수능, 모의고사 연도별 문제모음

단원 : 수2-미분

반: 번호: 이름:

기본유형

1. 다항함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1$
(나) $x=-1$과 $x=2$에서 극값을 갖는다.

$\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$ 의 값은?

[3점][2012년 3월 가07]

① 8 ② 12 ③ 16 ④ 20 ⑤ 24

2. $x>0$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하고 $2x \leq f(x) \leq 3x$이다. $f(1)=2$이고 $f(2)=6$일 때, $f'(1)+f'(2)$의 값은?

[4점][2012년 5월 가18]

① 8 ② 7 ③ 6 ④ 5 ⑤ 4

3. 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-5}{x-1} = 9$를 만족시킨다. $g(x)=xf(x)$라 할 때, $g'(1)$의 값을 구하시오.

[4점][2012년 6월 나07]

4. 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 2} \frac{f(x-2)}{x^2-2x} = 4$일 때, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$의 값은?

[3점][2012년 6월 나09]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^2-1} = -1$일 때, $\lim_{h \to 0} \frac{f(1-2h)-f(1+5h)}{h}$의 값을 구하시오.

[3점][2012년 7월 가24]

6. 곡선 $f(x)=\frac{2}{3}x^3+ax$ 위의 두 점 $(0, f(0))$, $(1, f(1))$에서의 접선이 서로 수직일 때, 상수 a의 값은?

[4점][2012년 10월 나15]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

7. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(x)$의 극댓값을 구하시오.

[4점][2012년 10월 나29]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=f'(-x)$이다.
(나) 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 0을 갖는다.

8. 곡선 $y=x^3-3x^2+x+1$ 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선이 서로 평행하다. 점 A의 x좌표가 3일 때, 점 B에서의 접선의 y절편의 값은?

[4점][2013년 6월 나17]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

9. 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-1}{x-2}=2$$

일 때, $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$ 의 값은?

[3점][2013년 10월 나08]

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

10. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+(a^2-4a)x+3$이 극값을 갖도록 하는 모든 정수 a의 개수는?

[3점][2014년 4월 가07]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

11. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선과 직선 $y=-\frac{1}{3}x+2$가 서로 수직일 때,

$\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(1+\frac{1}{2n}\right)-f\left(1-\frac{1}{3n}\right)\right\}$ 의 값은?

[3점][2014년 4월 가08]

① $\frac{5}{6}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

12. 곡선 $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{11}{3}$ $(x>0)$ 위를 움직이는 점 P와 직선 $x-y-10=0$ 사이의 거리를 최소가 되게 하는 곡선 위의 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

[4점][2014년 9월 나27]

13. 두 다항함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$g(x)=(x^3+2)f(x)$$

를 만족시킨다. $g(x)$가 $x=1$ 에서 극솟값 24를 가질 때, $f(1)-f'(1)$의 값을 구하시오.

[4점][2015학년도 수능 나29]

14. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x+2$가 닫힌 구간 $[-a,\ a]$에서 최댓값 M, 최솟값 $\frac{14}{27}$를 갖는다. $a+M$의 값을 구하시오.

[4점][2016년 6월 나28]

15. 함수 $f(x)=x^3+ax$에서 x의 값이 0에서 2까지 변할 때의 평균변화율이 9일 때, $f'(3)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

[3점][2016년 10월 나23]

16. 곡선 $y=x^3-ax+b$위의 점 $(1,1)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이다. 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

[4점][2017학년도 수능 나26]

17. 곡선 $y=x^2-x+3$ 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선이 서로 수직이다. 점 A의 x좌표가 1일 때, 점 B에서의 접선의 방정식은 $y=ax+b$이다. $a+b$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 상수이다.)

[4점][2017년 대구8월 나26]

18. 함수 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$에 대하여 $f'(a)=f'(1)+f'(2)$를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은?

[3점][2018년 전북5월 나13]

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

19. 함수 $f(x)=ax^2+b$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$4f(x)=\{f'(x)\}^2+x^2+4$$

를 만족시킨다. $f(2)$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

[4점][2018년 6월 나17]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

20. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=30x^3-f'(1)x^2+5$$

를 만족시킬 때, $f'(1)$의 값을 구하시오.

[3점][2019년 5월 나24]

21. 함수 $f(x)=x^3-3ax^2+3(a^2-1)x$의 극댓값이 4이고 $f(-2)>0$일 때, $f(-1)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

[4점][2019년 9월 나17]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

22. 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 방정식 $f'(x)=0$ 의 두 실근 α, β 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lvert\alpha-\beta\rvert=10$
(나) 두 점 $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$ 사이의 거리는 26 이다.

함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 차는?

[4점][2019년 10월 나16]

① $12\sqrt{2}$ ② 18 ③ 24 ④ 30 ⑤ $24\sqrt{2}$

23. 최고차항의 계수가 1 인 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x축에 접한다. 함수 $g(x)=(x-3)f'(x)$ 에 대하여 곡선 $y=g(x)$ 가 y축에 대하여 대칭일 때, $f(0)$ 의 값은?

[3점][2020년 3월 나13]

① 1 ② 4 ③ 9 ④ 16 ⑤ 25

24. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율이 $f'(2)$의 값과 같게 되도록 하는 양수 a의 값을 구하시오.

[4점][2020년 6월 나26]

25. $f(1)=-2$인 다항함수 $f(x)$에 대하여 일차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)+4}{x-1}=8$

(나) $g(0)=g'(0)$

$f'(1)$의 값은?

[4점][2020년 10월 나17]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

26. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=3,\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=2$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여 $h'(0)$의 값은?

[4점][2021학년도 수능 나17]

① 27 ② 30 ③ 33 ④ 36 ⑤ 39

27. 곡선 $y=x^3-3x^2-9x$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 정수 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?

[3점][2021년 3월 08]

① 27 ② 28 ③ 29 ④ 30 ⑤ 31

28. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-g(x)}{x-1}=5$

(나) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+g(x)-2f(1)}{x-1}=7$

두 실수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-a}{x-1}=b\times g(1)$일 때, ab의 값은?

[4점][2021년 3월 12]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

29. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-4}{x^2-4}=2,\ \lim_{x\to 2}\frac{g(x)+1}{x-2}=8$$

을 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여 $h'(2)$의 값을 구하시오.

[3점][2021년 7월 19]

30. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균변화율과 $f'(a)$의 값이 같게 되도록 하는 $0<a<4$인 모든 실수 a의 값의 곱은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[3점][2021년 9월 19]

31. 방정식 $2x^3-3x^2-12x+k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수는?

[3점][2022학년도 수능 06]

① 20 ② 23 ③ 26 ④ 29 ⑤ 32

32. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선과 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선이 일치할 때, $f'(2)$의 값은?

[4점][2022학년도 수능 10]

① -18 ② -17 ③ -16 ④ -15 ⑤ -14

33. 함수 $f(x)=x^3+ax^2-(a^2-8a)x+3$이 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값을 구하시오.

[3점][2022학년도 수능 19]

34. 함수 $f(x)=2x^2-3x+5$에서 x의 값이 a에서 $a+1$까지 변할 때의 평균변화율이 7이다. $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}$의 값은? (단, a는 상수이다.)

[3점][2022년 3월 공통06]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

35. 두 함수

$$f(x)=x^2+2x+k,\quad g(x)=2x^3-9x^2+12x-2$$

에 대하여 함수 $(g\circ f)(x)$의 최솟값이 2가 되도록 하는 실수 k의 최솟값은?

[4점][2022년 3월 공통10]

① 1 ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{11}{8}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

36. $f(3)=2,\ f'(3)=1$인 다항함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$가

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-g(x)}{x-3}=1$$

을 만족시킬 때, $g(1)$의 값은?

[3점][2022년 4월 공통07]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

37. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최솟값은?

[3점][2022년 6월 공통08]

> (가) $f(1)=3$
> (나) $1<x<5$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 5$이다.

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

38. 두 함수

$$f(x)=x^3-x+6,\ g(x)=x^2+a$$

가 있다. $x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(x)\geq g(x)$$

가 성립할 때, 실수 a의 최댓값은?

[4점][2022년 6월 공통09]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

39. 방정식 $3x^4-4x^3-12x^2+k=0$이 서로 다른 4개의 실근을 갖도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오.

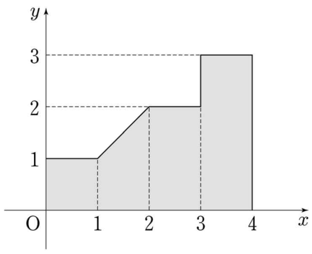
[3점][2022년 9월 공통19]

40. 방정식 $2x^3-6x^2+k=0$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 2가 되도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

[3점][2023학년도 수능 공통19]

미분가능

41. 좌표평면 위에 그림과 같이 어두운 부분을 내부로 하는 도형이 있다. 이 도형과 네 점 $(0,\ 0)$, $(t,\ 0)$, $(t,\ t)$, $(0,\ t)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형이 겹치는 부분의 넓이를 $f(t)$라 하자.



열린 구간 $(0,\ 4)$에서 함수 $f(t)$가 미분가능하지 않은 모든 t의 값의 합은?

[4점][2012년 5월 나21]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

42. 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$ 과 실수 m 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq mx) \\ mx & (f(x)<mx) \end{cases}$$

라 하자. $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, m 의 값은?

[4점][2012년 6월 가21]

① -14 ② -12 ③ -10 ④ -8 ⑤ -6

43. 미분가능한 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x+1 & (x<0) \\ a(x-1)^2+b & (x\geq 0) \end{cases}$$

에 대하여 $f(1)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

[3점][2012년 10월 나11]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

44. 삼차함수 $f(x)=x^3-x^2-9x+1$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq k) \\ f(2k-x) & (x<k) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 $\frac{q}{p}$라 할 때, p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2015년 3월 가28]

45. 함수 $f(x)=x^3-2x$에 대하여 함수 $g(x)$는 다음과 같다.

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-1) \\ f(x+p)+q & (x\geq -1) \end{cases}$$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 0이 아닌 상수이다.)

[4점][2018년 전북5월 나26]

46. $a>0$인 상수 a에 대하여 함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+a)|$가 오직 한 개의 x 값에서만 미분가능하지 않을 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은?

[4점][2020년 3월 나18]

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

47. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+ax+10$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} b-f(x) & (x<3) \\ f(x) & (x\geq 3) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 함수 $g(x)$의 극솟값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

[4점][2020년 4월 나28]

48. 두 양수 p, q가 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은?

[4점][2021년 6월 14]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=\lvert xf(x-p)+qx \rvert$이다. (나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

49. 두 함수 $f(x)=\lvert x+3 \rvert$, $g(x)=2x+a$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 상수 a의 값은?

[3점][2021년 10월 07]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

50. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 3 보다 작은 실수 a에 대하여 함수 $g(x)=\lvert (x-a)f(x) \rvert$가 $x=3$에서만 미분가능하지 않다. 함수 $g(x)$의 극댓값이 32일 때, $f(4)$의 값은?

[4점][2021년 10월 10]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

활용문제

51. 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 를 만족시킨다. 방정식 $\lvert f(x) \rvert=2$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4 일 때, $f(3)$ 의 값은?

[4점][2012학년도 수능 나21]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

52. 함수 $f(x)=x^2(x-2)^2$이 있다. $0 \le x \le 2$인 모든 실수 x에 대하여

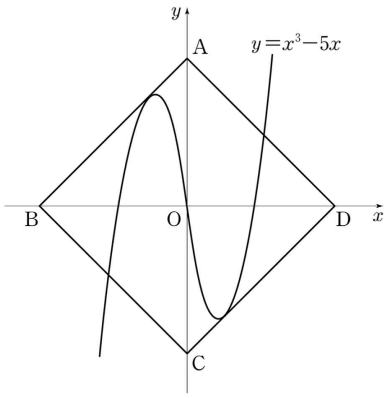
$$f(x) \le f'(t)(x-t)+f(t)$$

를 만족시키는 실수 t의 집합은 $\{t \mid p \le t \le q\}$이다. $36pq$의 값을 구하시오.

[4점][2012년 3월 가30]

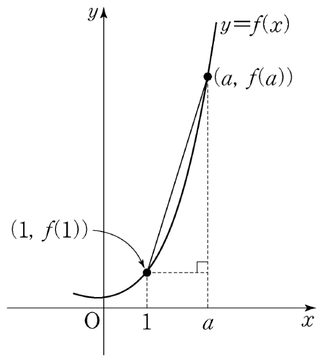
53. 그림과 같이 정사각형 $ABCD$의 두 꼭짓점 A, C는 y축 위에 있고, 두 꼭짓점 B, D는 x축 위에 있다. 변 AB와 변 CD가 각각 삼차함수 $y=x^3-5x$의 그래프에 접할 때, 정사각형 $ABCD$의 둘레의 길이를 구하시오.

[4점][2012년 5월 나30]



54. 양의 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하다. 1보다 큰 모든 실수 a에 대하여 점 $(1, f(1))$과 점 $(a, f(a))$ 사이의 거리가 a^2-1일 때, $f'(1)$의 값은?

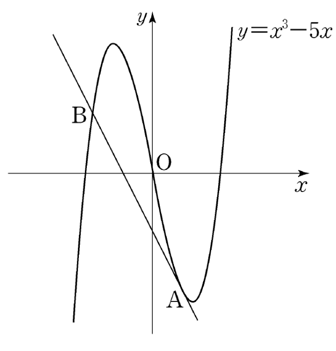
[4점][2012년 6월 가16]



① 1 ② $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

55. 곡선 $y=x^3-5x$ 위의 점 $A(1, -4)$에서의 접선이 점 A가 아닌 점 B에서 곡선과 만난다. 선분 AB의 길이는?

[4점][2012년 6월 나17]



① $\sqrt{30}$ ② $\sqrt{35}$ ③ $2\sqrt{10}$ ④ $3\sqrt{5}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

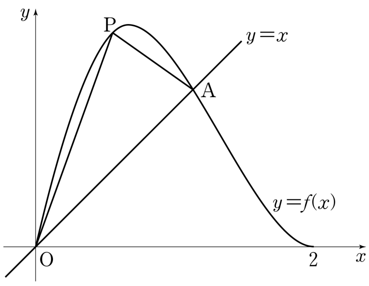
56. 닫힌 구간 $[0, 2]$에서 정의된 함수

$$f(x) = ax(x-2)^2 \ \left(a > \frac{1}{2}\right)$$

에 대하여 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = x$의 교점 중 원점 O가 아닌 점을 A라 하자. 점 P가 원점으로부터 점 A까지 곡선 $y = f(x)$ 위를 움직일 때, 삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되는 점 P의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이다. 상수 a의 값은?

[4점][2012년 9월 나19]

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{17}{12}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{19}{12}$



57. 좌표평면에서 두 함수

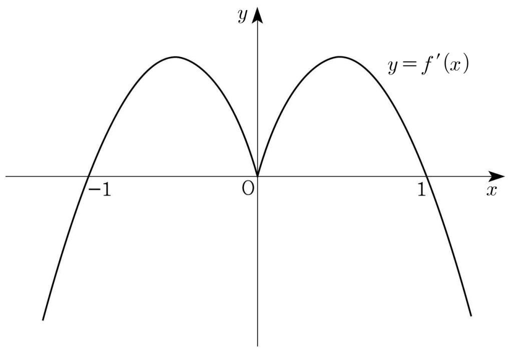
$$f(x) = 6x^3 - x, \quad g(x) = |x - a|$$

의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은?

[4점][2012년 9월 나21]

① $-\frac{11}{18}$ ② $-\frac{5}{9}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{4}{9}$ ⑤ $-\frac{7}{18}$

58. 그림과 같이 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이고 $x > 0$일 때 위로 볼록하다.



함수 $f(x)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $f'(-1) = f'(0) = f'(1) = 0$)

[4점][2012년 10월 가19]

< 보 기 >

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x = 0$에서 극값을 갖는다.

ㄴ. $f(0) = 0$이면 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은 0이다.

ㄷ. $f(1) < 0$이면 방정식 $f(x) = 0$은 오직 하나의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

59. 곡선 $y = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 8$ $(x > 0)$ 위의 점에서 그은 접선 중에서 기울기가 최소인 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

[4점][2013년 4월 가28]

60. 실수 t 에 대하여 곡선 $y=x^3$ 위의 점 $(t,\ t^3)$ 과 직선 $y=x+6$ 사이의 거리를 $g(t)$ 라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2013년 6월 가16]

<보기>

ㄱ. 함수 $g(t)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
ㄴ. 함수 $g(t)$ 는 0 이 아닌 극솟값을 갖는다.
ㄷ. 함수 $g(t)$ 는 $t=2$ 에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

61. 함수

$$f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x\geq 0)\end{cases}$$

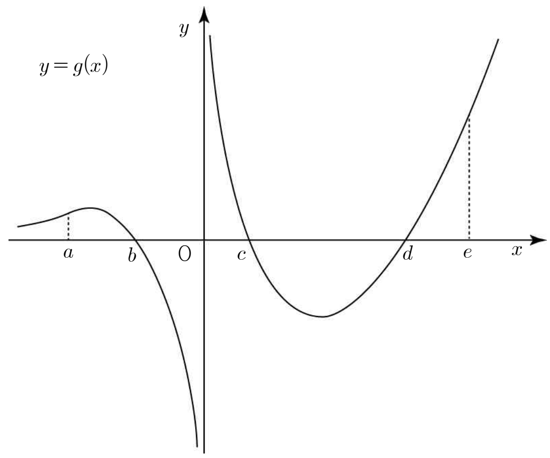
의 극댓값이 5일 때, $f(2)$의 값은? (단 a는 상수이다.)

[4점][2013년 6월 나21]

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

62. 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$가 미분가능하고 도함수 $f'(x)$가 연속이다. x축과의 교점의 x좌표가 $b,\ c,\ d$뿐인 함수 $g(x)=\dfrac{f'(x)}{x}$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4점][2013년 7월 가18]



<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$는 열린 구간 $(b,\ 0)$에서 증가한다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극솟값을 갖는다.
ㄷ. 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[a,\ e]$에서 4개의 극값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

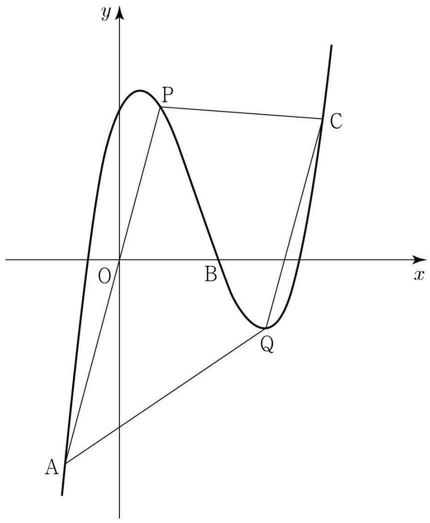
63. 곡선 $y=x^3+2x+7$ 위의 점 $P(-1,\ 4)$ 에서의 접선이 점 P 가 아닌 점 $(a,\ b)$ 에서 곡선과 만난다. $a+b$ 의 값을 구하시오.

[4점][2013년 9월 나27]

64. 곡선 $y=x^3-5x^2+4x+4$ 위에 세 점 $\mathrm{A}(-1,\ -6)$, $\mathrm{B}(2, 0)$, $\mathrm{C}(4, 4)$가 있다. 곡선 위에서 두 점 A, B 사이를 움직이는 점 P와 곡선 위에서 두 점 B, C 사이를 움직이는 점 Q에 대하여 사각형 AQCP의 넓이가 최대가 되도록 하는 두 점 P, Q의 x좌표의 곱은?

[3점][2014년 7월 가07]

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{5}{6}$



65. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 a가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(a)$의 값을 구하시오.

[4점][2013년 10월 나26]

(가) $f(a)=f(2)=f(6)$
(나) $f'(2)=-4$

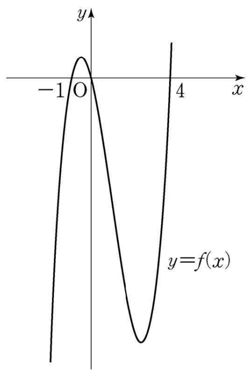
66. 자연수 k에 대하여 삼차방정식 $x^3-12x+22-4k=0$의 양의 실근의 개수를 $f(k)$라 하자. $\sum_{k=1}^{10} f(k)$의 값을 구하시오.

[4점][2014년 10월 나27]

67. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-9x+3$이 열린 구간 $(-a, a)$에서 감소할 때, 양수 a의 최댓값을 구하시오.

[4점][2015년 6월 나27]

68. 함수 $f(x)=x(x+1)(x-4)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.



직선 $y=5x+k$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 양수 k의 값은?

[4점][2015학년도 수능 나14]

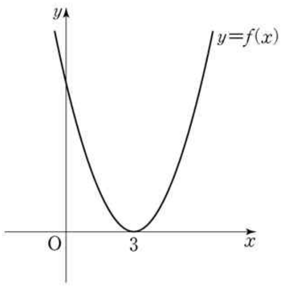
① 5　② $\frac{11}{2}$　③ 6　④ $\frac{13}{2}$　⑤ 7

69. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=(x-3)^2$$

일 때, 함수 $g(x)$의 도함수가 $f(x)$이고 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$에서의 접선의 y절편이 -5일 때, 이 접선의 x절편은?

[3점][2015년 6월 나13]



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

70. 두 함수

$$f(x)=3x^3-x^2-3x, \qquad g(x)=x^3-4x^2+9x+a$$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 두 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 갖도록 하는 모든 정수 a의 개수는?

[4점][2015년 6월 나17]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

71. 자연수 n에 대하여 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$의 극댓값을 a_n이라 하자.

(가) $f(n)=0$ (나) 모든 실수 x에 대하여 $(x+n)f(x)\geq 0$이다.

a_n이 자연수가 되도록 하는 n의 최솟값은?

[4점][2015년 6월 나21]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

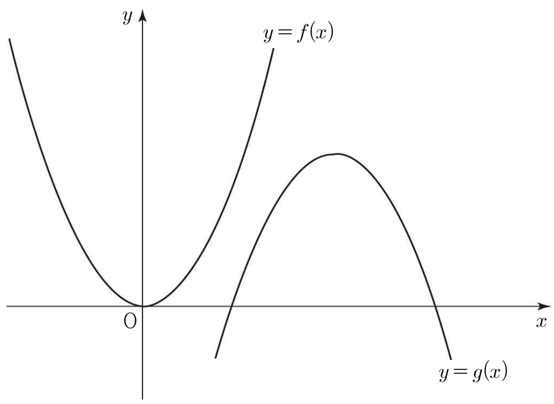
72. 삼차방정식 $x^3+3x^2-9x+4-k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 모든 정수 k의 개수는?

[3점][2015년 7월 나12]

① 28 ② 31 ③ 34 ④ 37 ⑤ 40

73. 두 함수 $f(x)=x^2$과 $g(x)=-(x-3)^2+k\ (k>0)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(1,\ 1)$에서의 접선을 l이라 하자. 직선 l에 곡선 $y=g(x)$가 접할 때의 접점을 Q, 곡선 $y=g(x)$와 x축이 만나는 두 점을 각각 R, S라 할 때, 삼각형 QRS의 넓이는?

[4점][2015년 7월 나14]



① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

74. 함수 $f(x)=x^4-16x^2$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k값의 제곱의 합을 구하시오.

[4점][2015년 10월 나27]

(가) 구간 $(k,\ k+1)$에서 $f'(x)<0$이다.
(나) $f'(k)f'(k+2)<0$

75. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)=x^3f(x)-7$
(나) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}=2$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

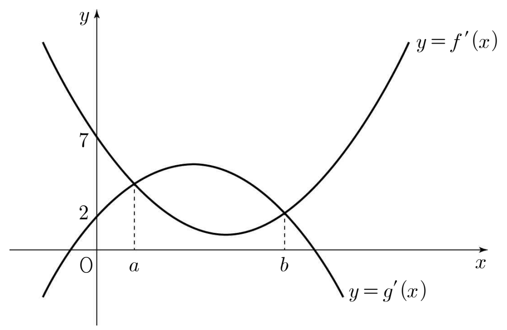
[4점][2016학년도 수능 나28]

76. 그림과 같이 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$의 도함수 $y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표는 a, $b\,(0<a<b)$이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=f(x)-g(x)$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $f'(0)=7$, $g'(0)=2$)

[4점][2016년 7월 나18]



<보 기>

ㄱ. 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.
ㄴ. $h(b)=0$이면 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
ㄷ. $0<\alpha<\beta<b$인 두 실수 α, β에 대하여 $h(\beta)-h(\alpha)<5(\beta-\alpha)$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

77. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 있다. 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 서로 다른 세 점의 x좌표가 $-2t$, 0, t일 때, $f'(4)$의 최댓값을 구하시오.

[4점][2017년 7월 나27]

78. 서로 다른 두 점에서 만나는 두 곡선

$$C_1 : y = x^2 - 2x + 2,\ C_2 : y = -x^2 + ax + b$$

의 한 교점을 P라 하고, 점 P에서 두 곡선 C_1, C_2에 접하는 직선을 각각 l, m이라 하자.
두 접선 l, m이 서로 수직일 때, 곡선 C_2는 두 실수 a, b의 값에 관계없이 일정한 점 Q를 지난다. 다음은 점 Q의 좌표를 구하는 과정이다.

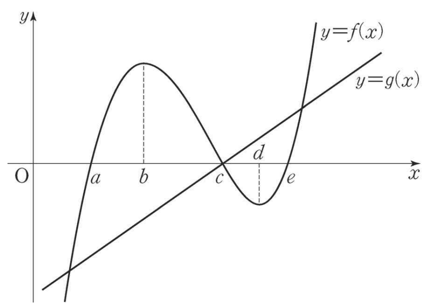
> $f(x) = x^2 - 2x + 2$, $g(x) = -x^2 + ax + b$라 하고,
> 두 곡선 C_1, C_2의 한 교점 P의 x좌표를 t라 하자.
> 두 접선 l, m이 서로 수직이므로
> $f'(t)g'(t) = -1$에서
> $$4t^2 - 2(a+2)t + \boxed{(가)} = 0 \ \cdots\cdots \ ㉠$$
> $f(t) = g(t)$에서
> $$2t^2 - (a+2)t + 2 - b = 0 \ \cdots\cdots \ ㉡$$
> ㉠, ㉡에서 $b = \boxed{(나)} - a$를 $y = -x^2 + ax + b$에 대입하고
> a에 관하여 정리하면,
> $$a(x-1) - x^2 - y + \boxed{(나)} = 0 \ \cdots\cdots \ ㉢$$
> ㉢에서 $x - 1 = 0$, $-x^2 - y + \boxed{(나)} = 0$을 만족시키는 x와 y의 값을 구하면 점 Q의 좌표는 $(1, \boxed{(다)})$이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $h(a)$라 하고, (나)와 (다)에 알맞은 수를 각각 α, β라 할 때, $h(\alpha) \times h(\beta)$의 값은?

[4점][2016년 10월 나18]

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 20

79. 삼차함수 $y = f(x)$와 일차함수 $y = g(x)$의 그래프가 그림과 같고, $f'(b) = f'(d) = 0$이다.



함수 $y = f(x)g(x)$는 $x = p$와 $x = q$에서 극소이다. 다음 중 옳은 것은? (단, $p < q$)

[4점][2016년 6월 나18]

① $a < p < b$이고 $c < q < d$
② $a < p < b$이고 $d < q < e$
③ $b < p < c$이고 $c < q < d$
④ $b < p < c$이고 $d < q < e$
⑤ $c < p < d$이고 $d < q < e$

80. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(2, 4)$에서의 접선이 점 $(-1, 1)$에서 이 곡선과 만날 때, $f'(3)$의 값은?

[4점][2017년 7월 나17]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

81. 함수 $y = x^3 + 2$의 그래프와 직선 $y = kx$가 만나는 교점의 개수를 $f(k)$라 할 때, $\sum_{k=1}^{6} f(k)$의 값을 구하시오.

[4점][2017년 10월 나26]

82. 자연수 n에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} (2-x)^3 & (x < 1) \\ nx^2 - nx + 1 & (x \ge 1) \end{cases}$$

이라 하자. 정수 m과 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(x) \ge m(x-1) + 1$$

을 만족시키는 m의 개수를 $g(n)$이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2017년 경남10월 나19]

> 〈 보 기 〉
> ㄱ. $f'(1)$의 값이 존재하지 않는다.
> ㄴ. 함수 $f(x)$는 극솟값이 존재한다.
> ㄷ. $\sum_{k=1}^{10} g(k) = 105$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

83. 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-1}{x^2-4}=-1$을 만족시킬 때, 곡선 $y=(x+1)f(x)$ 위의 점 $(2, a)$에서의 접선의 y절편은 b이다. $a+b$의 값을 구하시오.

[4점][2017년 전북10월 나29]

84. 최고차항의 계수가 1이고 $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=\frac{1}{4}$$

을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?

[4점][2018학년도 수능 나18]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

85. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=2$인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-x^2}{x-1}=-2$$

를 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3, f(3))$에서의 접선의 기울기를 구하시오.

[4점][2018년 7월 나27]

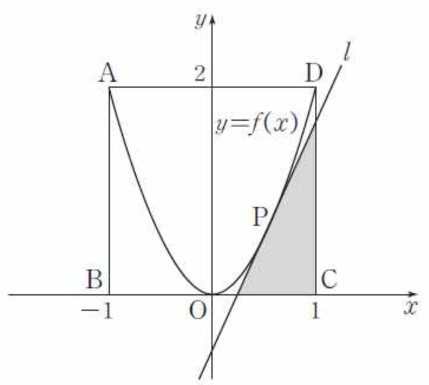
86. 방정식 $x^3-3x^2-9x-k=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 정수 k의 최댓값은?

[4점][2018년 9월 나15]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

87. 그림과 같이 좌표평면에 네 점 $A(-1, 2)$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$, $D(1, 2)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $ABCD$와 세 점 O, A, D를 지나는 이차함수 $y=f(x)\,(-1\le x\le 1)$의 그래프가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선을 l이라 할 때, 직선 l의 아랫부분과 정사각형 $ABCD$의 내부의 공통부분(어두운 부분)의 넓이의 최댓값은? (단, 점 P는 정사각형 $ABCD$의 내부에 있고, O는 원점이다.)

[4점][2018년 전북10월 나18]



① $\frac{16}{27}$ ② $\frac{17}{27}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{19}{27}$ ⑤ $\frac{20}{27}$

88. 두 함수

$f(x)=x^4+x^2-(k+1)x+k$

$g(x)=2x^3+x^2-5x+3$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 모든 근이 실수가 되도록 하는 실수 k의 최솟값은?

[4점][2019년 5월 나18]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

89. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & (x<0)\\ f(x) & (x\ge 0)\end{cases}$$

이다. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g(x)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$보다 작을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2019년 6월 나18]

<보 기>

ㄱ. $g(0)+g'(0)=\frac{1}{2}$

ㄴ. $g(1)<\frac{3}{2}$

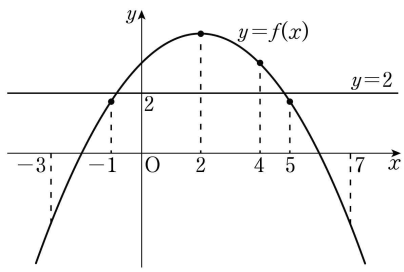
ㄷ. 함수 $g(x)$의 최솟값이 0일 때, $g(2)=\frac{5}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

90. 곡선 $y=x^3-3x^2+2x-3$과 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱을 구하시오.

[4점][2019년 9월 나27]

91. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2$가 그림과 같다.



열린 구간 $(-3, 7)$에서 부등식 $f'(x)\{f(x)-2\}\le 0$을 만족시키는 정수 x의 개수는? (단, $f'(2)=0$)

[3점][2019년 10월 나12]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

92. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오.

[4점][2019년 10월 나27]

(가) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-3}{x}=0$

(나) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-1$의 교점의 개수는 2이다.

93. 자연수 a에 대하여 두 함수

$$f(x)=-x^4-2x^3-x^2,\ g(x)=3x^2+a$$

가 있다. 다음을 만족시키는 a의 값을 구하시오.

[4점][2020년 3월 나28]

모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(x)\le 12x+k\le g(x)$$

를 만족시키는 자연수 k의 개수는 3이다.

94. $0<a<6$인 실수 a에 대하여 원점에서 곡선 $y=x(x-a)(x-6)$에 그은 두 접선의 기울기의 곱의 최솟값은?

[4점][2020년 3월 가17]

① -54 ② -51 ③ -48 ④ -45 ⑤ -42

95. 방정식 $2x^3+6x^2+a=0$이 $-2\le x\le 2$에서 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 정수 a의 개수는?

[4점][2020년 6월 나19]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

96. 최고차항의 계수가 a인 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$|f'(x)|\le 4x^2+5$$

를 만족시킨다. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x=1$일 때, 실수 a의 최댓값은?

[4점][2020년 9월 나18]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

97. 함수 $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$에 대하여 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 자연수 a의 값을 가장 작은 수부터 차례대로 나열할 때 n번째 수를 a_n이라 하자. $a=a_n$일 때, $f(x)$의 극댓값을 b_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10}(b_n-a_n)$의 값을 구하시오.

[4점][2020년 10월 나28]

98. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+|f'(x)|$$

라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0)=g(0)=0$
> (나) 방정식 $f(x)=0$은 양의 실근을 갖는다.
> (다) 방정식 $|f(x)|=4$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$g(3)$의 값은?

[4점][2021년 3월 14]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

99. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x$에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)+|f(x)+x|=6x+k$$

의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오.

[4점][2021년 9월 20]

100. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$와 역함수가 존재하는 삼차함수 $g(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 x 에 대하여 $2f(x)=g(x)-g(-x)$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b, c 는 상수이다.)

[4점][2021년 10월 13]

<보 기>

ㄱ. $a^2 \leq 3b$
ㄴ. 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 방정식 $f'(x)=0$이 실근을 가지면 $g'(1)=1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

101. 두 함수

$$f(x)=x^3-kx+6, \quad g(x)=2x^2-2$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2022년 3월 공통14]

< 보 기 >

ㄱ. $k=0$일 때, 방정식 $f(x)+g(x)=0$은 오직 하나의 실근을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 k의 값은 4뿐이다.
ㄷ. 방정식 $|f(x)|=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 5가 되도록 하는 실수 k가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

102. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다. 양수 t에 대하여 좌표평면 위의 네 점 $(t,\ 0)$, $(0,\ 2t)$, $(-t,\ 0)$, $(0,\ -2t)$를 꼭짓점으로 하는 마름모가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 $t=\alpha$, $t=8$에서 불연속이다. $\alpha^2\times f(4)$의 값을 구하시오. (단, α는 $0<\alpha<8$인 상수이다.)

[4점][2022년 4월 공통20]

103. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-2) \\ f(x)+8 & (x\geq -2) \end{cases}$$

라 하자. 방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근이 2뿐일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은?

[4점][2022년 7월 공통13]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

속도, 가속도

104. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t일 때의 위치는 각각 $f(t)=2t^2-2t$, $g(t)=t^2-8t$이다. 두 점 P와 Q가 서로 반대방향으로 움직이는 시각 t의 범위는?

[3점][2012년 6월 나10]

① $\frac{1}{2}<t<4$ ② $1<t<5$ ③ $2<t<5$
④ $\frac{3}{2}<t<6$ ⑤ $2<t<8$

105. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치는 $P(t)=t^3-9t^2+34t$이다. 점 P의 속도가 처음으로 10이 되는 순간 점 P의 위치는?

[3점][2013년 7월 나11]

① 38 ② 40 ③ 42 ④ 44 ⑤ 46

106. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=-t^2+4t$ 이다. $t=a$에서 점 P의 속도가 0일 때, 상수 a의 값은?

[4점][2014년 6월 나14]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

107. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \ge 0)$에서의 위치 x가

$$x = t^3 - 6t^2 + 5$$

이다. 점 P의 가속도가 0일 때, 점 P의 속도는?

[3점][2016년 10월 나05]

① -12 ② -10 ③ -8 ④ -6 ⑤ -4

108. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t > 0)$에서의 위치 x가

$$x = t^3 - 12t + k \ (k\text{는 상수})$$

이다. 점 P의 운동 방향이 원점에서 바뀔 때, k의 값은?

[4점][2017년 6월 나17]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

109. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = -t^2 + 10t$$

이다. $t = a$에서의 점 P의 가속도가 0일 때, 상수 a의 값은?

[3점][2017년 10월 나12]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

110. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \ge 0)$에서의 위치 x가 $x = t^3 - t^2$이다. $t = 2$일 때, 점 P의 속도는?

[3점][2018년 전북5월 나08]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

111. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \ge 0)$에서의 위치 x가

$$x = t^3 + at^2 + bt \ (a, b\text{는 상수})$$

이다. 시각 $t = 1$에서의 점 P가 운동 방향을 바꾸고, 시각 $t = 2$에서 점 P의 가속도는 0이다. $a + b$의 값은?

[4점][2018년 6월 나16]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

112. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \ge 0)$에서의 위치 x가

$$x = t^3 - 5t^2 + at + 5$$

이다. 점 P가 움직이는 방향이 바뀌지 않도록 하는 자연수 a의 최솟값은?

[4점][2018년 9월 나14]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

113. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 위치 x가

$$x=-\frac{1}{3}t^3+3t^2+k \ (k\text{는 상수})$$

이다. 점 P의 가속도가 0일 때, 점 P의 위치는 40이다. k의 값을 구하시오.

[4점][2019학년도 수능 나27]

114. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치 x가

$$x=t^3+5t+2$$

이다. 점 P의 속도가 8인 시각에서의 점 P의 가속도는?

[3점][2019년 5월 나09]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

115. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치 x가

$$x=t^3-5t^2+6t$$

이다. $t=3$에서 점 P의 가속도를 구하시오.

[3점][2019년 6월 나25]

116. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 위치 x가

$$x=t^3-3t^2+at \ (a\text{는 상수})$$

이다. 점 P의 시각 $t=3$에서의 속도가 15일 때, a의 값을 구하시오.

[3점][2019년 7월 나25]

117. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q 의 시각 $t\,(t \geq 0)$ 에서의 위치 x_1, x_2가

$$x_1=t^3-2t^2+3t, \qquad x_2=t^2+12t$$

이다. 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하시오.

[4점][2020학년도 수능 나27]

118. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 위치 x가

$$x=2t^3-kt^2 \ (k\text{는 상수})$$

이다. 시각 $t=1$에서 점 P가 운동 방향을 바꿀 때, 시각 $t=k$에서의 점 P의 가속도를 구하시오.

[3점][2020년 7월 나25]

119. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t \geq 0)$에서의 위치 x가

$$x = t^3 + kt^2 + kt \quad (k\text{는 상수})$$

이다. 시각 $t=1$에서 점 P가 운동 방향을 바꿀 때, 시각 $t=2$에서 점 P의 가속도는?

[3점][2020년 10월 나11]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

23년도 문제

120. 함수 $f(x) = |x^3 - 3x^2 + p|$는 $x=a$와 $x=b$에서 극대이다. $f(a) = f(b)$일 때, 실수 p의 값은?
(단, a, b는 $a \neq b$인 상수이다.)

[4점][2023년 3월 공통09]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

121. 직선 $y = 4x + 5$가 곡선 $y = 2x^4 - 4x + k$에 접할 때, 상수 k의 값을 구하시오.

[3점][2023년 3월 공통17]

122. 0이 아닌 모든 실수 h에 대하여 다항함수 $f(x)$에서 x의 값이 1에서 $1+h$까지 변할 때의 평균변화율이 $h^2 + 2h + 3$일 때, $f'(1)$의 값은?

[3점][2023년 4월 공통05]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

123. 다항함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(0, f(0))$에서의 접선의 방정식이 $y = 3x - 1$이다. 함수 $g(x) = (x+2)f(x)$에 대하여 $g'(0)$의 값은?

[3점][2023년 4월 공통07]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

124. 두 곡선 $y = 2x^2 - 1$, $y = x^3 - x^2 + k$가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 양수 k의 값은?

[3점][2023년 6월 공통08]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

125. 두 함수

$$f(x) = -x^4 - x^3 + 2x^2,\ g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + a$$

가 있다. 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(x) \le g(x)$$

가 성립할 때, 실수 a의 최솟값은?

[3점][2023년 10월 공통08]

① 8 ② $\frac{26}{3}$ ③ $\frac{28}{3}$ ④ 10 ⑤ $\frac{32}{3}$

126. 양의 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = x^3 - 3t^2x$$

라 할 때, 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$의 최댓값을 각각 $M_1(t)$, $M_2(t)$라 하자. 함수

$$g(t) = M_1(t) + M_2(t)$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2023년 4월 공통14]

〈보 기〉

ㄱ. $g(2) = 32$

ㄴ. $g(t) = 2f(-t)$를 만족시키는 t의 최댓값과 최솟값의 합은 3이다.

ㄷ. $\lim\limits_{h \to 0+} \frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{h} - \lim\limits_{h \to 0-} \frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{h} = 5$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

127. 곡선 $y = x^3 - 10$ 위의 점 $\mathrm{P}(-2, -18)$에서의 접선과 곡선 $y = x^3 + k$ 위의 점 Q에서의 접선이 일치할 때, 양수 k의 값을 구하시오.

[3점][2023년 7월 공통19]

128. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(-2, f(-2))$에서의 접선과 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선이 점 $(1, 3)$에서 만날 때, $f(0)$의 값은?

[4점][2023년 9월 공통10]

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

129. 두 실수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{3}x^3-ax^2-bx & (x<0) \\ \dfrac{1}{3}x^3+ax^2-bx & (x\geq 0) \end{cases}$$

이 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소하고 구간 $[-1, \infty)$에서 증가할 때, $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은?

[4점][2023년 9월 공통13]

① $\dfrac{3}{2}+3\sqrt{2}$ ② $3+3\sqrt{2}$ ③ $\dfrac{9}{2}+3\sqrt{2}$ ④ $6+3\sqrt{2}$ ⑤ $\dfrac{15}{2}+3\sqrt{2}$

130. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=|x^3-12x+k|$$

라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a\,(a\geq 0)$이 만나는 서로 다른 점의 개수가 홀수가 되도록 하는 실수 a의 값이 오직 하나일 때, k의 값은?

[4점][2023년 10월 공통12]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

131. $a>\sqrt{2}$인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=-x^3+ax^2+2x$$

라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{O}(0, 0)$에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 A라 하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점일 때, $\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AB}}$의 값을 구하시오.

[4점][2024학년도 수능 공통20]

132. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치 $x(t)$가

$$x(t)=\frac{3}{2}t^4-8t^3+15t^2-12t$$

이다. 점 P의 운동 방향이 바뀌는 순간 점 P의 가속도를 구하시오.

[3점][2023년 4월 공통19]

고난도

133. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 있다.
실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x)-t|$라 할 때,
$\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$의 값이 존재하는 서로 다른 실수 k의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{t\to 4+}h(t)=5$

(나) 함수 $h(t)$는 $t=-60$과 $t=4$에서만 불연속이다.

$f(2)=4$이고 $f'(2)>0$일 때, $f(4)+h(4)$의 값을 구하시오.

[4점][2023년 3월 공통22]

고난도

134. 정수 $a\ (a\neq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-2ax^2$$

이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되도록 하는 a에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하시오.

[4점][2023년 6월 공통22]

함수 $f(x)$에 대하여

$$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\}\times\left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\}<0$$

을 만족시키는 세 실수 x_1, x_2, x_3이 열린구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재한다.

고난도

135. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 구간 $(0, \infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} x^3-8x^2+16x & (0<x\leq 4) \\ f(x) & (x>4) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 구간 $(0, \infty)$에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(10)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2023년 10월 공통22]

(가) $g\left(\frac{21}{2}\right)=0$
(나) 점 $(-2, 0)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은, 기울기가 0이 아닌 접선이 오직 하나 존재한다.

고난도

136. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $f(x)$에 대하여 $$f(k-1)f(k+1)<0$$ 을 만족시키는 정수 k는 존재하지 않는다.

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$일 때, $f(8)$의 값을 구하시오.

[4점][2024학년도 수능 공통22]

[해설] 수2-미분

1) ⑤

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1$이므로 $f(x)$는 삼차함수이고 삼차항의 계수는 1이다.
따라서 $f'(x)$는 이차함수이고 이차항의 계수는 3이다.
$x=-1$과 $x=2$에서 극값을 가지므로 $f'(x)$는 $x+1$과 $x-2$를 인수로 갖는다.
따라서 $f'(x)=3(x+1)(x-2)$이다.

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(3+h)-f(3)\}-\{f(3-h)-f(3)\}}{h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}$
$=2f'(3)=2\cdot3\cdot4\cdot1=24$

2) ④

$(1,\ 2)$에서 $y=2x$가 $f(x)$의 접선이고, $(2,\ 6)$에서 $y=3x$가 $f(x)$의 접선이므로 $f'(1)=2,\ f'(2)=3$
$\therefore\ f'(1)+f'(2)=5$

3) 14

$f(1)=5,\ f'(1)=9$이고 $g'(x)=f(x)+xf'(x)$이므로
$\therefore\ g'(1)=f(1)+f'(1)=5+9=14$

4) ④

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다. $\therefore\ f(0)=0$
$\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x^2-2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x-2}=\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=\frac{1}{2}f'(0)=4$
$\therefore\ \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)=8$

5) 14

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\frac{1}{2}f'(1)=-1$
$f'(1)=-2$
$\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1+5h)}{h}=-7f'(1)=14$

6) ②

$f'(x)=2x^2+a$에서 $f'(0)=a,\ f'(1)=2+a$
그러므로 $a(2+a)=-1,\ (a+1)^2=0$
따라서 $a=-1$

7) 4

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하면 $f'(x)=3x^2+2ax+b$
조건 (가)에 의하여 $y=f'(x)$의 그래프는 y축에 대칭이므로 $a=0$
따라서 $f'(x)=3x^2+b$이고, 조건 (나)에서 $f'(1)=0$이고
$f(1)=0$이므로 $b=-3,\ c=2$
따라서 $f(x)$의 극댓값 $f(-1)=4$

8) ②

y를 x에 대하여 미분하면 $y'=3x^2-6x+1$이다.
따라서 점 A에서의 접선의 기울기는
$y'=3x^2-6x+1\,|_{x=3}=10$ 이다. 또,
$3x^2-6x+1=10,$
$3x^2-6x-9=0,$
$x^2-2x-3=0$
$\therefore x=-1,3$
즉, 점 B의 x좌표는 -1이다.
따라서 점 B에서의 접선의 방정식은
$y-(-4)=10(x-(-1))$
$y=10x+6$
이다. 곧, y절편은 6이다.

9) ⑤

$\lim_{x\to2}(x-2)=0$ 이므로 $\lim_{x\to2}\{f(x)-1\}=0$
$\therefore\ f(2)=1$
$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=2$
$\therefore\ \lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$
$=2f'(2)=2\times2=4$

10) ①

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면
$f'(x)=3x^2+2ax+(a^2-4a)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로
$\frac{D}{4}=a^2-3(a^2-4a)>0,\ 2a^2-12a<0$
$0<a<6$이므로 정수 a는 1, 2, 3, 4, 5
따라서 주어진 함수가 극값을 갖도록 하는 정수 a의 개수는 5

11) ⑤

$f'(1)\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$이므로 $f'(1)=3$
$\frac{1}{n}=h$라 하면 $n\to\infty$일 때 $h\to0$이므로
$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(1+\frac{1}{2n}\right)-f\left(1-\frac{1}{3n}\right)\right\}$
$=\lim_{h\to0}\frac{f\left(1+\frac{h}{2}\right)-f\left(1-\frac{h}{3}\right)}{h}$
$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f\left(1+\frac{h}{2}\right)-f(1)}{\frac{h}{2}}\times\frac{1}{2}+\frac{f\left(1-\frac{h}{3}\right)-f(1)}{-\frac{h}{3}}\times\frac{1}{3}\right\}$
$=\frac{1}{2}f'(1)+\frac{1}{3}f'(1)=\frac{5}{2}$

12) 5

$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{11}{3}\ (x>0)$에서 $y'=x^2$
또한 직선 $y=x-10$은 기울기가 1이므로 $x^2=1$에서 $x=1$
따라서 $y=\frac{1}{3}+\frac{11}{3}=4$이므로 점 P의 좌표는 $(1,\ 4)$이다.
$\therefore\ a+b=5$

13) 16

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 극솟값 24를 가지므로
$g(1)=24,\ g'(1)=0$
$g(x)=(x^3+2)f(x)$에서
$g(1)=3f(1)=24$ 이므로, $f(1)=8$
또, $g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+2)f'(x)$이므로
$g'(1)=3f(1)+3f'(1)=0$

$\therefore f'(1)=-f(1)=-8 \quad (\because f(1)=8)$
$\therefore f(1)-f'(1)=8-(-8)=16$

14) 12

$f'(x)=3x^2+2ax-a^2=0 \Leftrightarrow x=-a,\ \dfrac{a}{3}$ 로부터

$f(-a)=a^3+2,\ f\left(\dfrac{a}{3}\right)=-\dfrac{5}{27}a^3+2,\ f(a)=a^3+2$

이므로

$-\dfrac{5}{27}a^3+2=\dfrac{14}{27}$

$\therefore a=2,\ M=10$

따라서 $a+M=12$

15) 32

[출제의도] 평균변화율을 이해하여 미분계수를 구한다.

$\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{(8+2a)-0}{2-0}=4+a=9 \quad \therefore a=5$

$f'(x)=3x^2+5$

$f'(3)=27+5=32$

16) 2

[출제의도] 미분을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

$y'=3x^2-a$이므로 점 $(1,1)$에서의 접선의 기울기는 $3-a$이다.

따라서, 이 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$이므로

$(3-a)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1,\ 3-a=2$

즉, $a=1$이다.

또한, 점 $(1,\ 1)$은 곡선 $y=x^3-x+b$위의 점이므로

$1=1^3-1+b$

$b=1$

따라서, $a+b=2$이다.

17) 2

[출제의도] 접선의 방정식 이해하기

$y'=2x-1$ 이므로 점 A에서의 접선의 기울기는 1

두 점 A, B에서의 접선이 서로 수직이므로

점 $B(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 -1

$f'(a)=2a-1=-1$

$a=0$ 이므로 $B(0,3)$

점 B에서의 접선의 방정식은 $y=-x+3$

$\therefore a+b=2$

18) ⑤

[출제의도] 이해능력-다항함수의 미분법

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$ 에서

$f'(x)=(x-2)(x-a)+(x-1)(x-a)+(x-1)(x-2)$

$f'(a)=(a-1)(a-2)$

$f'(1)=(1-2)(1-a)=a-1$

$f'(2)=(2-1)(2-a)=-a+2$

$f'(a)=f'(1)+f'(2)$ 이므로

$a^2-3a+2=1$ 에서 $a^2-3a+1=0\ \cdots$ ㉠

이차방정식 ㉠은 실근을 가지므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에서 모든 실수 a의 값의 합은 3이다.

19) ①

$f(x)=ax^2+b$, $f'(x)=2ax$ 를 주어진 식에 대입하면

$4(ax^2+b)=(2ax)^2+x^2+4$ 좌변과 우변을 각각 정리하면

$4ax^2+4b=(4a^2+1)x^2+4$ 이므로 $4a=4a^2+1,\ 4b=4$ 이다.

$4a^2-4a+1=0\ (2a-1)^2=0$ 이므로 $a=\dfrac{1}{2}, b=1$

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+1$ 이므로 $f(2)=3$

20) 30

[출제의도] 이해능력-다항함수의 미분법

$f(x)=30x^3-f'(1)x^2+5$에서

$f'(x)=90x^2-f'(1)\times 2x$

위 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)=90-2f'(1)$, 즉 $3f'(1)=90$

따라서 $f'(1)=30$

21) ②

$f'(x)=3x^2-6ax+3(a^2-1)=(3x-(3a+3))(x-(a-1))$

즉 $x=a-1$일 때 극댓값 4를 갖는다.

$f(-2)>0$이므로

$f(-2)=-6a^2-12a-2,\ 3a^2+6a+1<0$이 된다.

$\dfrac{-3-\sqrt{6}}{3}<a<\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}$ 이므로 $a<0$이다.

$f(a-1)=(a-1)^3-3a(a-1)^2+3(a^2-1)(a-1)$

$=(a-1)^2(a+2)=4$

정리하면 $a^3-3a+2=4$, $a^2-3a-2=(a+1)^2(a-2)=0$이다.

$\therefore a=-1(a<0)$

그러므로 $f(x)=x^3+3x^2$

$f(-1)=2$

22) ③

[출제의도] 두 점 사이의 거리를 이용하여 삼차함수의 극댓값과 극솟값의 차를 구한다.

$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ 이므로 $f(\alpha)$, $f(\beta)$는 함수 $f(x)$의 극값이다.

조건에서 $\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2}=26$ 이므로

$(\beta-\alpha)^2+\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2=10^2+\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2=26^2$

$\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2=26^2-10^2=24^2$

$|f(\beta)-f(\alpha)|=24$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 차는 24

23) ③

[출제의도] 이차함수의 성질과 도함수의 정의를 이해하여 함숫값을 구한다.

이차함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 이고

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x축에 접하므로

$f(x)=(x-a)^2$ (단, a는 상수이다.)

$f(x)=(x-a)(x-a)$이므로

$f'(x)=2(x-a)$

$g(x)=(x-3)f'(x)=2(x-a)(x-3)$

$=2x^2-2(a+3)x+6a$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로 x의 계수가 0이다. 즉, $a=-3$

따라서 $f(x)=(x+3)^2$ 에서 $f(0)=3^2=9$

24) 3

[출제의도] 평균변화율과 미분계수를 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$에서 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율은

$\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}=\dfrac{a^3-3a^2+5a}{a}=a^2-3a+5$

또, $f'(x)=3x^2-6x+5$이므로

$f'(2)=12-12+5=5$

따라서 $a^2-3a+5=5$에서 $a(a-3)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=3$

$a>0$이므로 $a=3$

25) ①

[출제의도] 함수의 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구한다.

(가)에서 $\lim_{x\to1}\{f(x)g(x)+4\}=0$

함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)g(1)=-2g(1)=-4$에서 $g(1)=2$ …… ㉠

$g(x)$는 일차함수이므로 $g(x)=ax+b$라 하면

$g'(x)=a$ …… ㉡

(나)에서 $g(0)=g'(0)$이므로 $b=a$

그런데 ㉠에서 $a+b=2$이므로 $a=1,\ b=1$

㉡에서 $g'(1)=1$

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)g(x)+4}{x-1}$는 함수 $f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수이므로

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)g(x)+4}{x-1}=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$

즉, $f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=2f'(1)-2=8$

따라서 $f'(1)=5$

26) ①

$\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)+g(x)}{x}=3$에서

$f(0)+g(0)=0$이고 $f'(0)+g'(0)=3$

$\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)+3}{xg(x)}=2$에서 $f(0)=-3$이고 $f'(0)+g'(0)=3$이므로

$g(0)=3,\ \dfrac{f'(0)}{g(0)}=2,\ f'(0)=6,\ g'(0)=-3$

$h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)=6\times3-3\times-3=27$

27) ④

[출제의도] 함수의 그래프를 이용하여 방정식에 대한 문제를 해결한다.

$f(x)=x^3-3x^2-9x$라 하면

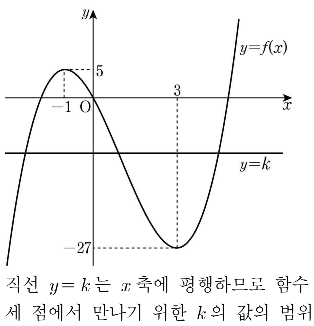
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$

이고, 함수 $f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



직선 $y=k$는 x축에 평행하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만나기 위한 k의 값의 범위는 $-27<k<5$

그러므로 정수 k의 최댓값 $M=4$, 최솟값 $m=-26$

따라서 $M-m=4-(-26)=30$

28) ③

[출제의도] 미분계수의 정의를 이용하여 문제를 해결한다.

조건 (가)에서 $x\to1$일 때, (분모)$\to0$이므로

(분자)$\to0$이다. 즉, $f(1)=g(1)$ …… ㉠

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{\{f(x)-f(1)\}-\{g(x)-g(1)\}}{x-1}=5$

즉, $f'(1)-g'(1)=5$ …… ㉡

조건 (나)에서

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)+g(x)-2f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\dfrac{\{f(x)-f(1)\}+\{g(x)-g(1)\}}{x-1}=7$

즉, $f'(1)+g'(1)=7$ …… ㉢

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-a}{x-1}=b\times g(1)$에서 $x\to1$일 때,

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $a=f(1)$이고 $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

㉠에서 $f(1)=g(1)$이므로 $f'(1)=b\times f(1)=ab$

㉡, ㉢을 연립해서 풀면 $f'(1)=6$

따라서 $ab=6$

29) 24

[출제의도] 곱의 미분법을 활용하여 문제 해결하기

$\lim_{x\to2}\dfrac{f(x)-4}{x^2-4}=2$에서

(분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$

$\lim_{x\to2}\{f(x)-4\}=0$이므로 $f(2)=4$

$\lim_{x\to2}\dfrac{f(x)-4}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\left\{\dfrac{1}{x+2}\times\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\right\}$

$=\dfrac{1}{4}f'(2)=2$

$f'(2)=8$

$\lim_{x\to2}\dfrac{g(x)+1}{x-2}=8$에서

(분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$

$\lim_{x\to2}\{g(x)+1\}=0$이므로 $g(2)=-1$

$\lim_{x\to2}\dfrac{g(x)+1}{x-2}=\lim_{x\to2}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)=8$

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

따라서 $h'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=24$

30) 11

[출제의도] 평균변화율과 미분계수를 구할 수 있는가?

함수 $f(x)=x^3-6x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$\dfrac{f(4)-f(0)}{4-0}=\dfrac{64-96+20}{4}=-3$

또한, $f'(x)=3x^2-12x+5$이므로

$3a^2-12a+5=-3,\ 3a^2-12a+8=0$ …… ㉠

㉠을 만족시키는 모든 실수 a는 $0<a<4$를 만족시키므로 모든 실수 a의 값의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\dfrac{8}{3}$이다.

따라서 $p=3,\ q=8$이므로

$p+q=11$

31) ③

[출제의도] 미분을 활용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가?

방정식 $2x^3-3x^2-12x+k=0$, 즉

$2x^3-3x^2-12x=-k$ …… ㉠

에서

$f(x)=2x^3-3x^2-12x$라 하자.

$f'(x)=6x^2-6x-12$

$=6(x+1)(x-2)$

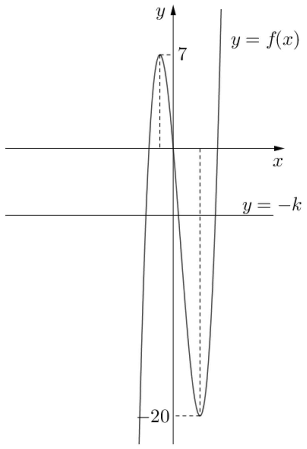
$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 아래와 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7 (극대)	↘	-20 (극소)	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 7을 갖고, $x=2$에서 극솟값 -20을 갖는다.



방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$-20<-k<7$

즉, $-7<k<20$이다.

따라서 정수 k의 값은

$-6,\ -5,\ -4,\ \cdots,\ 19$

이고, 그 개수는 26이다.

32) ⑤

[출제의도] 다항함수의 도함수와 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

점 $(0,\ 0)$이 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$f(0)=0$ …… ㉠

이때, 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(0)(x-0)+0$

$y=f'(0)x$ …… ㉡

또, 곡선 $y=xf(x)$ 위에 점 $(1,\ 2)$가 있으므로

$1\times f(1)=2$

$f(1)=2$ …… ㉢

$y=xf(x)$에서

$y'=f(x)+xf'(x)$이므로

$(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$y=\{f(1)+f'(1)\}(x-1)+2$

$=\{f'(1)+2\}(x-1)+2$

$=\{f'(1)+2\}x-f'(1)$ …… ㉣

이때, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 하면

㉠에서

$d=0$

이때, $f(x)=ax^3+bx^2+cx$이므로

㉢에서

$a+b+c=2$ …… ㉤

㉡과 ㉣에서

두 접선이 일치해야 하므로

$f'(0)=f'(1)+2,\ f'(1)=0$

따라서 $f'(0)=2,\ f'(1)=0$

이때, $f'(x)=3ax^2+2bx+c$이므로

$f'(0)=2$에서

$c=2$

이때, $f'(x)=3ax^2+2bx+2$이므로

$f'(1)=0$에서

$3a+2b+2=0$

㉤에서 $c=2$를 대입하면

$a+b=0$이므로

$b=-a$를 위 식에 대입하여 $a,\ b$을 구하면 $a=-2,\ b=2$이므로

$f(x)=-2x^3+2x^2+2x$,

$f'(x)=-6x^2+4x+2$

따라서

$f'(2)=-14$

33) 6

[출제의도] 미분을 이용하여 함수의 그래프의 개형을 알 수 있는가?

$f(x)=x^3+ax^2-(a^2-8a)x+3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-(a^2-8a)\geq 0$

이때, 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면

$f'(x)\geq 0$

이때, 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}\leq 0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=a^2-3(-a^2+8a)$

$=4a^2-24a$

$=4a(a-6)\leq 0$

그러므로

$0\leq a\leq 6$

따라서 a의 최댓값은 6이다.

34) ③

[출제의도] 평균변화율을 이해하여 함수의 미분계수를 구한다.

$\dfrac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a}=4a-1=7$에서 $a=2$이다.

한편 $f'(x)=4x-3$이므로

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}=2\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}$

$=2f'(a)$

$=2f'(2)=10$

35) ⑤

[출제의도] 함수의 증가와 감소를 이해하여 실수의 최솟값을 구하는 문제를 해결한다.

$f(x)=x^2+2x+k=(x+1)^2+k-1$

이므로 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq k-1$이다.

함수 $g(f(x))$에서 $f(x)=t$라 하면 $t\geq k-1$이므로 함수 $g(t)$는 구간 $[k-1,\ \infty)$에서 정의된 함수이다.

한편 $g(x)=2x^3-9x^2+12x-2$에서

$g'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

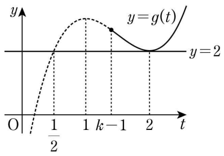
이므로 $g'(x)=0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=2$ 이다.

함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대, $x=2$ 에서 극소이다.

$g(t)=2$ 에서

$2t^3-9t^2+12t-2=2$, $(2t-1)(t-2)^2=0$

즉, 함수 $y=g(t)$ 의 그래프와 직선 $y=2$ 는 그림과 같다.



따라서 $\frac{1}{2} \le k-1 \le 2$, 즉 $\frac{3}{2} \le k \le 3$ 이므로 조건을 만족시키는 실수 k 의 최솟값은 $\frac{3}{2}$ 이다.

36) ④

[출제의도] 미분계수 이해하기

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-g(x)}{x-3}=1$이고 $\lim_{x\to3}(x-3)=0$이므로

$\lim_{x\to3}\{f(x)-g(x)\}=0$

$f(x)$, $g(x)$가 모두 다항함수이므로

$f(3)=g(3)$이고 $f(3)=2$이므로 $g(3)=2=-2$

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-g(x)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{\{f(x)-f(3)\}-\{g(x)-g(3)\}}{x-3}$

$=f'(3)-g'(3)=1$

$f'(3)=1$이므로 $g'(3)=0$

$g(x)=x^2+ax+b$(a, b는 상수)라 하면

$g'(x)=2x+a$

$g(3)=9+3a+b=2$, $g'(3)=6+a=0$

에서 $a=-6$, $b=11$

따라서 $g(1)=1-6+11=6$

37) ③

[출제의도] 평균값의 정리를 이용하여 함수의 최솟값을 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 5]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 5)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=f'(c)$ …… ㉠

를 만족하는 상수 c가 열린구간 $(1,\ 5)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, 조건 (나)에 의하여

$f'(c)\ge 5$

이므로 ㉠에서

$\frac{f(5)-3}{4}\ge 5$

$f(5)\ge 23$

따라서 $f(5)$의 최솟값은 23이다.

38) ⑤

[출제의도] 도함수를 활용하여 함수의 최솟값을 구하고 이를 부등식에 활용할 수 있는가?

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=x^3-x^2-x+6-a$

이때 $x\ge0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $h(x)\ge0$이 성립하려면 $x\ge0$에서 함수 $h(x)$의 최솟값이 0 이상이어야 한다.

$h'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

이므로

$h'(x)=0$ 에서

$x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

$x\ge0$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$6-a$	↘	$5-a$	↗

즉, $x\ge0$에서 함수 $h(x)$의 최솟값이 $5-a$이므로 주어진 조건을 만족시키려면 $5-a\ge0$이어야 한다.

따라서 $a\le5$이므로 구하는 실수 a의 최댓값은 5이다.

39) 4

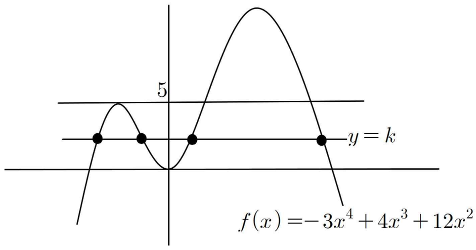
$y=f(x)=-3x^4+4x^3+12x^2$과 $y=k$의 교점 개수가 실근의 개수

$f'(x)=-12x^3+12x^2+24x=-12x(x^2-x-2)$

$=-12x(x+1)(x-2)$

$f(0)=0$, $f(-1)=5$, $f(2)=-48+32+48=32$

얻어진 극점으로 그래프를 그리면 아래 그림과 같다.



$\therefore\ 0<k<5$이므로 4개

40) 7

[출제의도] 근의 조건이 주어진 방정식에서 미분을 이용하여 정수 k를 구할 수 있는가?

방정식

$2x^3-6x^2+k=0$ …… ㉠

에서

$f(x)=2x^3-6x^2+k$

라 하면 방정식의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표이다. 한편,

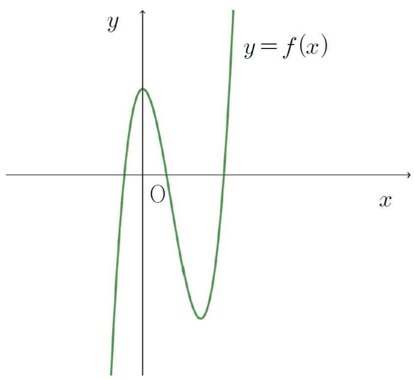
$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$ 이므로

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$

그러므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	k	↘	$k-8$	↗

이때, ㉠이 2개의 서로 다른 양의 실근을 갖기 위해서는 다음 그림과 같아야 한다.



즉, 함수 $f(x)$의 극댓값은 양수이어야 하고 함수 $f(x)$의 극솟값은 음수이어야 한다. 그러므로

$k>0$이고 $k-8<0$ 이므로

$0<k<8$

따라서, 정수 k는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7로 그 개수는 7이다.

41) ③

$$f(t)=\begin{cases} t^2 & (0<t<1) \\ 1+\int_1^t x\,dx=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2} & (1\leq t<2) \\ \frac{5}{2}+\int_2^t 2\,dx=2t-\frac{3}{2} & (2\leq t<3) \\ \frac{9}{2}+\int_3^t 3\,dx=3t-\frac{9}{2} & (3\leq t<4) \end{cases}$$ 이고,

t 가 자연수가 아닐 때는 미분가능하므로

$$f'(t)=\begin{cases} 2t & (0<t<1) \\ t & (1<t<2) \\ 2 & (2<t<3) \\ 3 & (3<t<4) \end{cases}$$

$\lim_{t\to 2+}f'(t)=\lim_{t\to 2-}f'(t)=2$ 가 되어 $t=2$ 에서 미분가능하지만

$t=1$ 또는 3 에서는 미분이 불가능하다.

따라서 $1+3=4$ 이다.

42) ②

$f(x)=mx$ 인 $x=\alpha$ 라 하면 $x=\alpha$ 에서 미분가능하므로

$\alpha^3-3\alpha^2-9\alpha-1=m\alpha$ …… ㉠

$3\alpha^2-6\alpha-9=m$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $(\alpha-1)^2(2\alpha+1)=0$

$\therefore\ \alpha=1$ 또는 $\alpha=-\frac{1}{2}$

그래프를 그려보면, $\alpha=1$ 일 때 $m=-12$ 이고

$g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하지만

$\alpha=-\frac{1}{2}$ 일 때 $m=-\frac{21}{4}$ 이고

$g(x)$ 는 $x>0$ 에서 미분불가능한 뾰족한 점이 발생한다.

따라서 $m=-12$

43) ②

함수 $f(x)$가 연속이므로 $f(0)=a+b=1$ … ㉠

$f(x)$는 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$f'(0)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

그런데 $\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=-1$,

$\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=2a(0-1)=-2a$ 이므로

$-1=-2a$ … ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 $b=\frac{1}{2}$ $\therefore\ f(1)=b=\frac{1}{2}$ 이다.

44) 13

[출제의도] 함수의 대칭성을 이용하여 미분가능성 문제를 해결한다.

다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 직선 $x=k$에 대하여 대칭인 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $x=k$에서 미분가능하면 된다.

$$\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=\lim_{x\to k-}\frac{f(2k-x)-f(k)}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k-}\left[\frac{\{(2k-x)^3-(2k-x)^2-9(2k-x)+1\}}{x-k}-\frac{(k^3-k^2-9k+1)}{x-k}\right]$$

$$=\lim_{x\to k-}\left[(k-x)\times\frac{\{(2k-x)^2+k(2k-x)+k^2-(3k-x)-9\}}{x-k}\right]$$

$=-3k^2+2k+9$

또, $\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}$

$$=\lim_{x\to k+}\frac{(x^3-x^2-9x+1)-(k^3-k^2-9k+1)}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k+}\frac{(x-k)\{x^2+kx+k^2-(x+k)-9\}}{x-k}$$

$=3k^2-2k-9$

$\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}$ 이므로

$-3k^2+2k+9=3k^2-2k-9$

$3k^2-2k-9=0$

그러므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{2}{3}$이다.

따라서 $p=3$, $q=2$이므로 $p^2+q^2=13$이다.

[참고]

함수 $y=f(2k-x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $x=k$에 대하여 대칭이다. 따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 $x=k$에 대하여 대칭이고, 함수 $y=g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $f'(k)=0$이어야 한다.

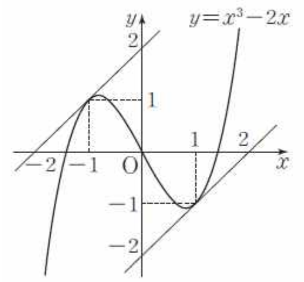
45) 4

[출제의도] 발견적 추론능력(추측)-다항함수의 미분법

$f'(x)=3x^2-2$ 에서 $f'(-1)=1$

$f'(x)=1$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 곡선 $y=f(x)$ 위에 있는 점 $(1,-1)$이 점 $(-1,1)$의 위치에 오도록 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 $y=f(x)\ (x\geq 1)$ 의 그래프가 평행이동하면 된다.

즉, $x\geq -1$일 때 $g(x)=f(x+2)+2$ 이다.

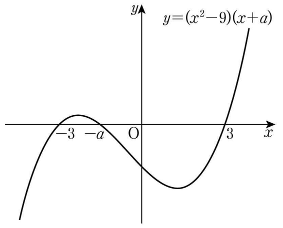
따라서 $p=2$, $q=2$ 이므로 $p+q=4$

46) ①

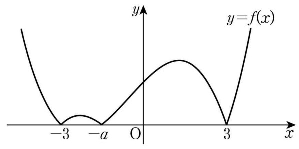
[출제의도] 조건을 만족시키는 함수의 그래프를 추론하여 극댓값을 구한다.

(ⅰ) $0<a<3$ 일 때

함수 $y=(x^2-9)(x+a)$ 의 그래프는 x축과 세 점 $(-3,0)$, $(-a,0)$, $(3,0)$ 에서 만나므로 그래프의 개형은 그림과 같다.



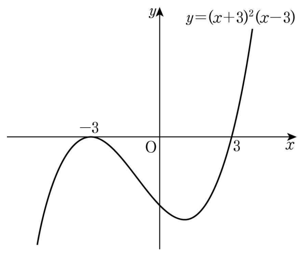
그러므로 함수 $f(x)=\left|(x^2-9)(x+a)\right|$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



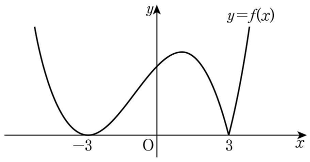
함수 $f(x)$는 $x=-3,\ x=-a,\ x=3$에서 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=3$일 때

함수 $y=(x^2-9)(x+a)=(x+3)^2(x-3)$의 그래프는 x축과 점 $(-3,\,0)$에서 접하고 점 $(3,\,0)$에서 만나므로 그래프의 개형은 그림과 같다.



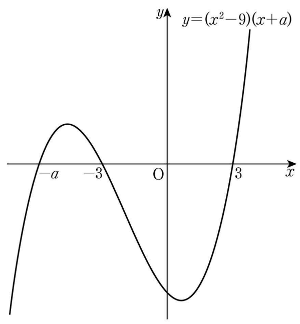
그러므로 $f(x)=\left|(x+3)^2(x-3)\right|$ 의 그래프 개형은 그림과 같다.



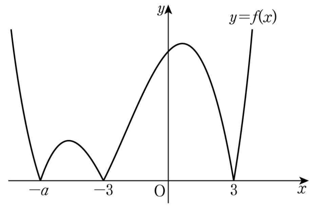
$f(x)$는 $x=3$에서만 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(iii) $a>3$일 때

함수 $y=(x^2-9)(x+a)$의 그래프는 x축과 세 점 $(-a,\,0)$, $(-3,\,0)$, $(3,\,0)$에서 만나므로 그래프의 개형은 그림과 같다.



그러므로 함수 $f(x)=\left|(x^2-9)(x+a)\right|$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=-a,\ x=-3,\ x=3$에서 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 (i), (ii), (iii)에 의해 $a=3$

함수 $y=(x^2-9)(x+3)$의 극솟값의 절댓값이

함수 $f(x)=\left|(x^2-9)(x+3)\right|$ 의 극댓값이다.

$y=(x^2-9)(x+3)$의 도함수는

$y'=2x(x+3)+(x^2-9)=3(x+3)(x-1)$이므로

$y'=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

$y=(x^2-9)(x+3)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	0	↘	-32	↗

그러므로 함수 $y=(x^2-9)(x+3)$은 $x=1$에서 극소이고 극솟값은 -32

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고 극댓값은

$f(1)=|-32|=32$

[보충 설명]

$a=3$일 때 함수 $f(x)$가 $x=3$에서만 미분가능하지 않음을 보이자.

$$f(x)=\left|(x^2-9)(x+3)\right|$$
$$=\left|(x+3)^2(x-3)\right|$$
$$=\begin{cases}(x+3)^2(x-3) & (x\ge 3)\\ -(x+3)^2(x-3) & (x<3)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\,3)$과 구간 $(3\,,\infty)$에서 각각 다항함수이므로

함수 $f(x)$는 $x\neq 3$인 모든 실수 x에서 미분가능하다.

그런데

$$\lim_{x\to 3-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3-}\frac{-(x+3)^2(x-3)}{x-3}=-36$$

$$\lim_{x\to 3+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3+}\frac{(x+3)^2(x-3)}{x-3}=36$$

이므로 극한값 $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$이 존재하지 않는다.

그러므로 $f(x)$는 $x=3$에서 미분가능하지 않다.

따라서 $f(x)$는 오직 한 개의 x 값에서만 미분가능하지 않다.

47) 6

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이고 미분가능하다.

함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 3-}g(x)=\lim_{x\to 3+}g(x)=g(3)$$

$b-f(3)=f(3)$

$b=6a-34$

함수 $g(x)$가 $x=3$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 3-}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3+}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}$$

$$\lim_{x\to 3-}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3-}\frac{b-f(x)-f(3)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3-}\frac{-f(x)+\{b-f(3)\}}{x-3}$$

$= \lim_{x\to3-} \dfrac{-\{f(x)-f(3)\}}{x-3}$

$=-f'(3)$

$=a-9$

$\lim_{x\to3+} \dfrac{g(x)-g(3)}{x-3} = \lim_{x\to3+} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$

$=f'(3)=-a+9$

따라서 $a=9,\ b=20$

$g(x)=\begin{cases} -x^3+6x^2-9x+10 & (x<3) \\ x^3-6x^2+9x+10 & (x\ge3) \end{cases}$

$x<3$에서

$g'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$

$g'(x)=0$에서 $x=1$

$x\ge3$에서

$g'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$g'(x)=0$에서 $x=3$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗		↗

$g(1)=-1+6-9+10=6$이므로

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값 6을 갖는다.

48) ③

[출제의도] 절댓값을 포함한 함수의 미분가능성을 판단할 수 있는가?

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $f(-1)=-7$을 갖고, $x=3$에서 극솟값 $f(3)=-39$를 갖는다.

조건 (가)에서

$xg(x)=|xf(x-p)+qx|$ 이므로

$g(x)=\begin{cases} |f(x-p)+q| & (x>0) \\ -|f(x-p)+q| & (x<0) \end{cases}$

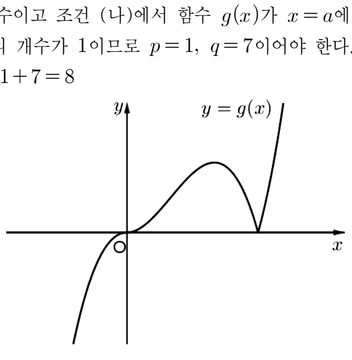
함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$|f(-p)+q| = -|f(-p)+q|$

즉, $|f(-p)+q|=0$이어야 한다.

한편, 함수 $y=|f(x-p)+q|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동시킨 후, $y<0$인 부분에 그려진 부분을 x축에 대하여 대칭이동시킨 것이다. 이때, p, q가 모두 양수이고 조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수가 1이므로 $p=1,\ q=7$이어야 한다. 따라서

$p+q=1+7=8$



49) ③

[출제의도] 미분가능성을 이해하여 함숫값을 구한다.

$f(x)g(x)=\begin{cases} -(x+3)(2x+a) & (x<-3) \\ (x+3)(2x+a) & (x\ge-3) \end{cases}$

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=-3$에서 미분가능하다. 즉,

$\lim_{x\to-3-} \dfrac{f(x)g(x)-f(-3)g(-3)}{x+3}$

$= \lim_{x\to-3+} \dfrac{f(x)g(x)-f(-3)g(-3)}{x+3}$,

$\lim_{x\to-3-}(-2x-a) = \lim_{x\to-3+}(2x+a)$

따라서 $6-a=-6+a$에서 $a=6$

50) ①

[출제의도] 함수의 그래프를 이해하여 함숫값을 구한다.

함수 $g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하고 $g(a)=0$이므로

$\lim_{x\to a-} \dfrac{g(x)}{x-a} = \lim_{x\to a+} \dfrac{g(x)}{x-a}$,

$\lim_{x\to a-} \dfrac{|(x-a)f(x)|}{x-a} = \lim_{x\to a+} \dfrac{|(x-a)f(x)|}{x-a}$,

$\lim_{x\to a-} \dfrac{-(x-a)|f(x)|}{x-a} = \lim_{x\to a+} \dfrac{(x-a)|f(x)|}{x-a}$

그러므로 $-|f(a)| = |f(a)|$에서 $f(a)=0$

$f(x)=(x-a)(x-k)$ (k는 상수)라 하면

함수 $g(x)=|(x-a)^2(x-k)|$가 $x=3$에서만 미분가능하지 않으므로 $k=3$이다.

그러므로

$g(x)=|(x-a)^2(x-3)|,\ h(x)=(x-a)^2(x-3)$

이라 하면

$a<3$이고 함수 $g(x)$의 극댓값이 32이므로

함수 $h(x)$의 극솟값은 -32이다.

$h'(x)=2(x-a)(x-3)+(x-a)^2=(x-a)(3x-6-a)=0$

함수 $h(x)$는 $x=\dfrac{6+a}{3}$에서 극솟값 -32를 갖는다.

$h\left(\dfrac{6+a}{3}\right)=\left(\dfrac{6+a}{3}-a\right)^2\left(\dfrac{6+a}{3}-3\right)$

$=-4\left(1-\dfrac{a}{3}\right)^3=-32$

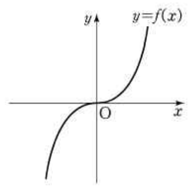
$\left(1-\dfrac{a}{3}\right)^3=8$이므로 $1-\dfrac{a}{3}=2$ 에서 $a=-3$

따라서 $f(x)=(x+3)(x-3)$에서 $f(4)=7$

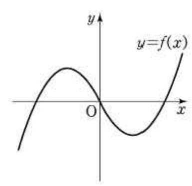
51) ④

최고차항의 계수가 1이고 모든 실수 x에 대해 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키는 $f(x)$의 그래프는 다음 두 가지 유형이 가능하다.

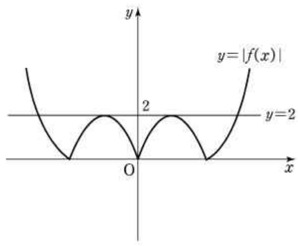
(ⅰ)



(ⅱ)



두 가지 유형 중 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근이 4개가 가능한 것은 (ⅱ)의 유형이다. (그림 참조)



따라서, $f(x)$의 극솟값은 -2, 극댓값은 2이다.

$f(x)=x^3-bx$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-b=0$에서 $x=\pm\sqrt{\frac{b}{3}}$

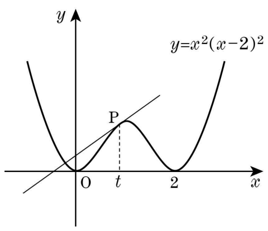
$f\left(\sqrt{\frac{b}{3}}\right)=-2$이므로

$\left(\sqrt{\frac{b}{3}}\right)^3-b\times\sqrt{\frac{b}{3}}=-2$

정리하여 계산하면, $b=3$

$\therefore\ f(3)=3^3-3\times3=18$

52) 32



직선 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$는 곡선 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$에서의 접선이므로 접선이 주어진 곡선의 위쪽에 놓이려면 접점은 곡선이 위로 볼록한 부분의 점이다.

그런데 위로 볼록한 부분에 있는 점에서의 접선 중에는 구간 $[0,\ 2]$에서 $y=f(x)$의 그래프 아래쪽을 지나는 직선이 생길 수 있다.

그러므로 원점에서 그은 접선의 접점과 점 $(2,\ 0)$에서 그은 접선의 접점의 x좌표를 조사하면 된다.

$y=x^2(x-2)^2$에서

$y'=2x(x-2)^2+2x^2(x-2)$

$\quad=4x(x-1)(x-2)$

점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

$y-a^2(a-2)^2=4a(a-1)(a-2)(x-a)$

$x=0,\ y=0$을 대입하면

$-a^2(a-2)^2=-4a^2(a-1)(a-2)$

$\therefore\ a=\frac{2}{3}$

한편 곡선 $y=x^2(x-2)^2$은 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 점 $(2,\ 0)$에서 그은 접선의 접점의 x좌표를 b라 하면 $\frac{2}{3}+b=2$에서

$b=\frac{4}{3}$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 실수 t의 값의 범위는

$\frac{2}{3}\le t\le\frac{4}{3}$이다.

$\therefore\ 36pq=36\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}=32$

53) 32

삼차함수 $y=x^3-5x$에 접하는 $\overline{AB}$ 와 $\overline{CD}$ 가 기울기가 1 이므로

$y'=3x^2-5=1$에서 $x=\pm\sqrt{2}$ 이고,

접점의 좌표는 $(-\sqrt{2},\ 3\sqrt{2})$, $(\sqrt{2},\ -3\sqrt{2})$ 이다.

따라서 $\overline{AB}$ 는 $y=x+4\sqrt{2}$, $\overline{CD}$ 는 $y=x-4\sqrt{2}$

따라서 한 변의 길이는 8, 둘레는 32 이다.

54) ⑤

$x>1$ 일 때 $\sqrt{(x-1)^2+\{f(x)-f(1)\}^2}=x^2-1$ 에서

$f(x)-f(1)=(x-1)\sqrt{x(x+2)}$ 이므로

$\therefore\ f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\sqrt{x(x+2)}=\sqrt{3}$

55) ④

곡선 $y=f(x)=x^3-5x$, 접선은 $g(x)$ 라 하면

$f'(1)=-2$ 이므로 $g(x)=-2x-2$ 이다.

$f(x)$ 와 $g(x)$ 를 연립하면 $(x-1)^2(x+2)=0$

$\therefore\ B(-2,\ 2)$

$\therefore\ \overline{AB}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

56) ②

삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되려면 점 P에서 직선 $y=x$까지의 거리가 최대이어야 한다.

이때, 점 P에서 접선은 직선 $y=x$와 평행이므로 $f'(x)=1$에서

$a\{(x-2)^2+2x(x-2)\}=1$

$3ax^2-8ax+4a-1=0$

이 이차방정식의 한 근이 $x=\frac{1}{2}$이므로

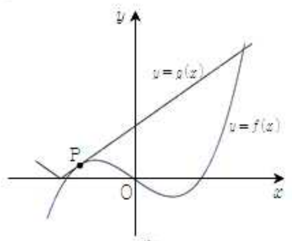
$3a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-8a\cdot\frac{1}{2}+4a-1=0$

$\frac{3}{4}a-1=0$

$\therefore\ a=\frac{4}{3}$

57) ④

두 함수 $f(x)=6x^3-x$와 $g(x)=|x-a|$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는 다음 그림과 같다.



<그림1>

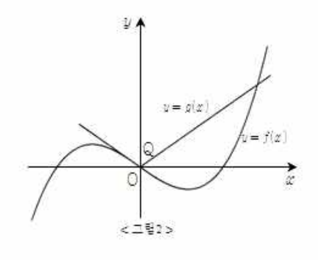
<그림1>에서 직선 $g(x)=x-a$가 곡선 $f(x)=6x^3-x$ 위의 점 P에서 접하므로

$f'(x)=1$에서 $18x^2-1=1,\ x^2=\frac{1}{9}$

$\therefore\ x=-\frac{1}{3}\ (x<0)$

이때, 접점 P의 좌표는 $\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{9}\right)$이므로

$\frac{1}{9}=-\frac{1}{3}-a\quad\therefore\ a=-\frac{4}{9}$



<그림2>에서 직선 $g(x)=-x+a$가 곡선 $f(x)=6x^3-x$ 위의 점 Q에서 접하므로 $f'(x)=-1$에서

$18x^2-1=-1,\ 18x^2=0 \quad \therefore\ x=0$

이때, 접점 Q의 좌표는 $(0,\ 0)$이므로

$0=0+a \quad \therefore\ a=0$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은 $-\dfrac{4}{9}+0=-\dfrac{4}{9}$

58) ⑤

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↗		↘

ㄱ. $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄴ. $f(0)=0$이면 도함수 $f'(x)$는 y축에 대하여 대칭이므로 함수 $f(x)$는 원점 대칭이다. 따라서 극댓 값 $f(1)$, 극솟값 $f(-1)$에 대하여 $f(1)=-f(-1)$이므로 $f(1)+f(-1)=0$이다. (참)

ㄷ. 극댓값 $f(1)$이 0보다 작으므로 방정식 $f(x)=0$은 $x<-1$인 오직 하나의 실근을 갖는다. (참)

59) 16

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^4-2x^3+8(x>0)$이라 하자.

$f'(x)=2x^3-6x^2$

$f''(x)=6x^2-12x=0$에서 $x=2(\because\ x>0)$

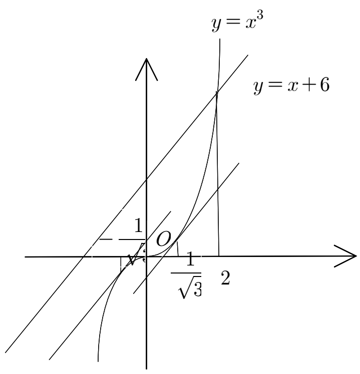
$f'(x)$는 $x=2$에서 최솟값을 갖는다.

$f(2)=0,\ f'(2)=-8$이므로 점 $(2,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=-8x+16$

따라서 구하는 도형의 넓이는 16

60) ③



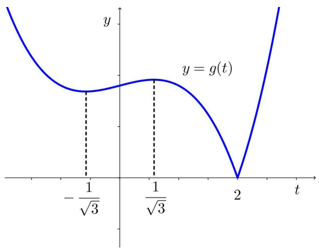
$y=x^3$ 위의 점 중에서 접선의 기울기가 1인 점은 $3x^2=1$에서

$x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}$일 때이고

$y=x+6$과 $y=x^3$의 교점은 $(2,\ 8)$이다.

따라서, $g(t)$ 식과 개형은 아래와 같다.

$$g(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|t-t^3+6\right|=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}(t-t^3+6) & (t\le 2)\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(t^3-t-6) & (t>2)\end{cases}$$



ㄱ. 모든 실수에 대해 연속(참)

ㄴ. $t\ne 2$인 모든 실수에서 함수 $g(t)$의 도함수를 구하면

$$g'(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-3t^2) & (t<2)\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(3t^2-1) & (t>2)\end{cases}$$

이다. $t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$에서 $g'(t)=0$이고

$t=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$에서 극솟값, $t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$에서 극댓값을 갖는다. 여기서

$g\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\ne 0$이므로 0이 아닌 극솟값이 존재한다.(참)

ㄷ. $t=2$에서의 좌미분계수와 우미분계수를 구해보면 각각 다음과 같다.

$\lim\limits_{t\to 2-}g'(t)=-\dfrac{11}{\sqrt{2}},\ \lim\limits_{t\to 2+}g'(t)=\dfrac{11}{\sqrt{2}}$

이때, 두 값은 일치하지 않으므로 $t=2$에서 미분가능하지 않다.(거짓)

61) ⑤

$f(x)=\begin{cases}a\left(3x-x^3\right) & (x<0)\\ x^3-ax & (x\ge 0)\end{cases}$에서

$f'(x)=\begin{cases}a\left(3-3x^2\right) & (x<0)\\ 3x^2-a & (x>0)\end{cases}$이다.

a의 부호에 따라서 도함수의 그래프가 달라지기 때문에 a의 범위를 나누어야 한다.

(i) $a=0$일 때는 $f'(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ 3x^2 & (x\ge 0)\end{cases}$이 되어서 $f(x)$의 극댓값이 발생하지 않는다.

(ii) $a>0$일 때는 $x=-1,\ \sqrt{\dfrac{a}{3}}$에서 $f(x)$가 극솟값을 가지고 $x=0$에서 극댓값을 가지지만 그 값이 0이므로 문제의 조건을 만족시키지 못한다.

(iii) $a<0$일 때는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다.

이상에서 $f(-1)=a(-3+1)=5,\ a=-\dfrac{5}{2}$이다.

$\therefore f(2)=2^3+\dfrac{5}{2}\cdot 2=13$

62) ③

$f(x)$에 대한 증감표를 작성하면

x	$-$	b	$-$	0	$+$	c	$+$	d	$+$
$g(x)$	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$		$+$		$+$		$-$		$+$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. $f(x)$는 열린 구간 $(b,\ 0)$에서 증가한다.(참)

ㄴ. $f(x)$는 $x=b$에서 극솟값을 갖는다.(참)

ㄷ. $f(x)$는 닫힌 구간 $[a,\ e]$에서 $x=b,\ c,\ d$에서 극값을 가지므로

3개의 극값을 갖는다. (거짓)

63) 21

$f(x)=x^3+2x+7 \cdots$㈎

점 $P(-1,4)$에서 접선의 방정식을 l이라 하면

$f'(x)=3x^2+2$

$l: y=f'(-1)(x+1)+4=5x+9$

곡선과 접선의 교점을 구하려면

$x^3+2x+7=5x+9$이며 이항하여 $x^3-3x-2=0$

$(x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore a=2, b=19$이므로 구하는 값인 $a+b=21$

64) ④

(사각형 AQCP의 넓이)

=(삼각형 ACP의 넓이)+(삼각형 AQC의 넓이)

직선 AC의 기울기가 2이므로 사각형 AQCP의 넓이가 최대가 되려면 접선의 기울기가 2가 되는 접점을 P와 Q로 하면 된다.

$y'=3x^2-10x+4$에서 $3x^2-10x+4=2$, $3x^2-10x+2=0$의 두 근이 점 P,Q의 x좌표이므로 두 점 P,Q의 x좌표의 곱은 $\frac{2}{3}$

65) 5

조건 (가)에서 $f(a)=f(2)=f(6)=k$로 놓으면

$f(a)-k=f(2)-k=f(6)-k=0$

$g(x)=f(x)-k$라 하면

$g(a)=g(2)=g(6)=0$

$g(x)=(x-a)(x-2)(x-6)$

그러므로 $f(x)=(x-a)(x-2)(x-6)+k$

$f(x)$를 미분하면

$f'(x)=(x-2)(x-6)+(x-a)(x-6)+(x-a)(x-2)$

조건 (나)에서 $f'(2)=-4$이므로

$-4(2-a)=-4 \quad \therefore a=1$

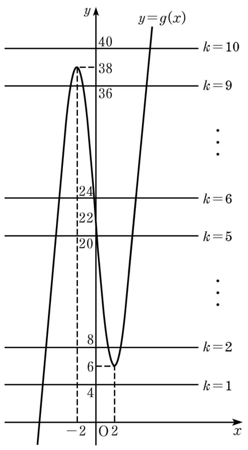
$\therefore f'(a)=(a-2)(a-6)=(-1)\times(-5)=5$

66) 13

$g(x)=x^3-12x+22$라 하면 $g'(x)=3(x-2)(x+2)$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	38	↘	6	↗



삼차방정식의 양의 실근의 개수 $f(k)$는 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=4k$가 제1사분면에서 만나는 교점의 개수와 같다.

i) $k=1$일 때 $f(k)=0$

ii) $k=2,3,4,5$일 때 $f(k)=2$

iii) $k=6,7,\cdots,10$일 때 $f(k)=1$

따라서 $\sum_{k=1}^{10} f(k)=0\times1+2\times4+1\times5=13$

67) 3

$f'(x)=x^2-9=0$으로부터 $y=f(x)$는

$x=3$, -3일 때 각각 극솟값과 극댓값을 가짐을 알 수 있다.

따라서 구하고자 하는 양수 a의 최댓값은 3이다.

68) ①

직선 $y=5x+k$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 직선 $y=5x+k$가 함수 $y=f(x)$의 그래프에 접해야 한다

$f(x)=x(x+1)(x-4)=x^3-3x^2-4x$에서

$f'(x)=3x^2-6x-4$

이므로 접점의 x좌표를 a라 하면

$f'(x)=3a^2-6a-4=5$

즉, $3a^2-6a-9=0$이므로

$3(a+1)(a-3)=0 \qquad \therefore a=-1\ (\because k>0)$

따라서, $f(-1)=0$이므로

직선 $y=5x+k$는 점$(-1, 0)$을 지난다.

$\therefore k=y-5x=0+5=5$

69) ⑤

$g'(x)=f(x)$ 이므로

$f'(x)=2(x-3)$으로부터 $g'(2)=f(2)=1$

따라서 구하고자 하는 접선의 방정식은 $y=x-5$

이 접선의 x 절편은 5이다.

70) ①

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow 3x^3-x^2-3x=x^3-4x^2+9x+a$

$\Leftrightarrow 2x^3+3x^2-12x=a$

$h(x)=2x^3+3x^2-12x$라 놓으면

$h'(x)=6x^2+6x-12=0$ 이므로

$x=-2$ 일 때 극댓값 20을 갖고,

$x=1$ 일 때 극솟값 -7을 가짐을 알 수 있다.

$y=h(x)$ 와 $y=a$가 서로 다른 두 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 갖기 위해서는 $-7<a<0$을 만족해야 한다.

71) ③

최고차항의 계수가 1인 삼각함수 $f(x)$가 $x=n$에서 근을 갖고

$x\ge -n$일 때 $f(x)\ge 0$, $x\le -n$일 때 $f(x)\le 0$을 만족해야 하므로

$f(x)=(x+n)(x-n)^2$가 됨을 알 수 있다.

$f'(x)=(x-n)^2+(x+n)2(x-n)=3x^2-2nx-n^2=0$

$\Leftrightarrow (3x+n)(x-n)=0$ 으로부터

$x=-\frac{n}{3}$ 일 때 극댓값 $a_n=\frac{32}{27}n^3$을 가지므로

a_n이 자연수가 되도록 하는 n의 최솟값은 3이다.

72) ②

[출제의도] 미분을 활용하여 추론하기

$f(x)=x^3+3x^2-9x+4-k$라 하면

$f'(x)=3(x+3)(x-1)$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$31-k$ (극댓값)	↘	$-1-k$ (극솟값)	↗

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면
$f(-3)f(1)<0$이어야 하므로
$(31-k)(-1-k)<0$
$-1<k<31$
따라서 모든 정수 k의 개수는 31

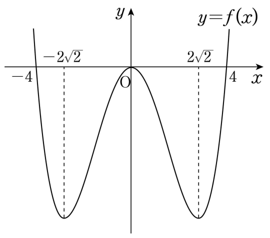
73) ⑤

[출제의도] 접선의 방정식 이해하기

$f'(x)=2x$이고 $f'(1)=2$이므로
점 $\mathrm{P}(1,1)$에서의 접선 l의 방정식은 $y=2x-1$
접점 Q의 좌표를 (a,b)라 하면 $b=2a-1$
직선 l에 곡선 $y=g(x)$가 접하므로
$g'(x)=-2x+6$
$g'(a)=-2a+6=2$
$a=2,\ b=3$이므로 점 $\mathrm{Q}(2,3)$
$g(2)=3$이므로 $k=4$
원점으로부터 가까운 점을 R라 하면
$\mathrm{R}(1,0),\ \mathrm{S}(5,0)$
따라서 삼각형 QRS의 넓이는 6

74) 17

[출제의도] 도함수의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 문제를 해결한다.



$f'(x)=4x(x^2-8)$이므로
$f'(x)=0$에서 $x=-2\sqrt{2},\ 0,\ 2\sqrt{2}$
(가)의 조건에 의해 $f(x)$는 구간 $(k,\ k+1)$에서 감소한다.
그래프에서 감소하는 구간은 $(-\infty,\ -2\sqrt{2}),\ (0,\ 2\sqrt{2})$이고, k는 정수이므로 $k=0,\ 1$ 또는 $-4,\ -5,\ \cdots$
(나)의 조건에 의해 $f'(k+2)>0$이므로
$k=1$ 또는 -4
따라서 $1^2+(-4)^2=17$

75) 97

[출제의도] 함수의 극한과 미분법을 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

조건 (나)에서 $x\to2$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 하므로
$f(2)=g(2)$
조건 (가)에서 $x=2$를 대입하면
$g(2)=8f(2)-7$이므로
$g(2)=8g(2)-7$에서 $g(2)=1$
또 조건 (나)에서

$$\lim_{x\to2}\frac{\{f(x)-f(2)\}-\{g(x)-g(2)\}}{x-2}=f'(2)-g'(2)=2$$

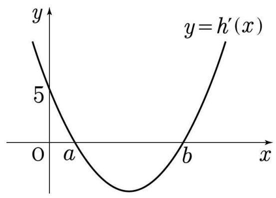
조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면
$g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$
$x=2$를 대입하면
$g'(2)=12\times+8f'(2)$
$g'(2)=12\times1+8\{g'(2)+2\}=8g'(2)+28$
에서 $g'(2)=-4$
따라서 접선의 방정식은
$y-1=-4(x-2),\ y=-4x+9$

이므로
$a^2+b^2=(-4)^2+9^2=97$

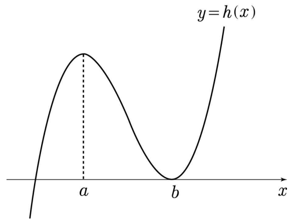
76) ⑤

[출제의도] 도함수를 활용하여 추론하기

함수 $y=h'(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다. (참)
ㄴ. $h(b)=0$일 때, 함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (참)
ㄷ. 함수 $h(x)$는 닫힌 구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속이고 열린 구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여
$\dfrac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}=h'(\gamma)$를 만족시키는 γ가 열린 구간 $(\alpha,\ \beta)$에 존재한다.
열린 구간 $(0,\ b)$에 있는 모든 실수 x에 대하여 $h'(x)<5$이므로
$\dfrac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}=h'(\gamma)<5$
$h(\beta)-h(\alpha)<5(\beta-\alpha)$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

77) 56

[출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

$f(x)=(x+2t)x(x-t)=x^3+tx^2-2t^2x$
$f'(x)=3x^2+2tx-2t^2$
$f'(4)=-2t^2+8t+48=-2(t-2)^2+56$
따라서 $f'(4)$의 최댓값은 $t=2$일 때 56

78) ②

[출제의도] 미분계수와 접선의 기울기의 관계를 이해하여 식과 값을 추론한다.

$f(x)=x^2-2x+2,\ g(x)=-x^2+ax+b$라 하고,
두 곡선 $C_1,\ C_2$의 한 교점 P의 x좌표를 t라 하자.
두 접선 $l,\ m$이 서로 수직이므로
$f'(t)g'(t)=-1$에서
$4t^2-2(a+2)t+\boxed{2a-1}=0$ …… ㉠
$f(t)=g(t)$에서
$2t^2-(a+2)t+2-b=0$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $b=\boxed{\dfrac{5}{2}}-a$를 $y=-x^2+ax+b$에 대입하고 a에 관하여 정리하면,
$a(x-1)-x^2-y+\boxed{\dfrac{5}{2}}=0$ …… ㉢
㉢에서 $x-1=0,\ -x^2-y+\boxed{\dfrac{5}{2}}=0$을 만족시키는

x 와 y 의 값을 구하면 점 Q의 좌표는 $\left(1, \boxed{\frac{3}{2}}\right)$ 이다.

$\therefore\ h(a)=2a-1$, $\alpha=\frac{5}{2}$, $\beta=\frac{3}{2}$

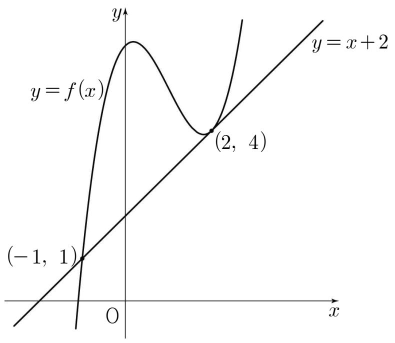
따라서 $h(\alpha)\times h(\beta)=h\left(\frac{5}{2}\right)\times h\left(\frac{3}{2}\right)=4\times 2=8$

79) ②

$f(x)=m(x-a)(x-c)(x-e)$, $g(x)=n(x-c)$ (m, n 은 양수)
라 놓으면 $f(x)g(x)=mn(x-a)(x-c)^2(x-e)$ 이고
그래프의 개형으로부터 $a<x<b$ 인 구간과 $d<x<e$ 인 구간에서
극솟값을 가짐을 알 수 있다.

80) ①

[출제의도] 접선의 방정식을 활용하여 문제해결하기



$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 라 하면
$f'(x)=3x^2+2ax+b$ 이고,
두 점 $(2,\ 4)$, $(-1,\ 1)$ 을 지나는 직선의 방정식이 $y=x+2$ 이므로
$f(2)=4$ 에서 $4a+2b+c=-4$ ⋯⋯ ㉠
$f(-1)=1$ 에서 $a-b+c=2$ ⋯⋯ ㉡
$f'(2)=1$ 에서 $4a+b=-11$ ⋯⋯ ㉢
㉠, ㉡, ㉢에 의하여 $a=-3$, $b=1$, $c=6$
$f'(x)=3x^2-6x+1$
따라서 $f'(3)=10$
[다른풀이]
두 점 $(2,\ 4)$, $(-1,\ 1)$ 을 지나는 직선의 방정식이 $y=x+2$ 이므로
$f(x)-(x+2)=(x-2)^2(x+1)$
$f(x)=x^3-3x^2+x+6$
$f'(x)=3x^2-6x+1$
따라서 $f'(3)=10$

81) 13

[출제의도] 접선의 방정식을 이해하여 수열의 합을 구한다.

함수 $y=x^3+2$ 의 그래프와 직선 $y=kx$ 는 제3사분면에서 1개의 교점을 갖는다.

함수 $y=x^3+2$ 의 그래프와 직선 $y=kx$ 가 접하는 경우 그 접점의 좌표를 $(t,\ t^3+2)$ 라 하자.

접선의 방정식은 $y-(t^3+2)=3t^2(x-t)$ 이고 접선이 원점을 지나므로 $t^3=1$

t 는 실수이므로 $t=1$ 이고 접점의 좌표는 $(1,\ 3)$ 이다.

원점을 지나는 접선의 기울기가 3이므로 $f(3)=2$

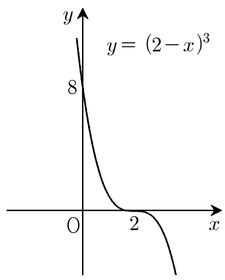
$f(1)=1$, $f(2)=1$, $k>3$ 인 경우 $f(k)=3$

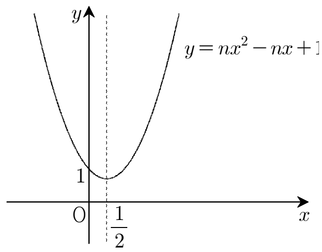
따라서 $\sum_{k=1}^{6} f(k)=1+1+2+3+3+3=13$

82) ③

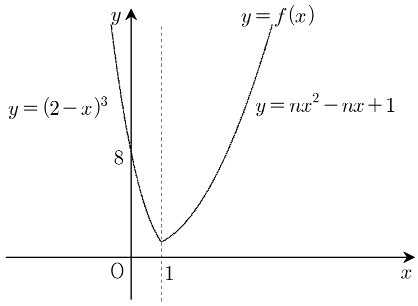
[출제의도] 그래프의 성질을 이해하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

두 곡선 $y=(2-x)^3$, $y=nx^2-nx+1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

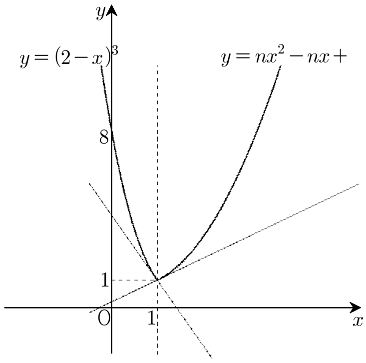




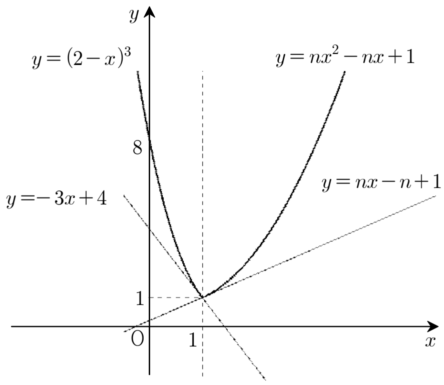
$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)=1$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이고 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $y=(2-x)^3=-x^3+6x^2-12x+8$ 에서
$y'=-3x^2+12x-12=-3(x-2)^2$ 이므로
곡선 $y=-x^3+6x^2-12x+8$ 위의 점 $(1,\ 1)$ 에서의 미분계수는 -3
함수 $y=nx^2-nx+1$ 에서 $y'=2nx-n$ 이므로 곡선
$y=nx^2-nx+1$ 위의 점 $(1,\ 1)$ 에서의 미분계수는 n 이다.
$-3\neq n$ (n : 자연수)이므로 $f'(1)$ 은 존재하지 않는다. (참)
ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값을 갖는다. (참)
ㄷ. 함수 $y=mx-m+1$ 의 그래프는 m 의 값에 관계없이 점 $(1,\ 1)$ 을 지나는 직선이므로 모든 실수 x 에 대하여 부등식
$f(x)\geq mx-m+1$ 을 만족하기 위해서는 아래 그림과 같이 곡선
$y=(2-x)^3$ 위의 점 $(1,\ 1)$ 에서 이 곡선에 그은 접선의 방정식과 곡선
$y=nx^2-nx+1$ 위의 점 $(1,\ 1)$ 에서 이 곡선에 그은 접선의 방정식을 구해야 한다.



곡선 $y=(2-x)^3$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 미분계수는 -3이므로
곡선 $y=(2-x)^3$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은 $y=-3x+4$
함수 $y=nx^2-nx+1$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 미분계수는 n이므로
곡선 $y=nx^2-nx+1$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은
$y=nx-n+1$



따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq mx-m+1$이 성립하기 위해서는 직선 $y=mx-m+1$의 기울기 m의 범위가 $-3\leq m\leq n$이어야 한다.
$g(n)=n+4$이므로
$\sum_{k=1}^{10}g(k)=\sum_{k=1}^{10}(k+4)=95$ (거짓)

83) 28

[출제의도] 이해능력-다항함수의 미분법

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-1}{x^2-4}=-1$ 에서
$x\to2$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to2}f(x)=1$이어야 한다.
그런데 다항함수 $f(x)$는 연속함수이므로 $f(2)=1$
이때

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-1}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}$$
$$=f'(2)\times\frac{1}{2+2}=-1$$

이므로
$f'(2)=-4$
$y=(x+1)f(x)$에서 $x=2$일 때
$y=(2+1)f(2)=3\times1=3$이므로 $a=3$
또, $y=(x+1)f(x)$에서
$y'=f(x)+(x+1)f'(x)$이므로
곡선 $y=(x+1)f(x)$ 위의 점 $(2,3)$에서의 접선의 기울기는
$f(2)+(2+1)f'(2)=1+3\times(-4)=-11$
이므로 접선의 방정식은
$y-3=-11(x-2)$
즉, $y=-11x+25$
따라서 y절편은 $b=25$이므로
$a+b=3+25=28$

84) ④

[출제의도] 미분법을 이용하여 조건을 만족시키는 삼차함수의 함숫값을 구할 수 있는가?

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'x)\}^2}=\frac{1}{4}$에서
$x\to2$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.
즉 $f(2)=0$이므로
$f(x)=(x-1)(x-2)(x+a)$로 놓을 수 있다. 이때,
$f'(x)=(x-2)(x+a)+(x-1)(x+a)+(x-1)(x-2)$
이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'x)\}^2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x+a)}{\{f'(x)\}^2}$$
$$=\frac{2+a}{(2+a)^2}=\frac{1}{2+a}$$

따라서 $\frac{1}{2+a}=\frac{1}{4}$에서 $a=2$이므로
$f(x)=(x-1)(x-2)(x+2)$
즉 $f(3)=2\times1\times5=10$

85) 20

[출제의도] 함수의 극한의 성질을 활용하여 문제해결하기

$g(x)=f(x)-x^2$이라 하자.
$g(1)=f(1)-1=0$, $f(1)=1$
$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=-2$
$g'(x)=f'(x)-2x$, $f'(1)=0$
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하면
$f(0)=2$, $c=2$
$f(1)=1+a+b+2=1$, $a+b=-2$
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
$f'(1)=3+2a+b=0$, $2a+b=-3$
$a=-1$, $b=-1$
따라서 $f'(3)=20$

86) ②

$f(x)=x^3-3x^2-9x$라 하자.
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)=0$에서 $x=-1,\ 3$이므로
$f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $f(-1)=5$,
$x=3$에서 극솟값 $f(3)=-27$을 갖는다.
$f(x)=k$가 서로 다른 세 개의 실근을 갖기 위해서는 k가 $f(x)$의 극솟값과 극댓값 사이의 가져야 하므로 $-27<k<5$가 된다.
따라서 정수 k의 최댓값은 4이다.

87) ①

[출제의도] 수학내적 문제해결능력-다항함수의 미분법

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0,0)$이므로
$f(x)=kx^2$ $(k\neq0)$이라 놓을 수 있다.

곡선 $y=f(x)$가 점 $D(1,2)$를 지나므로 $k=2$

$\therefore f(x)=2x^2$

$f'(x)=4x$이므로 $P(a,2a^2)$ $(0<a<1)$이라 하면

점 P에서의 접선 l의 방정식은

$y-2a^2=4a(x-a)$, $y=4ax-2a^2$

직선 l의 x절편은 $x=\dfrac{a}{2}$이고 $x=1$일 때, $y=4a-2a^2$이므로

구하는 어두운 부분의 넓이를 $S(a)$라 하면

$$S(a)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{a}{2}\right)\times(4a-2a^2)=\frac{a^3}{2}-2a^2+2a$$

$$S'(a)=\frac{3}{2}a^2-4a+2=\frac{1}{2}(3a^2-8a+4)=\frac{1}{2}(3a-2)(a-2)$$

$S'(a)=0$에서 $a=\dfrac{2}{3}$이므로 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(1)
$\frac{dS}{da}$		$+$	0	$-$	
S		↗	극대	↘	

따라서 $a=\dfrac{2}{3}$일 때, 최대이므로 구하는 넓이의 최댓값은

$$S\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{8}{27}-2\times\frac{4}{9}+2\times\frac{2}{3}=\frac{16}{27}$$

88) ③

[출제의도] 수학내적 문제해결능력-다항함수의 미분법

$F(x)=f(x)-g(x)=x^4-2x^3-(k-4)x+k-3$

으로 놓으면 $F(1)=0$이므로

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -2 & 0 & -k+4 & k-3 \\ & & 1 & -1 & -1 & -k+3 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & -k+3 & \boxed{0} \end{array}$$

따라서 $F(x)=(x-1)(x^3-x^2-x-k+3)$

$x^3-x^2-x-k+3=0$에서

$x^3-x^2-x+3=k$ $\cdots$ ㉠

$h(x)=x^3-x^2-x+3$ 으로 놓으면

$h'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=1$이므로

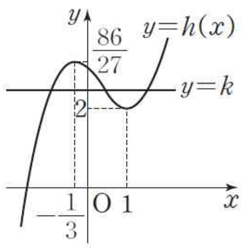
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$$h\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{27}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+3=\frac{86}{27}$$

$h(1)=1-1-1+3=2$

따라서 함수 $h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 삼차방정식 $h(x)=k$의 모든 근이 실수이기 위한 필요충분조건은

$2\le k\le\dfrac{86}{27}$이다.

따라서 방정식 $f(x)=g(x)$의 모든 근이 실수가 되도록 하는 실수 k의 값의 범위는

$2\le k\le\dfrac{86}{27}$

이므로 구하는 실수 k의 최솟값은 2이다.

89) ⑤

[출제의도] 조건을 만족시키는 함수에 대하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수) 라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

이때, 함수 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & (x<0)\\ f(x) & (x\ge 0)\end{cases}$ 이 실수 전체의 집합에서

미분가능하므로

$f(0)=\dfrac{1}{2}$, $f'(0)=0$ 이어야 한다.

즉, $c=\dfrac{1}{2}$, $b=0$ 이므로

$f(x)=x^3+ax^2+\dfrac{1}{2}$

ㄱ. $g(0)+g'(0)=f(0)+f'(0)=\dfrac{1}{2}+0=\dfrac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)=0$ 이므로

$x=0$, $x=-\dfrac{2a}{3}$에서 극값을 갖는다.

만일 $-\dfrac{2a}{3}<0$이면 함수 $g(x)$의 최솟값이 $\dfrac{1}{2}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $-\dfrac{2a}{3}>0$이므로 $a<0$이다.

이때, $g(1)=f(1)=1+a+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}+a$ 이므로

$g(1)<\dfrac{3}{2}$ (참)

ㄷ. 함수 $g(x)$는 $x=-\dfrac{2a}{3}$에서 최솟값을 갖고, 최솟값은

$$g\left(-\frac{2a}{3}\right)=f\left(-\frac{2a}{3}\right)=-\frac{8}{27}a^3+\frac{4}{9}a^3+\frac{1}{2}=\frac{4}{27}a^3+\frac{1}{2}\text{ 이므로}$$

$\dfrac{4}{27}a^3+\dfrac{1}{2}=0$ 에서 $a^3=\dfrac{27}{8}$

즉, $a=-\dfrac{3}{2}$

따라서 $f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$이므로

$g(2)=f(2)=8-6+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

90) 21

$y=x^3-3x^2+2x-3$과 $y=2x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나므로

$y=2x+k$은 $y=x^3-3x^2+2x-3$의 접선이 된다. 따라서 기울기가

2인 접선의 방정식을 통하여 $y=2x+k$을 구할 수 있다.

접점을 (t,t^3-3t^2+2t-3)이라고 하면 접선의 기울기는

$3t^2-6t+2$이다. 기울기는 $3t^2-6t+2=2$이므로 $t=0,2$이다.

따라서 접점은 $(0,-3),(2,-3)$이다.

직선의 방정식은 다음과 같다.

$y=2x-3, y=2x-7$

따라서 k의 곱은 21

91) ②

[출제의도] 함수의 증가, 감소를 이용하여 문제를 해결한다.

주어진 그래프의 개형에서 $f'(x)$의 부호에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) $f'(x)>0$인 경우

$f'(x)>0$인 구간 $(-3,\ 2)$에서 부등식 $f(x)-2\le 0$을 만족시키는 정수 x의 값은 -2, -1

(ii) $f'(x)\le 0$인 경우

$f'(x)\le 0$인 구간 $[2,\ 7)$에서 부등식 $f(x)-2\ge 0$ 을 만족시키는 정수 x의 값은 2, 3, 4

따라서 (i), (ii)에 의해 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 5

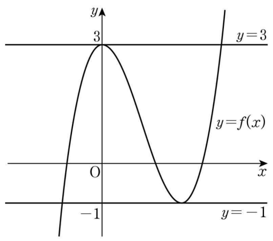
92) 19

[출제의도] 미분을 활용하여 조건을 만족시키는 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

조건 (나)에 의해 삼차함수 $f(x)$는 극값 -1을 갖는다.

조건 (가)에 의해 $f(0)=3$, $f'(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값 3을 갖는다.

그러므로 두 직선 $y=3$, $y=-1$과 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(x)=x^3+ax^2+bx+3$이라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$에서 $f'(0)=0$이므로 $b=0$

$f\left(-\dfrac{2a}{3}\right)=\left(-\dfrac{2a}{3}\right)^3+a\times\left(-\dfrac{2a}{3}\right)^2+3=-1$에서

$a=-3$

그러므로 $f(x)=x^3-3x^2+3$

따라서 $f(4)=19$

93) 34

[출제의도] 도함수를 이용하여 부등식과 관련된 문제를 해결한다.

모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\le 12x+k\le g(x)$를 만족시키는 자연수 k의 값의 범위를 구하여 보자.

(i) $f(x)\le 12x+k$

모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\le 12x+k$를 만족시키는 k의 값의 범위를 구하면 다음과 같다.

$h(x)=f(x)-12x$라고 하면

$h(x)=-x^4-2x^3-x^2-12x$,

$h'(x)=-4x^3-6x^2-2x-12=-2(x+2)(2x^2-x+3)$

$h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	↗	20	↘

$h(x)$는 $x=-2$에서 최대이고 최댓값은 20

그러므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\le 12x+k$를 만족시키는 k의 값의 범위는 $k\ge 20$

(ii) $g(x)\ge 12x+k$

모든 실수 x에 대하여 부등식 $g(x)\ge 12x+k$를 만족시키는 k의 값의 범위를 구하면 다음과 같다.

부등식 $3x^2-12x+a-k\ge 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $3x^2-12x+a-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-6)^2-3\times(a-k)\le 0$, $k\le a-12$

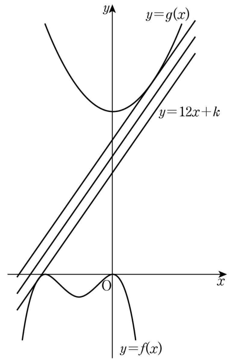
모든 실수 x에 대하여 부등식 $g(x)\ge 12x+k$를 만족시키는 k의 값의 범위는 $k\le a-12$

(i), (ii)에 의해 $20\le k\le a-12$이고 이를 만족시키는 자연수 k의 개수는 3이므로 $22\le a-12<23$

따라서 $34\le a<35$이므로 자연수 a의 값은 34

[보충 설명]

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=12x+k$의 관계는 그림과 같다.



94) ③

[출제의도] 접선의 방정식을 이용하여 문제를 해결한다.

$f(x)=x(x-a)(x-6)$이라 하자.

$f(0)=0$이므로 원점은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이고 원점에서 접하는 접선의 기울기는 $f'(0)$이다.

원점이 아닌 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

이고 이 직선이 원점을 지나므로

$0-f(t)=f'(t)(0-t)$

$tf'(t)-f(t)=0$ …… ㉠

$f(x)=x^3-(a+6)x^2+6ax$에서

$f'(x)=3x^2-2(a+6)x+6a$

이므로 ㉠에서

$t\{3t^2-2(a+6)t+6a\}-\{t^3-(a+6)t^2+6at\}=0$

$2t^3-(a+6)t^2=0$, $t^2\{2t-(a+6)\}=0$

$t\ne 0$이므로 $t=\dfrac{a+6}{2}$이다.

$f'(0)=6a$, $f'\left(\dfrac{a+6}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}(a^2-12a+36)$

이므로 $0<a<6$인 실수 a에 대하여 두 접선의 기울기의 곱을 $g(a)$라 하면

$g(a)=-\dfrac{3}{2}(a^3-12a^2+36a)$

$g'(a)=-\dfrac{3}{2}(3a^2-24a+36)=-\dfrac{9}{2}(a-2)(a-6)$

$0<a<6$이므로 $g'(a)=0$에서 $a=2$

$0<a<6$에서 함수 $g(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(6)
$g'(a)$		$-$	0	$+$	
$g(a)$		↘	-48	↗	

함수 $g(a)$는 $a=2$일 때 극소이면서 최소가 된다.

따라서 $0<a<6$에서 함수 $g(a)$의 최솟값은
$g(2)=-48$이다.

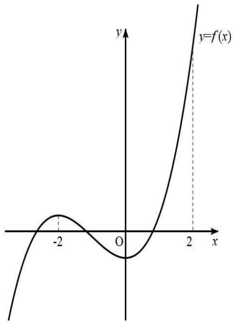
95) ③

[출제의도] 미분을 이용하여 주어진 방정식이 실근을 가질 조건을 구할 수 있는가?

$f(x)=2x^3+6x^2+a$라 하면
$f'(x)=6x^2+12x=6x(x+2)$
이때 $f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$
이고, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$8+a$	$\searrow$	a	$\nearrow$

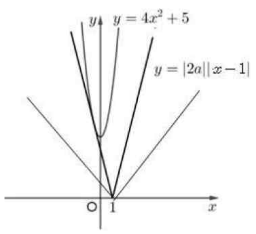
그러므로 방정식 $f(x)=0$이 $-2\le x\le 2$에서 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



이때 $f(2)=40+a$이므로 $f(2)>f(-2)$이다.
그러므로 조건을 만족시키기 위해서는 $f(-2)\ge 0$이고 $f(0)<0$이어야 한다.
$f(-2)\ge 0$에서 $8+a\ge 0$, $a\ge -8$ ⋯⋯㉠
또, $f(0)<0$에서 $a<0$ ⋯⋯㉡
따라서 ㉠, ㉡에서 $-8\le a<0$
이므로 구하는 정수 a의 개수는 8이다.

96) ②

주어진 조건에 의하여 $f(x)=a(x-1)^2+b$ (b는 상수)로 놓으면
$f'(x)=2a(x-1)$이므로
$|f'(x)|\le 4x^2+5$에서
$|2a(x-1)|\le 4x^2+5$ ⋯ ㉠
즉, ㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 두 곡선
$y=|2a(x-1)|=|2a||x-1|$, $y=4x^2+5$
가 그림과 같아야 한다.



즉, 실수 a의 최댓값은 점 $(1,\ 0)$에서 곡선 $y=4x^2+5$에 그은 접선이 $y=-|2a|(x-1)$일 때이므로 접점을 $(k,\ 4k^2+5)$ $(k<0)$이라 하면
$y'=8x$에서
$y-(4k^2+5)=8k(x-k)$
이 접선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로
$4k^2-8k-5=0$, $(2k-5)(2k+1)=0$, $k=-\dfrac{1}{2}$
즉, 접선의 기울기는 $8\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-4$이므로
$-|2a|=-4$, $|a|=2$
$a=-2$ 또는 $a=2$
따라서 실수 a의 최댓값은 2이다.

97) 160

[출제의도] 함수의 극대와 극소를 이용하여 방정식에 대한 문제를 해결한다.

$f'(x)=6x^2-6(a+1)x+6a=6(x-1)(x-a)$
이므로 $f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=a$
$f(1)=2-3(a+1)+6a=3a-1$,
$f(a)=2a^3-3a^2(a+1)+6a^2=-a^2(a-3)$
이므로 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖기 위해서는
$f(1)f(a)=-a^2(3a-1)(a-3)<0$
$a^2>0$이므로 $(3a-1)(a-3)>0$
그런데 a는 자연수이므로 $a>3$
그러므로 $a_1=4$, $a_2=5$, $\cdots$, $a_n=n+3$
$a=a_n$일 때, $f(x)=2x^3-3(a_n+1)x^2+6a_nx$이고
$f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $b_n=f(1)=3a_n-1$
따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}(b_n-a_n)=\sum_{n=1}^{10}(2n+5)=160$

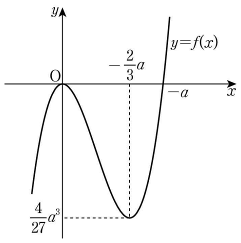
98) ①

[출제의도] 미분의 성질을 활용하여 문제를 해결한다.

조건 (가)에서 $f(0)=0$이고 $g(0)=0$이므로
$g(x)=f(x)+|f'(x)|$에서 $f'(0)=0$
$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로
$f(x)=x(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)로 놓으면
$f'(x)=(x^2+ax+b)+x(2x+a)$에서 $f'(0)=b=0$
그러므로 $f(x)=x^2(x+a)$, $f'(x)=x(3x+2a)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-\dfrac{2}{3}a$
조건 (나)에서 $-a>0$이므로 $-\dfrac{2}{3}a>0$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\frac{4}{27}a^3$	$\nearrow$

이고, 함수 $f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



조건 (다)에서 $\left|f\left(-\dfrac{2}{3}a\right)\right|=4$이므로
$f\left(-\dfrac{2}{3}a\right)=\dfrac{4}{27}a^3=-4$이고 $a^3=-27$에서 $a=-3$
그러므로 $f(x)=x^2(x-3)$이고
$g(x)=x^2(x-3)+|3x(x-2)|$
따라서 $g(3)=9$

99) 21

[출제의도] 도함수를 활용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가?

함수 $g(x)$를 $g(x)=f(x)+|f(x)+x|-6x$ 라 하면

$$g(x)=\begin{cases}-7x & (f(x)<-x)\\ 2f(x)-5x & (f(x)\geq -x)\end{cases}$$

이고, 주어진 방정식은 $g(x)=k$와 같다.

$f(x)=-x$에서

$$\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x=-x$$

$$\frac{x}{2}(x^2-9x+22)=0$$

이때 모든 실수 x에 대하여

$$x^2-9x+22=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$$

이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x$는

오직 원점 $(0,\ 0)$에서만 만난다.

따라서 함수 $h(x)$를

$$h(x)=2f(x)-5x=x^3-9x^2+15x$$

라 하면

$$g(x)=\begin{cases}-7x & (x<0)\\ h(x) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이다.

$h'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$

이므로 $h'(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=5$

따라서 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극댓값

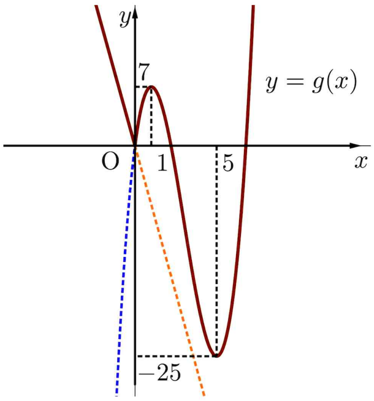
$h(1)=1-9+15=7$

을 갖고, $x=5$에서 극솟값

$h(5)=125-225+75=-25$

를 갖는다.

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되기 위해서는 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 4이어야 하므로 실수 k의 값의 범위는

$0<k<7$

이다.

따라서 모든 정수 k의 값의 합은

$1+2+3+\cdots+6$

$=\frac{6}{2}(1+6)=21$

100) ①

[출제의도] 미분의 성질을 이용하여 명제의 참, 거짓을 추론한다.

ㄱ. 함수 $g(x)$의 역함수가 존재하고 최고차항의 계수가 양수이므로 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)=3x^2+2ax+b\geq 0$이 성립해야 한다.

그러므로 방정식 $3x^2+2ax+b=0$ 의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3b\leq 0,\ a^2\leq 3b$ (참)

ㄴ. $2f(x)=g(x)-g(-x)$에서

$$f(x)=\frac{g(x)-g(-x)}{2}$$

$$=\frac{(x^3+ax^2+bx+c)-(-x^3+ax^2-bx+c)}{2}$$

$=x^3+bx$

$f'(x)=3x^2+b$이므로 $f'(x)=0$에서

$3x^2+b=0$

이차방정식 $3x^2+b=0$의 판별식을 D' 이라 하면

$D'=0^2-4\times 3\times b=-12b$

ㄱ에 의해 $b\geq \frac{a^2}{3}\geq 0$이므로 $D'=-12b\leq 0$

그러므로 이차방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. 방정식 $f'(x)=0$이 실근을 가지므로 $3x^2+b=0$ 의 실근이 존재한다. 즉, $b\leq 0$

또한, ㄱ에 의해 $b\geq 0$이므로 $b=0$이고 ㄱ에 의해 $a=0$이다.

$g'(x)=3x^2$이므로 $g'(1)=3$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

101) ②

[출제의도] 함수의 그래프를 활용하여 방정식의 실근의 개수를 추론한다.

ㄱ. $k=0$일 때, $f(x)+g(x)=x^3+2x^2+4$

$h_1(x)=x^3+2x^2+4$라 하면

$h_1{}'(x)=3x^2+4x=x(3x+4)=0$

에서 함수 $h_1(x)$는 $x=-\frac{4}{3}$에서 극대, $x=0$에서 극소이다.

$h_1(0)=4>0$이므로 방정식 $h_1(x)=0$은 오직 하나의 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $f(x)-g(x)=0$에서

$x^3-kx+6-(2x^2-2)=0,\ x^3-2x^2+8=kx$

$h_2(x)=x^3-2x^2+8$이라 하면 곡선 $y=h_2(x)$에 직선 $y=kx$가 접할 때만 방정식 $h_2(x)=kx$의 서로 다른 실근의 개수가 2이다.

접점의 좌표를 $(a,\ a^3-2a^2+8)$이라 하면 $h_2{}'(x)=3x^2-4x$에서 접선의 방정식은

$y-(a^3-2a^2+8)=(3a^2-4a)(x-a)$

이 접선이 원점을 지나므로

$0-(a^3-2a^2+8)=(3a^2-4a)(0-a)$,

$(a-2)(a^2+a+2)=0,\ a=2$

따라서 구하는 k의 값은 $h_2{}'(2)=4$뿐이다. (참)

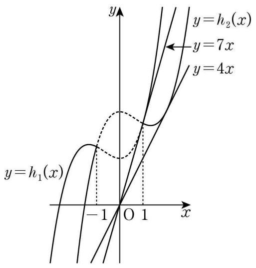
ㄷ. $|x^3-kx+6|=2x^2-2$에서 $2x^2-2\geq 0$이므로 x의 값의 범위는 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$이고, 주어진 방정식은

$x^3-kx+6=-(2x^2-2)$ 또는 $x^3-kx+6=2x^2-2$,

즉 $x^3+2x^2+4=kx$ 또는 $x^3-2x^2+8=kx$

$h_1(x)=x^3+2x^2+4,\ h_2(x)=x^3-2x^2+8$이라 하면 주어진 방정식의 실근의 개수는 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$일 때 직선 $y=kx$와 두 곡선 $y=h_1(x),\ y=h_2(x)$의 교점의 개수와 같다.

ㄴ에서 $k=4$일 때 직선 $y=kx$와 곡선 $y=h_2(x)$가 접하므로 $k\leq 4$일 때 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$에서 직선 $y=kx$와 두 곡선 $y=h_1(x),\ y=h_2(x)$의 교점의 개수의 최댓값은 3이다.



$k>4$ 일 때, $x\le -1$ 에서 직선 $y=kx$ 와 두 곡선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$ 의 서로 다른 교점의 개수는 2 이다. 원점에서 곡선 $y=h_1(x)$ 에 그은 접선의 방정식은 $y=7x$ 이고 접점의 좌표는 $(1,\ 7)$ 이므로 $k>4$ 일 때, $x\ge 1$ 에서 직선 $y=kx$ 와 두 곡선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$ 의 서로 다른 교점의 개수는 2 이다. 즉, $k>4$ 일 때, $x\le -1$ 또는 $x\ge 1$ 에서 직선 $y=kx$ 와 두 곡선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$ 의 서로 다른 교점의 개수는 4 이다.

따라서 방정식 $|f(x)|=g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수의 최댓값은 4 이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

102) 240

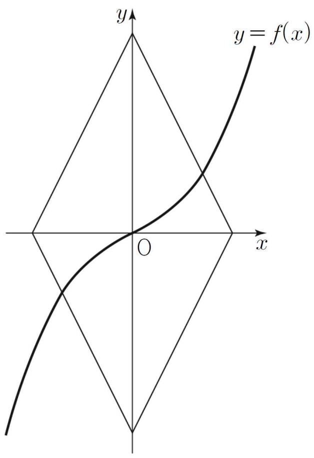
[출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 개수는 1 또는 3이다.

(ⅰ) 곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 개수가 1인 경우

모든 양수 t에 대하여 $g(t)=2$이므로

함수 $g(t)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.



(ⅱ) 곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 개수가 3인 경우

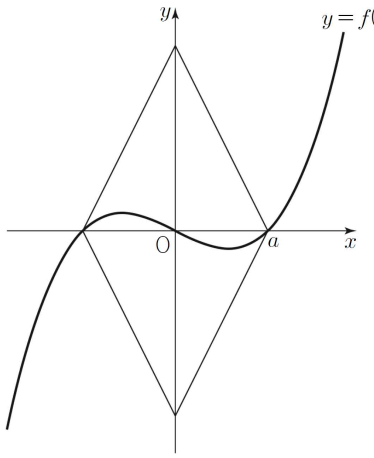
$f(x)=x(x-a)(x+a)\,(a>0)$이라 하자.

두 점 $(t,\ 0)$, $(0,\ -2t)$를 지나는 직선의 기울기는 t의 값에 관계없이 2이므로 $f'(a)$의 값에 따라 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속이 되는 k의 개수가 달라진다.

(a) $f'(a)\le 2$일 때

모든 양수 t에 대하여 $g(t)=2$이므로

함수 $g(t)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.



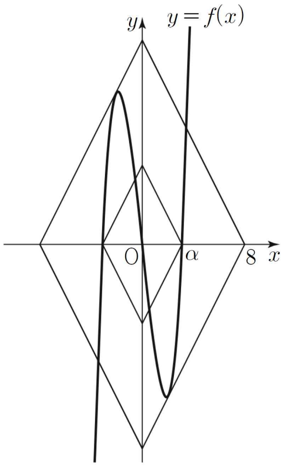
(b) $f'(a)>2$일 때

곡선 $y=f(x)$의 기울기가 2인 두 접선의 x절편을 각각 β, $-\beta$ $(\beta>a)$라 하면

$$g(t)=\begin{cases}2 & (0<t<a \text{ 또는 } t>\beta)\\ 4 & (t=a \text{ 또는 } t=\beta)\\ 6 & (a<t<\beta)\end{cases}$$

함수 $g(t)$는 $t=a$, $t=\beta$에서 불연속이므로

$a=\alpha$, $\beta=8$



함수 $g(t)$가 $t=8$에서 불연속이므로

두 직선 $y=2x+16$과 $y=2x-16$은 곡선 $y=f(x)$에 접한다.

직선 $y=2x-16$이 곡선 $y=f(x)$에 접하는 점의 x좌표를 p $(0<p<\alpha)$라 하면

$p^3-\alpha^2p=2p-16$ …… ㉠

$f'(x)=3x^2-\alpha^2$이므로 $f'(p)=3p^2-\alpha^2=2$에서

$\alpha^2=3p^2-2$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$p^3-(3p^2-2)p=2p-16$, $-2p^3=-16$

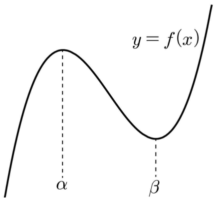
에서 $p=2$, $\alpha^2=10$이므로 $f(x)=x^3-10x$

따라서 $\alpha^2\times f(4)=10\times(4^3-10\times 4)=240$

103) ③

[출제의도] 함수의 극대와 극소를 활용하여 문제 해결하기

함수 $f(x)$ 가 극값을 가지므로 함수 $f(x)$ 가 $x=\alpha$ 에서 극댓값을 갖고 $x=\beta$ 에서 극솟값을 갖는다고 하자.



(i) $\alpha<\beta\le-2$ 인 경우

$x\ge-2$ 에서 함수 $g(x)$ 는 증가한다.

$f(-2)<g(-2)<g(2)$

$g(2)\ne f(-2)$ 이므로 모순

(ii) $\alpha<-2<\beta$ 인 경우

방정식 $g(x)=f(-2)$ 의 실근이 열린구간 $(-\infty,\ \alpha)$ 에서 존재하므로 모순

(iii) $\alpha=-2$ 인 경우

방정식 $g(x)=f(-2)$ 의 실근이 2 뿐이므로

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극솟값을 갖는다.

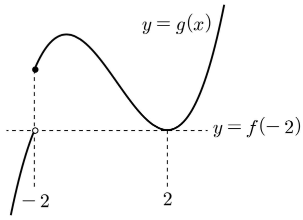
$f'(x)=3(x+2)(x-2)$

$f(x)=x^3-12x+\dfrac{1}{2}$

$g(2)\ne f(-2)$ 이므로 모순

(iv) $-2<\alpha<\beta$ 인 경우

함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(2)=f(-2)$ 이므로 $f(2)+8=f(-2)$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+\dfrac{1}{2}$ (a, b 는 상수) 라 하자.

$8+4a+2b+\dfrac{1}{2}+8=-8+4a-2b+\dfrac{1}{2}$

$b=-6$, $f(x)=x^3+ax^2-6x+\dfrac{1}{2}$

$f'(x)=3x^2+2ax-6$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 극솟값을 가지므로

$f'(2)=12+4a-6=0$, $a=-\dfrac{3}{2}$

$f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x+\dfrac{1}{2}$ 이므로

$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극댓값을 갖는다.

따라서 극댓값은 $f(-1)=4$

104) ①

$f'(t)=4t-2,\ g'(t)=2t-8$

서로 반대방향으로 움직이려면 $(4t-2)(2t-8)<0$

$\therefore\ \dfrac{1}{2}<t<4$

105) ②

시각 t에서의 점 P의 속도는 $P'(t)=3t^2-18t+34$ 이므로,

$3t^2-18t+34=10$

$t^2-6t+8=(t-2)(t-4)=0$

$t=2$ 또는 $t=4$

$\therefore t=2$ 일 때 위치는 $P(2)=40$

106) ②

속도를 $v(t)$라 하면 $v(t)=\dfrac{dx}{dt}=-2t+4$

$v(a)=-2a+4=0$이므로 $a=2$

107) ①

[출제의도] 도함수의 성질을 이해하여 속도를 구한다.

위치 $x=t^3-6t^2+5$ 이므로

속도 $v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-12t$ 이고

가속도 $a=\dfrac{dv}{dt}=6t-12$ 이다.

가속도가 0 이 되는 순간은 $t=2$ 이고

이때의 속도는 $v=12-24=-12$

108) ④

$v=3t^2-12=3(t-2)(t+2)$

운동방향이 바뀔 때 $v=0$이므로 $t=2$에서 운동 방향이 바뀐다.

그때 위치가 원점이므로

$0=2^3-12\cdot2+k$

$k=16$

109) ②

[출제의도] 다항함수의 미분법을 이해하여 가속도를 구한다.

속도 $v(t)$ 를 미분하면 가속도이므로

$t=a$ 에서의 가속도는 $v'(a)$이다.

$v'(a)=-2a+10=0$

따라서 $a=5$

110) ④

[출제의도] 이해능력-다항함수의 미분법

$x=t^3-t^2$ 에서 $v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-2t$

따라서 $t=2$ 일 때 점 P 의 속도는

$v=3\times2^2-2\times2=8$

111) ①

속도를 $v(t)$라 하고 가속도를 $a(t)$라고 하면

$v(x)=3t^2+2at+b$ 이고, $a(t)=6t+2a$ 이다.

$t=2$에서 점 P의 가속도는 0이므로

$a(2)=12+2a=0,\ a=-6$이다.

$v(x)=3t^2+12t+b$이고 $t=1$에서

점 P가 운동 방향을 바꾸므로

$v(1)=3-12+b=0,\ b=9$이다.

따라서 $a+b=3$

112) ①

$x=t^3-5t^2+at+5$를 t에 대해 미분하면 $\dfrac{dx}{dt}=3t^2-10t+a$이다.

움직이는 방향이 바뀌지 않기 위해서는 $\dfrac{D}{4}\le0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=5^2-3a\le0$에서 $a\ge\dfrac{25}{3}$이다.

따라서 자연수 a의 최솟값은 9이다.

113) 22

[출제의도] 수직선 위를 움직이는 점의 위치와 가속도를 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

점 P의 시각 t $(t\ge0)$에서의 위치 x가

$x=-\frac{1}{3}t^3+3t^2+k$

이므로 점 P의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 속도 v는

$v=-t^2+6t$

이고, 점 P의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 가속도 a는

$a=-2t+6$

점 P의 가속도가 0이므로

$-2t+6=0$에서 $t=3$

$t=3$일 때, 점 P의 위치가 40이므로

$-\frac{1}{3}\times 3^3+3\times 3^2+k=40$

따라서 $k=22$

114) ①

[출제의도] 이해능력-다항함수의 미분법

점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2+5$이므로 $3t^2+5=8$에서 $t=1$

$a=\frac{dv}{dt}=6t$이므로 시각 $t=1$에서의 점 P의 가속도는 6이다.

115) 8

[출제의도] 미분을 이용하여 가속도를 구할 수 있는가?

점 P의 시각 t에서의 위치가

$x=t^3-5t^2+6t$ 이므로

시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=3t^2-10t+6$

또, 시각 t 에서의 가속도를 a라 하면

$a=6t-10$

따라서 $t=3$ 에서의 가속도는

$6\times 3-10=8$

116) 6

[출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

점 P의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$는

$v(t)=3t^2-6t+a$

$v(3)=3\times 3^2-6\times 3+a=15$

따라서 $a=6$

117) 27

[출제의도] 수직선 위를 움직이는 점의 속도를 구할 수 있는가?

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_1, v_2라 하면

$v_1=3t^2-4t+3$, $v_2=2t+12$ 이므로

$3t^2-4t+3=2t+12$ 에서

$3t^2-6t-9=0$

$(t+1)(t-3)=0$

$t\geq 0$이므로 $t=3$이고 이때 두 점 P, Q의 위치는 각각 18, 45이다.

따라서 구하는 두 점 사이의 거리는

$45-18=27$

118) 30

점 P의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 속도 v는 $v=6t^2-2kt$

가속도 a는 $a=12t-2k$

$t=1$일 때, $v=6-2k=0$이므로 $k=3$

따라서 $t=3$에서 점 P의 가속도는

$12\times 3-2\times 3=30$

119) ④

[출제의도] 미분을 이용하여 속도와 가속도에 대한 문제를 해결한다.

시각 t에서의 속도를 v라 하면

$x=t^3+kt^2+kt$에서 $v=3t^2+2kt+k$

$t=1$에서 점 P가 운동 방향을 바꾸므로 $t=1$에서 $v=0$

그러므로 $3+2k+k=0$에서 $k=-1$

시각 t에서의 가속도를 a라 하면

$a=6t+2k=6t-2$

따라서 $t=2$에서 점 P의 가속도는 $6\times 2-2=10$

120) ②

[출제의도] 함수의 극대와 극소를 이해하여 상수의 값을 구한다.

$g(x)=x^3-3x^2+p$라 하면 $f(x)=|g(x)|$

$g'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)=|g(x)|$가 극대가 되는 x가 2개가 되려면

$g(0)=p>0$, $g(2)=p-4<0$ 즉, $0<p<4$

$f(0)=|p|=p$, $f(2)=|p-4|=4-p$

$f(0)=f(2)$이므로 $p=4-p$ 즉, $p=2$

121) 11

[출제의도] 접선의 방정식을 이해하여 상수의 값을 구한다.

직선 $y=4x+5$와 곡선 $y=2x^4-4x+k$가 점 $\mathrm{P}(a, b)$에서 접한다고 하자.

$f(x)=2x^4-4x+k$라 하면 $f'(x)=8x^3-4$

곡선 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 4이므로

$f'(a)=8a^3-4=4$, $a^3=1$ 즉, $a=1$

점 P는 직선 $y=4x+5$ 위의 점이므로

$b=4\times 1+5=9$

이때 $f(1)=2-4+k=k-2=9$

따라서 $k=11$

122) ⑤

[출제의도] 평균변화율과 미분계수 이해하기

평균변화율 $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=h^2+2h+3$에서

$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}(h^2+2h+3)=3$

123) ①

[출제의도] 곱의 미분법 이해하기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, f(0))$에서의 접선의 방정식이

$y-f(0)=f'(0)(x-0)$이므로

$f'(0)=3$, $f(0)=-1$

$g'(x)=f(x)+(x+2)f'(x)$

따라서 $g'(0)=f(0)+2f'(0)=-1+2\times 3=5$

124) ③

[출제의도] 함수의 그래프의 개형을 이용하여 두 곡선이 두 점에서 만나도록 하는 조건을 구할 수 있는가

두 곡선 $y=2x^2-1$, $y=x^3-x^2+k$가 만나는 점의 개수가 2가 되려면

방정식 $2x^2-1=x^3-x^2+k$, 즉

$-x^3+3x^2-1=k$ ⋯⋯ ㉠

이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=-x^3+3x^2-1$과 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=-x^3+3x^2-1$이라 하면

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

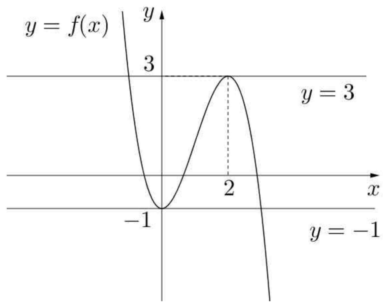
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $f(0)=-1$을 갖고,

$x=2$에서 극댓값 $f(2)=3$을 갖는다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 양수 k의 값은 3이다.

125) ⑤

[출제의도] 도함수를 활용하여 부등식이 성립할 조건을 구한다.

$f(x)\le g(x)$에서 $g(x)-f(x)\ge 0$

즉 $x^4+\dfrac{4}{3}x^3-4x^2+a\ge 0$

$h(x)=x^4+\dfrac{4}{3}x^3-4x^2+a$라 하면 $h(x)\ge 0$

$h'(x)=4x^3+4x^2-8x=4x(x-1)(x+2)$

$h'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	$a-\dfrac{32}{3}$	↗	a	↘	$a-\dfrac{5}{3}$	↗

함수 $h(x)$는 $x=-2$에서 최솟값 $a-\dfrac{32}{3}$를 갖는다.

$a-\dfrac{32}{3}\ge 0$에서 $a\ge\dfrac{32}{3}$

따라서 실수 a의 최솟값은 $\dfrac{32}{3}$이다.

126) ③

[출제의도] 도함수를 이용하여 추론하기

ㄱ. $f'(x)=3x^2-3t^2=3(x+t)(x-t)$

$f'(x)=0$에서 $x=-t$ 또는 $x=t$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

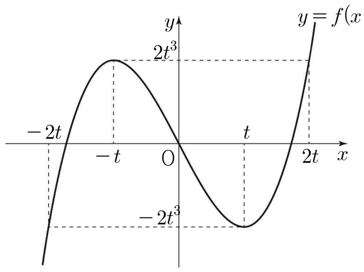
x	$\cdots$	$-t$	$\cdots$	t	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$2t^3$	↘	$-2t^3$	↗

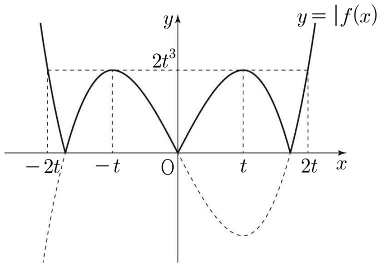
$t=2$일 때, 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$의 최댓값은 모두 $f(-2)=16$이므로 $M_1(2)=M_2(2)=16$

$g(2)=32$ (참)

ㄴ. 방정식 $f(x)=2t^3$에서 $(x+t)^2(x-2t)=0$,

방정식 $f(x)=-2t^3$에서 $(x-t)^2(x+2t)=0$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.





(i) $-t<-2$, $1<t$일 때

$t>2$이고, $M_1(t)=M_2(t)=f(-2)<f(-t)$

이므로 $g(t)=2f(-2)\ne 2f(-t)$

(ii) $-2t\le -2\le -t$, $1\le t$일 때

$1\le t\le 2$이고, $M_1(t)=M_2(t)=f(-t)$

이므로 $g(t)=2f(-t)$

(iii) $-2<-2t$, $t<1\le 2t$일 때

$\dfrac{1}{2}\le t<1$이고, $M_1(t)=f(-t)$, $M_2(t)=-f(-2)>f(-t)$ 이므로

$g(t)=f(-t)-f(-2)\ne 2f(-t)$

(iv) $-2<-2t$, $2t<1$일 때

$0<t<\dfrac{1}{2}$이고,

$M_1(t)=f(1)>f(-t)$,

$M_2(t)=-f(-2)>f(-t)$

이므로 $g(t)=f(1)-f(-2)\ne 2f(-t)$

(i)~(iv)에 의하여 $g(t)=2f(-t)$를 만족시키는 t의 최댓값과 최솟값의 합은 $2+1=3$ (참)

ㄷ. (i) $\dfrac{1}{2}\le t<1$일 때

$g(t)=f(-t)-f(-2)=2t^3-6t^2+8$이므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0+}\left(2h^2-3h-\frac{9}{2}\right)=-\frac{9}{2}$$

(ii) $0<t<\dfrac{1}{2}$일 때

$g(t)=f(1)-f(-2)=-9t^2+9$이므로

$$\lim_{h\to0-}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to0-}(-9h-9)=-9$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$$\lim_{h\to0+}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}-\lim_{h\to0-}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}$$

$=-\dfrac{9}{2}-(-9)=\dfrac{9}{2}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

127) 22

$f(x)=x^3-10$, $g(x)=x^3+k$라 하자.

$f'(x)=3x^2$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(-2,\ -18)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-2)=12$

접선의 방정식은

$y-(-18)=12\{x-(-2)\}$, $y=12x+6$

점 Q의 좌표를 $(\alpha,\ \alpha^3+k)$라 하자. (단, α는 상수)

$g'(x)=3x^2$이므로

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $Q(\alpha,\ \alpha^3+k)$에서의 접선의 기울기는

$g'(\alpha)=3\alpha^2$

접선의 방정식은 $y-(\alpha^3+k)=3\alpha^2(x-\alpha)$,

$y=3\alpha^2x-2\alpha^3+k$

두 접선이 일치하므로 $3\alpha^2=12$, $-2\alpha^3+k=6$

$\alpha=2$이면 $k=22$, $\alpha=-2$이면 $k=-10$

$k>0$이므로 $k=22$

128) ③

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 3)$에서의 접선이 점 $(1,\ 3)$을 지나므로 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $y=3$에 접하고 $x=2$에서 극값을 갖는다.

$f(x)=(x-2)^2(x-a)+3$ (a는 상수)

으로 놓으면 $f'(x)=(x-2)(3x-2a-2)$

또한 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2,\ f(-2))$에서의 접선의 방정식은

$f(-2)=-16a-29$, $f'(-2)=8a+32$이므로

$y=(8a+32)(x+2)-16a-29$

이 직선이 점 $(1,\ 3)$을 지나므로 $x=1$, $y=3$을 대입하면

$3=(8a+32)\times3-16a-29$, $a=-8$

$\therefore\ f(x)=(x-2)^2(x+8)+3$

$\therefore\ f(0)=35$

129) ③

함수 $f(x)$에서

$$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\left(-\frac{1}{3}x^3-ax^2-bx\right)=0$$

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\left(\frac{1}{3}x^3+ax^2-bx\right)=0$$

$f(0)=0$

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$f'(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-b & (x<0)\\ x^2+2ax-b & (x>0)\end{cases}$$

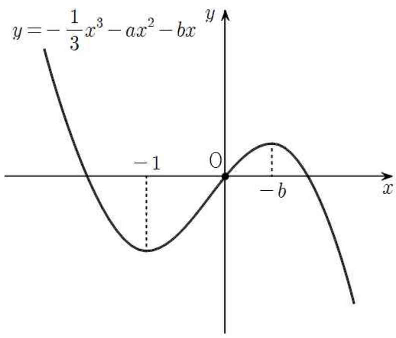
$x<0$에서 함수 $f'(x)=-x^2-2ax-b$이다. 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1]$에서 감소하고, 닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서 증가하므로

$f'(-1)=0$

방정식 $-x^2-2ax-b=0$의 한 실근이 -1이므로

$-1+2a-b=0$, $b=2a-1$

방정식 $x^2+2ax+b=0$에 두 근의 곱이 b이므로 다른 한 실근은 $-b$이다.



함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1]$에서 감소하고, 구간 $[-1,\ 0]$에서 증가하므로

$-b>-1$, $-b\geq0$, $b\leq0$ …… ㉠

$b=2a-1$이므로

$2a-1\leq0$, $a\leq\dfrac{1}{2}$ …… ㉡

$x>0$에서 함수 $f'(x)=x^2+2ax-b$이다. 함수 $f(x)$는 구간 $[0,\ \infty)$에서 증가한다. $x>0$에서 $g(x)=x^2+2ax-b$라 하자.

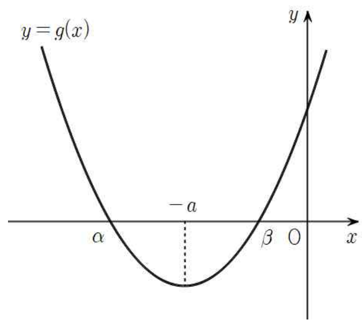
(ⅰ) $-a<0$, 즉 $a>0$일 때

$x>0$에서 $g(x)\geq0$을 만족해야 하므로

$g(0)\geq0$, $-b\geq0$

$b=2a-1$이므로 $a\leq\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ 0<a\leq\dfrac{1}{2}$



(ⅱ) $-a>0$, 즉 $a<0$일 때

$\dfrac{D}{4}=a^2+2a-1\leq0$, $-1-\sqrt{2}\leq a\leq-1+\sqrt{2}$

$\therefore\ -1-\sqrt{2}\leq a<0$

이때, 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2ax-b\geq0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $[0,\ \infty)$에서 증가한다.

㉡과 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 함수 $f(x)$는 구간 $[0,\ \infty)$에서 증가할 때 실수 a의 범위는 $-1-\sqrt{2}\leq a\leq\dfrac{1}{2}$

$b=2a-1$이므로 $a+b$, 즉 $3a-1$의 최댓값은 $a=\dfrac{1}{2}$일 때 $M=\dfrac{1}{2}$이고, 최솟값은 $a=-1-\sqrt{2}$일 때 $m=-4-3\sqrt{2}$이다.

$\therefore\ M-m=\dfrac{9}{2}+3\sqrt{2}$

130) ⑤

[출제의도] 도함수를 활용하여 함수를 추론한다.

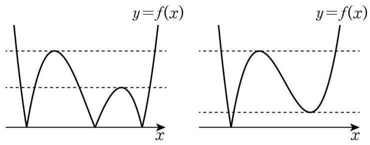
$g(x)=x^3-12x+k$라 하면 $f(x)=|g(x)|$

$g'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

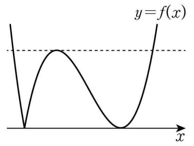
함수 $g(x)$가 $x=-2$에서 극댓값 $k+16$, $x=2$에서 극솟값 $k-16$을 가지므로 k의 값에 따라 다음과 같은 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $0<k<16$ 또는 $k>16$인 경우



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 홀수가 되는 실수 a의 값이 3개 존재하므로 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $k=16$인 경우



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 홀수가 되는 실수 a의 값이 오직 하나이다.

(i), (ii)에서 $k=16$

131) 25

$f(x)=-x^3+ax^2+2x$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+2$

$x=0$에서 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기가 $f'(0)=2$이므로 접선의 방정식은 $y=2x$

직선 $y=2x$가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 x좌표는

$-x^3+ax^2+2x=2x,\qquad x^2(x-a)=0$

$x=0$(중근) 또는 $x=a$

따라서 점 A의 좌표는 $(a,\ 2a)$이다.

점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점이므로

$\angle\mathrm{OAB}=90^\circ$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서 접선의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이므로

접선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{2}(x-a)+2a=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}a$

$\therefore\ \mathrm{B}(5a,\ 0)$

또한, $f'(a)=-\dfrac{1}{2}$에서

$2-a^2=-\dfrac{1}{2},\qquad a^2=\dfrac{5}{2}$

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{5}\,a,\ \overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{5}\,a$이므로

$\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AB}}=10a^2=25$

132) 6

[출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=6t^3-24t^2+30t-12=6(t-1)^2(t-2)$

$v(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=2$

함수 $x(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$v(t)$		$-$	0	$-$	0	$+$
$x(t)$		↘	$-\dfrac{7}{2}$	↘	-4	↗

점 P는 $0<t<2$에서 운동 방향이 음의 방향이고 $t>2$에서 운동 방향이 양의 방향이므로 점 P는 시각 $t=2$에서 운동 방향이 바뀐다.

점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 가속도를 $a(t)$라 하면

$a(t)=v'(t)=18t^2-48t+30$

따라서 점 P의 운동 방향이 바뀌는 순간

점 P의 가속도는

$a(2)=18\times2^2-48\times2+30=6$

133) 729

[출제의도] 도함수를 활용하여 함수를 추론한다.

$\displaystyle\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$의 값이 존재할 때,

$\displaystyle\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}=\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$이다.

$$\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$$
$$=\lim_{x\to k-}\left(\frac{g(x)-g(k)}{x-k}\times\frac{x-k}{|x-k|}\right)$$
$$=\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}\times(-1)\ \cdots\cdots\ ㉠$$

$$\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$$
$$=\lim_{x\to k+}\left(\frac{g(x)-g(k)}{x-k}\times\frac{x-k}{|x-k|}\right)$$
$$=\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}\times1\ \cdots\cdots\ ㉡$$

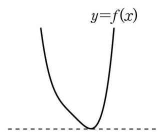
㉠과 ㉡이 같아야 하므로 $\displaystyle\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=0$이거나

$\displaystyle\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}$와 $\displaystyle\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}$의 절댓값이 같고 부호가 반대이어야 한다.

따라서 $g'(k)=0$ 즉, $f'(k)=0$이거나 $g(k)=0$ 즉, $f(k)=t$이다.

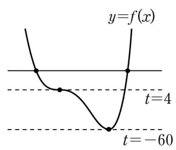
방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수에 따라 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 1인 경우



함수 $h(t)$가 불연속이 되는 실수 t가 오직 하나만 존재하므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

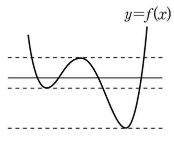
(ii) $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우



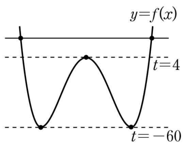
함수 $h(t)$가 $t=-60$과 $t=4$에서 불연속이므로 $f'(\alpha)=0$일 때 $f(\alpha)$의 값은 -60과 4이다.

이때 $\displaystyle\lim_{t\to4+}h(t)=4$가 되어 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(iii) $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3인 경우



[그림 1]



[그림 2]

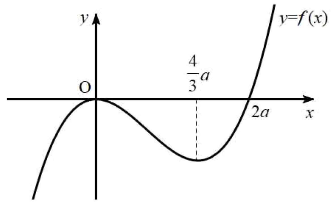
[그림 1]과 같이 두 극솟값의 크기가 다르면 함수 $h(t)$가 불연속이 되는

서로 다른 실수 t가 3개 존재하므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.
[그림 2]와 같이 두 극솟값의 크기가 같은 경우 조건 (나)를 만족시키고, 함수 $f(x)$의 극댓값이 4이면 $\lim_{t\to 4+} h(t)=5$이므로 조건 (가)를 만족시킨다. 이때 $h(4)=5$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 사차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 두 극솟값은 모두 -60, 극댓값은 4이다.
$f(2)=4$이고 $f'(2)>0$이므로 방정식 $f(x)=4$의 가장 큰 실근이 2가 된다.
함수 $f(x)$의 그래프를 극대인 점이 원점에 오도록 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 $p(x)$라 하면, $p(0)=0$이고 $p'(0)=0$이므로 $p(x)$는 x^2을 인수로 갖는다. 또한 함수 $p(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 양수 a에 대하여 $p(a)=p(-a)=0$ 이라 하면
$p(x)=x^2(x-a)(x+a)=x^4-a^2x^2$
$p'(x)=4x^3-2a^2x=2x(2x^2-a^2)$
이므로 $p'(x)=0$에서
$x=0$ 또는 $x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ 또는 $x=-\dfrac{a}{\sqrt{2}}$
$p\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)=p\left(-\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)=-64$이므로
$p\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)=\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^4-a^2\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=-\dfrac{a^4}{4}=-64$
즉, $a^4=256=4^4$이므로 $a=4$이다.
이때 $p(x)=x^2(x-4)(x+4)$
방정식 $p(x)=0$의 가장 큰 실근이 4이므로 함수 $y=p(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 일치한다. 따라서
$f(x)=(x+2)^2(x-2)(x+6)+4$
$f(4)=724$, $h(4)=5$이므로
$f(4)+h(4)=724+5=729$

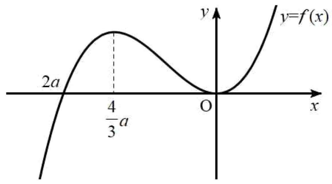
134) 380

[출제의도] 도함수를 활용하고 함수의 극대, 극소를 고려하여 조건을 만족시키는 삼차함수를 찾아 미분계수를 구할 수 있는가

주어진 조건을 만족시키려면 열린구간 $\left(k,\ k+\dfrac{3}{2}\right)$에 두 점 $(x_1,\ f(x_1))$, $(x_2,\ f(x_2))$를 지나는 직선의 기울기와 두 점 $(x_2,\ f(x_2))$, $(x_3,\ f(x_3))$을 지나는 직선의 기울기의 부호가 다른 세 실수 x_1, x_2, x_3이 존재해야 하는데, 그러려면 극대 또는 극소가 되는 점이 구간 $\left(k,\ k+\dfrac{3}{2}\right)$에 존재해야 한다.
이때 $f(x)=x^3-2ax^2$에서
$f'(x)=3x^2-4ax$
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 a의 값의 범위에 따라 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.
(ⅰ) $a>0$일 때



$k=-1$일 때 $x=0$이 구간 $\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$에 존재하므로 조건을 만족시킨다.
또, $x=\dfrac{4}{3}a$가 구간 $\left(k,\ k+\dfrac{3}{2}\right)$에 존재하려면
$k<\dfrac{4}{3}a<k+\dfrac{3}{2}$
이므로
$\dfrac{4}{3}a-\dfrac{3}{2}<k<\dfrac{4}{3}a$
이어야 한다.
이때 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되려면 이 구간에 $k=3$, $k=4$가 존재해야 하므로
$\dfrac{4}{3}a-\dfrac{3}{2}<3$, $\dfrac{4}{3}a>4$
$3<a<\dfrac{27}{8}$
그런데 이 부등식을 만족시키는 정수 a는 존재하지 않는다.
(ⅱ) $a<0$일 때



$k=-1$일 때 $x=0$이 구간 $\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$에 존재하므로 조건을 만족시킨다.
또, $x=\dfrac{4}{3}a$가 구간 $\left(k,\ k+\dfrac{3}{2}\right)$에 존재하려면
$k<\dfrac{4}{3}a<k+\dfrac{3}{2}$
이므로
$\dfrac{4}{3}a-\dfrac{3}{2}<k<\dfrac{4}{3}a$
이어야 한다.
이때 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되려면 이 구간에 $k=-4$, $k=-3$이 존재해야 하므로
$\dfrac{4}{3}a-\dfrac{3}{2}<-4$, $\dfrac{4}{3}a>-3$
$-\dfrac{9}{4}<a<-\dfrac{15}{8}$
즉, $a=-2$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=-2$이므로
$f(x)=x^3+4x^2$
$f'(x)=3x^2+8x$
따라서
$f'(10)=3\times10^2+8\times10=380$

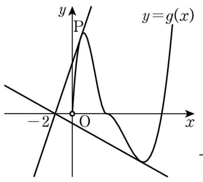
135) 29

[출제의도] 접선을 활용하여 함수를 추론한다.

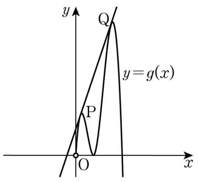
$0<x\le4$에서 $g(x)=x(x-4)^2$이고
함수 $g(x)$가 $x=4$에서 연속이므로
$\lim_{x\to4+}g(x)=\lim_{x\to4-}g(x)$, $\lim_{x\to4+}f(x)=\lim_{x\to4-}x(x-4)^2$
$f(4)=0$
함수 $g(x)$가 $x=4$에서 미분가능하므로
$\lim_{x\to4+}\dfrac{g(x)-g(4)}{x-4}=\lim_{x\to4-}\dfrac{g(x)-g(4)}{x-4}$
$\lim_{x\to4+}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to4-}\dfrac{x(x-4)^2}{x-4}$
$f'(4)=0$

$f(4)=f'(4)=0$ 이고 $g\left(\dfrac{21}{2}\right)=f\left(\dfrac{21}{2}\right)=0$ 이므로

$f(x)=a(x-4)^2(2x-21)$ $(a\neq 0)$이라 하자.



[그림 1]



[그림 2]

$a>0$ 이면 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형이 [그림 1]과 같으므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다. $a<0$ 이면 [그림 2]와 같이 조건 (나)를 만족시키는 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형이 존재한다.

조건 (나)에 의하여 점 $(-2, 0)$에서 곡선 $y=g(x)$ 에 그은 기울기가 0 이 아닌 접선은 곡선 $y=g(x)$ 위의 두 점 P, Q에서 곡선 $y=g(x)$ 에 접한다.

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 t, s라 하고 $0<t<4$, $s>4$라 하자.

$0<t<4$ 에서 $g'(t)=3t^2-16t+16$ 이므로 접선의 방정식은

$y=(3t^2-16t+16)(x-t)+t^3-8t^2+16t$ 이다.

접선이 점 $(-2, 0)$을 지나므로

$(3t^2-16t+16)(-2-t)+t^3-8t^2+16t=0$

$2t^3-2t^2-32t+32=0$, $(t-4)(t+4)(t-1)=0$

$0<t<4$ 에서 $t=1$이므로 접선의 방정식은 $y=3x+6$ 이다.

이 접선이 점 Q에서 곡선 $y=f(x)$ $(x>4)$에 접한다.

$f(x)=a(x-4)^2(2x-21)$ 에서

$f'(x)=2a(3x^2-37x+100)=2a(x-4)(3x-25)$

점 Q에서의 접선의 방정식은

$y=2a(s-4)(3s-25)(x-s)+a(s-4)^2(2s-21)$

이 접선이 점 $(-2, 0)$ 을 지나므로

$0=2a(s-4)(3s-25)(-2-s)+a(s-4)^2(2s-21)$

$a\neq 0$, $s>4$ 이므로

$(s-4)(2s-21)=2(s+2)(3s-25)$

$4s^2-9s-184=0$, $(4s+23)(s-8)=0$, $s=8$

$f'(8)=3$ 이므로 $a=-\dfrac{3}{8}$

$f(x)=-\dfrac{3}{8}(x-4)^2(2x-21)$ 이므로

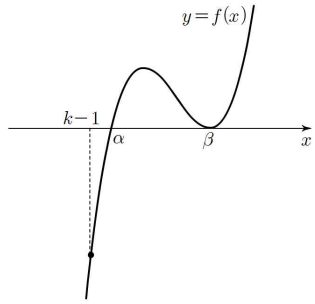
$g(10)=f(10)=\dfrac{27}{2}$

따라서 $p=2$, $q=27$ 이므로 $p+q=29$

136) 483

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f'(x)<0$인 x가 존재하므로 함수 $f(x)$의 그래프는 극점을 갖는 개형이다. 방정식 $f(x)=0$의 실근이 $x=\alpha$ 하나뿐이면 $k-1<\alpha<k+1$인 정수 k가 존재하고 $f(k-1)<0<f(k+1)$이므로 문제의 가정에 모순된다.

방정식 $f(x)=0$의 실근이 $x=\alpha$, $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$ 두 개뿐이라 하고 $x=\beta$가 중근이라 하자. 또 α보다 작은 정수 중에서 가장 큰 정수를 $k-1$이라 하자. 그러면 $f(k-1)<0$이다.



$f(k-1)f(k+1)<0$ 을 만족시키는 정수 k가 존재하지 않기 위해서는 $\beta=k+1$, $\alpha=k$이어야 한다. (그렇지 않으면 $f(k)f(k+2)<0$이 된다.)

이때 $f'\left(-\dfrac{1}{4}\right)<0$, $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)<0$이므로 $f'(0)<0$이고 따라서

$k<0<k+1$이다.

k는 정수이므로 이것은 불가능하다.

$x=\alpha$가 중근인 경우도 같은 방법으로 모순임을 보일 수 있다. 그러므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. 이제 세 실근을 α, β, $\gamma(\alpha<\beta<\gamma)$라 하자.

(ⅰ) α가 정수일 때

$\alpha-1$, $\alpha+1$은 모두 정수이고 $f(\alpha-1)<0$이므로 $f(\alpha+1)\leq 0$이어야 한다.

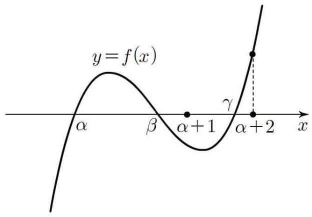
$\therefore\ \beta\leq\alpha+1\leq\gamma$

$\gamma\geq\alpha+2$이면 γ보다 작은 정수들 중에서 가장 큰 정수 m에 대하여 $\alpha+1\leq m<\gamma$이고 $f(m)<0<f(m+2)$이므로 문제의 가정을 만족하지 않는다.

$\therefore\ \gamma<\alpha+2$

$\beta<\alpha+1<\gamma$이면 $f(\alpha+1)<0<f(\alpha+2)$이므로 마찬가지로 모순이다.

$\therefore\ \beta=\alpha+1$ 또는 $\gamma=\alpha+1$



$\gamma=\alpha+1$이면 $f'(0)<0$이므로 $\alpha<0<\gamma=\alpha+1$이 되어 불가능하다.

따라서 $\beta=\alpha+1$이고 $f'(0)<0$으로부터 $\beta=\alpha+1=0$이다. 즉

$f(x)=x(x+1)(x-\gamma)$

$f(x)=x(x+1)(x-\gamma)=x^3+(1-\gamma)x^2-\gamma x$

$f'(x)=3x^2+2(1-\gamma)x-\gamma$

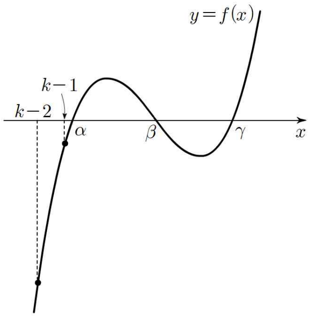
$f'\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{3}{16}-\dfrac{1}{2}(1-\gamma)-\gamma=-\dfrac{5}{16}-\dfrac{1}{2}\gamma=-\dfrac{1}{4}$

$\gamma=-\dfrac{1}{8}$

$\gamma>0$이어야 하므로 모순이다.

(ⅱ) α가 정수가 아닐 때

α보다 작은 정수 중에서 가장 큰 정수를 $k-1$이라 하자. 그러면 $f(k-1)<0$이다.



문제의 가정에 의해 $\beta \leq k+1 \leq \gamma$이어야 한다.
$f(k-2)<0$이므로 $\beta \leq k \leq \gamma$이어야 한다.
γ가 정수가 아니면 $k+1 \leq n-1 < \gamma < n+1$인 정수 n이 존재한다.
$f(n-1)<0<f(n+1)$이므로 이것은 가정에 모순된다. 따라서 γ는 정수이다.
$\gamma > k+1$이면 $\beta \leq k < \gamma-1$에서 $f(\gamma-1)<0<f(\gamma+1)$이므로 모순이다.
$\therefore\ \gamma = k+1$
$\beta \neq k$이면 $f(k)<0<f(k+2)$이므로 가정에 모순된다.
$\therefore\ \beta = k$
$f'(k-1)>0,\ f'(k+1)>0,\ f'(0)<0$이므로
$\therefore\ \beta = k = 0$
$\therefore\ f(x)=x(x-1)(x-\alpha)=x^3-(1+\alpha)x^2+\alpha x$
$f'(x)=3x^2-2(1+\alpha)x+\alpha$에서
$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{16}+\frac{1}{2}(1+\alpha)+\alpha=\frac{11}{16}+\frac{3}{2}\alpha=-\frac{1}{4}$
$\alpha=-\frac{5}{8}$
이상에서 $f(x)=x(x-1)\left(x+\frac{5}{8}\right)$이므로
$f(8)=8\times 7\times \frac{69}{8}=483$