

19. $\int_1^4 (x+|x-3|)\,dx$의 값을 구하시오.

[3점][2019학년도 수능 나25]

20. 함수 $f(x) = x^2 - 2x$에 대하여 두 곡선 $y = f(x)$, $y = -f(x-1)-1$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

[4점][2019년 9월 나15]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

21. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) = x^3 - 4x\int_0^1 |f(t)|dt$$

를 만족시킨다. $f(1) > 0$일 때, $f(2)$의 값은?

[4점][2020년 3월 가16]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

22. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$3xf(x)=9\int_1^x f(t)dt+2x$$

를 만족시킬 때, $f'(1)$의 값은?

[4점][2020년 4월 나16]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

23. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+f(-x)}{x^2}=3$

(나) $f(0)=-1$

$\int_{-3}^{3}f(x)dx$의 값은?

[4점][2020년 7월 나14]

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

24. 함수 $f(x)=-x^2-4x+a$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

가 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 증가하도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오.

[4점][2020년 9월 나28]

25. 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=2x+2\int_0^1 g(t)dt$

(나) $g(0)-\int_0^1 g(t)dt=\frac{2}{3}$

$g(1)$의 값은?

[4점][2020년 10월 나16]

① -2 ② $-\frac{5}{3}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{2}{3}$

26. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $F(x)$의 도함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}-2x & (x<0)\\ k(2x-x^2) & (x\ge 0)\end{cases}$$

이다. $F(2)-F(-3)=21$일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

[3점][2021년 3월 18]

27. 두 양수 $a,\ b\ (a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=(x-a)(x-b)$라 하자.

$$\int_0^a f(x)dx=\frac{11}{6},\ \int_0^b f(x)dx=-\frac{8}{3}$$

일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

[4점][2021년 4월 13]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

28. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_1^x f(t)\,dt$$

를 만족시킨다. $f(1)=\int_0^1 f(t)\,dt$일 때, $a+f(3)$의 값은?
(단, a는 상수이다.)

[4점][2021년 9월 11]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

29. 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$F(x)=(x+2)f(x)-x^3+12x$$

를 만족시킨다. $F(0)=30$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

[3점][2022년 4월 공통18]

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$\int_0^1 f'(x)dx=\int_0^2 f'(x)dx=0$$

을 만족시킬 때, $f'(1)$의 값은?

[4점][2022년 7월 공통09]

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

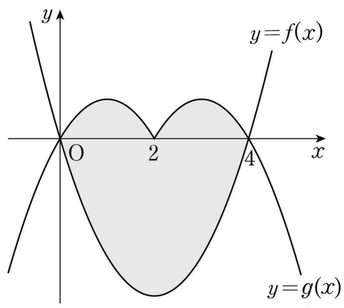
31. 두 함수

$$f(x)=x^2-4x,\ g(x)=\begin{cases}-x^2+2x & (x<2)\\ -x^2+6x-8 & (x\ge 2)\end{cases}$$

의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는?

[3점][2022년 10월 공통07]

① $\frac{40}{3}$ ② 14 ③ $\frac{44}{3}$ ④ $\frac{46}{3}$ ⑤ 16



활용문제

32. 이차함수 $f(x)$는 $f(0)=-1$이고,

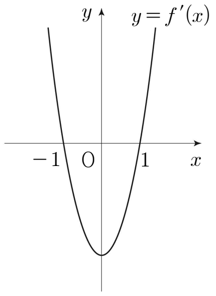
$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_{-1}^0 f(x)\,dx$$

를 만족시킨다. $f(2)$의 값은?

[4점][2012학년도 수능 나19]

① 11 ② 10 ③ 9 ④ 8 ⑤ 7

33. 삼차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$f'(-1)=f'(1)=0$이고 함수 $f(x)$의 극댓값이 4, 극솟값이 0일 때, $f(3)$의 값은?

[4점][2012년 4월 가13]

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

34. 정수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+10$ 이 다음 두 조건을 모두 만족시킨다.

(가) 모든 실수 α에 대하여 $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$

(나) $-6<f'(1)<-2$

이때, 함수 $y=f(x)$의 극솟값은?

[4점][2012년 7월 나19]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

35. 실수 전체에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 $f(x)=f(x+4)$를 만족하고

$$f(x)=\begin{cases} -4x+2 & (0 \le x < 2) \\ x^2-2x+a & (2 \le x \le 4) \end{cases}$$

일 때, $\int_{9}^{11} f(x)dx$의 값은?

[3점][2012년 7월 나10]

① -8 ② $-\frac{26}{3}$ ③ $-\frac{28}{3}$ ④ -10 ⑤ $-\frac{32}{3}$

36. 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to1}\frac{\int_{1}^{x} f(t)dt-f(x)}{x^2-1}=2$를 만족할 때, $f'(1)$의 값은?

[4점][2012년 7월 나13]

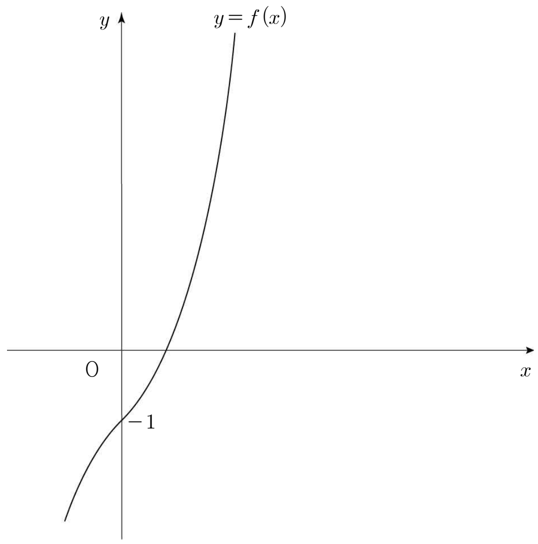
① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

37. 함수 $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2-6x)\right\}dx$에 대하여 $f(x)$의 최솟값이 8일 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

[4점][2012년 7월 나25]

38. 함수 $f(x)=x^3+x-1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_1^9 g(x)dx$ 의 값은?

[4점][2012년 7월 나21]



① $\frac{47}{4}$ ② $\frac{49}{4}$ ③ $\frac{51}{4}$ ④ $\frac{53}{4}$ ⑤ $\frac{55}{4}$

39. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx,\quad f(x)g(x)=-2x^4+8x^3$$

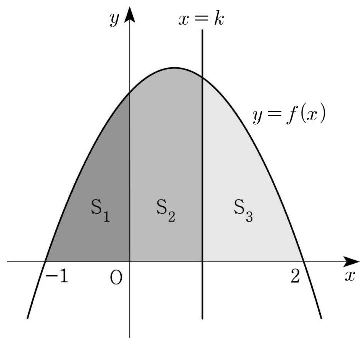
을 만족시킬 때, $g(1)$의 값은?

[4점][2012년 9월 나18]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

40. 함수 $f(x)=-x^2+x+2$에 대하여 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분을 y축과 직선 $x=k$ $(0<k<2)$로 나눈 세 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자. S_1, S_2, S_3이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, S_2의 값은?

[4점][2012년 10월 나19]



① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

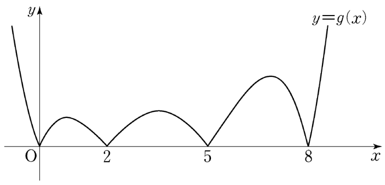
41. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 $f(3)=0$이고, $\int_0^{2013} f(x)dx=\int_3^{2013} f(x)dx$를 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 S일 때, $30S$의 값을 구하시오.

[4점][2013학년도 수능 나28]

42. 삼차함수 $f(x)$는 $f(0)>0$을 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\left|\int_0^x f(t)\,dt\right|$$

라 할 때, 함수 $g(x)$의 그래프가 그림과 같다.



<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2013학년도 수능 가19]

[보 기]

ㄱ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 3개의 실근을 갖는다.

ㄴ. $f'(0)<0$

ㄷ. $\int_m^{m+2} f(x)\,dx>0$을 만족시키는 자연수 m의 개수는 3이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

43. 삼차함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(x)=3x^2-4x-4$

(나) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $(2,\ 0)$을 지난다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

[4점][2013년 7월 나17]

① $\frac{56}{3}$ ② $\frac{58}{3}$ ③ 20 ④ $\frac{62}{3}$ ⑤ $\frac{64}{3}$

44. 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=\int_0^x (t-a)(t-b)\,dt$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은?

[4점][2014년 7월 나19]

(가) 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극값을 갖는다.

(나) $f(a)-f(b)=\frac{1}{6}$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

45. 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-x)=f(x)$

(나) $f(x+2)=f(x)$

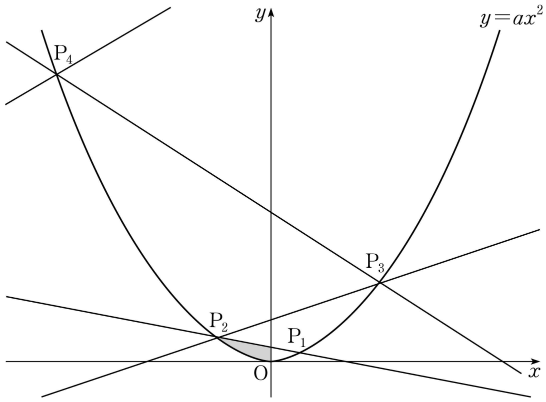
(다) $\int_{-1}^{1}(2x+3)f(x)\,dx=15$

$\int_{-6}^{10} f(x)\,dx$ 의 값을 구하시오.

[4점][2014년 7월 나29]

46. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=ax^2\,(a>0)$ 위의 점 P_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 P_1의 좌표는 $(x_1,\ ax_1^2)$이다.
(나) 점 P_{n+1}은 점 $P_n(x_n,\ ax_n^2)$을 지나는 직선 $y=-ax_nx+2ax_n^2$과 곡선 $y=ax^2$이 만나는 점 중에서 점 P_n이 아닌 점이다.



점 P_1의 좌표가 $\left(1,\ \frac{1}{3}\right)$일 때, 곡선 $y=ax^2$과 직선 P_1P_2로 둘러싸인 부분 중에서 제2사분면에 있는 부분의 넓이는?

[4점][2014년 10월 나16]

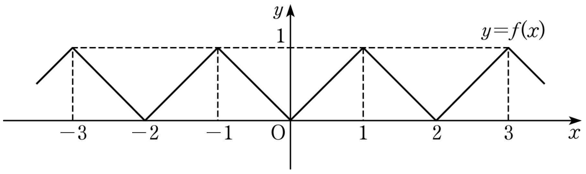
① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{10}{9}$ ③ $\frac{8}{9}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{4}{9}$

47. 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x+2)=f(x)$
(나) $f(x)=|x|\ (-1\le x<1)$

함수 $g(x)=\int_{-2}^{x}f(t)dt$라 할 때,
실수 a에 대하여 $g(a+4)-g(a)$의 값은?

[4점][2014년 10월 나19]



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

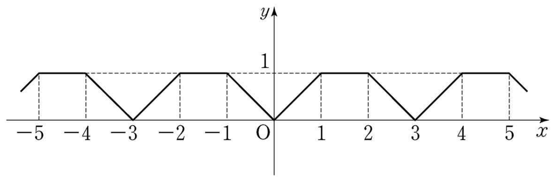
48. 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$를 만족시키고,

$$f(x)=\begin{cases} x & (0\le x<1) \\ 1 & (1\le x<2) \\ -x+3 & (2\le x<3) \end{cases}$$

이다. $\int_{-a}^{a}f(x)dx=13$일 때, 상수 a의 값은?

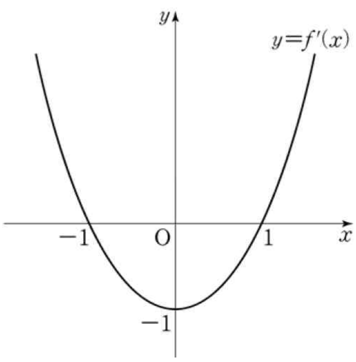
[4점][2015학년도 수능 나20]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18



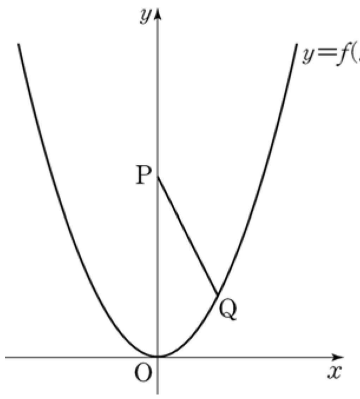
49. 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=x^2-1$이고, $f(0)=0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

[4점][2015년 9월 나14]



① $\frac{9}{8}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{11}{8}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{13}{8}$

50. 자연수 n에 대하여 좌표가 $(0,\ 2n+1)$인 점을 P라 하고, 함수 $f(x)=nx^2$의 그래프 위의 점 중 y좌표가 1이고 제1사분면에 있는 점을 Q라 하자.



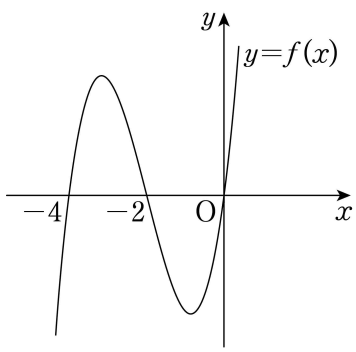
$n=1$일 때, 선분 PQ와 곡선 $y=f(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

[3점][2016학년도 수능 나13]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{19}{12}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

51. 함수 $f(x)=x(x+2)(x+4)$에 대하여, 함수 $g(x)=\int_2^x f(t)\,dt$ 는 $x=\alpha$에서 극댓값을 갖는다. $g(\alpha)$의 값은?

[4점][2015년 10월 나14]



① -28 ② -29 ③ -30 ④ -31 ⑤ -32

52. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x f(t)dt = xf(x)-3x^4+2x^2$$

을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은?

[4점][2015년 7월 나15]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

53. 이차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_0^2 \lvert f(x)\rvert dx = -\int_0^2 f(x)dx = 4$
(나) $\int_2^3 \lvert f(x)\rvert dx = \int_2^3 f(x)dx$

$f(5)$의 값을 구하시오.

[4점][2016학년도 수능 나29]

54. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(-x)=-f(x),\quad g(-x)=g(x)$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여

$$\int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)dx=10$$

일 때, $h(3)$의 값은?

[4점][2016학년도 수능 나20]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

55. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$f(x)=\int x\,g(x)dx\ ,\quad \frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=4x^3+2x$$

를 만족시킬 때, $g(1)$의 값은?

[4점][2016년 7월 나20]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

56. 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} 2x+2 & (x<0) \\ -x^2+2x+2 & (x \ge 0) \end{cases}$$

라 하자.

양의 실수 a에 대하여 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$의 최댓값은?

[4점][2017년 10월 나16]

① 5 ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{17}{3}$ ④ 6 ⑤ $\frac{19}{3}$

57. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'\left(\frac{11}{3}\right)<0$
> (나) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 35를 갖는다.
> (다) 방정식 $f(x)=f(4)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$f(0)$의 값은?

[4점][2017년 10월 나20]

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

58. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(2)=f(5)$
> (나) 방정식 $f(x)-p=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되게 하는 실수 p의 최댓값은 $f(2)$이다.

$\int_0^2 f(x)dx$의 값은?

[4점][2018년 7월 나17]

① 25 ② 28 ③ 31 ④ 34 ⑤ 37

59. 실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x-3)+4$이다.

(나) $\int_0^6 f(x)\,dx=0$

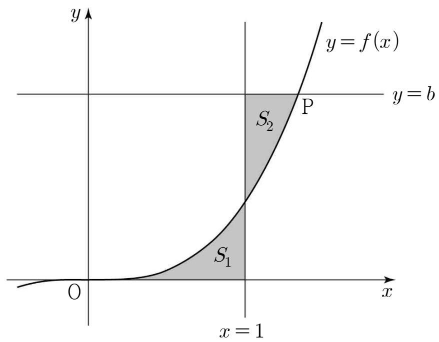
함수 $f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=6$, $x=9$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

[4점][2019학년도 수능 나17]

① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

60. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(a,\,b)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=1$, $y=b$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. $S_1=S_2$일 때, $30a$의 값을 구하시오. (단, $a>1$)

[4점][2019년 7월 나27]



61. 두 함수

$$f(x)=\frac{1}{3}x(4-x),\qquad g(x)=|x-1|-1$$

의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $4S$의 값을 구하시오.

[4점][2020학년도 수능 나26]

62. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x f(t)\,dt=\frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$$이다.

(나) $\int_0^2 f(x)\,dx=5\int_{-1}^1 xf(x)\,dx$

$f(0)=1$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오.

[4점][2020학년도 수능 나28]

63. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt+f(x)$$

라 할 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 갖는다. (나) 함수 $g(x)$의 도함수 $y=g'(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

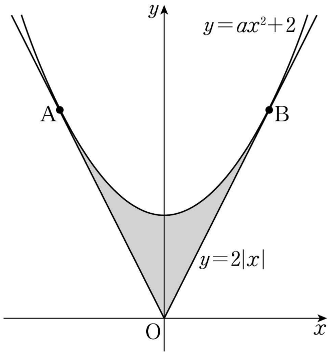
$f(2)$의 값은?

[4점][2020년 3월 나20]

① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1

64. 그림과 같이 두 함수 $y=ax^2+2$와 $y=2|x|$의 그래프가 두 점 A, B에서 각각 접한다. 두 함수 $y=ax^2+2$와 $y=2|x|$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, a는 상수이다.)

[3점][2020년 3월 가10]



① $\frac{13}{6}$　② $\frac{7}{3}$　③ $\frac{5}{2}$　④ $\frac{8}{3}$　⑤ $\frac{17}{6}$

65. 첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 P_1의 좌표는 $(1,\ 1)$이다. (나) 점 P_n의 x좌표는 a_n이다. (다) 직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 기울기는 $\frac{1}{2}a_{n+1}$이다.

$x\geq 1$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 모든 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[a_n,\ a_{n+1}]$에서 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$과 일치할 때, $\int_1^{11} f(x)dx$의 값은?

[4점][2020년 7월 나19]

① 140　② 145　③ 150　④ 155　⑤ 160

66. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$, $f(x+3)=f(x)$이고 $\int_{-1}^{2}\{f(x)+x^2-1\}^2dx$의 값이 최소가 되도록 하는 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{-1}^{26}f(x)dx$의 값을 구하시오.

[4점][2020년 7월 나28]

67. 실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x) \geq g(x)$
> (나) $f(x)+g(x)=x^2+3x$
> (다) $f(x)g(x)=(x^2+1)(3x-1)$

$\int_0^2 f(x)dx$의 값은?

[4점][2020년 9월 나20]

① $\frac{23}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{29}{6}$ ④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$

68. 최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt-xf(x)$$

라 하자. 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \leq g(3)$이고 함수 $g(x)$는 오직 1개의 극값만 가진다. $\int_0^1 g'(x)dx$의 값은?

[4점][2020년 10월 나20]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

69. 실수 $a(a>1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x+1)(x-1)(x-a)$$

라 하자. 함수

$$g(x)=x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2 f(t)dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 최댓값은?

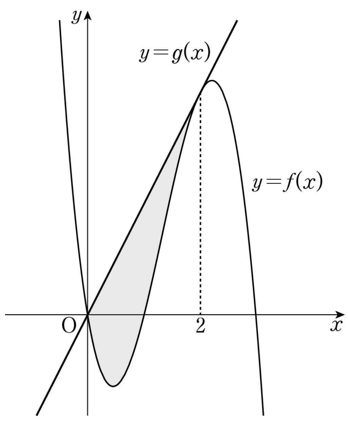
[4점][2021학년도 수능 나20]

① $\frac{9\sqrt{2}}{8}$ ② $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

70. 최고차항의 계수가 -3인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2, f(2))$에서의 접선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$와 원점에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

[4점][2021년 3월 09]

① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ 4 ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$



71. 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(0)=0,\ f(1)=1,\ \int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{6}$$

을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{2} g(x)\,dx$의 값은?

[4점][2021년 6월 11]

(가) $g(x)=\begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1<x<0) \\ f(x) & (0 \le x \le 1) \end{cases}$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

72. 실수 a와 함수 $f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4\,dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오.

[4점][2021년 6월 20]

73. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$에 대하여 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 세 실근 $\alpha,\ 0,\ \beta(\alpha<0<\beta)$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=9$는 서로 다른 세 실근을 갖는다.
(나) $f(\alpha)=-16$

함수 $g(x)=\lvert f'(x)\rvert-f'(x)$에 대하여 $\int_0^{10} g(x)\,dx$의 값은?

[4점][2021년 7월 15]

① 48 ② 50 ③ 52 ④ 54 ⑤ 56

74. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=f'(2)=0$인 삼차함수 $f(x)$와 양수 p에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x)-f(0) & (x \le 0) \\ f(x+p)-f(p) & (x>0) \end{cases}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2021년 9월 14]

보기
ㄱ. $p=1$일 때, $g'(1)=0$이다.
ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p의 개수는 1이다.
ㄷ. $p \ge 2$일 때, $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx \ge 0$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

75. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(1-x)=-f(1+x)$를 만족시킨다. 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=-6x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 할 때, $4S$의 값을 구하시오.

[4점][2021년 10월 20]

76. 최고차항의 계수가 4이고 $f(0)=f'(0)=0$을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt+5 & (x<c) \\ \left|\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt-\frac{13}{3}\right| & (x \geq c) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 c의 개수가 1일 때, $g(1)$의 최댓값은?

[4점][2021년 10월 15]

① 2 ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ 4 ⑤ $\frac{14}{3}$

77. 곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분할 때, 상수 k의 값은?

[3점][2022학년도 수능 08]

① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

78. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)=x$이다. (나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0,\ \infty)$에서 $f(x+1)-xf(x)=ax+b$이다.

$60\times\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$의 값을 구하시오.

[4점][2022학년도 수능 20]

79. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_1^x (x-t)f(t)\,dt=3$$

을 만족시킬 때, $\int_1^2 (4x+1)f(x)\,dx$의 값은?

[4점][2022년 4월 공통13]

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

80. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} -\int_0^x f(t)\,dt & (x<0) \\ \int_0^x f(t)\,dt & (x\ge 0) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2022년 6월 공통14]

| 보기 |

ㄱ. $f(0)=0$
ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

81. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\int_x^{x+1}|f(t)|\,dt$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다. $f(0)$의 값을 구하시오.

[4점][2022년 6월 공통20]

82. 최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2 f(t)dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.
(나) 방정식 $g'(x)=0$의 모든 실근은 0, 3이다.

$\int_0^3 |f(x)|\,dx$의 값을 구하시오.

[4점][2022년 7월 공통20]

83. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\int_{t}^{t+1} f(x)dx-\int_{0}^{1}|f(x)|dx$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2022년 9월 공통14]

<보 기>

ㄱ. $g(0)=0$이면 $g(-1)<0$이다.
ㄴ. $g(-1)>0$이면 $f(k)=0$을 만족시키는 $k<-1$인 실수 k가 존재한다.
ㄷ. $g(-1)>1$이면 $g(0)<-1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

84. 상수 $k\,(k<0)$에 대하여 두 함수

$$f(x)=x^3+x^2-x,\quad g(x)=4|x|+k$$

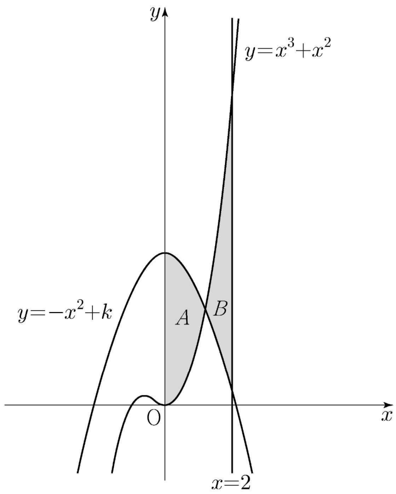
의 그래프가 만나는 점의 개수가 2일 때, 두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하자. $30\times S$의 값을 구하시오.

[4점][2022년 9월 공통20]

85. 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=B$일 때, 상수 k의 값은? (단, $4<k<5$)

[4점][2023학년도 수능 공통10]

① $\frac{25}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{29}{6}$



86. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\int_{t}^{x} f(s)\,ds=0$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2022년 10월 공통14]

| 보기 |

ㄱ. $f(x)=x^2(x-1)$일 때, $g(1)=1$이다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이면 $g(a)=3$인 실수 a가 존재한다.
ㄷ. $\lim\limits_{t\to b} g(t)+g(b)=6$을 만족시키는 실수 b의 값이 0과 3뿐이면 $f(4)=12$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

87. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$n-1 \le x < n$일 때, $\lvert f(x) \rvert = \lvert 6(x-n+1)(x-n) \rvert$이다. (단, n은 자연수이다.)

열린구간 $(0,\ 4)$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt-\int_x^4 f(t)\,dt$$

가 $x=2$에서 최솟값 0을 가질 때, $\int_{\frac{1}{2}}^4 f(x)\,dx$의 값은?

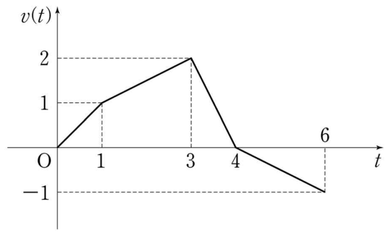
[4점][2023학년도 수능 공통12]

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

속도, 거리

88. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (0 \le t \le 6)$에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 그림과 같다. 점 P가 시각 $t=0$에서 시각 $t=6$까지 움직인 거리는?

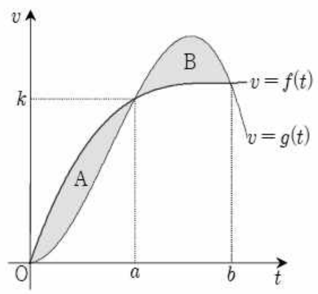
[3점][2012년 5월 나10]



① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{11}{2}$

89. 원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도 v가 각각 $f(t)$, $g(t)$이다. 그림과 같이 두 곡선 $v=f(t)$, $v=g(t)$로 둘러싸인 두 부분 A, B의 넓이가 각각 S_1, S_2일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4점][2011년 대전10월 나17]



<보 기>

ㄱ. $S_1=S_2$이면 두 점 P, Q는 $t=b$일 때 만난다.

ㄴ. $S_1>S_2$이면 $\int_0^b f(t)dt>\int_0^b g(t)dt$

ㄷ. $S_1<S_2$이면 $\int_0^c \{f(t)-g(t)\}dt=0$을 만족시키는 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

90. 원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(0 \le t \le 8)$에서의 속도가 각각 $2t^2-8t$, t^3-10t^2+24t 이다. 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값을 구하시오.

[4점][2013년 10월 나28]

91. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=-2t+4$$

이다. $t=0$부터 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는?

[3점][2017학년도 수능 나12]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

92. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=4-at$$

이다. $t=2$에서 점 P의 운동방향이 바뀌었을 때, $t=0$부터 $t=6$까지 점 P가 움직인 거리는? (단, a는 상수이다)

[3점][2017년 대구8월 나12]

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

93. 원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t \ge 0)$에서의 속도가 각각 $3t^2+6t-6$, $10t-6$이다. 두 점 P, Q가 출발 후 $t=a$에서 다시 만날 때, 상수 a의 값은?

[4점][2018년 7월 나14]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

94. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t \ge 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2+t,\ \ v_2(t)=2t^2+3t$$

이다. 출발한 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리를 a라 할 때, $9a$의 값을 구하시오.

[4점][2018년 9월 나28]

95. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \ge 0)$에서의 위치 x가

$$x=t^4+at^3 \ \ (a\text{는 상수})$$

이다. $t=2$에서 점 P의 속도가 0일 때, $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는?

[3점][2018년 10월 나12]

① $\frac{16}{3}$ ② $\frac{20}{3}$ ③ 8 ④ $\frac{28}{3}$ ⑤ $\frac{32}{3}$

96. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t \geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = -3t^2 + 3t + 6$$

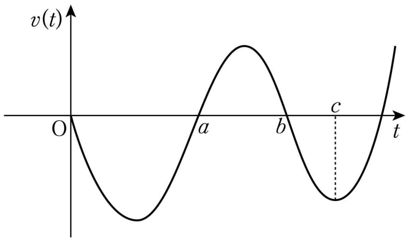
이다. 점 P가 출발한 후 운동 방향이 바뀌는 시각까지 움직인 거리를 구하시오.

[4점][2018년 경남10월 나26]

97. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$이다. 점 P가 $t = 0$일 때 원점을 출발하여 처음으로 운동 방향을 바꾼 순간의 위치를 A라 하자. 점 P가 A에서 방향을 바꾼 순간부터 다시 A로 돌아올 때까지 움직인 거리를 구하시오.

[4점][2020년 3월 나27]

98. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ \ (t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 그림과 같다.



점 P가 출발한 후 처음으로 운동 방향을 바꿀 때의 위치는 -8이고 점 P의 시각 $t = c$에서의 위치는 -6이다.

$\int_0^b v(t)dt = \int_b^c v(t)dt$일 때, 점 P가 $t = a$부터 $t = b$까지 움직인 거리는?

[4점][2020년 3월 가15]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

99. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = -4t + 5$$

이다. 시각 $t = 3$에서 점 P의 위치가 11일 때, 시각 $t = 0$에서 점 P의 위치는?

[4점][2020년 6월 나15]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

100. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = t^2 - at\ \ (a > 0)$$

이다. 점 P가 시각 $t = 0$일 때부터 움직이는 방향이 바뀔 때까지 움직인 거리가 $\frac{9}{2}$이다. 상수 a의 값은?

[3점][2020년 9월 나13]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

101. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 2t - 6$$

이다. 점 P가 시각 $t=3$에서 $t=k(k>3)$까지 움직인 거리가 25일 때, 상수 k의 값은?

[4점][2021학년도 수능 나14]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

102. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 4t - 10$$

이다. 점 P의 시각 $t=1$에서의 위치와 점 P의 시각 $t=k$ $(k>1)$에서의 위치가 서로 같을 때, 상수 k의 값은?

[4점][2021년 4월 10]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

103. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 3t^2 - 4t + k$$

이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 0이고, 시각 $t=1$에서 점 P의 위치는 -3이다. 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

[3점][2021년 6월 19]

104. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 3t^2 - 6t$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2021년 7월 14]

| 보기 |

ㄱ. 시각 $t=2$에서 점 P의 움직이는 방향이 바뀐다.
ㄴ. 점 P가 출발한 후 움직이는 방향이 바뀔 때 점 P의 위치는 -4이다.
ㄷ. 점 P가 시각 $t=0$일 때부터 가속도가 12가 될 때까지 움직인 거리는 8이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

105. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = -4t^3 + 12t^2$$

이다. 시각 $t=k$에서 점 P의 가속도가 12일 때, 시각 $t=3k$에서 $t=4k$까지 점 P가 움직인 거리는? (단, k는 상수이다.)

[4점][2021년 9월 09]

① 23 ② 25 ③ 27 ④ 29 ⑤ 31

106. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가 두 상수 a, b에 대하여

$$x(t)=t(t-1)(at+b)\ \ (a\neq 0)$$

이다. 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $\int_0^1 |v(t)|\,dt=2$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2022학년도 수능 14]

| 보기 |

ㄱ. $\int_0^1 v(t)\,dt=0$

ㄴ. $|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

ㄷ. $0\le t\le 1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)|<1$이면 $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

107. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=12-4t$일 때, 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

[3점][2021년 10월 17]

108. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2+at$$

이다. 시각 $t=0$에서의 점 P의 위치와 시각 $t=6$에서의 점 P의 위치가 서로 같을 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 움직인 거리는? (단, a는 상수이다.)

[4점][2022년 3월 공통09]

① 64　② 66　③ 68　④ 70　⑤ 72

109. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3(t-2)(t-a)\ \ (a>2\text{인 상수})$$

이다. 점 P의 시각 $t=0$에서의 위치는 0이고, $t>0$에서 점 P의 위치가 0이 되는 순간은 한 번뿐이다. $v(8)$의 값은?

[4점][2022년 4월 공통10]

① 27　② 36　③ 45　④ 54　⑤ 63

110. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t\ge 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=2-t,\ \ v_2(t)=3t$$

이다. 출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는?

[4점][2022년 6월 공통11]

① 16　② 18　③ 20　④ 22　⑤ 24

111. 수직선 위의 점 A(6)과 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 이 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각 $t(t\geq 0)$에서의 점 P의 속도 $v(t)$를

$$v(t)=3t^2+at \ \ (a>0)$$

이라 하자. 시각 $t=2$에서 점 P와 점 A사이의 거리가 10일 때, 상수 a의 값은?

[4점][2022년 9월 공통10]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

112. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=4t^3-48t$$

이다. 시각 $t=k(k>0)$에서 점 P의 가속도가 0일 때,
시각 $t=0$에서 $t=k$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.
(단, k는 상수이다.)

[3점][2022년 10월 공통19]

113. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$와 가속도 $a(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0\leq t\leq 2$일 때, $v(t)=2t^3-8t$이다.
(나) $t\geq 2$일 때, $a(t)=6t+4$이다.

시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

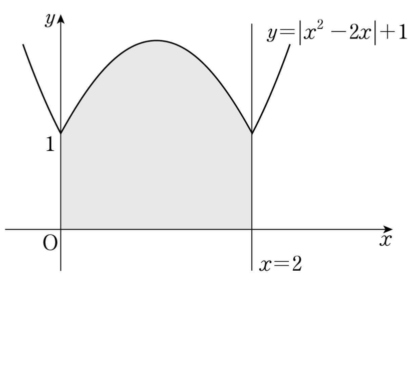
[4점][2023학년도 수능 공통20]

23년도 문제

114. 함수 $y=|x^2-2x|+1$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=2$로
둘러싸인 부분의 넓이는?

[3점][2023년 3월 공통07]

① $\frac{8}{3}$ ② 3 ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{11}{3}$ ⑤ 4



115. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2-4x+1$이고 $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=1$일 때, $f(2)$의 값은?

[4점][2023년 4월 공통09]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

116. 두 곡선 $y=3x^3-7x^2$과 $y=-x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

[3점][2023년 9월 공통19]

117. 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)-f(x)=3x^4-3x$$

를 만족시킬 때, $\int_{-2}^{2}f(x)dx$의 값은?

[3점][2024학년도 수능 공통08]

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

118. 세 양수 a, b, k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} ax & (x<k) \\ -x^2+4bx-3b^2 & (x\geq k) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2023년 3월 공통14]

< 보 기 >

ㄱ. $a=1$이면 $f'(k)=1$이다.
ㄴ. $k=3$이면 $a=-6+4\sqrt{3}$이다.
ㄷ. $f(k)=f'(k)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

119. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=1$인 삼차함수 $f(x)$와 양의 실수 p에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

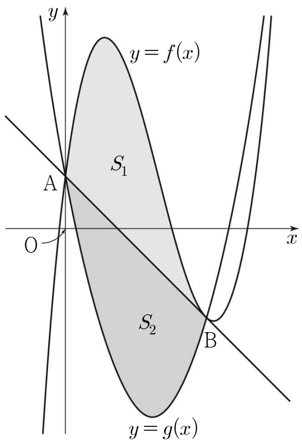
(가) $g'(0)=0$
(나) $g(x)=\begin{cases} f(x-p)-f(-p) & (x<0) \\ f(x+p)-f(p) & (x\geq 0) \end{cases}$

$\int_0^p g(x)\,dx=20$일 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

[4점][2023년 3월 공통20]

120. 그림과 같이 삼차함수 $f(x)=x^3-6x^2+8x+1$의 그래프와 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, 점 $\mathrm{B}(k,\ f(k))$에서 만나고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B에서의 접선이 점 A를 지난다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=g(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. $S_1=S_2$일 때, $\int_0^k g(x)dx$의 값은? (단, k는 양수이다.)

[4점][2023년 4월 공통12]



① $-\frac{17}{2}$ ② $-\frac{33}{4}$ ③ -8 ④ $-\frac{31}{4}$ ⑤ $-\frac{15}{2}$

121. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$의 값을 구하시오.

[4점][2023년 6월 공통20]

$x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq g(4)$이고 $\lvert g(x)\rvert \geq \lvert g(3)\rvert$이다.

122. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=kx(x-2)(x-3)$$

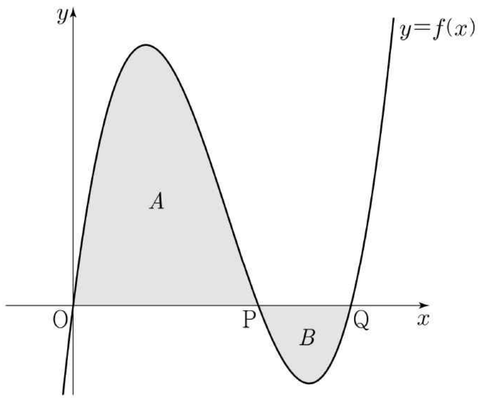
이다. 곡선 $y=f(x)$와 x축이 원점 O와 두 점 P, Q$(\overline{\mathrm{OP}}<\overline{\mathrm{OQ}})$에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 선분 OP로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 영역을 B라 하자.

$$(A\text{의 넓이})-(B\text{의 넓이})=3$$

일 때, k의 값은?

[4점][2023년 6월 공통10]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$



123. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(1+x)+f(1-x)=0$이다.
(나) $\int_{-1}^{3} f'(x)dx=12$

$f(4)$의 값은?

[4점][2023년 7월 공통11]

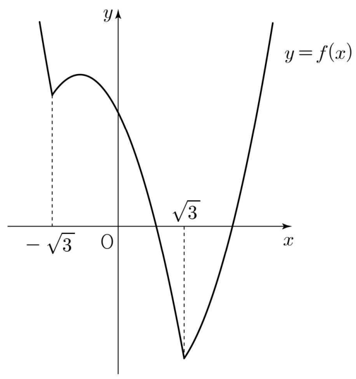
① 24 ② 28 ③ 32 ④ 36 ⑤ 40

124. 실수 t $\left(\sqrt{3}<t<\frac{13}{4}\right)$에 대하여 두 함수

$$f(x)=|x^2-3|-2x,\ g(x)=-x+t$$

의 그래프가 만나는 서로 다른 네 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 x_1, x_2, x_3, x_4라 하자. $x_4-x_1=5$일 때, 닫힌구간 $[x_3, x_4]$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 $p-q\sqrt{3}$이다. $p\times q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.)

[4점][2023년 7월 공통20]



125. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 할 때, 이 함수들은 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_1^x f(t)dt=xf(x)-2x^2-1$

(나) $f(x)G(x)+F(x)g(x)=8x^3+3x^2+1$

$\int_1^3 g(x)dx$의 값을 구하시오.

[4점][2023년 9월 공통22]

126. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(2)=0$인 이차함수 $f(x)$가 모든 자연수 n에 대하여

$$\int_4^n f(x)dx\geq 0$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2023년 10월 공통14]

< 보 기 >

ㄱ. $f(2)<0$

ㄴ. $\int_4^3 f(x)dx>\int_4^2 f(x)dx$

ㄷ. $6\leq\int_4^6 f(x)dx\leq 14$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

127. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$2x^2f(x)=3\int_0^x (x-t)\{f(x)+f(t)\}dt$$

를 만족시킨다. $f'(2)=4$일 때, $f(6)$의 값을 구하시오.

[4점][2023년 10월 공통20]

128. 함수 $f(x)=\frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$와 실수 t $(0<t<6)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<t) \\ -(x-t)+f(t) & (x \geq t) \end{cases}$$

이다. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최댓값은?

[4점][2024학년도 수능 공통12]

① $\frac{125}{4}$ ② $\frac{127}{4}$ ③ $\frac{129}{4}$ ④ $\frac{131}{4}$ ⑤ $\frac{133}{4}$

129. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2-15t+k,\ \ v_2(t)=-3t^2+9t$$

이다. 점 P와 점 Q가 출발한 후 한 번만 만날 때, 양수 k의 값을 구하시오.

[3점][2023년 3월 공통19]

130. 실수 $a(a \geq 0)$에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$를

$$v(t)=-t(t-1)(t-a)(t-2a)$$

라 하자. 점 P가 시각 $t=0$일 때 출발한 후 운동 방향을 한 번만 바꾸도록 하는 a에 대하여, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은?

[4점][2023년 6월 공통14]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{7}{30}$ ③ $\frac{4}{15}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

131. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=t^2-4t+3$$

이다. 점 P가 시각 $t=1$, $t=a$ $(a>1)$에서 운동 방향을 바꿀 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 움직인 거리는?

[3점][2023년 7월 공통08]

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

132. 두 점 P와 Q는 시각 $t=0$일 때 각각 점 A(1)과 점 B(8)에서 출발하여 수직선 위를 움직인다. 두 점 P, Q의 시각 $t\ (t \ge 0)$에서의 속도는 각각

$$v_1(t)=3t^2+4t-7,\ v_2(t)=2t+4$$

이다. 출발한 시각부터 두 점 P, Q 사이의 거리가 처음으로 4가 될 때까지 점 P가 움직인 거리는?

[4점][2023년 9월 공통11]

① 10 ② 14 ③ 19 ④ 25 ⑤ 32

133. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \ge 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=12t-12,\ v_2(t)=3t^2+2t-12$$

이다. 시각 $t=k(k>0)$에서 두 점 P, Q의 위치가 같을 때, 시각 $t=0$에서 $t=k$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

[3점][2023년 10월 공통19]

134. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\ (t \ge 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=t^2-6t+5,\ v_2(t)=2t-7$$

이다. 시각 t에서의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$는 구간 $[0, a]$에서 증가하고, 구간 $[a, b]$에서 감소하고, 구간 $[b, \infty)$에서 증가한다. 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 Q가 움직인 거리는? (단, $0<a<b$)

[4점][2024학년도 수능 공통10]

① $\frac{15}{2}$ ② $\frac{17}{2}$ ③ $\frac{19}{2}$ ④ $\frac{21}{2}$ ⑤ $\frac{23}{2}$

고난도

135. 두 상수 a, $b(b\neq 1)$과 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 도함수 $g'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
> (나) $|x|<2$일 때, $g(x)=\int_{0}^{x}(-t+a)dt$이고
> $|x|\geq 2$일 때, $|g'(x)|=f(x)$이다.
> (다) 함수 $g(x)$는 $x=1$, $x=b$에서 극값을 갖는다.

$g(k)=0$을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합이 $p+q\sqrt{3}$일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.)

[4점][2023년 4월 공통22]

고난도

136. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)-x-f(t)+t$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 두 함수 $f(x)$와 $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{t\to -1}\{h(t)-h(-1)\}=\lim_{t\to 1}\{h(t)-h(1)\}=2$
> (나) $\int_{0}^{\alpha}f(x)dx=\int_{0}^{\alpha}|f(x)|dx$를 만족시키는 실수 α의 최솟값은 -1이다.
> (다) 모든 실수 x에 대하여 $\frac{d}{dx}\int_{0}^{x}\{f(u)-ku\}du\geq 0$이 되도록 하는 실수 k의 최댓값은 $f'(\sqrt{2})$이다.

$f(6)$의 값을 구하시오.

[4점][2023년 7월 공통22]

[해설] 수2-적분

1) 2

삼차함수 $y=4x(x-1)(x-2)$ 가 $[0,\ 1]$ 에서 x 축의 위쪽, $[1,\ 2]$ 에서 x 축 아래쪽에 둘러싸인 부분이 존재한다. 따라서

$$\int_0^1 (4x^3-12x^2+8x)\,dx-\int_1^2 (4x^3-12x^2+8x)\,dx=2$$

2) 35

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f(x)=x^3-12x+C$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

극솟값은 $f(2)=8-24+C=3 \quad \therefore C=19$

극댓값은 $f(-2)=35$

3) ②

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)-\{f(2-h)-f(2)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{\{f(2-h)-f(2)\}}{-h}\times(-1)=2f'(2)$$

$f'(x)=x^2+2x$ 이므로

$2f'(2)=2(4+4)=16$

4) 4

[출제의도] 정적분의 성질 이해하기

$\int_0^2 f(t)dt=a$라 하면, $f(x)=3x^2+x+a$이다.

$\int_0^2 (3t^2+t+a)dt=a$

$\therefore a=-10$

$f(x)=3x^2+x-10$

$\therefore f(2)=4$

5) 2

$F(x)=\int_2^x (t^2+3t-2)\,dt$ 라 하면 $F'(x)=x^2+3x-2$

$$(\text{준식})=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}\cdot\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$$

$$=\frac{1}{4}F'(2)=\frac{1}{4}(2^2+3\cdot2-2)=2$$

6) ④

$$\int_{-1}^1 \{f(x)\}^2dx=\int_{-1}^1 (x+1)^2dx$$

$$=\int_{-1}^1 (x^2+2x+1)\,dx=2\int_0^1 (x^2+1)\,dx$$

$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{8}{3}$$

$$k\left(\int_{-1}^1 f(x)\,dx\right)^2=k\left(\int_{-1}^1 (x+1)\,dx\right)^2$$

$$=k\left(2\int_0^1 1\,dx\right)^2=4k[x]_0^1=4k$$

주어진 등식에서 $\frac{8}{3}=4k \quad \therefore k=\frac{2}{3}$

7) ①

$\int_0^1 tf(t)dt=k$라 하면, $f(x)=x^2-2x+k$

$\int_0^1 t(t^2-2t+k)\,dt=k$를 계산하면

$k=-\frac{5}{6}$

$f(x)=x^2-2x-\frac{5}{6}$

$\therefore f(3)=\frac{13}{6}$

8) 40

$\int_0^1 f(t)dt=1-2-2\int_0^1 f(t)dt$

$\int_0^1 f(t)dt=-\frac{1}{3}$

$\int_0^x f(t)dt=x^3-2x^2+\frac{2}{3}x$

$f(x)=3x^2-4x+\frac{2}{3}$

$\therefore 60a=40$

9) 132

정적분의 성질에 의해 $x=12$를 대입하면

$\int_{12}^{12} f(t)dt=0$ 이므로 $-12^3+12^2+\int_0^1 12f(t)dt=0$

따라서 $\int_0^1 f(x)dx=132$

[다른 풀이]

$\int_{12}^x f(t)dt=-x^3+x^2+\int_0^1 xf(t)dt \quad =-x^3+x^2+x\int_0^1 f(t)dt$

$\int_0^1 f(t)dt=c$라 하고 위 등식의 양변을 x에 관하여 미분하면

$f(x)=-3x^2+2x+c$

$\int_{12}^x f(t)dt=-x^3+x^2+\int_0^1 xf(t)dt$에 대입하면

$\int_{12}^x (-3t^2+2t+c)\,dt=\left[-t^3+t^2+ct\right]_{12}^x$

$=-x^3+x^2+cx-12(-132+c)=-x^3+x^2+cx$

즉, $-132+c=0$

따라서 $\int_0^1 f(x)dx=132$

10) 12

$f'(x)=6x^2+4$ 이므로

$f(x)=\int (6x^2+4)dx=2x^3+4x+C$

이때, $f(0)=6$ 이므로 $C=6$

$\therefore f(x)=2x^3+4x+6$

$\therefore f(1)=2+4+6=12$

11) ④

[출제의도] 적분의 성질을 이해하고 넓이를 구한다.

$x^3-2x^2+k=k$ 에서

$x^3-2x^2=0$, $x=0$ 또는 2

따라서 $\int_0^2 |x^3-2x^2+k-k|\,dx=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2=\frac{4}{3}$

12) 17

[출제의도] 적분과 미분의 관계 이해하기

$f'(x)=3x^2+5$

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$

따라서 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=17$

13) ②

[출제의도] 미분과 적분사이의 관계를 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

$xf(x)=\int_{-1}^{x}\{f(t)+2t^2+t\}\,dt$ 에서 $f(-1)=0$

주어진 식을 양변을 x 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=f(x)+2x^2+x$

$f'(x)=2x+1$

따라서 $f(x)=\int f'(x)dx=x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(-1)=0$ 이므로 $C=0$

$f(x)=x^2+x$ 이므로 $f(3)=12$

14) ③

[출제의도] 이해능력-다항함수의 적분법

$f'(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ 이므로

$\frac{|f'(x)|}{x-1}=\frac{|(x-1)(x-2)|}{x-1}$

$1<x<2$ 일 때 $(x-1)(x-2)<0$ 이므로

$\frac{|f'(x)|}{x-1}=\frac{|(x-1)(x-2)|}{x-1}$

$=\frac{-(x-1)(x-2)}{x-1}=-(x-2)=-x+2$

따라서

$\lim_{x\to 1+}\frac{|f'(x)|}{x-1}=\lim_{x\to 1+}(-x+2)=1$

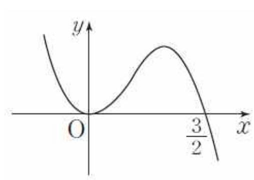
15) ④

[출제의도] 이해능력-다항함수의 적분법

$f(x)=\int_0^x(-6t^2+6t)\,dt=\left[-2t^3+3t^2\right]_0^x$

$=-2x^3+3x^2=x^2(-2x+3)$

이므로 $f(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{3}{2}$



따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^{\frac{3}{2}}|f(x)|\,dx=\int_0^{\frac{3}{2}}(-2x^3+3x^2)dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^4+x^3\right]_0^{\frac{3}{2}}=-\frac{81}{32}+\frac{27}{8}=\frac{27}{32}$

16) 9

[출제의도] 미분과 적분의 관계를 이해하여 함숫값을 구한다.

$\int_a^x f(t)dt=\frac{1}{3}x^3-9$ 에서 $x=a$를 대입하면

$0=\frac{1}{3}a^3-9$, a는 실수이므로 $a=3$

$\int_3^x f(t)dt=\frac{1}{3}x^3-9$ 의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=x^2$ 이므로 $f(a)=f(3)=9$

17) ②

[출제의도] 정적분 이해하기

$\int_{-a}^{a}(5x^3+3x^2+4x+a)dx$

$=2\int_0^a(3x^2+a)dx=2\left[x^3+ax\right]_0^a=2a^3+2a^2$

$2a^3+2a^2=(a+1)^2$ 에서 $2a^3+a^2-2a-1=0$

$(2a+1)(a+1)(a-1)=0$

따라서 $a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=-1$ 또는 $a=1$ 이므로

구하는 모든 상수 a의 값의 합은 $-\frac{1}{2}$

18) ⑤

[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구하고, 미분계수를 구할 수 있는가?

주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a-2$ 에서 $a=1$

한편, $\frac{d}{dt}f(t)=f'(t)$ 이므로

$\int_1^x\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=\int_1^x f'(t)dt=\left[f(t)\right]_1^x=f(x)-f(1)$

이때 $\int_1^x\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=x^3+x^2-2$ 에서

$f(x)-f(1)=x^3+x^2-2$

따라서 $f'(x)=3x^2+2x$ 이므로

$f'(a)=f'(1)=3+2=5$

19) 10

[출제의도] 정적분의 값을 구할 수 있는가?

$\int_1^4(x+|x-3|)dx$

$=\int_1^3(x+|x-3|)dx+\int_3^4(x+|x-3|)dx$

$=\int_1^3(x-(x-3))dx+\int_3^4(x+(x-3))dx$

$=\int_1^3 3\,dx+\int_3^4(2x-3)dx$

$=\left[3x\right]_1^3+\left[x^2-3x\right]_3^4$

$=(9-3)+\{(16-12)-(9-9)\}$

$=10$

20) ③

두 이차함수가 둘러싸인 부분의 넓이는 제 4 사분면에 존재한다.

그러므로

두 이차함수를 x축으로 대칭이동하여 정적분으로 넓이를 구한다.

$y=-f(x-1)-1=-(x-1)^2+2(x-1)=-x^2+4x-4$

$y=x^2-2x$ 와 교점은 $(2,0)$, $(1,-1)$이다.
두 그래프를 x축으로 대칭이동하여 정적분을 구하면

$$\int_1^2(-x^2+2x)-(x^2-4x+4)dx=\int_1^2(-2x^2+6x-4)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2-4x\right]_1^2=-\frac{4}{3}+\frac{5}{3}=\frac{1}{3}$$

21) ②

[출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 함수의 미정계수를 구한다.

$a=\int_0^1|f(t)|dt$ 라 하면 $a>0$ 이고,

$f(x)=x^3-4ax$

$f(1)=1-4a>0$ 에서 $a<\frac{1}{4}$

따라서 $0<a<\frac{1}{4}$ 이다.

$f(x)=x(x^2-4a)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=\pm2\sqrt{a}$

$0<x<2\sqrt{a}$ 일 때 $f(x)<0$ 이고 $x\geq2\sqrt{a}$ 일 때 $f(x)\geq0$ 이다.

$0<a<\frac{1}{4}$ 에서 $2\sqrt{a}<1$ 이므로

$$a=\int_0^{2\sqrt{a}}\{-f(t)\}dt+\int_{2\sqrt{a}}^1 f(t)dt$$

$$=\int_0^{2\sqrt{a}}(-t^3+4at)dt+\int_{2\sqrt{a}}^1(t^3-4at)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{4}t^4+2at^2\right]_0^{2\sqrt{a}}+\left[\frac{1}{4}t^4-2at^2\right]_{2\sqrt{a}}^1$$

$$=8a^2-2a+\frac{1}{4}$$

$8a^2-3a+\frac{1}{4}=0$에서

$32a^2-12a+1=0$, $(4a-1)(8a-1)=0$

$0<a<\frac{1}{4}$ 이므로 $a=\frac{1}{8}$ 이고

$f(x)=x^3-\frac{1}{2}x$

이때 $f(2)=2^3-\frac{1}{2}\times2=7$

22) ⑤

$3xf(x)=9\int_1^x f(t)dt+2x$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$3f(1)=0+2$, $f(1)=\frac{2}{3}$

$3xf(x)=9\int_1^x f(t)dt+2x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3\{f(x)+xf'(x)\}=9f(x)+2$

$x=1$ 대입하면

$3\{f(1)+f'(1)\}=9f(1)+2$

$3f'(1)=6f(1)+2=6\times\frac{2}{3}+2=6$

따라서 $f'(1)=2$

23) ⑤

다항함수 $f(x)$에 대하여

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

(a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_n은 실수)라 하면

$f(-x)=a_n(-x)^n+a_{n-1}(-x)^{n-1}+\cdots+a_1(-x)+a_0$

이고 k가 홀수인 경우 $\int_{-3}^3 x^k dx=0$이므로

$$\int_{-3}^3 f(-x)dx=\int_{-3}^3 f(x)dx$$

조건 (가)에 의하여

$f(x)+f(-x)=3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

이고 $f(x)+f(-x)$는 차수가 홀수인 항을 갖지 않으므로 $a=0$

조건 (나)에 의하여 $f(0)+f(0)=-2=b$

그러므로 $f(x)+f(-x)=3x^2-2$

$$\int_{-3}^3\{f(x)+f(-x)\}dx$$

$$=\int_{-3}^3 f(x)dx+\int_{-3}^3 f(-x)dx$$

$$=2\int_{-3}^3 f(x)dx$$

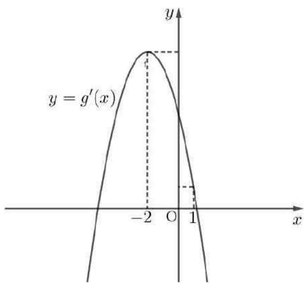
따라서 $\int_{-3}^3 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-3}^3\{f(x)+f(-x)\}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{-3}^3(3x^2-2)dx=21$$

24) 5

$f(x)=-x^2-4x+a$, $g(x)=\int_0^x f(t)dt$에서

$g'(x)=f(x)=-x^2-4x+a=-(x+2)^2+a+4$



함수 $g(x)$가 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 증가해야 하므로

$g'(1)=a-5\geq0$

즉, $a\geq5$이어야 한다.

따라서 a의 최솟값은 5이다.

25) ③

[출제의도] 부정적분과 정적분의 성질을 이용하여 함숫값을 구한다.

$\int_0^1 g(t)dt=a$ 라 하면 (가)에서 $f(x)=2x+2a$

$g(x)$ 는 $f(x)$ 의 한 부정적분이므로

$g(x)=\int f(x)dx=x^2+2ax+C$ (C는 적분상수)

(나)에서 $C-\int_0^1(t^2+2at+C)dt=\frac{2}{3}$

$C-\left(\frac{1}{3}+a+C\right)=\frac{2}{3}$ 에서 $a=-1$

$\int_0^1 g(t)dt=a$ 에서 $\left[\frac{1}{3}t^3-t^2+Ct\right]_0^1=-1$

즉, $C=-\frac{1}{3}$ 이므로 $g(x)=x^2-2x-\frac{1}{3}$

따라서 $g(1)=1-2-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}$

26) 9

[출제의도] 부정적분의 성질을 활용하여 문제를 해결한다.

$F(x)$는 함수 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$$F(x)=\begin{cases}-x^2+C_1 & (x<0)\\ k\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)+C_2 & (x\ge 0)\end{cases}$$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

그런데 $F(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $C_1=C_2$

즉, $F(x)=\begin{cases}-x^2+C_1 & (x<0)\\ k\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)+C_1 & (x\ge 0)\end{cases}$

그러므로 $F(2)-F(-3)=21$에서

$\left(\frac{4}{3}k+C_1\right)-(-9+C_1)=21$

따라서 $k=9$

[다른 풀이]

$F(x)$는 함수 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$F(2)-F(-3)=\Big[F(x)\Big]_{-3}^{2}=\int_{-3}^{2}f(x)dx$

$\int_{-3}^{2}f(x)dx=\int_{-3}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx$

$=\int_{-3}^{0}(-2x)dx+\int_{0}^{2}k(2x-x^2)dx=\Big[-x^2\Big]_{-3}^{0}+k\Big[x^2-\frac{1}{3}x^3\Big]_{0}^{2}$

$=9+\frac{4}{3}k=21$

따라서 $k=9$

27) ②

[출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

함수 $f(x)=(x-a)(x-b)$에 대하여

곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_{a}^{b}|f(x)|dx=-\int_{a}^{b}f(x)dx$

$=-\left(\int_{0}^{b}f(x)dx-\int_{0}^{a}f(x)dx\right)$

$=-\left(-\frac{8}{3}-\frac{11}{6}\right)$

$=\frac{9}{2}$

28) ④

[출제의도] 정적분과 미분과의 관계를 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_{1}^{x}f(t)dt$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2+a+3a+0$

이므로

$f(1)=2+4a$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=3a+\int_{1}^{0}f(t)dt$

즉,

$0=3a-\int_{0}^{1}f(t)dt$

이므로

$\int_{0}^{1}f(t)dt=3a$ …… ㉢

$f(1)=\int_{0}^{1}f(t)dt$이므로 ㉡, ㉢에서

$2+4a=3a$

즉, $a=-2$, $f(1)=-6$

㉠의 양변을 미분하면

$f(x)+xf'(x)=6x^2+2ax+f(x)$

이므로

$f'(x)=6x+2a=6x-4$

따라서

$f(x)=\int f'(x)dx=3x^2-4x+C$ (C는 적분상수)

$f(1)=3-4+C=-6$에서

$C=-5$

따라서

$f(3)=27-12-5=10$

이므로

$a+f(3)=-2+10=8$

29) 9

[출제의도] 부정적분을 활용하여 문제해결하기

$F(x)=(x+2)f(x)-x^3+12x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+(x+2)f'(x)-3x^2+12$

$(x+2)f'(x)=3(x+2)(x-2)$

$f(x)$는 다항함수이므로 $f'(x)=3x-6$

$f(x)=\int(3x-6)dx$

$=\frac{3}{2}x^2-6x+C$ (C는 적분상수)

$F(0)=2f(0)=30$에서 $f(0)=15$이므로 $C=15$

따라서 $f(2)=6-12+15=9$

30) ④

[출제의도] 정적분 이해하기

$\int_{0}^{1}f'(x)dx=\int_{0}^{2}f'(x)dx=0$

$f(1)-f(0)=f(2)-f(0)=0$

$f(0)=f(1)=f(2)=k$ (k는 상수)

$f(x)=x(x-1)(x-2)+k=x^3-3x^2+2x+k$

$f'(x)=3x^2-6x+2$

따라서 $f'(1)=-1$

31) ①

[출제의도] 정적분을 활용하여 도형의 넓이를 구한다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분에서

$0\le x\le 2$인 부분과 $2\le x\le 4$인 부분의 넓이가 같으므로

구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_{0}^{4}\{g(x)-f(x)\}dx$

$=2\int_{0}^{2}(-2x^2+6x)dx$

$=2\Big[-\frac{2}{3}x^3+3x^2\Big]_{0}^{2}=\frac{40}{3}$

32) ①

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx$이므로

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx$이면

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx=0$

따라서 $f(x)=ax^2-1$로 놓으면

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (ax^2-1)dx = \frac{a}{3}-1=0 \quad \therefore\ a=3$$

$\therefore\ f(x)=3x^2-1,\ f(2)=12-1=11$

33) ④

$f'(x)=a(x+1)(x-1)\,(a>0)$이므로

$x=-1$에서 극댓값, $x=1$에서 극솟값을 가진다.

$$f(x)=\int a(x+1)(x-1)dx$$

$$=\int a(x^2-1)dx = a\left(\frac{x^3}{3}-x\right)+C \quad (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

$$f(-1)=a\left(-\frac{1}{3}+1\right)+C=4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$f(1)=a\left(\frac{1}{3}-1\right)+C=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여

$a=3,\ C=2$이므로 $f(x)=x^3-3x+2$이다.

따라서 $f(3)=20$

34) ②

조건 (가)에 의해 $y=f(x)$의 그래프는 y축 대칭이므로

$f(x)=x^4+bx^2+10$

$f'(x)=4x^3+2bx,\ \ f'(1)=4+2b$ 이므로

$-6<4+2b<-2$

$-10<2b<-6$

$-5<b<-3$ 이므로 $b=-4$

$f(x)=x^4-4x^2+10$

$f'(x)=4x^3-8x=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

극솟값은 $f(-\sqrt{2})=f(\sqrt{2})=6$

35) ②

$f(x)=f(x+4)$이므로 $f(0)=f(4)$이다.

$2=16-8+a$

$a=-6$

$$\int_9^{11} f(x)\,dx = \int_1^3 f(x)\,dx =$$

$$=\int_1^2 (-4x+2)\,dx + \int_2^3 (x^2-2x-6)dx$$

$$=-\frac{26}{3}$$

36) ①

극한값의 성질에 의하여

$\int_1^1 f(t)\,dt - f(1)=0$이므로 $f(1)=0$,

$$\lim_{x\to1}\frac{\int_1^x f(t)\,dt - f(x)}{x^2-1} = \lim_{x\to1}\frac{\int_1^x f(t)\,dt}{x^2-1} - \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}$$

$$=\frac{f(1)}{2}-\frac{f'(1)}{2}=2$$

$\therefore\ f'(1)=-4$

37) 12

$f(x)=x^2-6x+C$

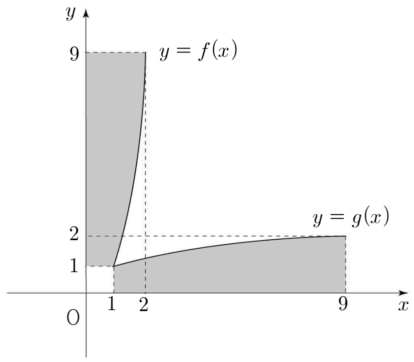
$f(x)$의 최솟값은 $f(3)=-9+C=8$

$C=17$

$f(x)=x^2-6x+17$

$\therefore\ f(1)=12$

38) ③



그림에서 어두운 두 부분의 넓이가 같으므로

$$\int_1^9 g(x)dx = 18-1-\int_1^2 f(x)dx = 18-1-\int_1^2 (x^3+x-1)dx$$

$$=17-\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^2 = 17-\frac{17}{4}=\frac{51}{4}$$

39) ②

함수 $f(x)$가 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c\ \ (a\neq0)$라 하자.

$$g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx$$

$$=\int\{x^2+ax^2+bx+c\}dx$$

$$=\int\{(1+a)x^2+bx+c\}dx$$

$$=\frac{1}{3}(1+a)x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+C \cdots ㉠ \ (C\text{는 적분상수})$$

한편, $f(x)g(x)=(ax^2+bx+c)g(x)=-2x^4+8x^3 \cdots ㉡$

이므로 $g(x)$는 이차함수이다.

$\therefore\ a=-1$

㉠, ㉡에서

$$(-x^2+bx+c)\left(\frac{b}{2}x^2+cx+C\right)=-2x^4+8x^3$$

$$-\frac{b}{2}x^4+\left(\frac{b^2}{2}-c\right)x^3+\left(-C+bc+\frac{bc}{2}\right)x^2$$

$$+(bC+c^2)x+cC=-2x^4+8x^3 \text{ 에서}$$

$$-\frac{b}{2}=-2,\ \frac{b^2}{2}-c=8,$$

$$-C+bc+\frac{bc}{2}=0,\ cC=0$$

$\therefore\ b=4,\ c=0,\ C=0$

$\therefore\ g(x)=2x^2$

$\therefore\ g(1)=2$

40) ④

$S_1,\ S_2,\ S_3$이 등차수열을 이루므로 $2S_2=S_1+S_3$이다.

$$3S_2=S_1+S_2+S_3=\int_{-1}^2 f(x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^2=\frac{9}{2}$$

$\therefore\ S_2=\frac{3}{2}$

41) 40

$f(x)$가 최고차항의 계수가 1이고 $f(3)=0$인 이차함수이므로

$f(x)=(x-3)(x-a)\ =x^2-(a+3)x+3a$ (a는 상수)

로 놓을 수 있다.

$\int_0^{2013} f(x)dx=\int_3^{2013} f(x)dx$에서

$\int_0^3 f(x)\,dx=0$ …… ㉠이므로

$$\int_0^3 \{x^2-(a+3)x+3a\}dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a+3}{2}x^2+3ax\right]_0^3$$

$$=9-\frac{9}{2}a-\frac{27}{2}+9a=\frac{9}{2}a-\frac{9}{2}=0$$

$\therefore\ a=1$

즉, $f(x)=x^2-4x+3$이므로

$$S=\left|\int_1^3 (x^2-4x+3)dx\right|=\left|\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_1^3\right|$$

$$=\left|(9-18+9)-\left(\frac{1}{3}-2+3\right)\right|=\left|-\frac{4}{3}\right|=\frac{4}{3}$$

$\therefore\ 30S=30\times\frac{4}{3}=40$

[참고]

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$일 때의 넓이 S는

$$S=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

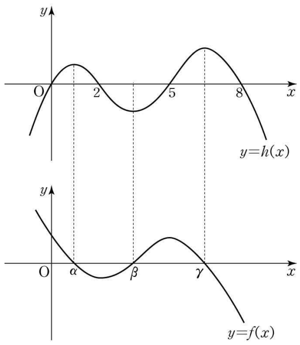
42) ⑤

$F'(x)=f(x)$라 하면 $\int_0^x f(x)dx=F(x)-F(0)$

$F(x)-F(0)=h(x)$라 하자.

$f(0)>0$이므로 $x=0$의 가까운 오른쪽에서 $\int_0^x f(x)dx>0$

따라서 $y=h(x)$와 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. (참) 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(0,\ 2)$, $(2,\ 5)$, $(5,\ 8)$에서 각각 실근을 갖는다.

ㄴ. (참) $x=0$에서 감소 상태에 있으므로 $f'(0)<0$

ㄷ. (참) $h(x)=kx(x-2)(x-5)(x-8)$ $(k<0)$이라 할 때

$\int_m^{m+2} f(x)dx=h(m+2)-h(m)$이므로

$m=1$일 때, $h(3)-h(1)=58k<0$

$m=2$일 때, $h(4)-h(2)=32k<0$

$m=3$일 때, $h(5)-h(3)=-30k>0$

$m=4$일 때, $h(6)-h(4)=-80k>0$

$m=5$일 때, $h(7)-h(5)=-70k>0$

$m=6$일 때, $h(8)-h(6)=48k<0$

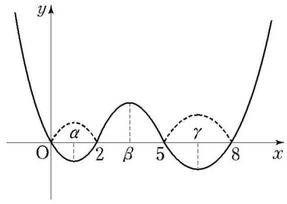
$m=7$일 때, $h(9)-h(7)=322k<0$

$m\geq 8$일 때, $h(m+2)-h(m)<0$

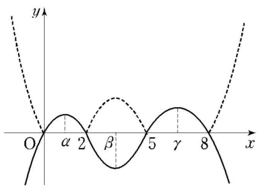
따라서 $\int_m^{m+2} f(x)dx>0$을 만족시키는 자연수 m은 3, 4, 5로써 3개이다.

ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

[다른 풀이]



[그림 1]



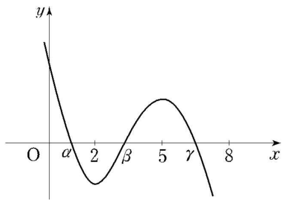
[그림 2]

$h(x)=\int_0^x f(t)dt$라 하면

$h(x)$는 사차함수이므로 위 두 그림중 하나이다.

$f(x)=h'(x)$이므로 두 그림 중 $f(0)=h'(0)>0$을 만족하는 경우는 위의 [그림 2]이다.

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. $y=h(x)$는 3개의 극점을 가지는 사차함수이므로 $f(x)=h'(x)=0$은 서로 다른 3개의 실근을 갖는다.

ㄴ. $f'(0)<0$

ㄷ. $\int_m^{m+2} f(x)\,dx=h(m+2)-h(m)$이다.

$h(2)=0=h(0)\quad\therefore\ h(2)-h(0)=0$

$h(3)<0<h(1)\quad\therefore\ h(3)-h(1)<0$

$h(4)<0=h(2)\quad\therefore\ h(4)-h(2)<0$

$h(5)=0>h(3)\quad\therefore\ h(5)-h(3)>0$

$h(6)>0>h(4)\quad\therefore\ h(6)-h(4)>0$

$h(7)>0=h(5)\quad\therefore\ h(7)-h(5)>0$

$h(8)=0<h(6)\quad\therefore\ h(8)-h(6)<0$

$h(9)<0<h(7)\quad\therefore\ h(9)-h(7)<0$

$m\geq 8$이면 $h(m+2)<h(m)$이므로

$h(m+2)>h(m)$을 만족하는 자연수 m은

$m=3,\ 4,\ 5$의 3개이다.

43) ⑤

$f'(x)=3x^2-4x-4$이므로

$f(x)=x^3-2x^2-4x+C$

$f(2)=0$ 이므로

$f(2)=-8+C=0\ \therefore C=8$

$f(x)=(x+2)(x-2)^2$이므로

구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^{2}\left(x^3-2x^2-4x+8\right)dx=\frac{64}{3}$$

44) ②

함수 $f'(x)=(x-a)(x-b)$이고

(가)에서 $f(x)$가 $x=\frac{1}{2}$에서 극값을 가지므로

$a=\frac{1}{2}$ 또는 $b=\frac{1}{2}$

$f(a)-f(b)$

$=\int_0^a (t-a)(t-b)dt-\int_0^b (t-a)(t-b)dt$

$=\int_0^a (t-a)(t-b)dt+\int_b^0 (t-a)(t-b)dt$

$=\int_b^a (t-a)(t-b)dt=-\frac{(a-b)^3}{6}=\frac{1}{6}$

이므로 $b-a=1$

$b=\frac{1}{2}$ 이면 $a=-\frac{1}{2}$ 이므로 모순

따라서 $a=\frac{1}{2}$이고 $b=\frac{3}{2}$이므로 $a+b=2$

45) 40

(가)에서 함수 $f(x)$의 그래프는 y축 대칭

(다)에서 $\int_{-1}^{1}(2x+3)f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}3f(x)\,dx=15$

이므로 $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=5$

(나)에 의해 $\int_{-6}^{10}f(x)dx=8\int_{-1}^{1}f(x)dx=40$

46) ②

점 $P_1\left(1,\frac{1}{3}\right)$은 곡선 $y=ax^2$ 위의 점이므로 $a=\frac{1}{3}$

직선 P_1P_2의 방정식은

$y=-\frac{1}{3}\times 1\times x+2\times\frac{1}{3}\times 1^2$, $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

점 P_2의 x좌표는 직선 P_1P_2와 곡선 $y=\frac{1}{3}x^2$의

교점이므로 $\frac{1}{3}x^2=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

$x^2+x-2=0$

$x=-2$ 또는 $x=1$

점 P_2의 x좌표는 -2

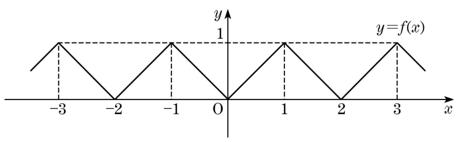
구하는 부분의 넓이는

$\int_{-2}^{0}\left(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}x^2\right)dx$

$=\left[-\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{9}x^3\right]_{-2}^{0}$

$=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}-\frac{8}{9}=\frac{10}{9}$

47) ②



주어진 조건에 의하여 함수 $f(x)$는 주기가 2인 주기함수이므로

$g(a+4)-g(4)$

$=\int_{-2}^{a+4}f(t)dt-\int_{-2}^{a}f(t)dt$

$=\int_{-2}^{a+4}f(t)dt+\int_{a}^{-2}f(t)dt$

$=\int_{a}^{a+4}f(t)dt=\int_0^4 f(t)dt=2\int_0^2 f(t)dt=2$

48) ①

그림에서 $\int_0^3 f(x)dx=\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}=2$ ⋯ (ㄱ)

함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx=13$

$\therefore \int_0^a f(x)dx=\frac{13}{2}=6+\frac{1}{2}=2\times 3+\frac{1}{2}$

$=3\int_0^3 f(x)dx+\frac{1}{2}$ $\quad(\because$ (ㄱ)$)$

$=\int_0^{3\times 3}f(x)dx+\int_9^{10}f(x)dx$

$=\int_0^{10}f(x)dx$

($\because$ 함수 $f(x)$의 주기가 3이고, $\int_9^{10}f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}$)

$\therefore a=10$

49) ④

$f'(x)=x^2-1$로부터 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+C$

그런데 $f(0)=0$이므로 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$

$\frac{1}{3}x^3-x=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt{3},\ 0,\ \sqrt{3}$

$f(x)$가 기함수이므로 구하고자 하는 넓이는

$2\times\int_0^{\sqrt{3}}\left\{-\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\right\}dx=2\times\left[-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}}$

$=2\times\left\{\left(-\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\right)-(0-0)\right\}=\frac{3}{2}$

50) ③

[출제의도] 정적분을 이용하여 넓이를 구할 수 있는가?

$n=1$일 때,

$f(x)=x^2$이고 $P(0,\ 3)$, $Q(1,\ 1)$이므로 구하고자 하는 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times 2\times 1+\int_0^1(1-x^2)dx$

$=1+\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$

$=1+\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}$

51) ⑤

[출제의도] 적분과 미분의 관계를 활용하여 주어진 문제를 해결한다.

$g'(x)=f(x)=0$을 만족하는 x를 구하면

$x(x+2)(x+4)=0$에서 $x=-4,\ -2,\ 0$이므로

$x=-2$에서 $g(x)$는 극댓값을 갖는다. $\therefore \alpha=-2$

$g(\alpha)=\int_2^{-2}f(t)dt=\int_2^{-2}(t^3+6t^2+8t)\,dt$

$=-2\int_0^2 6t^2\,dt=-2\left[2t^3\right]_0^2=-32$

52) ①

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수 이해하기

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-12x^3+4x$

$xf'(x)=12x^3-4x$

$f'(x)=12x^2-4$

$f(x)=4x^3-4x+C$ (C는 적분상수)

$x=1$일 때, $\int_1^1 f(t)dt=1\cdot f(1)-3+2=0$

$f(1)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(0)=1$

53) 45

[출제의도] 정적분의 의미를 이해하여 함숫값을 구할 수 있는가?

$f(0)=0$이므로

$f(x)=ax^2+bx\,(a\neq 0)$라 하자.

조건 (가)에 의하여

$\int_0^2|f(x)|dx=4,\ \int_0^2 f(x)dx=-4$

이므로 구간 $[0,\ 2]$에서 $f(x)\le 0$이다.

또한, 조건 (나)에 의하여

$\int_2^3|f(x)|dx=\int_2^3 f(x)dx$

이므로 구간 $[2,\ 3]$에서 $f(x)\ge 0$이다.

따라서 $f(2)=0$이므로

$f(2)=4a+2b=0$

$\therefore\ b=-2a$

즉, $f(x)=ax^2-2ax$ 이므로

$\int_0^2(ax^2-2ax)dx=\left[\frac{a}{3}x^3-ax^2\right]_0^2 \quad =\frac{8}{3}a-4a=-\frac{4}{3}a=-4$

$\therefore\ a=3$

따라서 $f(x)=3x^2-6x$ 이므로

$f(5)=3\times 5^2-6\times 5=75-30=45$

54) ①

[출제의도] 조건을 만족시키는 다항함수에 대하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

$h(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-h(x)$

이므로 다항함수 $h(x)$의 그래프는 원점에 대칭이고, $h(0)=0$이다.

$h(x)=a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n-1}x^{2n-1}+\cdots+a_1x$로 놓으면

$h'(x)=(2n+1)a_{2n+1}x^{2n}+(2n-1)a_{2n-1}x^{2n-2}+\cdots+a_1$

이므로 $h'(-x)=h'(x)$를 만족시킨다.

$\int_{-3}^3(xh'(x)+5h'(x))dx=2\int_0^3 5h'(x)dx=10\Big[h(x)\Big]_0^3$

$=10(h(3)-h(0))$

$10(h(3)-h(0))=10$에서

$h(3)=h(0)+1=0+1=1$

55) ⑤

[출제의도] 부정적분 이해하기

$f'(x)=xg(x),\ f'(x)-g'(x)=4x^3+2x$ 이므로

$xg(x)-g'(x)=4x^3+2x$

함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 4인

이차함수이므로 $g(x)=4x^2+ax+b$

$g'(x)=8x+a$ 이므로

$x(4x^2+ax+b)-(8x+a)=4x^3+2x$

$4x^3+ax^2+(b-8)x-a=4x^3+2x$ 에서

$a=0,\ b=10$ 이므로 $g(x)=4x^2+10$

따라서 $g(1)=14$

56) ②

[출제의도] 다항함수의 미분법과 적분법을 이용하여 함수의 최댓값을 구하는 문제를 해결한다.

$g(a)=\int_{-a}^a f(x)dx$라 하자.

$g(a)=\int_{-a}^0(2x+2)dx+\int_0^a\left(-x^2+2x+2\right)dx$

$=-a^2+2a-\frac{1}{3}a^3+a^2+2a$

$=-\frac{1}{3}a^3+4a$

$g'(a)=-a^2+4=-(a+2)(a-2)$

$g(a)$의 증가와 감소를 나타낸 표는 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(a)$		$+$	0	$-$
$g(a)$		↗	$\frac{16}{3}$	↘

$g(a)$는 $a=2$에서 최댓값 $\frac{16}{3}$

57) ④

[출제의도] 다항함수의 미분법과 적분법을 이용하여 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

삼차항의 계수가 1이고 방정식 $f(x)=f(4)$는 서로 다른 두 실근을 가지므로 두 가지 경우가 있다.

(ⅰ) 함수 $y=f(x)-f(4)$의 그래프가 $x=2$에서 x축에 접하고 $x=4$에서 만나는 경우

$f(x)=(x-2)^2(x-4)+f(4)$

$f'(x)=2(x-2)(x-4)+(x-2)^2=(x-2)(3x-10)$ 이므로

$f'\left(\frac{11}{3}\right)>0$이고 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) 함수 $y=f(x)-f(4)$의 그래프가 $x=4$에서 x축에 접하는 경우

$f'(2)=0,\ f'(4)=0$이므로

$f'(x)=3(x-2)(x-4),\ f'\left(\frac{11}{3}\right)<0$

$f(x)=\int 3(x-2)(x-4)\,dx$

$=x^3-9x^2+24x+C$ (단, C는 상수이다.)

$f(2)=C+20=35$ 이므로 $C=15$

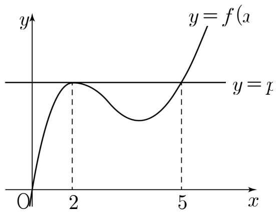
$f(x)=x^3-9x^2+24x+15$

따라서 $f(0)=15$

58) ②

[출제의도] 함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

조건(가)와 조건(나)를 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(x)-p=(x-2)^2(x-5)$

$f(0)=0$ 이므로 $p=20$

$f(x)=(x-2)^2(x-5)+20=x^3-9x^2+24x$

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (x^3-9x^2+24x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 12x^2\right]_0^2 = 28$$

59) ④

[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있으며 이를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 넓이를 구할 수 있는가?

조건(가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프가 일치해야한다.

또, 조건(나)에서 $\int_0^6 f(x)dx = 0$ 이므로

$$\int_0^6 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_3^6 f(x)dx$$

$$= \int_0^3 f(x)dx + \int_3^6 \{f(x-3)+4\}dx$$

$$= \int_0^3 f(x)dx + \int_0^3 \{f(x)+4\}dx$$

$$= 2\int_0^3 f(x)dx + 12$$

에서 $2\int_0^3 f(x)dx + 12 = 0$

$$\int_0^3 f(x)dx = -6$$

따라서 $\int_3^6 f(x)dx = 6$ 이므로

$$\int_6^9 f(x)dx = 12 + \int_3^6 f(x)dx = 12+6 = 18$$

60) 40

[출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

$b = \frac{a^3}{2}$, $S_1 = S_2$이므로

$$\int_0^1 \frac{1}{2}x^3dx = \int_1^a \left(\frac{a^3}{2} - \frac{1}{2}x^3\right)dx$$

$$\left[\frac{1}{8}x^4\right]_0^1 = \left[\frac{a^3}{2}x - \frac{1}{8}x^4\right]_1^a$$

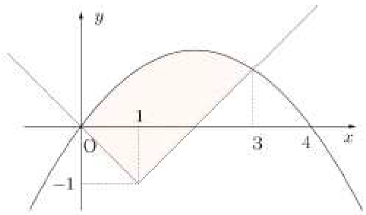
$a^3(3a-4) = 0$, $a > 1$이므로 $a = \frac{4}{3}$

따라서 $30a = 30 \times \frac{4}{3} = 40$

61) 14

[출제의도] 정적분을 이용하여 넓이를 구할 수 있는가?

두 함수 $f(x) = \frac{1}{3}x(4-x)$, $g(x) = |x-1|-1$의 그래프는 다음과 같다.



$x < 1$일 때, $g(x) = -x$이므로

$\frac{1}{3}x(4-x) = -x$에서 $x = 0$

$x \geq 1$일 때, $g(x) = x-2$이므로

$\frac{1}{3}x(4-x) = x-2$에서

$4x - x^2 = 3x - 6$,

$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) = 0$

$x = 3$

따라서 구하는 넓이는

$$S = \int_0^1 \{f(x)-g(x)\}dx + \int_1^3 \{f(x)-g(x)\}dx$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3}x\right)dx + \int_1^3 \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2\right)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{9}x^3 + \frac{7}{6}x^2\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + 2x\right]_1^3$$

$$= \left(-\frac{1}{9} + \frac{7}{6}\right) + \left\{\left(-3 + \frac{3}{2} + 6\right) - \left(-\frac{1}{9} + \frac{1}{6} + 2\right)\right\}$$

$$= \frac{7}{2}$$

이므로

$4S = 14$

62) 7

[출제의도] 정적분과 미분의 관계와 정적분의 성질을 이용하여 함수식을 구할 수 있는가?

조건 (가)에 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(1) + \frac{x-1}{2}f'(x)$$

즉,

$f(x) = f(1) + (x-1)f'(x)$ ······ ㉠

㉠의 좌편인 $f(x)$의 최고차항을 ax^n (a는 0이 아닌 상수, n은 자연수)라 하면 ㉠의 우변의 최고차항은

$x \times anx^{n-1} = anx^n$

이므로 $ax^n = anx^n$에서 $n = 1$

이때 $f(0) = 1$이므로 일차함수 $f(x)$는

$f(x) = ax + 1$

로 놓을 수 있다.

이때

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (ax+1)dx = \left[\frac{a}{2}x^2 + x\right]_0^2 = 2a + 2$$

이고,

$$\int_{-1}^1 xf(x)dx = \int_{-1}^1 (ax^2 + x)dx = 2\int_0^1 ax^2dx = 2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2a}{3}$$

이므로 조건 (나)에서

$$2a + 2 = 5 \times \frac{2a}{3}$$

$$a = \frac{3}{2}$$

따라서 $f(x) = \frac{3}{2}x + 1$이므로

$$f(4) = \frac{3}{2} \times 4 + 1 = 7$$

63) ②

[출제의도] 미분과 적분의 관계를 이용하여 함숫값 구하는 문제를 해결한다.

$g(x) = \int_0^x f(t)dt + f(x)$에서

$g'(x) = f(x) + f'(x)$,

$g(0)=\int_0^0 f(t)\,dt+f(0)=0+f(0)$,

$g'(0)=f(0)+f'(0)$

조건 (가)에 의해

$g(0)=f(0)=0$

$g'(0)=f(0)+f'(0)=0+f'(0)=0$ 이므로 $f'(0)=0$

그러므로 x^2은 $f(x)$의 인수이다.

$f(x)=x^2(x-k)$(단, k는 상수)라 하면

$g'(x)=x^3-kx^2+3x^2-2kx=x^3+(3-k)x^2-2kx$

조건 (나)에 의해 모든 실수 x에 대하여

$g'(-x)=-g'(x)$가 성립한다.

즉, $-x^3+(3-k)x^2+2kx=-x^3-(3-k)x^2+2kx$,

$2(3-k)x^2=0$에서 $k=3$

그러므로 $f(x)=x^2(x-3)$

따라서 $f(2)=-4$

[다른 풀이]

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라고 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가)에 의해 $f(0)=0$이므로 $c=0$,

$f'(0)=0$이므로 $b=0$

즉, $f(x)=x^3+ax^2$

$g'(x)=f(x)+f'(x)$

$=x^3+ax^2+3x^2+2ax$

$=x^3+(a+3)x^2+2ax$

조건 (나)에 의해 함수 $y=g'(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 x^2의 계수는 0이다. 즉, $a=-3$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2$에서 $f(2)=8-12=-4$

64) ④

[출제의도] 정적분을 이용하여 넓이를 계산한다.

$x<0$일 때, 점 A에서 두 함수 $y=ax^2+2$와 $y=-2x$의 그래프가 접하므로

$ax^2+2=-2x$, 즉 $ax^2+2x+2=0$ …… ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-2a=0$

$a=\frac{1}{2}$이므로 접점 A의 x좌표는 -2이다.

점 B는 점 A와 y축에 대하여 대칭이므로 접점 B의 x좌표는 2이다.

주어진 두 함수의 그래프가 모두 y축에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는

$2\times\int_0^2\left(\frac{1}{2}x^2+2-2x\right)dx$

$=2\times\left[\frac{1}{6}x^3+2x-x^2\right]_0^2=2\times\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

65) ②

점 P_n의 좌표를 $(a_n,\ b_n)$이라 하자.

$a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$

이고 선분 P_nP_{n+1}과 직선 $x=a_n$, 직선 $x=a_{n+1}$ 및 x축과 둘러싸인 도형의 넓이 S_n은

$S_n=\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx=\frac{1}{2}\times(a_{n+1}-a_n)\times(b_n+b_{n+1})$

$=b_n+b_{n+1}$

$a_1=1,\ a_6=11$이므로

$\int_1^{11} f(x)dx=\int_{a_1}^{a_6} f(x)dx$

$=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$

$=(b_1+b_2)+(b_2+b_3)+(b_3+b_4)+(b_4+b_5)+(b_5+b_6)$

조건 (다)에 의하여 직선 P_nP_{n+1}의 기울기는

$\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=\frac{1}{2}a_{n+1},\ b_{n+1}=b_n+a_{n+1}$

$b_1=1=a_1$

$b_2=b_1+a_2=a_1+a_2=4$

$b_3=b_2+a_3=a_1+a_2+a_3=9$

$b_4=b_3+a_4=a_1+a_2+a_3+a_4=16$

$b_5=b_4+a_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=25$

$b_6=b_5+a_6=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=36$

따라서 $\int_1^{11} f(x)dx=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$

$=(1+4)+(4+9)+(9+16)+(16+25)+(25+36)$

$=145$

66) 12

모든 실수 x에 대하여 $\{f(x)+x^2-1\}^2\geq 0,\ f(x)\geq 0$이므로 정적분 $\int_{-1}^{2}\{f(x)+x^2-1\}^2dx$의 값이 최소가 되기 위해서는

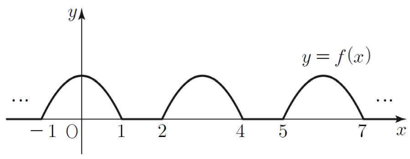
(i) $-1\leq x\leq 1$에서

$x^2-1\leq 0$이므로 $f(x)=-(x^2-1)=-x^2+1$

(ii) $1<x\leq 2$에서

$x^2-1>0$이므로 $f(x)=0$

$f(x+3)=f(x)$이고, (i), (ii)에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$\int_{-1}^{2} f(x)dx=\int_2^5 f(x)dx=\int_5^8 f(x)dx=\cdots=\int_{23}^{26} f(x)dx$

따라서 $\int_{-1}^{26} f(x)dx=9\int_{-1}^{2} f(x)dx=9\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx=12$

67) ③

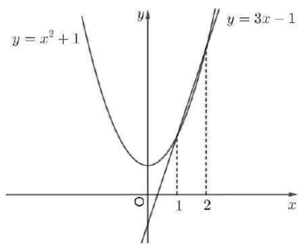
$x^2+3x=(x^2+1)+(3x-1)$

이고 두 함수 $y=x^2+1,\ y=3x-1$의 교점의 x좌표는

$x^2+1=3x-1,\ x^2-3x+2=0,\ (x-1)(x-2)=0$

$x=1$ 또는 $x=2$

이므로 두 함수의 그래프는 그림과 같다.



즉, $x\leqq 1$ 또는 $x\geqq 2$일 때 $x^2+1\geqq 3x-1$

$1<x<2$일 때 $x^2+1<3x-1$

이므로 조건 (가)를 만족시키는 함수 $f(x),\ g(x)$는 각각

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & (x\le 1)\\ 3x-1 & (1<x<2)\\ x^2+1 & (x\ge 2)\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}3x-1 & (x\le 1)\\ x^2+1 & (1<x<2)\\ 3x-1 & (x\ge 2)\end{cases}$$

따라서

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1(x^2+1)dx+\int_1^2(3x-1)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1+\left[\frac{3}{2}x^2-x\right]_1^2$$

$$=\frac{4}{3}+\left(4-\frac{1}{2}\right)=\frac{29}{6}$$

68) ②

[출제의도] 정적분과 미분의 관계를 이용하여 정적분의 값을 구한다.

$g'(x)=f(x)-\{f(x)+xf'(x)\}=-xf'(x)$

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 4이므로 $f'(x)$는 이차항의 계수가 12인 이차함수이다.

그러므로 $g'(x)=-xf'(x)$에서 $g'(x)$는 최고차항의 계수가 -12인 삼차함수이다.

또, 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le g(3)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 최댓값을 가지고 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극값을 가진다. 즉, $g'(3)=0$

그러므로 $f'(3)=0$에서 $g'(x)=-12x(x-3)(x-a)$

사차함수 $g(x)$가 오직 1개의 극값만 가지므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극값을 가질 수 없다. 즉, $a=0$

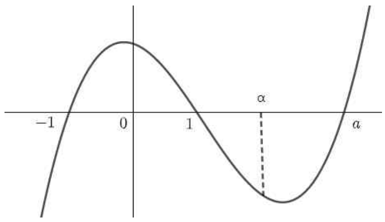
$g'(x)=-12x^2(x-3)=-12x^3+36x^2$

따라서 $\displaystyle\int_0^1 g'(x)dx=\left[-3x^4+12x^3\right]_0^1=9$

69) ④

$$g'(x)=2x\int_0^x f(t)dt+x^2f(x)-x^2f(x)=2x\int_0^x f(t)dt$$

$g'(x)=0$을 만족하는 x의 값은 $x=0$ 또는 $\displaystyle\int_0^x f(t)dt=0$을 만족하는 x의 값이다.



위의 $f(x)$의 그래프로에서

$x<0$일 때 $\displaystyle\int_0^x f(t)dt=0$의 해가 존재하므로 $g(x)$는 $x<0$일 때 값을 갖는다. $x=0$일 때 $\displaystyle\int_0^x f(t)dt=0$이므로 $x=0$일 때 $g'(x)=0$은 중근을 갖고 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.

따라서 함수 $g(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면

$x>0$일 때 $g'(x)\ge 0$이어야 하고 $\displaystyle\int_0^x f(t)dt\ge 0$이어야 한다.

$\displaystyle\int_0^x f(t)dt\ge 0$는 $x>0$일 때 $x=a$에서 최솟값을 갖는다.

$$\int_0^a f(t)dt=\int_0^a(t+1)(t-1)(t-a)dt$$

$$=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{a}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+at\right]_0^a=-\frac{a^4}{12}+\frac{a^2}{2}\ge 0$$

$a^2(a^2-6)\le 0$

$a>1$이므로 $1<a\le\sqrt{6}$

따라서 a의 최댓값은 $\sqrt{6}$

70) ③

[출제의도] 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.

구하고자 하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^2|f(x)-g(x)|dx$$

$$=\int_0^2\{g(x)-f(x)\}dx$$

$g(x)-f(x)$는 최고차항의 계수가 3이고

삼차방정식 $g(x)-f(x)=0$은 한 실근 0과 중근 2를 가지므로

$g(x)-f(x)=3x(x-2)^2$

따라서 $\displaystyle S=\int_0^2 3x(x-2)^2dx$

$$=\int_0^2(3x^3-12x^2+12x)dx$$

$$=\left[\frac{3}{4}x^4-4x^3+6x^2\right]_0^2$$

$=12-32+24=4$

71) ②

[출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

함수 $y=-f(x+1)+1$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동시킨 후, x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 것이다.

$f(0)=0,\ f(1)=1,\ \displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$

이므로

조건 (가)에서

$$\int_{-1}^0 g(x)dx=\int_{-1}^0\{-f(x+1)+1\}dx=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

$$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$$

$$\int_{-1}^1 g(x)dx=\int_{-1}^0 g(x)dx+\int_0^1 g(x)dx=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=1$$

조건 (나)에서

$g(x+2)=g(x)$이므로

$$\int_{-3}^2 g(x)dx=\int_{-3}^{-1}g(x)dx+\int_{-1}^1 g(x)dx+\int_1^2 g(x)dx$$

$$=2\int_{-1}^1 g(x)dx+\int_{-1}^0 g(x)dx=2\times 1+\frac{5}{6}=\frac{17}{6}$$

72) 8

[출제의도] 정적분으로 나타내어진 함수가 극값을 하나만 갖도록 하는 상수 a의 값을 구할 수 있는가?

$f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에서

$f'(x)=3x^2-24x+45=3(x-3)(x-5)$

$$g(x)=\int_a^x\{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4dt$$

$$=f(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt-\int_a^x\{f(t)\}^5dt$$

$$g'(x)=f'(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt+\{f(x)\}^5-\{f(x)\}^5$$

$$=f'(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt$$

$g'(x)=0$에서

$f'(x)=0$ 또는 $x=a$

(ⅰ) $a\neq 3$, $a\neq 5$일 때,

$g'(x)=0$에서

$x=3$ 또는 $x=5$ 또는 $x=a$

함수 $g(x)$는 $x=3$, $x=5$, $x=a$에서 모두 극값을 갖는다.

(ⅱ) $a=3$일 때

$g'(x)=0$에서 $x=3$ 또는 $x=5$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=5$에서만 극값을 갖는다.

(ⅲ) $a=5$일 때

$g'(x)=0$에서

$x=3$ 또는 $x=5$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗

함수 $g(x)$는 $x=3$에서만 극값을 갖는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

함수 $g(x)$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 값은 3 또는 5이다.

따라서 모든 a의 값의 합은

$3+5=8$

73) ②

[출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 세 실근 α, 0, $\beta(\alpha<0<\beta)$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $\beta=-\alpha$

$f'(x)=4x(x-\alpha)(x+\alpha)$

$f(x)=x^4-2\alpha^2x^2+C$ (단, C는 적분상수이다.)

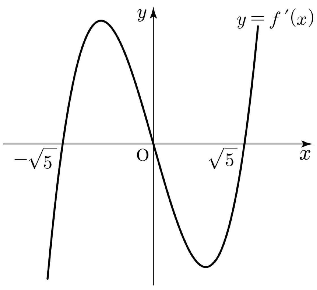
$f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, 조건 (가)에 의하여

$f(0)=9$, $C=9$

조건 (나)에 의하여 $f(\alpha)=\alpha^4-2\alpha^4+9=-16$

$\alpha=-\sqrt{5}$

함수 $f'(x)=4x(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

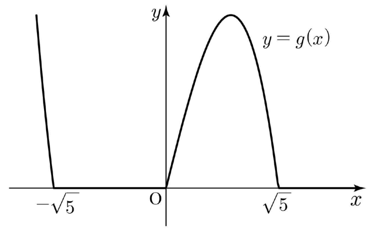


함수 $g(x)=|f'(x)|-f'(x)$이므로

함수

$$g(x)=\begin{cases}0 & (f'(x)\geq 0)\\ -2f'(x) & (f'(x)<0)\end{cases}$$

이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$$\int_0^{10} g(x)\,dx=-2\int_0^{\sqrt{5}} f'(x)\,dx$$

$$=-2\Big[f(x)\Big]_0^{\sqrt{5}}=-2\{f(\sqrt{5})-f(0)\}$$

$$=-2\times(-16-9)=50$$

74) ⑤

[출제의도] 다항함수의 미분과 정적분을 활용하여 주어진 명제의 참과 거짓을 판정할 수 있는가?

삼차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고

$f'(0)=f'(2)=0$이므로

$f'(x)=3x(x-2)=3x^2-6x$

이다.

따라서

$f(x)=\int f'(x)\,dx=x^3-3x^2+C$ (C는 적분상수)

따라서

$f(x)-f(0)=x^3-3x^2$

이고

$f(x+p)-f(p)$

$=(x+p)^3-3x(x+p)^2+C-(p^3-2p^2+c)$

$=x^3+(3p-3)x^2+(3p^2-6p)x$

이므로

$$g(x)=\begin{cases}x^2-3x^2 & (x\leq 0)\\ x^3+(3p-3)x^2+(3p^2-6p)x & (x>0)\end{cases}$$

이다.

ㄱ. $p=1$이면

$$g(x)=\begin{cases}x^3-3x^2 & (x\leq 0)\\ x^3-3x & (x>0)\end{cases}$$

이므로

$$g'(x)=\begin{cases}3x^2-6x & (x\leq 0)\\ 3x^2-3 & (x>0)\end{cases}$$

따라서 $g'(1)=3-3=0$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0+}g(x)=g(0)=0$이므로

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

이때

$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0-}(3x^2-6x)=0$

$\lim_{x\to 0+}g(x)$

$\lim_{x\to 0+}\{3x^2+2(3p-3)x+(3p^2-6p)\}=3p^2-6p$

이므로 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$3p^2-6p=0$

이어야 한다.

따라서 양수 p의 값은 $p=2$뿐이므로 양수 p의 개수는 1이다. (참)

ㄷ. $\int_{-1}^0 g(x)\,dx=\int_{-1}^0(x^3-3x^2)\,dx$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3\right]_{-1}^0$$

$$=0-\left(\frac{1}{4}+1\right)=-\frac{5}{4}$$

이고,

$$\int_0^1 g(x)\,dx$$

$$=\int_0^1 \{x^3+(3p-3)x^2+(3p^2-6p)x\}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+(p-1)x^3+\frac{3p^2-6p}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{4}+(p-1)+\frac{3p^2-6p}{2}$$

$$=\frac{3}{2}p^2-2p-\frac{3}{4}$$

이므로

$$\int_{-1}^1 g(x)\,dx$$

$$=\int_{-1}^0 g(x)\,dx+\int_0^1 g(x)\,dx$$

$$=\left(-\frac{5}{4}\right)+\frac{3}{2}p^2-2p-\frac{3}{4}$$

$$=\frac{3}{2}p^2-2p-2$$

$$=\frac{1}{2}(3p+2)(p-2)$$

따라서 $p\ge 2$일 때, $\int_{-1}^1 g(x)\,dx\ge 0$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[다른풀이]

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고

$f'(0)=f'(2)=0$

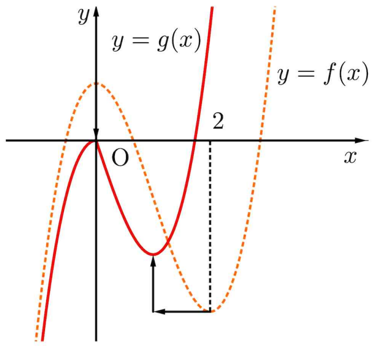
이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고

$x=2$에서 극소이다.

이때, 곡선 $y=f(x)-f(0)$은 곡선 $y=f(x)$를 y축의 방향으로 $-f(0)$만큼 평행이동한 것이고,

곡선 $y=f(x+p)-f(p)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 $-p$만큼, y축의 방향으로 $-f(p)$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 두 곡선 $y=f(x)-f(0)$, $y=f(x+p)-f(p)$는 모두 원점을 지나고 함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. $p=1$일 때, 곡선 $y=f(x+1)-f(1)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 $-f(1)$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $g'(1)=0$이다. (참)

ㄴ. $\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0+} g(x)=g(0)=0$이므로

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

이때

$$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0-}(3x^2-6x)=0$$

이므로 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$$\lim_{x\to 0+} g'(x)=0$$

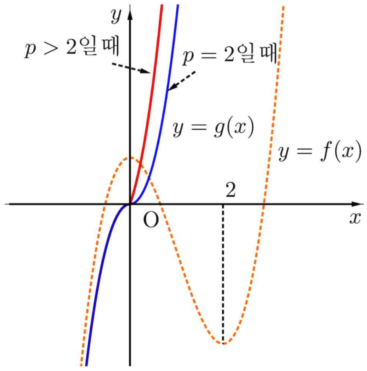
이어야 한다.

그런데 $f'(x)=0$인 양수 x의 값은 2뿐이므로

양수 p의 값은 2뿐이다.

따라서 양수 p의 개수는 1이다. (참)

ㄷ. $p\ge 2$일 때 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$p=2$일 때,

함수 $y=g(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-1}^1 g(x)\,dx=0$$

$p>2$일 때, 모든 실수 x에 대하여

$f(x+p)-f(p)\ge f(x+2)-f(2)$

이므로

$$\int_{-1}^1 g(x)\,dx\ge 0$$

따라서 $p\ge 2$일 때 $\int_{-1}^1 g(x)\,dx\ge 0$ (참)

75) 2

[출제의도] 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

$f(1-x)=-f(1+x)$에 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면

$f(1)=-f(1)$에서 $f(1)=0$,

$f(0)=-f(2)$에서 $f(2)=0$

삼차함수 $f(x)$는 $f(0)=f(1)=f(2)=0$이고

최고차항의 계수가 1이므로 $f(x)=x(x-1)(x-2)$

방정식 $f(x)=-6x^2$에서 $x^3+3x^2+2x=0$이므로

$x(x+1)(x+2)=0$,

$x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=-2$

$-2\le x\le -1$에서 $x^3+3x^2+2x\ge 0$이고

$-1\le x\le 0$에서 $x^3+3x^2+2x\le 0$이므로

$$S=\int_{-2}^0 \left|x^3+3x^2+2x\right|\,dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}(x^3+3x^2+2x)\,dx+\int_{-1}^0\{-(x^3+3x^2+2x)\}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3+x^2\right]_{-2}^{-1}+\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3-x^2\right]_{-1}^0$$

$$=\frac{1}{2}$$

따라서 $4S=2$

76) ⑤

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수가 포함된 문제를 해결한다.

최고차항의 계수가 4이고 $f(0)=0$이므로

$f(x)=4x^3+ax^2+bx$ (a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=12x^2+2ax+b$ 에서 $f'(0)=0$이므로 $b=0$

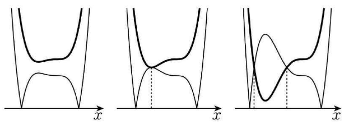
즉, $f(x)=4x^3+ax^2$에서 $\int_0^x f(t)\,dt=x^4+\frac{a}{3}x^3$

이므로

$$g(x)=\begin{cases} x^4+\frac{a}{3}x^3+5 & (x<c) \\ \left|x^4+\frac{a}{3}x^3-\frac{13}{3}\right| & (x\ge c)\end{cases}$$

곡선 $y=x^4+\frac{a}{3}x^3-\frac{13}{3}$은 곡선 $y=x^4+\frac{a}{3}x^3+5$ 를 y축의 방향으로 $-\frac{28}{3}$만큼 평행이동한 것이다.

다음은 a의 값에 따른 곡선 $y=x^4+\frac{a}{3}x^3+5$ 와 곡선 $y=\left|x^4+\frac{a}{3}x^3-\frac{13}{3}\right|$의 개형 중 c의 개수가 0, 1, 2 인 경우이다.



[c의 개수가 0] [c의 개수가 1] [c의 개수가 2]

함수 $g(x)$가 연속이 되도록 하는 실수 c의 개수가 1이기 위해서는 함수 $y=x^4+\frac{a}{3}x^3+5$ (→ ㉠)의 극솟값과 함수 $y=-\left(x^4+\frac{a}{3}x^3-\frac{13}{3}\right)$ (→ ㉡)의 극댓값이 서로 같아야 한다.

㉠, ㉡의 함수의 도함수는 각각 $f(x)$, $-f(x)$이고

$f(x)=x^2(4x+a)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=-\frac{a}{4}$ $(a\ne 0)$

㉠, ㉡의 함수는 각각 $x=-\frac{a}{4}$에서 극값을 갖고, $c=-\frac{a}{4}$이다.

$$\left(-\frac{a}{4}\right)^4+\frac{a}{3}\left(-\frac{a}{4}\right)^3+5=-\left\{\left(-\frac{a}{4}\right)^4+\frac{a}{3}\left(-\frac{a}{4}\right)^3-\frac{13}{3}\right\}$$

이를 정리하여 풀면 $\begin{cases}a=4\\ c=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}a=-4\\ c=1\end{cases}$

그러므로 $a=4$일 때, $g(1)=\left|1+\frac{4}{3}-\frac{13}{3}\right|=2$,

$a=-4$일 때, $g(1)=\left|1-\frac{4}{3}-\frac{13}{3}\right|=\frac{14}{3}$

따라서 $g(1)$의 최댓값은 $\frac{14}{3}$

77) ①

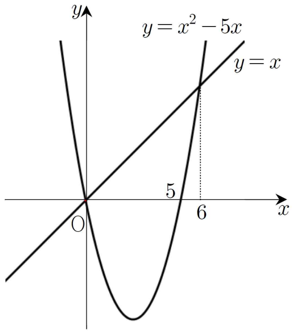
[출제의도] 정적분을 이용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

$x^2-5x=x$에서

$x^2-6x=0$

$x=0$ 또는 $x=6$

곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$가 만나는 점은 원점과 (6, 6)이다.



곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^6\{x-(x^2-5x)\}dx$

$=\int_0^6(6x-x^2)dx$

$=\left[3x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^6$

$=36$

따라서 직선 $x=k$가 넓이를 이등분하므로

$18=\int_0^k\{x-(x^2-5x)\}dx$

$=\int_0^k(6x-x^2)dx$

$=\left[3x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^k$

$=3k^2-\frac{1}{3}k^3$

정리하면

$k^3-9k^2+54=0$

$(k-3)(k^2-6k-18)=0$

즉, $0<k<6$이므로

$k=3$

78) 110

[출제의도] 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$에 대하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

$f(x+1)-xf(x)=ax+b$에 $x=0$을 대입하면

$f(1)=b$

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)=x$이므로 $b=1$

또, $f(x+1)=xf(x)+ax+1$이므로

$0\le x\le 1$에서

$f(x+1)=xf(x)+ax+1=x^2+ax+1$

$x+1=t$로 치환하면

$f(t)=(t-1)^2+a(t-1)+1$

$=t^2+(a-2)t+2-a$ …… ㉠

$f'(t)=2t+(a-2)$이고,

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)=x$이고, 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이므로 $f'(1)=1$이므로

$a=1$

따라서 ㉠에서 $1\le x\le 2$일 때

$f(x)=x^2-x+1$이다.

$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2(x^2-x+1)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^2$

$=\frac{8}{3}-\frac{5}{6}$

$=\frac{11}{6}$

즉, $60\times\int_1^2 f(x)dx=60\times\frac{11}{6}$

$=110$

79) ⑤

[출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

$G(x)=\int_1^x(x-t)f(t)\,dt$라 하자.

함수 $G(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{x-2}\displaystyle\int_1^x(x-t)f(t)\,dt=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{G(x)}{x-2}=3$에서

$G(2)=0,\ G'(2)=3$

$G(x)=x\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt-\int_1^x tf(t)\,dt$에서

$G'(x)=x\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=\int_1^x f(t)\,dt$

$G'(2)=\displaystyle\int_1^2 f(t)\,dt=3$

$G(2)=2\displaystyle\int_1^2 f(t)\,dt-\int_1^2 tf(t)\,dt=0$에서

$\displaystyle\int_1^2 tf(t)\,dt=2\int_1^2 f(t)\,dt=6$

따라서

$\displaystyle\int_1^2(4x+1)f(x)\,dx=4\int_1^2 xf(x)\,dx+\int_1^2 f(x\,dx)$

$=4\times6+3=27$

80) ④

[출제의도] 함수의 그래프를 이해하고 명제의 참, 거짓을 판단할 수 있는가?

ㄱ. $x<0$일 때 $g'(x)=-f(x)$

$x\geq0$일 때 $g'(x)=f(x)$

그런데 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하고 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to0-}\{-f(x)\}=\lim\limits_{x\to0+}f(x)$

$-f(0)=f(0),\ 2f(0)=0$

$f(0)=0$ (참)

ㄴ. $g(0)=\displaystyle\int_0^0 f(t)\,dt=0$이고 함수 $g(x)$는 삼차함수이므로

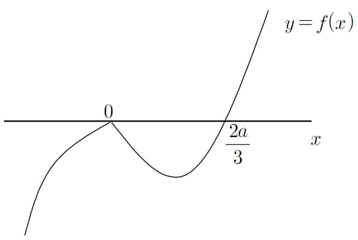
$g(x)=x^2(x-a)$ (단, a는 상수) 로 놓으면

$g'(x)=2x(x-a)+x^2=x(3x-2a)$

(i) $a>0$일 때

$$f(x)=\begin{cases}-x(3x-2a) & (x<0)\\ x(3x-2a) & (x\geq0)\end{cases}$$

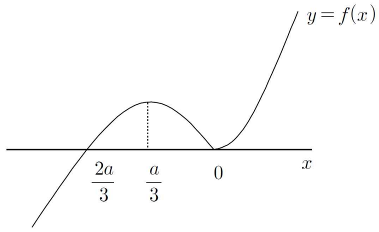
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.



(ii) $a<0$일 때

$$f(x)=\begin{cases}-x(3x-2a) & (x<0)\\ x(3x-2a) & (x\geq0)\end{cases}$$

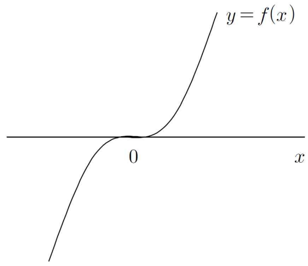
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 $x=\dfrac{a}{3}$에서 극댓값을 갖는다.



(iii) $a=0$일 때

$$f(x)=\begin{cases}-3x^2 & (x<0)\\ 3x^2 & (x\geq0)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 극댓값이 존재하지 않는다.



(거짓)

ㄷ. (i) ㄴ. (i)인 경우

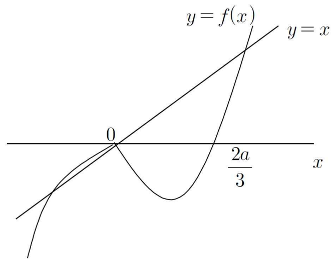
$f(1)=3-2a$이므로 $2<3-2a<4$에서 $0<a<\dfrac{1}{2}$

또한, $x<0$일 때

$f'(x)=-(3x-2a)-3x=-6x+2a$ 이므로

$\lim\limits_{x\to0-}f'(x)=2a$

이때 $0<2a<1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 그림과 같이 세 점에서 만난다.



따라서 $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

(ii) ㄴ. (ii)인 경우

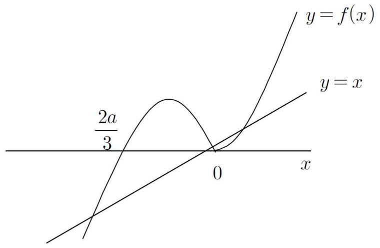
$f(1)=3-2a$이므로 $2<3-2a<4$에서 $-\dfrac{1}{2}<a<0$

또한, $x>0$일 때

$f'(x)=(3x-2a)+3x=6x-2a$ 이므로

$\lim\limits_{x\to0+}f'(x)=-2a$

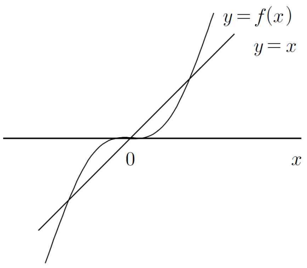
이때 $0<-2a<1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 그림과 같이 세 점에서 만난다.



따라서 $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

(iii) ㄴ. (iii)인 경우

$f(1)=3$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 그림과 같이 세 점에서 만난다.



따라서 $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

다른 풀이

ㄷ. (i) ㄴ. (i)인 경우

$0<a<\frac{1}{2}$이고

① $x<0$일 때, $-x(3x-2a)=x$

$-3x+2a=1$, $x=\frac{2a-1}{3}$

② $x\geq 0$일 때, $x(3x-2a)=x$

$x(3x-2a-1)=0$

$x=0$ 또는 $x=\frac{2a+1}{3}$

따라서 $2<f(1)<4$일 때,

방정식 $f(x)=x$은 서로 다른 실근 $\frac{2a-1}{3}$, 0, $\frac{2a+1}{3}$을 갖는다.

81) 13

[출제의도] 정적분으로 나타낸 함수를 이해하고 극솟값을 가질 조건을 구할 수 있는가?

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이면

$$g(x)=\int_x^{x+1}|f(t)|dt=\int_x^{x+1}f(t)\,dt$$

이므로 $g(x)$는 이차함수이고 이때 $g(x)$가 극소인 x의 값은 1개뿐이다.

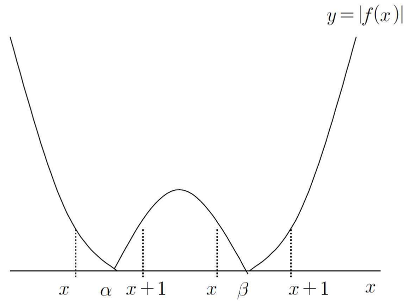
따라서 조건을 만족시키지 못한다.

$f(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)\,(\alpha<\beta)$라 하면

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같고

$x=1$, $x=4$에서 함수 $g(x)$가 극소이므로

$g'(1)=0$, $g'(4)=0$이다.



(i) $x<\alpha<x+1$일 때

$$\begin{aligned} g(x)&=\int_x^{x+1}|f(t)|\,dt\\ &=\int_x^{\alpha}f(t)\,dt+\int_{\alpha}^{x+1}\{-f(t)\}\,dt\\ &=-\int_{\alpha}^{x}f(t)\,dt-\int_{\alpha}^{x+1}f(t)\,dt\\ &=-\int_{\alpha}^{x}2(t-\alpha)(t-\beta)\,dt-\int_{\alpha}^{x+1}2(t-\alpha)(t-\beta)\,dt\\ &=-\int_{\alpha}^{x}2(t-\alpha)(t-\beta)\,dt-\int_{\alpha-1}^{x}2(t+1-\alpha)(t+1-\beta)\,dt \end{aligned}$$

이므로

$g'(x)=-2(x-\alpha)(x-\beta)-2(x+1-\alpha)(x+1-\beta)$

$g'(1)=-2(1-\alpha)(1-\beta)-2(2-\alpha)(2-\beta)$

$=6\alpha+6\beta-4\alpha\beta-10=0$

$3\alpha+3\beta-2\alpha\beta-5=0$ …… ㉠

(ii) $x<\beta<x+1$일 때

$$\begin{aligned} g(x)&=\int_x^{x+1}|f(t)|\,dt\\ &=\int_x^{\beta}\{-f(t)\}\,dt+\int_{\beta}^{x+1}f(t)\,dt\\ &=\int_{\beta}^{x}f(t)\,dt-\int_{\beta}^{x+1}f(t)\,dt\\ &=\int_{\beta}^{x}2(t-\alpha)(t-\beta)\,dt+\int_{\beta}^{x+1}2(t-\alpha)(t-\beta)\,dt\\ &=\int_{\beta}^{x}2(t-\alpha)(t-\beta)\,dt-\int_{\beta-1}^{x}2(t+1-\alpha)(t+1-\beta)\,dt \end{aligned}$$

이므로

$g'(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)+2(x+1-\alpha)(x+1-\beta)$

$g'(1)=2(4-\alpha)(4-\beta)-2(5-\alpha)(5-\beta)$

$=82-18\alpha-18\beta+4\alpha\beta=0$

$9\alpha+9\beta-2\alpha\beta-41=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\alpha\beta=\frac{13}{2}$

이므로

$f(0)=2\alpha\beta=2\times\frac{13}{2}=13$

82) 8

[출제의도] 정적분을 활용하여 문제 해결하기

$$g'(x)=2x\int_0^x f(t)dt+x^2f(x)-x^2f(x)=2x\int_0^x f(t)dt$$

$h(x)=\int_0^x f(t)dt$ 라 하면 $h(0)=0$

조건 (나)에 의하여

방정식 $h(x)=0$의 실근은 0과 3이므로

(i) $h(x)=ax^2(x-3)$ (a는 상수) 라 하면

$g'(x)=2ax^3(x-3)$ 이고 함수 $g(x)$ 는 $x=0$, $x=3$ 에서 극값을 가지므로 모순

(ii) $h(x)=ax(x-3)^2$ (a 는 상수) 라 하면

$g'(x)=2ax^2(x-3)^2$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 극값을 갖지 않는다.

$h'(x)=f(x)=a(3x^2-12x+9)=3a(x-1)(x-3)$

$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 3 이므로 $a=1$

$f(x)=3(x-1)(x-3)$

따라서

$$\int_0^3|f(x)|dx$$

$$=3\int_0^3|(x-1)(x-3)|dx$$

$$=3\int_0^1(x-1)(x-3)dx-3\int_1^3(x-1)(x-3)dx$$

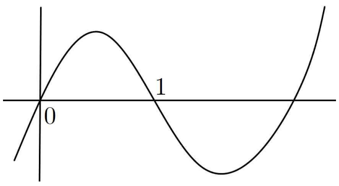
$$=3\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_0^1-3\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_1^3$$

$$=3\left(\frac{1}{3}-2+3\right)-3\left(9-18+9-\frac{1}{3}+2-3\right)=8$$

83) ⑤

ㄱ. $g(0)=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1|f(x)|dx=0$이므로

구간 (0, 1)에서 $f(x)>0$이다.

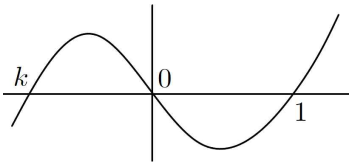


$g(-1)=\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^1|f(x)|dx$ 위의 그래프에서

$\int_{-1}^0 f(x)dx<0$이므로 음수 빼기 양수는 음수 이므로

$g(-1)<0$ (참)

ㄴ. $g(-1)>0$이면 ㄱ의 결과에 반대이므로 구간 (0, 1)에서 $f(x)<0$이다.



$$g(-1)=\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^1|f(x)|dx$$

$$=\int_{-1}^0 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$$

$$=\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^1 x(x-1)(x-k)dx$$

$$=2\int_0^1-(k+1)x^2dx$$

$$=-2\left[\frac{k+1}{3}x^3\right]_0^1=-\frac{2(k+1)}{3}$$

$\therefore\ g(-1)=-\dfrac{2(k+1)}{3}>0$이므로 $k<-1$을 만족한다. (참)

ㄷ. $g(-1)$이 양수이면 ㄴ에서의 그래프와 같으므로

$g(-1)=-\dfrac{2(k+1)}{3}>1$에서 $k<-\dfrac{5}{2}$

$$g(0)=2\int_0^1 f(x)dx=2\int_0^1 x(x-1)(x-k)dx$$

$$=2\int_0^1\{x^3-(k+1)x^2+kx\}dx$$

$$=2\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{k+1}{3}x^3+\frac{k}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=2\left(\frac{1}{4}-\frac{k+1}{3}+\frac{k}{2}\right)=2\times\frac{3-4k-4+6k}{12}$$

$$=\frac{2k-1}{6}$$

$k<-\dfrac{5}{2}$이므로

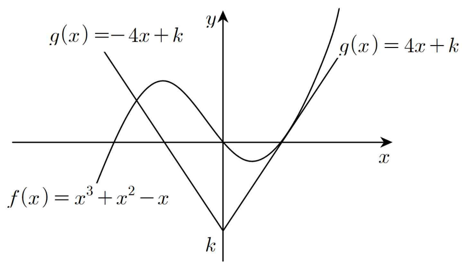
$$\frac{2k-1}{6}<\frac{2\times\left(-\frac{5}{2}\right)-1}{6}=-1\ (\text{참})$$

84) 80

$f'(x)=3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}=\frac{1+3-9}{27}=-\frac{5}{27}$,

$f(-1)=-1+1+1=1$



얻어진 극점을 이용해서 그래프를 그려보면 위의 그림과 같다.

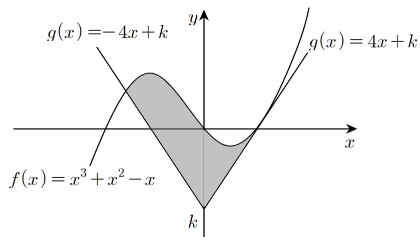
두 점에서 만나는 경우는 위의 그림과 같이 $g(x)=4x+k$가 $f(x)=x^3+x^2-x$와 접할 때이다.

접점을 α라 할 때, $\begin{cases}4\alpha+k=\alpha^3+\alpha^2-\alpha\\4=3\alpha^2+2\alpha-1\end{cases}$

$3\alpha^2+2\alpha-5=(3\alpha+5)(\alpha-1)=0$에서

$\alpha>0$이므로 $\alpha=1$

$4+k=1+1-1$, $\therefore\ k=-3$



위의 그림에서 음수인 교점은 $x^3+x^2-x=-4x-3$의 실근이므로

$x^3+x^2+3x+3=(x^2+3)(x+1)=0$에서 교점의 x좌표는 $x=-1$

$$\int_{-1}^0\{(x^3+x^2-x)-(-4x-3)\}dx$$

$$=\int_{-1}^0(x^3+x^2+3x+3)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x\right]_{-1}^0$$

$$=0-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-3\right)=\frac{-3+4-18+36}{12}=\frac{19}{12}$$

$$\int_0^1\{(x^3+x^2-x)-(4x-3)\}dx$$

$=\int_{0}^{1}(x^3+x^2-5x+3)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3x\right]_0^1=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+3$

$=\frac{3+4-30+36}{12}=\frac{13}{12}$

$\therefore\ \frac{13}{12}+\frac{19}{12}=\frac{32}{12}=\frac{8}{3}$,

$\therefore\ 30S=80$

85) ④

[출제의도] 정적분과 넓이의 관계를 이해하고 있는가?

$A=B$이므로

$\int_{0}^{2}\{(x^3+x^2)-(-x^2+k)\}dx=0$

이어야 한다.

이때,

$\int_{0}^{2}\{(x^3+x^2)-(-x^2+k)\}dx=\int_{0}^{2}(x^3+2x^2-k)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-kx\right]_0^2=4+\frac{16}{3}-2k=\frac{28}{3}-2k=0$

따라서,

$2k=\frac{28}{3}$

$k=\frac{14}{3}$

86) ②

[출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 함수를 추론한다.

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 주어진 방정식은

$\int_{t}^{x}f(s)ds=F(x)-F(t)=0$이므로

$F(x)=F(t)$이다.

따라서 $g(t)$는 곡선 $y=F(x)$와 직선 $y=F(t)$의 서로 다른 교점의 개수와 같다.

ㄱ. $F'(x)=f(x)=x^2(x-1)$

함수 $F(x)$는 $x<1$에서 감소, $x>1$에서 증가하므로

$x=1$에서 극소이면서 최소이다.

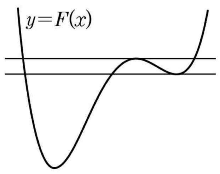
따라서 곡선 $y=F(x)$와 직선 $y=F(1)$은 오직 한 점에서 만나므로

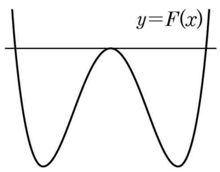
$g(1)=1$이다. (참)

ㄴ. 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3일 때,

함수 $F(x)$의 두 극솟값이 같은 경우와 두 극솟값이 다른 경우가 있다.

각 경우 곡선 $y=F(x)$와 직선 $y=F(a)$가 서로 다른 세 점에서 만나는 실수 a가 존재한다.

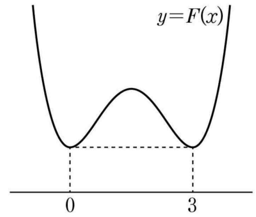




따라서 $g(a)=3$인 실수 a가 존재한다. (참)

ㄷ. 함수 $F(x)$가 극댓값을 갖지 않거나, 극댓값을 갖지만 두 극솟값의 크기가 다른 경우에는 $\lim_{t\to b}g(t)+g(b)=6$인 실수 b가 존재하지 않는다. 따라서 곡선 $y=F(x)$의 개형은 다음과 같고,

$F(0)=F(3)$이다.



$f(0)=F'(0)=0$이고, $f(3)=F'(3)=0$이므로

$F(x)-F(0)=\frac{x^2(x-3)^2}{4}=\frac{x^4-6x^3+9x^2}{4}$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x$이므로

$f(4)=64-72+18=10$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

87) ②

[출제의도] 정적분과 넓이의 관계를 이용하여 함수를 구한 후, 정적분의 값을 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$n-1\le x\le n$일 때,

$f(x)=6(x-n+1)(x-n)$ 또는

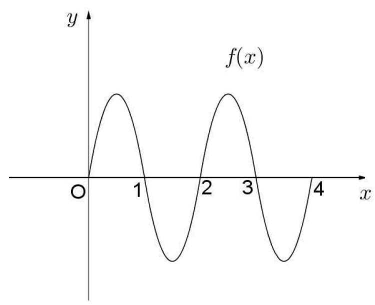
$f(x)=-6(x-n+1)(x-n)$

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 최솟값 0를 가지므로

$g(2)=\int_{0}^{2}f(t)dt-\int_{2}^{4}f(t)dt=0$

$\int_{0}^{2}f(t)dt=\int_{2}^{4}f(t)dt$

이때, 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 최솟값을 가져야 하므로 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서

$\int_{\frac{1}{2}}^{4}f(x)dx$

$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{3}f(x)dx+\int_{3}^{4}f(x)dx$

$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)dx-\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx-\int_{0}^{1}f(x)dx$

$=-\int_{0}^{\frac{1}{2}}f(x)dx$

$=-\int_{0}^{\frac{1}{2}}\{-6x(x-1)\}dx$

$=\int_{0}^{\frac{1}{2}}(6x^2-6x)dx$

$=\left[2x^3-3x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=-\frac{1}{2}$

88) ⑤

움직인 거리는 $\frac{1}{2}+3+1+|-1|=\frac{11}{2}$

[참고] $t=6$ 일 때, 점 P 의 위치는 $\frac{1}{2}+3+1+(-1)=\frac{7}{2}$

89) ⑤

[출제의도] 속도를 적분하면 이동거리가 됨을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $S_1=S_2$이면 P, Q의 이동거리가 같으므로 $t=b$에서 만난다.

ㄴ. $S_1>S_2$이면 P의 이동거리가 Q의 이동거리보다 크므로

$\int_0^b f(t)dt>\int_0^b g(t)dt$이다.

ㄷ. $S_1<S_2$이면 P가 Q보다 빨리 가다가 Q가 P를 추월하여 지나가므로 이동거리가 같은 지점이 반드시 생긴다. 그 때의 시간을 $t=c$라 하면 $\int_0^c f(t)dt=\int_0^c g(t)dt$인 c가 열린구간 $(a,\ b)$ 안에 존재한다.

90) 64

$f(t)=2t^2-8t$, $g(t)=t^3-10t^2+24t$ 라 하자.

x초 후의 두 점 P, Q 사이의 거리는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$\left|\int_0^x f(t)dt-\int_0^x g(t)dt\right|=\left|\int_0^x\{f(t)-g(t)\}dt\right|$

$h(x)=\int_0^x\{f(t)-g(t)\}dt$ 라 하자.

$h'(x)=f(x)-g(x)$

$=(2x^2-8x)-(x^3-10x^2+24x)$

$=-x^3+12x^2-32x$

$=-x(x-4)(x-8)$

$h'(x)=0$에서 $x=0,\ 4,\ 8$

$h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$	8
$h'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$h(x)$	0	↘	$h(4)$	↗	$h(8)$

$h(x)=\int_0^x\{(2t^2-8t)-(t^3-10t^2+24t)\}dt$

$=\int_0^x(-t^3+12t^2-32t)dt$

$=-\frac{1}{4}x^4+4x^3-16x^2$

$x=4$일 때

$|h(x)|=\left[\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2\right]_0^4=64$

$x=8$일 때

$|h(x)|=\left[\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2\right]_0^8=0$

따라서 $|h(x)|$는 $x=4$에서 최댓값 64를 갖는다.

91) ①

[출제의도] 수직선 위를 움직이는 점의 움직인 거리를 구할 수 있는가?

$\int_0^4|-2t+4|dt$

$=\int_0^2(-2t+4)dt+\int_2^4(2t-4)dt$

$=\left[-t^2+4t\right]_0^2+\left[t^2-4t\right]_2^4$

$=(-4+8)+\{(16-16)-(4-8)\}$

$=4+4=8$

92) ③

[출제의도] 정적분을 이용하여 문제해결하기

$t=2$에서 점 P의 운동방향이 바뀌었으므로

$v(2)=4-2a=0$, $a=2$

점 P가 시각 $t=0$부터 $t=6$까지 움직인 거리는

$\int_0^6|v(t)|dt=\int_0^2(4-2t)dt+\int_2^6(-4+2t)dt$

$=\left[4t-t^2\right]_0^2+\left[-4t+t^2\right]_2^6=4+16=20$

93) ③

[출제의도] 정적분을 활용하여 속도와 거리 이해하기

두 점 P, Q가 출발 후 $t=a\ (a>0)$에서 다시 만나므로

$\int_0^a(3t^2+6t-6)dt=\int_0^a(10t-6)dt$

$a^3+3a^2-6a=5a^2-6a$

$a^3-2a^2=a^2(a-2)=0$

따라서 $a=2$

94) 12

$3t^2+t=2t^2+3t$에서 $t^2-2t=0$이므로 $t=2$에서 두 점 P, Q의 속도가 같아진다.

$t=2$일 때 두 점 P, Q의 위치를 구해보면

$\int_0^2 v_1(t)dt=\int_0^2(3t^2+t)dt=\left[t^3+\frac{1}{2}t\right]_0^2=10$

$\int_0^2 v_2(t)dt=\int_0^2(2t^2+3t)dt=\left[\frac{2}{3}t^3+\frac{3}{2}t\right]_0^2=\frac{34}{3}$

이므로 두 점 P, Q 사이의 거리 a는 $a=\left|10-\frac{34}{3}\right|=\frac{4}{3}$이다.

따라서 $9a=12$이다.

95) ①

[출제의도] 정적분을 활용하여 점이 움직인 거리를 구한다.

시각 t에서의 점 P의 속도 $v(t)$는 $v(t)=\frac{dx}{dt}=4t^3+3at^2$

$v(2)=32+12a=0$에서 $a=-\frac{8}{3}$이므로 $v(t)=4t^3-8t^2$

$t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$s=\int_0^2|4t^3-8t^2|dt=\int_0^2(8t^2-4t^3)dt=\left[\frac{8}{3}t^3-t^4\right]_0^2=\frac{16}{3}$

96) 10

[출제의도] 속도와 움직인 거리를 이해하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

점 P의 운동방향이 바뀌는 시각에서의 속도는 0이므로

$v(t)=-3t^2+3t+6=-3(t+1)(t-2)=0$

$t\geq0$이므로 $t=2$

$0\leq t\leq2$일 때 $v(t)\geq0$이므로

점 P가 $t=0$에서 $t=2$까지 움직인 거리는

$\int_0^2 v(t)=\int_0^2(-t^3+3t+6)dt$

$= \left[-t^3+\frac{3}{2}t^2+6t\right]_0^2 = -8+6+12=10$

97) 8

[출제의도] 속도와 거리의 성질을 이용하여 거리 구하는 문제를 해결한다.

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 속도는 0이므로

$v(t)=3t^2-12t+9=3(t-1)(t-3)=0$, $t=1$ 또는 $t=3$

$0 \le t < 1$에서 $v(t)>0$,

$1<t<3$에서 $v(t)<0$,

$t>3$에서 $v(t)>0$

이므로 점 P는 $t=1$일 때 처음으로 운동 방향을 바꾸고 $t=3$일 때 다시 운동 방향을 바꾼다.

그러므로 점 P가 A에서 방향을 바꾼 순간부터 다시 A로 돌아올 때까지 움직인 거리는 점 P가 $t=1$부터 $t=3$까지 이동한 거리의 2배이다.

따라서 구하는 값은

$2\int_1^3 |v(t)|dt = 2\int_1^3 (-3t^2+12t-9)dt$

$=2\left[-t^3+6t^2-9t\right]_1^3=8$

[다른 풀이]

점 P가 다시 A로 돌아올 때의 시각을 $t=a$(단, $a>1$)라 하면

$\int_1^a v(t)dt=0$이므로

$\int_1^a v(t)dt = \int_1^a (3t^2-12t+9)dt$

$=\left[t^3-6t^2+9t\right]_1^a = a^3-6a^2+9a-4$

$=(a-1)^2(a-4)=0$

그러므로 $t=4$일 때 점 P가 다시 A로 돌아온다. 따라서

$\int_1^4 |v(t)|dt = -\int_1^3 v(t)dt + \int_3^4 v(t)dt$

$=-\int_1^3 (3t^2-12t+9)dt + \int_3^4 (3t^2-12t+9)dt$

$=-\left[t^3-6t^2+9t\right]_1^3 + \left[t^3-6t^2+9t\right]_3^4$

$=8$

98) ③

[출제의도] 그래프를 이용하여 정적분과 거리의 관계를 추론한다.

$\int_0^a |v(t)|dt = s_1$, $\int_a^b |v(t)|dt = s_2$, $\int_b^c |v(t)|dt = s_3$이라 하자.

점 P는 출발한 후 시각 $t=a$에서 처음으로 운동 방향을 바꾸므로

$-8=\int_0^a v(t)dt = -s_1$에서 $s_1=8$

점 P의 시각 $t=c$에서의 위치가 -6이므로

$-6=\int_0^c v(t)dt = (-8)+s_2-s_3$

에서 $s_2-s_3=2$ …… ㉠

$\int_0^b v(t)dt = \int_b^c v(t)dt$ 이므로

$-8+s_2=-s_3$, 즉 $s_2+s_3=8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $s_2=5$, $s_3=3$

따라서 구하는 거리는 5이다.

99) ④

[출제의도] 수직선 위를 움직이는 점의 속도가 주어져 있을 때 위치를 구할 수 있는가?

$v(t)=-4t+5$ 이므로

점 P의 시각 t에서의 위치를 $x(t)$라 하면

$x(t)=-2t^2+5t+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $x(3)=11$이므로

$-2\times 9+5\times 3+C=11$ 에서 $C=14$

$\therefore\ x(0)=C=14$

100) ③

점 P가 움직이는 방향을 바꾸는 시각을 k $(k>0)$이라 하면

$v(k)=k^2-ak=0$에서 $k=a$

따라서 점 P가 시각 $t=0$일 때부터 시각 $t=a$일 때까지 움직인 거리는

$\int_0^a |v(t)|dt = \int_0^a (-t^2+at)dt$

$=\left[-\frac{t^3}{3}+\frac{at^2}{2}\right]_0^a = -\frac{a^3}{3}+\frac{a^3}{2}=\frac{a^3}{6}$

이므로 $\frac{a^3}{6}=\frac{9}{2}$에서 $a^3=27$

따라서 $a=3$

101) ③

$t=3$에서 $t=k(k>3)$까지 움직인 거리는

$\int_3^k |2t-6|dt = \int_3^k (2t-6)dt = \left[t^2-6t\right]_3^k$

$=k^2-6k+9=25$

$k^2-6k-16=0$이므로 $k=8$

102) ③

[출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

점 P의 시각 $t=1$에서의 위치와

점 P의 시각 $t=k$ $(k>1)$에서의 위치가 서로 같으므로

시각 $t=1$에서 $t=k$까지 점 P의 위치의 변화량은 0이다.

$\int_1^k v(t)dt = \int_1^k (4t-10)dt$

$=\left[2t^2-10t\right]_1^k$

$=(2k^2-10k)-(2-10)$

$=2k^2-10k+8$

$=2(k-1)(k-4)=0$

따라서 $k=4$

103) 6

[출제의도] 수직선 위를 움직이는 점의 속도를 이용하여 점의 위치의 변화량을 구할 수 있는가?

시각 t에서 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면 시각 $t=0$에서 점 P의 위치가 0이므로

$v(t)=3t^2-4t+k$에서

$x(t)=t^3-2t^2+kt$

이때 $x(1)=-3$에서

$-1+k=-3$, $k=-2$

따라서 $x(t)=t^3-2t^2-2t$이고,

$x(3)=27-18-6=3$이다.

그러므로 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$x(3)-x(1)=3-(-3)=6$

104) ⑤

[출제의도] 정적분을 활용하여 추론하기

ㄱ. $v(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$

$t<2$일 때 $v(t)<0$

$t=2$일 때 $v(2)=0$

$t>2$일 때 $v(t)>0$

$t=2$에서 점 P의 움직이는 방향이 바뀐다. (참)

ㄴ. 시각 t에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면

$x(2)=0+\int_0^2(3t^2-6t)\,dt=\left[t^3-3t^2\right]_0^2=-4$ (참)

ㄷ. 시각 t에서의 점 P의 가속도를 $a(t)$라 하면

$a(t)=6t-6$

$6t-6=12,\ t=3$

$t=0$에서 $t=3$까지 움직인 거리를 s라 하면

$s=\int_0^3|3t^2-6t|\,dt$

$=-\int_0^2(3t^2-6t)\,dt+\int_2^3(3t^2-6t)\,dt$

$=4+\left[t^3-3t^2\right]_2^3=8$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

105) ③

[출제의도] 도함수를 활용하여 수직선 위를 움직이는 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 가속도를 $a(t)$라 하면

$v(t)=-4t^3+12t^2$ 이므로

$a(t)=v'(t)=-12t^2+24t$

시각 $t=k$에서 점 P의 가속도가 12이므로

$-12k^2+24k=12$

$k^2-2k+1=0$

$(k-1)^2=0$

$k=1$

한편, $v(t)=-4t^3+12t^2=-4t^2(t-3)$이므로

$3\le t\le 4$일 때 $v(t)\le 0$이다.

따라서 $t=3$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_3^4|v(t)|\,dt=\int_3^4|-4t^3+12t^2|\,dt$

$=\int_3^4(4t^3-12t^2)\,dt$

$=\left[t^4-4t^3\right]_3^4$

$=0-(-27)=27$

106) ③

[출제의도] 수직선 위를 움직이는 점의 운동에 대하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

$x(0)=0,\ x(1)=0$이므로

점 P의 위치는 $t=0$일 때 수직선의 원점이고, $t=1$일 때도 수직선의 원점이다.

또, $\int_0^1|v(t)|\,dt=2$이므로

점 P가 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리가 2이다.

ㄱ. 점 P의 $t=0$에서 $t=1$까지 위치의 변화량이 0이므로

$\int_0^1 v(t)dt=0$ (참)

ㄴ. $|x(t_1)|>1$이면

점 P와 원점 사이의 거리가 1보다 큰 시각 t_1이 존재하므로

점 P가 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리가 2보다 크다. (거짓)

ㄷ. $0\le t\le 1$인 모든 시각 t에서

점 P와 원점 사이의 거리가 1보다 작고,

점 P가 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리가 2이므로

점 P는 $0<t<1$에서 적어도 한 번 원점을 지나간다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

107) 20

[출제의도] 정적분을 활용하여 점이 움직인 거리를 구한다.

$0\le t\le 3$일 때 $v(t)\ge 0$,

$3\le t\le 4$일 때 $v(t)\le 0$이므로

시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^4|v(t)\}|\,dt=\int_0^3|v(t)\}|\,dt+\int_3^4|v(t)\}|\,dt$

$=\int_0^3(12-4t)\,dt+\int_3^4(4t-12)\,dt$

$=18+2=20$

108) ①

[출제의도] 속도와 위치의 변화량을 이해하여 점이 움직인 거리를 구한다.

시각 $t=0$에서의 점 P의 위치와 시각 $t=6$에서의 점 P의 위치가 서로 같으므로 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 점 P의 위치의 변화량이 0이다. 점 P의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=3t^2+at$이므로

$\int_0^6 v(t)\,dt=\int_0^6(3t^2+at)\,dt$

$=\left[t^3+\frac{a}{2}t^2\right]_0^6$

$=36\left(6+\frac{a}{2}\right)=0$

$a=-12$

$v(t)=3t^2-12t$이므로 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 움직인 거리는

$\int_0^6|v(t)|\,dt=\int_0^6|3t^2-12t|\,dt$

$=\int_0^4(-3t^2+12t)\,dt+\int_4^6(3t^2-12t)\,dt$

$=\left[-t^3+6t^2\right]_0^4+\left[t^3-6t^2\right]_4^6$

$=32+32=64$

109) ②

[출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

점 P의 시각 $t(t\ge 0)$에서의 위치를 $x(t)$라 하면

점 P의 시각 $t=0$에서의 위치는 0이므로 $x(0)=0$

$x(t)=x(0)+\int_0^t v(t)\,dt$

$=\int_0^t 3(t-2)(t-a)\,dt$

$=\int_0^t\{3t^2-3(a+2)t+6a\}\,dt$

$=t^3-\frac{3}{2}(a+2)t^2+6at$

점 P가 $0<t<2,\ t>a$에서 양의 방향으로,

$2<t<a$에서 음의 방향으로 움직이고

$t>0$에서 점 P의 위치가 0이 되는 순간이 한 번 뿐이므로 $x(a)=0$

$a^3-\frac{3}{2}(a+2)a^2+6a^2=0$에서 $a>2$이므로 $a=6$

따라서 $v(8)=3\times 6\times 2=36$

110) ⑤

[출제의도] 수직선 위를 움직이는 점의 움직인 거리를 구할 수 있는가?

점 P의 시각 $t(t \ge 0)$에서의 위치를 $x_1(t)$라 하면

$$x_1(t) = \int_0^t (2-t)\,dt = \left[2t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^t = 2t - \frac{1}{2}t^2$$

따라서 출발 후 점 P가 원점으로 돌아온 시각은

$2t - \frac{1}{2}t^2 = 0,\ t^2 - 4t = 0$

$t(t-4) = 0$

$t = 4$

이므로

출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_0^b |3t|\,dt = \int_0^4 3t\,dt = \left[\frac{3}{2}t^2\right]_0^4 = 24$$

111) ④

시각 t에서의 점P의 위치를 $x(t)$라 하면

$x(t) = t^3 + \frac{1}{2}at^2 + C$ (단, C는 적분상수)

$x(0) = 0$이므로 $C = 0$이다.

$|x(2) - 6| = 10$

$|(2a+8) - 6| = 10$

$\therefore a = 4$ 또는 $a = -6$

$a > 0$이므로 $a = 4$이다.

112) 80

[출제의도] 정적분을 활용하여 수직선 위의 점이 움직인 거리를 구한다.

점 P의 시각 t에서의 가속도 $a(t)$는

$a(t) = v'(t) = 12t^2 - 48$

$a(k) = 12(k^2 - 4) = 0$에서 $k > 0$이므로 $k = 2$이다.

$0 \le t \le 2$일 때, $v(t) \le 0$이므로

시각 $t = 0$에서 $t = 2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2 |v(t)|\,dt = \int_0^2 (-4t^3 + 48t)\,dt$$

$$= \left[-t^4 + 24t^2\right]_0^2 = -16 + 96 = 80$$

113) 17

[출제의도] 속도와 가속도를 이용하여 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

$t \ge 2$일 때

$v(t) = 3t^2 + 4t + C$ (C는 적분상수)

이때 $v(2) = 0$이므로

$12 + 8 + C = 0$에서 $C = -20$

즉, $0 \le t \le 3$에서

$$v(t) = \begin{cases} 2t^3 - 8t & (0 \le t \le 2) \\ 3t^2 + 4t - 20 & (2 \le t \le 3) \end{cases}$$

따라서 $t = 0$에서 $t = 3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v(t)|\,dt$$

$$= \int_0^2 |v(t)|\,dt + \int_2^3 |v(t)|\,dt$$

$$= -\int_0^2 v(t)\,dt + \int_2^3 v(t)\,dt$$

$$= -\int_0^2 (2t^3 - 8t)\,dt + \int_2^3 (3t^2 + 4t - 20)\,dt$$

$$= -\left[\frac{1}{2}t^4 - 4t^2\right]_0^2 + \left[t^3 + 2t^2 - 20t\right]_2^3$$

$= -(-8) + 9$

$= 17$

114) ③

[출제의도] 정적분을 활용하여 곡선과 x축 사이의 넓이를 구한다.

구하는 부분의 넓이는

$$\int_0^2 (|x^2 - 2x| + 1)\,dx = \int_0^2 (-x^2 + 2x + 1)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x\right]_0^2 = \frac{10}{3}$$

115) ①

[출제의도] 부정적분 이해하기

$f(x) = \int (3x^2 - 4x + 1)\,dx = x^3 - 2x^2 + x + C$ (C는 적분상수)

함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$\int_0^x f(t)dt = \left[F(t)\right]_0^x = F(x) - F(0)$에서

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = F'(0) = f(0)$$

$f(0) = 1$이므로 $C = 1$

따라서 $f(2) = 8 - 8 + 2 + 1 = 3$

116) 4

두 곡선 $y = 3x^3 - 7x^2$과 $y = -x^2$을 연립하면

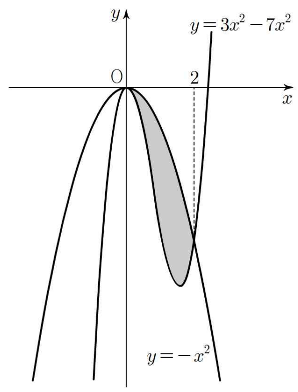
$x = 0$(중근) 또는 $x = 2$

를 얻는다. 따라서 아래 그림으로부터 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^2 (-x^2 - 3x^3 + 7x^2)\,dx = \int_0^2 (-3x^3 + 6x^2)\,dx$$

$$= \left[-\frac{3}{4}x^4 + 2x^3\right]_0^2$$

$= (-12) + 16 = 4$



117) ②

$xf(x) - f(x) = 3x^4 - 3x$ 에서

$(x-1)f(x) = 3x(x-1)(x^2 + x + 1)$

$\therefore\ f(x) = 3x(x^2 + x + 1)$

$$\therefore\ \int_{-2}^2 f(x)dx = \int_{-2}^2 (3x^3 + 3x^2 + 3x)dx$$

$$= 2\int_0^2 3x^2 dx$$

$$= 2\left[x^3\right]_0^2$$

$= 16$

118) ⑤

[출제의도] 함수의 미분가능성과 그래프를 활용하여 도형의 넓이를 추론한다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
함수 $f(x)$는 $x=k$에서 미분가능하다.
이때 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 연속이므로
$f(k)=\lim\limits_{x\to k-}f(x)=ak$
한편, 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 미분가능하므로
$f'(k)=\lim\limits_{x\to k-}\dfrac{f(x)-f(k)}{x-k}=\lim\limits_{x\to k-}\dfrac{ax-ak}{x-k}=a$
ㄱ. $f'(k)=a$이고 $a=1$이므로 $f'(k)=1$이다. (참)
ㄴ. $g(x)=-x^2+4bx-3b^2$이라 하자.
직선 $y=ax$는 원점에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 기울기가 양수인 접선 중 하나이고, 접점의 좌표는 $(k,\ g(k))$이다.
$g'(x)=-2x+4b$이므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(k,\ g(k))$에서의 접선의 방정식은
$y-(-k^2+4bk-3b^2)=(-2k+4b)(x-k)$
이 직선이 원점을 지나므로
$0-(-k^2+4bk-3b^2)=(-2k+4b)(0-k)$
$k^2-3b^2=0$
$k>0,\ b>0$이므로 $k=\sqrt{3}b$
$k=3$이므로 $b=\sqrt{3}$이고
$a=g'(k)=-2k+4b=(4-2\sqrt{3})b$
$=-6+4\sqrt{3}$ (참)
ㄷ. ㄴ에서

$$f(x)=\begin{cases}(4-2\sqrt{3})bx & (x<\sqrt{3}b)\\ -x^2+4bx-3b^2 & (x\ge\sqrt{3}b)\end{cases}$$

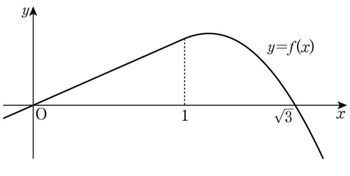
이고

$$f'(x)=\begin{cases}(4-2\sqrt{3})b & (x<\sqrt{3}b)\\ -2x+4b & (x\ge\sqrt{3}b)\end{cases}$$

$f(k)=f'(k)$에서 $f(\sqrt{3}b)=f'(\sqrt{3}b)$이므로
$-3b^2+4\sqrt{3}b^2-3b^2=-2\sqrt{3}b+4b$
따라서 $b=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이고

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4\sqrt{3}-6}{3}x & (x<1)\\ -x^2+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}x-1 & (x\ge1)\end{cases}$$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축은 $x=0,\ x=\sqrt{3}$에서 만나므로 구하는 넓이는

$$\int_0^{\sqrt{3}}f(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times\frac{4\sqrt{3}-6}{3}+\int_1^{\sqrt{3}}\left(-x^2+\frac{4\sqrt{3}}{3}x-1\right)dx$$

$$=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2-x\right]_1^{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}+\frac{4-2\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{3}\ (\text{참})$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

119) 66

[출제의도] 정적분을 활용하여 문제를 해결한다.

$g(0)=0$이므로

$$\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{f(x-p)-f(-p)}{x}=f'(-p)$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{f(x+p)-f(p)}{x}=f'(p)$$

$g'(0)=0$이므로 $f'(-p)=f'(p)=0$
$f'(x)$는 이차항의 계수가 3인 이차식이므로
$f'(x)=3(x+p)(x-p)=3x^2-3p^2$
따라서 $f(x)=x^3-3p^2x+C$(단, C는 적분상수)
$f(0)=1$이므로 $f(x)=x^3-3p^2x+1$
$x\ge0$에서 $g(x)=f(x+p)-f(p)$이므로

$$\int_0^p g(x)\,dx=\int_0^p\{f(x+p)-f(p)\}\,dx$$

$$=\int_0^p(x^3+3px^2)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}+px^3\right]_0^p=\frac{5}{4}p^4=20$$

$p>0$이므로 $p=2$이고, $f(x)=x^3-12x+1$
따라서 $f(5)=66$

120) ②

[출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

$f'(x)=3x^2-12x+8$이므로
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{B}(k,\ f(k))$에서의 접선의 방정식은
$y-(k^3-6k^2+8k+1)=(3k^2-12k+8)(x-k)$
이 직선이 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$을 지나므로
$2k^3-6k^2=2k^2(k-3)=0$
에서 $k>0$이므로 $k=3$이고
직선 AB의 방정식은 $y=-x+1$

$$S_1=\int_0^3|f(x)-(-x+1)|dx=\int_0^3\{f(x)+x-1\}dx$$

$$S_2=\int_0^3|g(x)-(-x+1)|dx=\int_0^3\{-g(x)-x+1\}dx$$

$S_1=S_2$에서

$$\int_0^3\{f(x)+x-1\}dx=\int_0^3\{-g(x)-x+1\}dx$$

$$\int_0^3 g(x)dx=\int_0^3\{-f(x)-2x+2\}dx$$

$$=\int_0^3(-x^3+6x^2-10x+1)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^3-5x^2+x\right]_0^3$$

$$=-\frac{81}{4}+54-45+3=-\frac{33}{4}$$

121) 39

[출제의도] 정적분의 성질을 활용하여 함숫값을 구할 수 있는가

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라 하면
$F'(x)=f(x)$ 이고

$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt=F(x)-F(0)$

이므로

$g'(x)=f(x)$

그러므로 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 삼차함수이다.

조건에서 $x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq g(4)$이므로 삼차함수 $g(x)$는 구간 $[1,\ \infty)$에서 $x=4$일 때 최소이자 극소이다. …… ㉠

즉, $g'(4)=f(4)=0$이므로

$f(x)=(x-4)(x-a)$ (a는 상수) …… ㉡

로 놓을 수 있다.

(ⅰ) $g(4)\geq 0$인 경우

$x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq g(4)\geq 0$이므로 이 범위에서 $|g(x)|=g(x)$이다.

조건에서 $x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여

$|g(x)|\geq|g(3)|$, 즉 $g(x)\geq g(3)$이어야 한다. …… ㉢

그런데 ㉠에서 $g(3)>g(4)$이므로 ㉢을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $g(4)<0$인 경우

$x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $|g(x)|\geq|g(3)|$이려면

$g(3)=0$ …… ㉣

이어야 한다.

㉡에서 $f(x)=x^2-(a+4)x+4a$이므로

$F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{a+4}{2}x^2+4ax+C$ (단, C는 적분상수)

그러므로

$g(x)=F(x)-F(0)=\frac{1}{3}x^3-\frac{a+4}{2}x^2+4ax$

㉣에서

$g(3)=9-\frac{9}{2}(a+4)+12a=0$

$\frac{15}{2}a=9$

$a=\frac{6}{5}$

따라서 $f(x)=(x-4)\left(x-\frac{6}{5}\right)$이므로

$f(9)=(9-4)\left(9-\frac{6}{5}\right)$

$=5\times\frac{39}{5}=39$

122) ②

[출제의도] 정적분을 이용하여 곡선과 좌표축으로 둘러싸인 두 영역의 넓이를 구할 수 있는가

$f(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$이므로 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(2,\ 0)$, $(3,\ 0)$이다.

이때

(A의 넓이)$=\int_0^2 f(x)\,dx$,

(B의 넓이)$=\int_2^3\{-f(x)\}\,dx$

이므로

(A의 넓이)$-$(B의 넓이)

$=\int_0^2 f(x)\,dx-\int_2^3\{-f(x)\}\,dx$

$=\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^3 f(x)\,dx$

$=\int_0^3 f(x)\,dx=3$

이어야 한다.

이때

$\int_0^3 f(x)\,dx=k\int_0^3(x^3-5x^2+6x)\,dx$

$=k\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_0^3=k\left(\frac{81}{4}-45+27\right)=\frac{9}{4}k$

$\therefore\ \frac{9}{4}k=3$

$\therefore\ k=\frac{4}{3}$

123) ①

$f(1+x)+f(1-x)=0$에 $x=0$을 대입하면 $f(1)=0$

$f(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$ (단, a, b는 상수)

조건 (나)에서

$\int_{-1}^3 f'(x)dx=f(3)-f(-1)=12$ …… ㉠

$f(1+x)+f(1-x)=0$에 $x=2$를 대입하면

$f(3)+f(-1)=0$ …… ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

$f(3)=6,\ f(-1)=-6$

$f(3)=2(9+3a+b)=6,\ 3a+b=-6$ …… ㉢

$f(-1)=-2(1-a+b)=-6,\ a-b=-2$…… ㉣

두 식 ㉢, ㉣을 연립하면 $a=-2,\ b=0f(x)=x(x-1)(x-2)$

따라서 $f(4)=24$

124) 54

$f(x)=|x^2-3|-2x$

$=\begin{cases} x^2-2x-3 & (x\leq-\sqrt{3}\text{ 또는 } x\geq\sqrt{3}) \\ -x^2-2x+3 & (-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}) \end{cases}$

x_1, x_4는 이차방정식 $x^2-2x-3=-x+t$의 두 근이므로 근과 계수와의 관계에 의하여

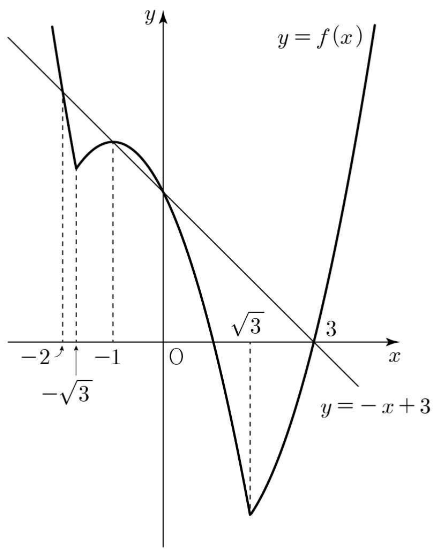
$x_1+x_4=1,\ x_1x_4=-t-3$

$x_4-x_1=5$이므로 $x_1=-2,\ x_4=3$

$x_1x_4=-t-3=-6,\ t=3$

x_2, x_3은 이차방정식 $-x^2-2x+3=-x+3$의 두 근이므로

$x_2=-1,\ x_3=0$



닫힌구간 $[0, 3]$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인

부분의 넓이는

$$\int_0^3 |f(x)-g(x)|dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{3}}\{(-x+3)-(-x^2-2x+3)\}dx$$

$$+\int_{\sqrt{3}}^3\{(-x+3)-(x^2-2x-3)\}_{dx}$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x\right]_{\sqrt{3}}^3$$

$$=\frac{27}{2}-4\sqrt{3}$$

따라서 $p\times q=\frac{27}{2}\times 4=54$

125) 10

조건 (가)의

$$\int_1^x f(t)dt=xf(x)-2x^2-1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

에서 양변을 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-4x,\quad xf'(x)=4x$

$x\neq 0$인 모든 실수에 대하여 $\quad f'(x)=4$

$f'(x)$는 다항함수이므로 모든 실수에 대하여 $\quad f'(x)=4$

$\therefore\ f(x)=4x+C_1$ (C_1는 적분상수)

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $\quad f(1)=3$

$\therefore\ f(x)=4x-1$

$F(x)=\int f(x)\,dx=2x^2-x+a$ (a는 적분상수)

조건 (나)에서

$f(x)G(x)+F(x)g(x)=F'(x)G(x)+F(x)G'(x)$

$=\{F(x)G(x)\}'$

$=8x^3+3x^2+1$

이므로

$F(x)G(x)=2x^4+x^3+x+C_2$ (C_2는 적분상수)

$F(x)$, $G(x)$가 모두 다항함수이고 $F(x)$가 최고차항의 계수가 2인 이차함수이므로 $G(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

$G(x)=x^2+bx+c$라 하면

$(2x^2-x+a)(x^2+bx+c)=2x^4+x^3+x+C_2$

양변의 3차항의 계수를 비교하면

$-1+2b=1$에서 $\quad b=1$

양변의 2차항의 계수를 비교하면

$a-b+2c=0$에서 $\quad a=1-2c$

양변의 1차항의 계수를 비교하면

$ab-c=1$에서 $\quad a=1+c$

$\therefore\ a=1,\ c=0,\ G(x)=x^2+x$

$$\therefore\ \int_1^3 g(x)dx=G(3)-G(1)=12-2=10$$

126) ③

[출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 함수를 추론한다.

$f'(2)=0$이므로 실수 k에 대하여

$f(x)=x^2-4x+k$라 하자.

ㄱ. 만약 $f(2)\geq 0$이면 $x>2$일 때 $f(x)>0$이므로

정적분과 넓이의 관계에 의하여 $\int_2^4 f(x)\,dx>0$,

즉 $\int_4^2 f(x)\,dx=-\int_2^4 f(x)\,dx<0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다. 즉 $f(2)<0$ (참)

ㄴ. $\int_4^3 f(x)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+kx\right]_4^3=-k+\frac{5}{3}$

$-k+\frac{5}{3}\geq 0$이므로 $k\leq\frac{5}{3}$

$$\int_4^2 f(x)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+kx\right]_4^2=-2k+\frac{16}{3}$$

$$\int_4^3 f(x)\,dx-\int_4^2 f(x)\,dx=k-\frac{11}{3}$$

$k\leq\frac{5}{3}$에서 $k-\frac{11}{3}\leq -2<0$이므로

$\int_4^3 f(x)\,dx<\int_4^2 f(x)\,dx$ (거짓)

ㄷ. ㄴ에서 $k\leq\frac{5}{3}$이므로 $f(3)=k-3\leq-\frac{4}{3}<0$

$f(3)=f(1)<0$이므로 구간 $[1,\ 3]$에서 $f(x)<0$이고,

$n=1$ 또는 $n=2$일 때 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=n$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $-\int_n^3 f(x)\,dx$와 같다.

즉 $\int_3^n f(x)\,dx=-\int_n^3 f(x)\,dx>0 \quad\cdots\cdots ㉠$

$$\int_4^5 f(x)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+kx\right]_4^5=k+\frac{7}{3}$$

$k+\frac{7}{3}\geq 0$에서 $k\geq-\frac{7}{3}$이므로

$f(5)=5+k\geq\frac{8}{3}>0$

구간 $[5,\ \infty)$에서 $f(x)>0$이다.

그러므로 6 이상의 모든 자연수 n에 대하여

곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=5$, $x=n$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\int_5^n f(x)\,dx$와 같다.

즉 $\int_5^n f(x)\,dx>0\quad\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $\int_4^3 f(x)\,dx\geq 0$, $\int_4^5 f(x)\,dx\geq 0$이면

함수 $f(x)$가 주어진 조건을 만족시킨다.

따라서 $-\frac{7}{3}\leq k\leq\frac{5}{3}\quad\cdots\cdots ㉢$

$\int_4^6 f(x)\,dx=2k+\frac{32}{3}$이므로 ㉢에서

$6\leq\int_4^6 f(x)\,dx\leq 14$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

127) 24

[출제의도] 정적분과 미분의 관계를 활용하여 문제를 해결한다.

$2x^2f(x)=3\int_0^x (x-t)\{f(x)+f(t)\}dt$에서

$$2x^2f(x)=3\int_0^x (x-t)f(x)\,dt+3\int_0^x (x-t)f(t)\,dt$$

$$=3f(x)\int_0^x (x-t)\,dt+3\int_0^x (x-t)f(t)\,dt$$

$$=3f(x)\left[xt-\frac{1}{2}t^2\right]_0^x+3\int_0^x (x-t)f(t)\,dt$$

$$=\frac{3}{2}x^2f(x)+3\int_0^x (x-t)f(t)\,dt$$

$x^2 f(x) = 6\int_0^x (x-t)f(t)\,dt$

$x^2 f(x) = 6x\int_0^x f(t)\,dt - 6\int_0^x tf(t)\,dt$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2xf(x) + x^2 f'(x) = 6\int_0^x f(t)dt$ …… ㉡

$f'(2) = 4$이므로 다항함수 $f(x)$의 차수는 1 이상이다. 함수 $f(x)$의 차수를 n이라 하고, 최고차항의 계수를 $a\,(a \neq 0)$이라 하자.
㉡의 양변의 최고차항의 계수를 비교하면

$a(2+n) = \dfrac{6a}{n+1}$

$(n+1)(n+2) = 6,\ (n-1)(n+4) = 0$

n은 자연수이므로 $n = 1$

함수 $f(x)$가 일차함수이고 $f'(2) = 4$이므로 $a = 4$

$f(x) = 4x + b$ (단, b는 상수)라 하면 ㉡에서

$2x(4x+b) + 4x^2 = 6\Big[2t^2 + bt\Big]_0^x$

$12x^2 + 2bx = 12x^2 + 6bx$ …… ㉢

모든 실수 x에 대하여 ㉢이 성립하므로 $b = 0$

$f(x) = 4x$이므로 $f(6) = 24$

128) ③

함수 $f(x) = \dfrac{1}{9}x(x-6)(x-9)$에서

$f(x) = \dfrac{1}{9}\left(x^3 - 15x^2 + 54x\right)$

$f'(x) = \dfrac{1}{9}\left(3x^2 - 30x + 54\right) = \dfrac{1}{3}\left(x^2 - 10x + 18\right)$

방정식 $f'(x) = 0$에서 $\quad x = 5 \pm \sqrt{7}$

$0 < t < 6$인 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$는

$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < t) \\ -(x-t) + f(t) & (x \geq t) \end{cases}$

이다.

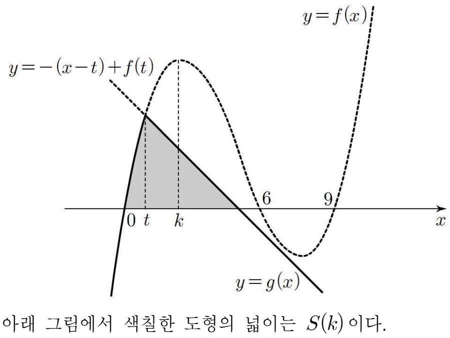
$0 < x < 6$이고, $f'(x) = 0$인 실수 x의 값을 k라 하자.

$f'(k) = 0, \quad k = 5 - \sqrt{7}$

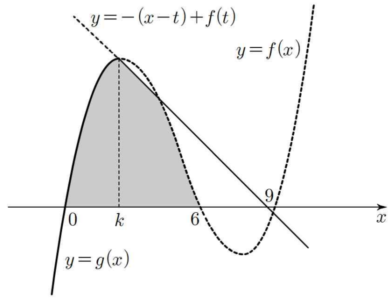
함수 $y = g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 $S(t)$라 하자.

(ⅰ) $0 < t < k$일 때

아래 그림에서 색칠한 도형의 넓이는 $S(t)$ $(0 < t < k)$이다.



아래 그림에서 색칠한 도형의 넓이는 $S(k)$이다.



…… ㉠

위의 그림에 의하여 $0 < t < k$인 모든 실수 t에 대하여 $S(t) < S(k)$ 이다.

(ⅱ) $k \leq t < 6$일 때

직선 $y = -(x-t) + f(t)$의 기울기는 -1이다.

$k \leq x < 6$에서 $f'(x) = -1$인 실수 x를 a라 하자.

$f'(a) = -1$ $(k \leq a < 6)$

$f'(a) = -1$ $\left(5 - \sqrt{7} \leq a < 6\right)$이므로

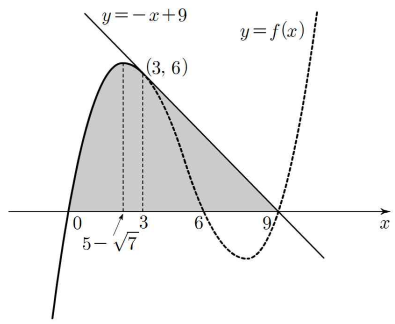
$\dfrac{1}{3}\left(a^2 - 10a + 18\right) = -1,$

$a^2 - 10a + 21 = 0$

$5 - \sqrt{7} \leq a < 6$이므로 $a = 3$

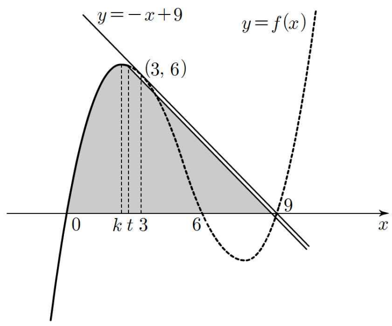
따라서 $f'(3) = -1$이다.

아래 그림에서 색칠한 도형의 넓이는 $S(3)$이다.

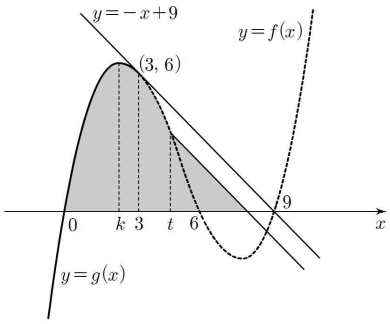


$g'(t) \neq -1$, $k \leq t < 6$인 실수 t에 대하여 색칠한 도형의 넓이는 다음 두 그림과 같다.

(1) $k < t < 3$일 때



(2) $3 < t < 6$일 때



(1), (2)와 ㉠에 의하여 $0<t<6$인 실수 t에 대하여 $S(t)$의 값의 최댓값은 $S(3)$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $S(t)$의 값의 최댓값은

$$S(3)=\int_0^9 g(x)\,dx$$

$$=\int_0^3 f(x)\,dx+\int_3^9 \{-(x-t)+f(t)\}\,dx$$

$$=\frac{1}{9}\left[\frac{1}{4}x^4-5x^3+54x\right]_0^3+\frac{1}{2}\times 6^2$$

$$=\frac{129}{4}$$

[다른 풀이]

함수 $f(x)=\dfrac{1}{9}x(x-6)(x-9)$에서

$$f(x)=\frac{1}{9}(x^3-15x^2+54x)$$

$$f'(x)=\frac{1}{9}(3x^2-30x+54)=\frac{1}{3}(x^2-10x+18)$$

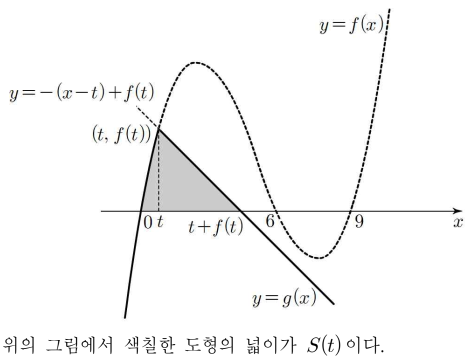
방정식 $f'(x)=0$에서 $x=5\pm\sqrt{7}$

$0<t<6$인 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<t) \\ -(x-t)+f(t) & (x\ge t)\end{cases}$$

이다.

함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 $S(t)$라 하자.



위의 그림에서 색칠한 도형의 넓이가 $S(t)$이다.

$$S(t)=\int_0^{t+f(t)} g(x)\,dx$$

$$=\int_0^t g(x)\,dx+\int_t^{t+f(t)} g(x)\,dx$$

$$=\int_0^t f(x)\,dx+\frac{1}{2}\{f(t)\}^2$$

이므로

$S'(t)=f(t)+f(t)f'(t)=f(t)\{f'(t)+1\}$

$S'(t)=0$에서 $f(t)=0$ 또는 $f'(t)=0$

$0<t<6$인 모든 실수 t에 대하여 $f(t)>0$이다.

$f'(t)=0$에서 $\dfrac{1}{3}(t^2-10t+18)=-1$

$0<t<6$이므로 $f'(t)=0$에서 $t=3$

$0<t<6$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	3	$\cdots$	6
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	최대	↘	

따라서 $S(t)$의 최댓값은 $S(3)$이다.

$$S(3)=\int_0^9 g(x)\,dx$$

$$=\int_0^3 f(x)\,dx+\int_3^9 \{-(x-t)+f(t)\}\,dx$$

$$=\frac{1}{9}\left[\frac{1}{4}x^4-5x^3+54x\right]_0^3+\frac{1}{2}\times 6^2$$

$$=\frac{129}{4}$$

129) 18

[출제의도] 속도와 위치의 관계를 이해하여 상수의 값을 구한다.

시각 t에서 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면

$$x_1(t)=t^3-\frac{15}{2}t^2+kt,\ x_2(t)=-t^3+\frac{9}{2}t^2$$

두 점 P, Q가 출발한 후 한 번만 만나므로 $t>0$에서

방정식 $x_1(t)=x_2(t)$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

$x_1(t)-x_2(t)=t(2t^2-12t+k)=0$에서 $k>0$이고

$t>0$이므로 이차방정식 $2t^2-12t+k=0$은 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-12)^2-4\times2\times k=0$

따라서 $k=18$

130) ③

[출제의도] 정적분을 활용하여 위치의 변화량의 최댓값을 구할 수 있는가

$a\ne0$, $a\ne\dfrac{1}{2}$, $a\ne1$이면 점 P는 출발 후 운동 방향을 세 번 바꾼다.

그러므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(ⅰ) $a=0$일 때

$v(t)=-t^3(t-1)$

이때 점 P는 출발 후 운동 방향을 $t=1$에서 한 번만 바꾸므로 조건을 만족시킨다.

그러므로 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2 -t^3(t-1)\,dt=\int_0^2(-t^4+t^3)\,dt$$

$$=\left[-\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{4}t^4\right]_0^2$$

$$=-\frac{32}{5}+4$$

$$=-\frac{12}{5}$$

(ⅱ) $a=\dfrac{1}{2}$일 때

$$v(t)=-t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2$$

이때 점 P는 출발 후 운동 방향을 $t=\dfrac{1}{2}$에서 한 번만 바꾸므로 조건을 만족시킨다.

그러므로 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$\int_0^2 -t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2 dt$

$=\int_0^2 -\left(t^2-\frac{1}{2}t\right)(t^2-2t+1)dt$

$=\int_0^2 \left(-t^4+\frac{5}{2}t^3-2t^2+\frac{1}{2}t\right)dt$

$=\left[-\frac{1}{5}t^5+\frac{5}{8}t^4-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{4}t^2\right]_0^2$

$=-\frac{32}{5}+10-\frac{16}{3}+1$

$=-\frac{32}{5}-\frac{16}{3}+11$

$=\frac{(-96)+(-80)+165}{15}$

$=-\frac{11}{15}$

(iii) $a=1$일 때

$v(t)=-t(t-1)^2(t-2)$

이때 점 P는 출발 후 운동방향을 $t=2$에서 한 번만 바꾸므로 조건을 만족시킨다. 그러므로 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$\int_0^2 -t(t-1)^2(t-2)dt$

$=\int_0^2 -t(t^2-2t+1)(t-2)dt$

$=\int_0^2 (-t^4+4t^3-5t^2+2t)dt$

$=\left[-\frac{1}{5}t^5+t^4-\frac{5}{3}t^3+t^2\right]_0^2$

$=-\frac{32}{5}+16-\frac{20}{3}+4$

$=-\frac{32}{5}-\frac{40}{3}+20$

$=\frac{(-96)+(-200)+300}{15}$

$=\frac{4}{15}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은 $\frac{4}{15}$이다.

131) ②

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v(t)=0$

$v(t)=t^2-4t+3=(t-1)(t-3)=0$

점 P가 $t=1$, $t=3$에서 운동 방향을 바꾸므로 $a=3$

점 P가 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 움직인 거리는

$\int_0^3 |v(t)|dt$

$=\int_0^1 v(t)dt+\int_1^3 \{-v(t)\}dt$

$=\int_0^1 (t^2-4t+3)dt+\int_1^3 (-t^2+4t-3)dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_1^3$

$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

132) ⑤

두 점 P, Q는 시각 $t=0$일 때 각각 점 A(1), 점 B(8)에서 출발하여 수직선 위를 움직인다. 시각 t에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하자.

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도가 각각 $v_1(t)=3t^2+4t-7$, $v_2(t)=2t+4$이므로

$x_1(t)=1+\int_0^t (3t^2+4t-7)dt=t^3+2t^2-7t+1$

$x_2(t)=8+\int_0^t (2t+4)dt=t^2+4t+8$

두 점 P, Q 사이의 거리가 4이므로

$|x_1(t)-x_2(t)|=4$, $\quad |t^3+t^2-11t-7|=4$

(i) $t^3+t^2-11t-7=-4$일 때

$t^3+t^2-11t-3=0$, $\quad (t-3)(t^2+4t+1)=0$

$t>0$이므로 $\quad t=3$

(ii) $t^3+t^2-11t-7=4$일 때

$t^3+t^2-11t-11=0$, $\quad (t+1)(t^2-11)=0$

$t>0$이므로 $\quad t=\sqrt{11}$

(i), (ii)에 의하여 $t=3$일 때 두 점 P, Q 사이의 거리가 처음으로 4가 된다.

점 P가 $t=0$에서 $t=3$까지 움직인 거리는

$\int_0^3 |v_1(t)|dt$

$=\int_0^3 |3t^2+4t-7|dt$

$=-\int_0^1 (3t^2+4t-7)dt+\int_1^3 (3t^2+4t-7)dt$

$=-\left[t^3+2t^2-7t\right]_0^1+\left[t^3+2t^2-7t\right]_1^3$

$=32$

133) 102

[출제의도] 정적분을 활용하여 수직선 위의 점이 움직인 거리를 구한다.

원점에서 출발한 점 P의 시각 $t=k$에서의 위치는

$\int_0^k (12t-12)dt=\left[6t^2-12t\right]_0^k=6k^2-12k$

원점에서 출발한 점 Q의 시각 $t=k$에서의 위치는

$\int_0^k (3t^2+2t-12)dt=\left[t^3+t^2-12t\right]_0^k=k^3+k^2-12k$

시각 $t=k$에서 두 점 P, Q의 위치가 같으므로

$6k^2-12k=k^3+k^2-12k$, $k^2(k-5)=0$

$k>0$이므로 $k=5$

시각 $t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^5 |12t-12|dt=\int_0^1 (12-12t)dt+\int_1^5 (12t-12)dt$

$=\left[12t-6t^2\right]_0^1+\left[6t^2-12t\right]_1^5=102$

134) ②

시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면

$x_1(t)=\int_0^t (t^2-6t+5)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t\right]_0^t=\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t$

$x_2(t)=\int_0^t (2t-7)dt=\left[t^2-7t\right]_0^t=t^2-7t$

시각 t에서의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 하면

$f(t)=\left|\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t-(t^2-7t)\right|=\left|\frac{1}{3}t^3-4t^2+12t\right|$

이때 $g(t)=\frac{1}{3}t^3-4t^2+12t$ 라 하면

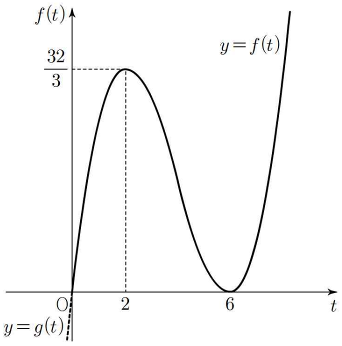
$g'(t)=t^2-8t+12=(t-2)(t-6)$

$g'(t)=0$ 에서 $t=2$ 또는 $t=6$

함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	0	↗	$\frac{32}{3}$	↘	0	↗

따라서 함수 $t \geq 0$ 에서 $y=g(t)$, 즉 $y=f(t)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $f(t)$ 가 구간 $[0,\ 2]$ 에서 증가하고, 구간 $[2,\ 6]$ 에서 감소하고, 구간 $[6,\ \infty)$ 에서 증가하므로 $a=2$, $b=6$

이때 시각 $t=2$ 에서 $t=6$ 까지 점 Q가 움직인 거리를 l 이라 하면

$$l=\int_2^6 |2t-7|\,dt$$

$$=\int_2^{\frac{7}{2}}(-2t+7)dt+\int_{\frac{7}{2}}^6(2t-7)dt$$

$$=\left[-t^2+7t\right]_2^{\frac{7}{2}}+\left[t^2-7t\right]_{\frac{7}{2}}^6$$

$$=\frac{17}{2}$$

135) 32

[출제의도] 정적분을 이용하여 추론하기

조건 (나)에서 $|x|<2$일 때 $g'(x)=-x+a$이고

조건 (다)에서 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 극값을 가지므로

$g'(1)=-1+a=0$, $a=1$

$|x|<2$일 때 $g'(x)=-x+1$에서 함수 $g(x)$는

$x=1$에서만 극값을 가지므로 $|b|\geq 2$

함수 $g'(x)$가 $x=-2$, $x=2$에서 연속이므로

$g'(-2)=\lim_{x\to -2+}g'(x)=\lim_{x\to -2+}(-x+1)=3$ ⋯ ㉠

$g'(2)=\lim_{x\to 2-}g'(x)=\lim_{x\to 2-}(-x+1)=-1$ ⋯ ㉡

에서 $b\neq \pm 2$이므로 $|b|>2$ ⋯ ㉢

조건 (나)에서 $|g'(b)|=f(b)=0$이고

$|x|\geq 2$인 모든 실수 x에 대하여 이차함수 $f(x)$는

$f(x)=|g'(x)|\geq 0$이므로

$f(x)=m(x-b)^2$ $(m>0)$

㉠, ㉡에 의하여

$f(-2)=|g'(-2)|=3$, $f(2)=|g'(2)|=1$ ⋯ ㉣

이고 $f(-2)>f(2)$에서

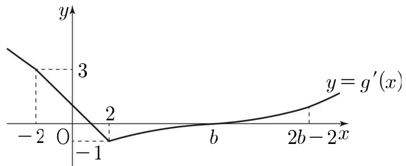
$m(-2-b)^2>m(2-b)^2$

$b^2+4b+4>b^2-4b+4$에서 $b>0$

㉢에 의하여 $b>2$이고

조건을 만족시키는 함수 $g'(x)$는

$$g'(x)=\begin{cases} m(x-b)^2 & (x\leq -2) \\ -x+1 & (-2<x<2) \\ -m(x-b)^2 & (2\leq x<b) \\ m(x-b)^2 & (x\geq b) \end{cases}$$



㉣에 의하여 $f(-2)=m(-2-b)^2=3$,

$f(2)=m(2-b)^2=1$

두 식을 연립하면

$m(-2-b)^2=3m(2-b)^2$

$b^2-8b+4=0$

에서 $b>2$이므로 $b=4+2\sqrt{3}$

조건 (나)에서 $g(0)=\int_0^0(-t+1)dt=0$이므로

$g(k)=\int_0^k g'(t)dt$에서

(ⅰ) $k<0$일 때

$x\leq 0$에서 $g'(x)>0$이므로

$g(k)=\int_0^k g'(t)dt=-\int_k^0 g'(t)dt<0$

그러므로 $g(k)=0$을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $k=0$일 때

$g(0)=\int_0^0 g'(t)dt=0$이므로

$g(k)=0$을 만족시킨다.

(ⅲ) $0<k\leq 2$일 때

$$\int_0^k g'(t)dt=\int_0^k(-t+1)dt=\left[-\frac{t^2}{2}+t\right]_0^k=-\frac{k^2}{2}+k=0$$

에서 $k=2$일 때 $g(k)=0$을 만족시킨다.

(ⅳ) $k>2$일 때

$2<x<b$에서 $g'(x)<0$이므로

$\int_0^k g'(t)dt=0$이려면 $k>b$

$$\int_0^k g'(t)dt=\int_0^2 g'(t)dt+\int_2^b g'(t)dt+\int_b^k g'(t)dt$$

$$=0-\int_2^b m(t-b)^2dt+\int_b^k m(t-b)^2dt$$

$$=-m\int_2^b(t^2-2bt+b^2)dt+m\int_b^k(t^2-2bt+b^2)dt$$

$$=-m\left[\frac{t^3}{3}-bt^2+b^2t\right]_2^b+m\left[\frac{t^3}{3}-bt^2+b^2t\right]_b^k$$

$$=-\frac{m}{3}(b^3-6b^2+12b-8)+\frac{m}{3}(k^3-3k^2b+3kb^2-b^3)$$

$$=-\frac{m}{3}(b-2)^3+\frac{m}{3}(k-b)^3=0$$

에서 $(k-b)^3=(b-2)^3$

$k-b$, $b-2$는 모두 실수이므로 $k-b=b-2$

그러므로 $k=2b-2=6+4\sqrt{3}$ 일 때

$g(k)=0$을 만족시킨다.

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 $g(k)=0$을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은

$0+2+(6+4\sqrt{3})=8+4\sqrt{3}$이므로 $p=8$, $q=4$

따라서 $p\times q=32$

136) 182

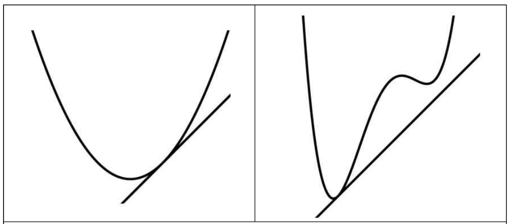
방정식 $g(x)=0$에서

$x=t$일 때 $f(t)-t-f(t)+t=0$이므로 $g(t)=0$

$x\neq t$일 때 $f(x)-x-f(t)+t=0$에서 $\dfrac{f(x)-f(t)}{x-t}=1$이다.

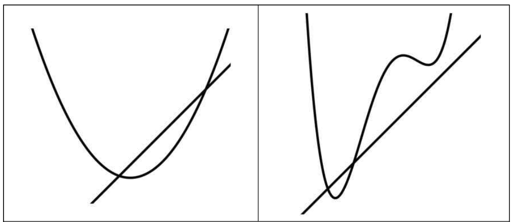
그러므로 함수 $h(t)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $(t,\ f(t))$를 지나고 기울기가 1인 직선 l과 곡선 $y=f(x)$의 교점의 개수이다. 임의의 실수 s에 대하여 $h(s)\geq 1$이다.

(ⅰ) $h(s)=1$인 경우

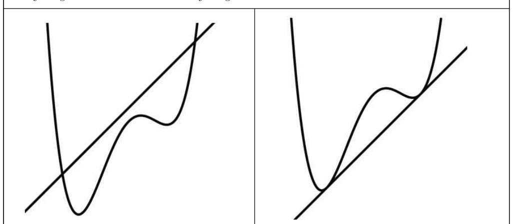


$\lim\limits_{t\to s}h(t)=2$이므로 $\lim\limits_{t\to s}\{h(t)-h(s)\}=1$

(ⅱ) $h(s)=2$인 경우



$\lim\limits_{t\to s}h(t)=2$이므로 $\lim\limits_{t\to s}\{h(t)-h(s)\}=0$



$\lim\limits_{t\to s}h(t)=2$이므로 $\lim\limits_{t\to s}\{h(t)-h(s)\}=0$	$\lim\limits_{t\to s}h(t)=4$이므로 $\lim\limits_{t\to s}\{h(t)-h(s)\}=2$

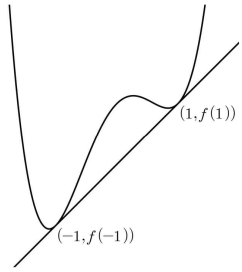
(ⅲ) $h(s)\geq 3$인 경우

$\lim\limits_{t\to s}h(t)=4$이거나 극한값이 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

곡선 $y=f(x)$와 직선 l이 두 점 $(-1,\ f(-1))$, $(1,\ f(1))$에서 접할 때

$\lim\limits_{t\to -1}\{h(t)-h(-1)\}=\lim\limits_{t\to 1}\{h(t)-h(1)\}=2$를 만족시킨다.



함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a, 직선 l의 방정식을 $y=x+b$라 하자.

(단, a, b는 상수)

$f(x)-(x+b)=a(x-1)^2(x+1)^2$

$f(x)=a(x-1)^2(x+1)^2+x+b$

조건 (나)에서 $\displaystyle\int_0^{\alpha}\{f(x)-|f(x)|\}dx=0$을 만족시키는 실수 α의 최솟값이 -1이므로

$-1\leq x\leq 0$에서 $f(x)\geq 0$, $f(-1)\geq 0$

$f(-1)>0$이면 실수 α의 최솟값이 -1이 아니므로 $f(-1)=0$

$f(-1)=-1+b=0$, $b=1$

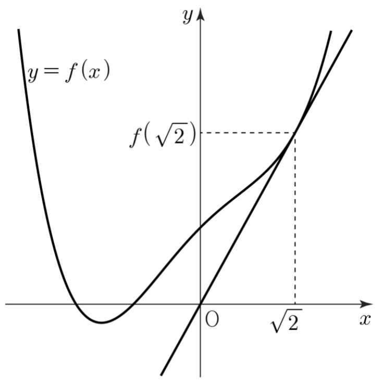
$f(x)=a(x-1)^2(x+1)^2+x+1$

조건 (다)에서

$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x\{f(u)-ku\}du=f(x)-kx\geq 0$

$f(x)\geq kx$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=kx$가 접하거나 만나지 않는다.

실수 k의 최댓값이 $f'(\sqrt{2})$이므로 그림과 같이곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f'(\sqrt{2})x$가 점 $(\sqrt{2},\ f(\sqrt{2}))$에서 접한다.



$f(x)=a(x-1)^2(x+1)^2+x+1=ax^4-2ax^2+x+a+1$

$f'(x)=4ax^3-4ax+1$

$f(\sqrt{2})=4a-4a+\sqrt{2}+a+1=a+\sqrt{2}+1$

$f'(\sqrt{2})=8\sqrt{2}a-4\sqrt{2}a+1=4\sqrt{2}a+1$

$f(\sqrt{2})=f'(\sqrt{2})\times\sqrt{2}$이므로

$a+\sqrt{2}+1=(4\sqrt{2}a+1)\times\sqrt{2}=8a+\sqrt{2}$

$a=\dfrac{1}{7}$, $f(x)=\dfrac{1}{7}(x-1)^2(x+1)^2+x+1$

따라서 $f(6)=\dfrac{1}{7}\times 5^2\times 7^2+6+1=182$