수능, 모의고사 연도별 문제모음

단원 : 수1-수열

반:　　번호:　　이름:

등차등비수열

1. 세 수 a, $a+b$, $2a-b$ 는 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 1, $a-1$, $3b+1$ 은 이 순서대로 공비가 양수인 등비수열을 이룬다. a^2+b^2 의 값을 구하시오.

[3점][2012학년도 수능 가나25]

2. 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열이다. 모든 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n 의 좌표를 $(n,\ a_n)$, 점 Q_n 의 좌표를 $(n,\ 0)$이라 하자.

삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}$ 의 넓이를 A_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{20} A_n$의 값은?

[4점][2012년 4월 나16]

① $2-\left(\frac{1}{2}\right)^{19}$　② $2-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$　③ $2+\left(\frac{1}{2}\right)^{21}$
④ $2+\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$　⑤ $2+\left(\frac{1}{2}\right)^{19}$

3. 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 부등식

$$|x-a_n| \geq |x-a_{n+1}|\ (n \geq 1)$$

을 만족시키는 x의 최솟값을 b_n이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4점][2012년 4월 나17]

〈보 기〉

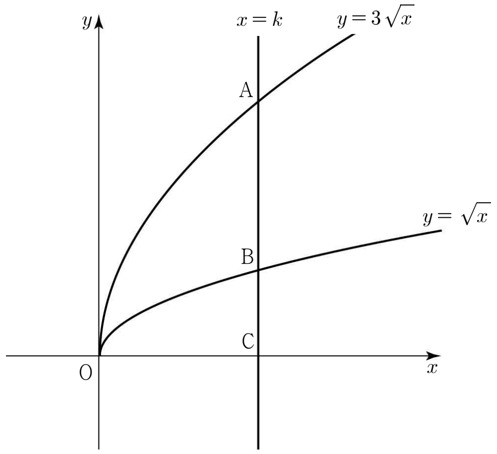
ㄱ. $b_1 = \frac{a_1+a_2}{2}$

ㄴ. 수열 $\{b_n\}$은 공차가 $\frac{3}{2}$인 등차수열이다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{10} b_n = 160$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. 그림과 같이 두 함수 $y=3\sqrt{x}$, $y=\sqrt{x}$의 그래프와 직선 $x=k$가 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $x=k$가 x축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{OC}}$, $\overline{\mathrm{AC}}$가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 양수 k의 값은? (단, $k>0$이고, O는 원점이다.)



[3점][2013년 4월 나12]

① 1　② $\sqrt{3}$　③ 3　④ $3\sqrt{3}$　⑤ 9

5. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여
$a_1 a_2 = a_{10}$, $a_1 + a_9 = 20$ 일 때,
$(a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9)(a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + a_9)$ 의 값은?

[4점][2013년 4월 나14]

① 494 ② 496 ③ 498
④ 500 ⑤ 502

6. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$이

$$|a_3 - 1| = |a_6 - 3|$$

을 만족시킨다. 이때, $a_n > 92$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.

[3점][2013년 4월 가23]

7. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 = a_2 + 3$
(나) $a_{n+1} = -2a_n$ $(n \geq 1)$

a_9의 값을 구하시오.

[3점][2014학년도 수능 나24]

8. 첫째항이 a이고 공차가 -4인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 $S_n < 200$일 때, 자연수 a의 최댓값을 구하시오.

[4점][2014년 3월 가28]

9. 첫째항이 30이고 공차가 $-d$인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 등식

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k} = 0$$

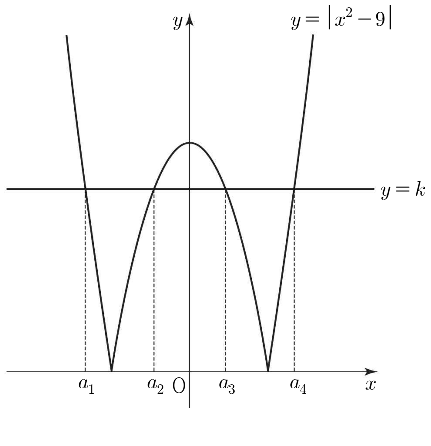
을 만족시키는 두 자연수 m, k가 존재하도록 하는 자연수 d의 개수는?

[4점][2014년 3월 나15]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

10. 그림과 같이 함수 $y = |x^2 - 9|$의 그래프가 직선 $y = k$와 서로 다른 네 점에서 만날 때, 네 점의 x좌표를 각각 a_1, a_2, a_3, a_4 라 하자. 네 수 a_1, a_2, a_3, a_4가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 상수 k의 값은? (단, $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$)

[4점][2014년 4월 나20]



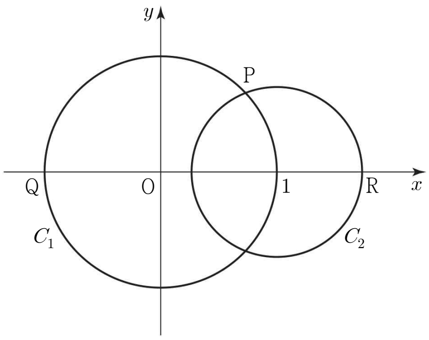
① $\frac{34}{5}$ ② 7 ③ $\frac{36}{5}$ ④ $\frac{37}{5}$ ⑤ $\frac{38}{5}$

11. 그림과 같이 좌표평면 위의 두 원

$C_1 : x^2+y^2=1$

$C_2 : (x-1)^2+y^2=r^2 \left(0 < r < \sqrt{2}\right)$

이 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자.



원 C_1이 x축과 만나는 점 중에서 x좌표가 0보다 작은 점을 Q, 원 C_2가 x축과 만나는 점 중에서 x좌표가 1보다 큰 점을 R라 하자. $\overline{\mathrm{OP}}$, $\overline{\mathrm{OR}}$, $\overline{\mathrm{QR}}$가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 원 C_2의 반지름의 길이는? (단, O는 원점이다.)

[3점][2014년 4월 나13]

① $\dfrac{-2+\sqrt{5}}{2}$　② $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$　③ $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$
④ $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$　⑤ $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

12. 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 양수이고 공비가 1보다 큰 등비수열이다. $a_3a_5=a_1$일 때, $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}a_k$를 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오.

[4점][2014년 10월 가26]

13. 등차수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}=3n^2+n$을 만족시킬 때, a_8의 값은?

[4점][2015학년도 수능 나17]

① 16　② 19　③ 22　④ 25　⑤ 28

14. 모든 항이 양의 실수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_3=7a_3$일 때, $\sum_{n=1}^{8}\dfrac{S_n}{a_n}$의 값을 구하시오.

[4점][2015년 3월 가27]

15. 첫째항이 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{10}(a_{5n}-a_n)=440$일 때, $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 값을 구하시오.

[4점][2016년 7월 나26]

16. 등차수열 $\{a_n\}$과 공비가 1보다 작은 등비수열 $\{b_n\}$이

$$a_1+a_8=8,\ b_2 b_7=12,\ a_4=b_4,\ a_5=b_5$$

를 모두 만족시킬 때, a_1의 값을 구하시오.

[4점][2016년 10월 나27]

17. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_2의 값은?

[4점][2017학년도 수능 나15]

(가) $a_6+a_8=0$
(나) $\lvert a_6\rvert=\lvert a_7\rvert+3$

① -15 ② -13 ③ -11 ④ -9 ⑤ -7

18. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 이차방정식 $x^2-14x+24=0$의 두 근이 a_3, a_8이다. $\sum_{n=3}^{8} a_n$의 값은?

[4점][2017년 6월 나15]

① 40 ② 42 ③ 44 ④ 46 ⑤ 48

19. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 수열 $\{b_n\}$은

$$b_1=a_1$$

이고, 2이상의 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases} b_{n-1}+a_n & (n\text{이 3의 배수가 아닌경우}) \\ b_{n-1}-a_n & (n\text{이 3의 배수인경우}) \end{cases}$$

이다. $b_{10}=a_{10}$일 때, $\dfrac{b_8}{b_{10}}=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2017년 6월 나29]

20. 등비수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_5의 값은?

[3점][2017년 대구8월 나13]

(가) $a_3+a_5=24$
(나) $\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{1}{6}a_4$

① 6 ② 12 ③ 18 ④ 24 ⑤ 30

21. 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{33} \frac{3}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}$$

의 값은?

[3점][2017년 전북10월 나10]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

22. 등차수열 $\{a_n\}$이

$$a_5+a_{13}=3a_9, \quad \sum_{k=1}^{18} a_k=\frac{9}{2}$$

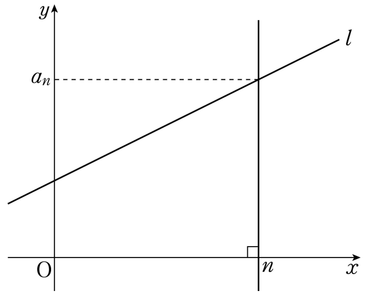
를 만족시킬 때, a_{13}의 값은?

[4점][2018학년도 수능 나14]

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

23. 좌표평면에 그림과 같이 직선 l이 있다. 자연수 n에 대하여 점 $(n,\ 0)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 l과 만나는 점의 y좌표를 a_n이라 하자. $a_4=\frac{7}{2}$, $a_7=5$일 때, $\sum_{k=1}^{25} a_k$의 값을 구하시오.

[4점][2018년 3월 나28]



24. 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_1+a_2+a_3=159$
> (나) $a_{m-2}+a_{m-1}+a_m=96$인 자연수 m에 대하여
> $\sum_{k=1}^{m} a_k=425$ (단, $m>3$)

a_{11}의 값을 구하시오.

[4점][2018년 4월 나28]

25. 공비가 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2>0$, $a_1a_7=9$일 때, $a_4+a_2a_6$의 값은?

[3점][2018년 전북5월 나10]

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

26. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3=4(a_2-a_1),\ \sum_{k=1}^{6} a_k=15$$

일 때, $a_1+a_3+a_5$의 값은?

[4점][2018년 6월 나15]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

27. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 = -15,\ |a_3| - a_4 = 0$$

일 때, a_7 의 값은?

[3점][2018년 9월 나13]

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

28. 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_3 + a_5 = 18,\quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{6}a_4$$

를 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{5} a_{2n-1}$ 의 값은?

[4점][2018년 경남10월 나14]

① 89 ② 90 ③ 91 ④ 92 ⑤ 93

29. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 + 2a_3 + a_5 = a_2 + a_4 + a_6$$

이고, $\sum_{k=1}^{10} a_k = 110$ 일 때, $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값을 구하시오.

[3점][2018년 전북10월 나24]

30. 첫째항이 양수이고 공비가 -2인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{9} (|a_k| + a_k) = 66$$

일 때, a_1 의 값은?

[4점][2019년 3월 나16]

① $\frac{3}{31}$ ② $\frac{5}{31}$ ③ $\frac{7}{31}$ ④ $\frac{9}{31}$ ⑤ $\frac{11}{31}$

31. 자연수 m 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k 의 값의 합을 $A(m)$ 이라 하자.

3×2^m 은 첫째항이 3 이고 공비가 2 이상의 자연수인 등비수열의 제k항이다.

예를 들어, 3×2^2 은 첫째항이 3 이고 공비가 2 인 등비수열의 제3항, 첫째항이 3 이고 공비가 4 인 등비수열의 제2항이 되므로 $A(2) = 3 + 2 = 5$ 이다. $A(200)$ 의 값을 구하시오.

[4점][2019년 3월 나29]

32. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_9 = |S_3| = 27$일 때, a_{10}의 값은?

[4점][2019년 4월 나14]

① 23 ② 24 ③ 25 ④ 26 ⑤ 27

33. 첫째항이 2이고 공비가 정수인 등비수열 $\{a_n\}$과 자연수 m이 다음 조건을 만족시킬 때, a_m의 값을 구하시오.

[4점][2019년 6월 나28]

(가) $4 < a_2 + a_3 \leq 12$

(나) $\sum_{k=1}^{m} a_k = 122$

34. 자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식

$$x^2 - nx + 4(n-4) = 0$$

이 서로 다른 두 실근 α, β $(\alpha < \beta)$를 갖고, 세 수 1, α, β가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, n의 값은?

[3점][2019년 6월 나13]

① 5 ② 8 ③ 11 ④ 14 ⑤ 17

35. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_9 = 2a_3$일 때, $\sum_{n=1}^{24} \frac{(a_{n+1} - a_n)^2}{a_n a_{n+1}}$의 값은?

[4점][2019년 7월 나14]

① $\frac{3}{14}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{5}{14}$ ④ $\frac{3}{7}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

36. 공차가 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$과 공비가 자연수인 등비수열 $\{b_n\}$이 $a_6 = b_6 = 9$이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_7 = b_7$

(나) $94 < a_{11} < 109$

$a_7 + b_8$의 값은?

[4점][2019년 7월 나17]

① 96 ② 99 ③ 102 ④ 105 ⑤ 108

37. 첫째항이 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여 $S_9 = S_{18}$이다. 집합 T_n을

$$T_n = \{S_k \mid k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ ,\ n\}$$

이라 하자. 집합 T_n의 원소의 개수가 13이 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

[4점][2019년 7월 나29]

38. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = a_3 + 8,\ 2a_4 - 3a_6 = 3$$

일 때, $a_k < 0$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은?

[3점][2019년 9월 나07]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

39. 첫째항이 50이고 공차가 -4인 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{k=m}^{m+4} S_k$의 값이 최대가 되도록 하는 자연수 m의 값은?

[4점][2020학년도 수능 나15]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

40. 등차수열 $\{a_n\}$, 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여 $a_1 = b_1 = 3$이고

$$b_3 = -a_2,\ a_2 + b_2 = a_3 + b_3$$

일 때, a_3의 값은?

[3점][2020년 3월 나11]

① -9 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 9

41. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_3 = 42$일 때, 다음 조건을 만족시키는 4 이상의 자연수 k의 값은?

[4점][2020년 3월 나17]

(가) $a_{k-3} + a_{k-1} = -24$
(나) $S_k = k^2$

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

42. 공비가 1보다 큰 등비수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_3 \times a_5 \times a_7 = 125$
(나) $\dfrac{a_4 + a_8}{a_6} = \dfrac{13}{6}$

a_9의 값은?

[3점][2020년 3월 가13]

① 10 ② $\dfrac{45}{4}$ ③ $\dfrac{25}{2}$ ④ $\dfrac{55}{4}$ ⑤ 15

43. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_3의 값은?

[4점][2020년 4월 가17]

(가) $\sum_{k=1}^{4} a_k = 45$

(나) $\sum_{k=1}^{6} \frac{a_2 \times a_5}{a_k} = 189$

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

44. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_1 = 1,\ \frac{S_6}{S_3} = 2a_4 - 7$$

일 때, a_7의 값을 구하시오.

[3점][2020년 6월 나25]

45. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_k = -16$, $S_{k+2} = -12$를 만족시키는 자연수 k에 대하여 a_{2k}의 값을 구하시오.

[4점][2020년 6월 가26나18]

46. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,\ T_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

라 할 때, S_n, T_n은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $S_7 = T_7$

(나) 6 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $S_n + T_n = 84$이다.

T_{15}의 값은?

[4점][2020년 7월 가나17]

① 96 ② 102 ③ 108 ④ 114 ⑤ 120

47. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$$S_{n+3} - S_n = 13 \times 3^{n-1}$$

일 때, a_4의 값을 구하시오.

[4점][2020년 9월 가27]

48. 공차가 -3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_3 a_7 = 64$, $a_8 > 0$

일 때, a_2의 값은?

[3점][2020년 9월 나07]

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

49. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 = 5$이고 $\sum_{k=3}^{7} |2a_k - 10| = 20$이다. a_6의 값은?

[4점][2020년 10월 나14]

① 6 ② $\frac{20}{3}$ ③ $\frac{22}{3}$ ④ 8 ⑤ $\frac{26}{3}$

50. 함수 $f(x) = (1+x^4+x^8+x^{12})(1+x+x^2+x^3)$일 때, $\frac{f(2)}{\{f(1)-1\}\{f(1)+1\}}$의 값을 구하시오.

[3점][2020년 10월 나25]

51. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_6 = 2(S_3 - S_2)$$

일 때, S_{10}의 값은?

[3점][2021년 6월 07]

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

52. 첫째항이 $a(a>0)$이고, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $2a = S_2 + S_3$, $r^2 = 64a^2$일 때, a_5의 값은?

[3점][2021년 7월 08]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

53. 첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합은?

[4점][2021년 9월 13]

(가) $|a_m| = |a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재한다.

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이다.

① 44 ② 48 ③ 52 ④ 56 ⑤ 60

54. 첫째항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$|S_3| = |S_6| = |S_{11}| - 3$$

을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$의 첫째항의 합은?

[4점][2022년 3월 공통13]

① $\frac{31}{5}$ ② $\frac{33}{5}$ ③ 7 ④ $\frac{37}{5}$ ⑤ $\frac{39}{5}$

55. 공비가 $\sqrt{3}$인 등비수열 $\{a_n\}$과 공비가 $-\sqrt{3}$인 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여

$$a_1 = b_1,\ \sum_{n=1}^{8} a_n + \sum_{n=1}^{8} b_n = 160$$

일 때, $a_3 + b_3$의 값은?

[3점][2022년 4월 공통08]

① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

56. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은?

[4점][2022년 6월 공통12]

(가) $a_5 \times a_7 < 0$

(나) $\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$

① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

여러가지수열

57. n이 자연수일 때, x에 대한 방정식

$$\sum_{k=0}^{n} (x-k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (x+k)^2$$

의 0이 아닌 해를 $x = a_n$이라 하자. a_{10}의 값은?

[3점][2012년 3월 나15]

① 180 ② 200 ③ 220 ④ 240 ⑤ 260

58. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = \frac{n^2+3n}{2}$ 일 때, $\sum_{n=1}^{7} 2^{a_n}$의 값을 구하시오.

[3점][2012년 4월 가나27]

59. 첫째항이 2이고, 각 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$\sum_{k=1}^{10} \frac{a_{k+1}}{S_k S_{k+1}} = \frac{1}{3}$ 일 때, S_{11}의 값은?

[3점][2012년 6월 가나11]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

60. 자연수 n에 대하여 두 함수 $f(x)=x^2-(n+1)x+n^2$, $g(x)=n(x-1)$의 그래프의 두 교점의 x좌표를 a_n, b_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{19}\frac{100}{a_nb_n}$의 값은?

[3점][2012년 7월 나11]

① 80 ② 85 ③ 90 ④ 95 ⑤ 100

61. 수열 $\{a_n\}$이 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k+1}=n^2+n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}$의 값은?

[4점][2013년 3월 나17]

① $\frac{5}{11}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{6}{11}$ ④ $\frac{13}{22}$ ⑤ $\frac{7}{11}$

62. 자연수 n에 대하여 $f(n)$이 다음과 같다.

$$f(n)=\begin{cases}\log_3 n & (n\text{이 홀수})\\ \log_2 n & (n\text{이 짝수})\end{cases}$$

수열 $\{a_n\}$이 $a_n=f(6^n)-f(3^n)$일 때, $\sum_{n=1}^{15}a_n$의 값은?

[3점][2014학년도 수능 나13]

① $120(\log_2 3-1)$ ② $105\log_3 2$ ③ $105\log_2 3$
④ $120\log_2 3$ ⑤ $120(\log_3 2+1)$

63. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2-n \quad (n\ge 1)$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}ka_{4k+1}$의 값은?

[3점][2014년 6월 가13]

① 2960 ② 3000 ③ 3040
④ 3080 ⑤ 3120

64. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=15$이고,

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=2n+1 \quad (n\ge 1)$$

을 만족시킨다. a_{10}의 값은?

[3점][2014년 6월 가08나26]

① 28 ② 30 ③ 32 ④ 34 ⑤ 36

65. $a>1$인 실수 a에 대하여 $a^{\log_5 16}$이 $2^n\,(n=1,2,3,\cdots)$이 되도록 하는 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, k번째 수를 a_k라 하자. $\sum_{k=1}^{40}\log_5 a_k$의 값은?

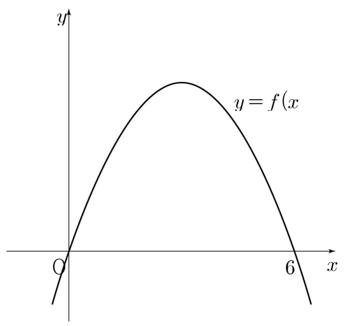
[4점][2014년 7월 나17]

① 185 ② 190 ③ 195 ④ 200 ⑤ 205

66. 자연수 n에 대하여 2^{n-1}의 모든 양의 약수의 합을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{8} a_n$의 값을 구하시오.

[3점][2015년 3월 나25]

67. 이차함수 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$에 대하여 다음 물음에 답하시오.



수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_n = 2f(n)$이다. a_6의 값은?

[3점][2016년 7월 나13]

① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

68. 첫째항이 4이고 공차가 1인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{12} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}}$$

의 값은?

[4점][2016년 9월 나14]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

69. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)a_k = n(n+1)(4n-1)$$

일 때, a_{20}의 값을 구하시오.

[4점][2017년 4월 나27]

70. 첫째항이 2, 공차가 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 4n^3 + 3n^2 - n$ 일 때, b_5의 값을 구하시오.

[4점][2017년 7월 나26]

71. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \log_2(n^2+n)$$

일 때, $\sum_{n=1}^{15} a_{2n+1}$의 값을 구하시오.

[3점][2017년 10월 나25]

72. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때,

$$S_n = 2+(-1)^n \ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

이다. $\sum_{k=1}^{10}(a_{2k}-a_{2k+1})$의 값을 구하시오.

[4점][2017년 전북10월 나27]

73. 첫째항이 1이고 모든 항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = 5$$

를 만족시킬 때, a_{11}의 값은?

[4점][2018년 전북5월 나16]

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{17}{6}$ ④ 3 ⑤ $\frac{19}{6}$

74. n이 자연수일 때, x에 대한 다항식 $x^3+(1-n)x^2+n$을 $x-n$으로 나눈 나머지를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}$의 값은?

[3점][2018년 7월 나12]

① $\frac{7}{8}$ ② $\frac{8}{9}$ ③ $\frac{9}{10}$ ④ $\frac{10}{11}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

75. n이 자연수일 때, x에 대한 이차방정식

$$x^2-(2n-1)x+n(n-1)=0$$

의 두 근을 α_n, β_n이라 하자.

$\sum_{n=1}^{81}\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}+\sqrt{\beta_n}}$의 값을 구하시오.

[4점][2019년 9월 나26]

76. 자연수 n에 대하여 다항식 $2x^2-3x+1$을 $x-n$으로 나누었을 때의 나머지를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{7}(a_n-n^2+n)$의 값을 구하시오.

[3점][2020학년도 수능 나25]

77. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4k-3}{a_k}=2n^2+7n$$

을 만족시킨다. $a_5\times a_7\times a_9=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2020년 6월 나28]

78. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=2n+1$일 때, $\sum_{n=1}^{12}\frac{1}{a_n a_{n+1}}$의 값은?

[3점][2020년 7월 가08]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{4}{27}$ ③ $\frac{5}{27}$ ④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{7}{27}$

79. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=-n^2+n$$

을 만족시킨다. a_{11}의 값은?

[3점][2021학년도 수능 나12]

① 88 ② 91 ③ 94 ④ 97 ⑤ 100

80. 첫째항이 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5}a_k=55$일 때, $\sum_{k=1}^{5}k(a_k-3)$의 값을 구하시오.

[3점][2021학년도 수능 가25]

81. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n=\begin{cases}\frac{(n+1)^2}{2} & (n\text{이 홀수인 경우})\\ \frac{n^2}{2}+n+1 & (n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

일 때, $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 값은?

[3점][2021년 3월 07]

① 235 ② 240 ③ 245 ④ 250 ⑤ 255

82. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{7}\frac{a_k}{2}=56,\qquad \sum_{k=1}^{10}2a_k-\sum_{k=1}^{8}a_k=100$$

일 때, a_8의 값을 구하시오.

[3점][2022학년도 수능 18]

83. 부등식 $\sum_{k=1}^{5} 2^{k-1} < \sum_{k=1}^{n} (2k-1) < \sum_{k=1}^{5} (2 \times 3^{k-1})$ 을 만족시키는 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하시오.

[3점][2022년 3월 공통18]

84. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_n = \frac{1}{n(n+1)}$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} (S_k - a_k)$의 값은?

[3점][2022년 9월 공통07]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

85. 모든 항이 양수이고 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = 2$$

를 만족시킬 때, a_4의 값은?

[3점][2023학년도 수능 공통07]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

점화식

86. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$, $a_2 = 1$이고 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n+2} - a_{2n} = 1$
(나) $a_{2n+1} - a_{2n-1} = 0$

$a_{100} + a_{101}$ 의 값을 구하시오.

[3점][2012년 3월 가나26]

87. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 7$이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{n+2} = a_n - 4$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+6} = a_n$ 이다.

$\sum_{k=1}^{50} a_k = 258$ 일 때, a_2의 값을 구하시오.

[4점][2013년 6월 나28]

88. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 2$ 이고,

$$\log_2 a_{n+1} = 1 + \log_2 a_n \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_8 = 2^k$ 일 때 상수 k 의 값은?

[3점][2013년 9월 나08]

① 36 ② 40 ③ 44 ④ 48 ⑤ 52

89. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$이고,

$$(n+1)a_{n+1} - na_n = 3 \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킬 때, a_6의 값은?

[3점][2013년 10월 가05]

① $\frac{8}{3}$ ② 3 ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{11}{3}$ ⑤ 4

90. 수열 $\{a_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 = 1,\ a_2 = 2$
(나) a_n은 a_{n-2}와 a_{n-1}의 합을 4로 나눈 나머지 $(n \geq 3)$

$\sum_{k=1}^{m} a_k = 166$일 때, m의 값을 구하시오.

[4점][2015년 4월 나28]

91. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 3$이고,

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{은 짝수}) \\ \dfrac{a_n + 93}{2} & (a_n\text{은 홀수}) \end{cases}$$

가 성립한다. $a_k = 3$을 만족시키는 50 이하의 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오.

[4점][2015년 4월 가26]

92. 첫째항이 a인 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + (-1)^n \times 2 & (n\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ a_n + 1 & (n\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{15} = 43$일 때, a의 값은?

[4점][2016년 6월 나20]

① 35 ② 36 ③ 37 ④ 38 ⑤ 39

93. 첫째항이 $\frac{1}{5}$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n & (a_n \leq 1) \\ a_n - 1 & (a_n > 1) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{20} a_n$의 값은?

[3점][2016년 10월 나13]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

94. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{k}{a_n + 2}$$

를 만족시킬 때, $a_3 = \frac{3}{2}$이 되도록 하는 상수 k의 값은?

[3점][2017년 3월 나09]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

95. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=2(a_n+2)$$

를 만족시킨다. a_5의 값을 구하시오.

[3점][2017년 4월 나25]

96. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$, $a_2=2$ 이고 실수 k와 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\frac{1}{2}a_n+k$$

일 때, a_6-a_5 의 값은?

[4점][2017년 경남10월 나14]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

97. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-1 & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \\ a_n+n & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. a_7의 값은?

[3점][2018학년도 수능 나13]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

98. 첫째항이 6인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2-a_n & (a_n\geq 0) \\ a_n+p & (a_n<0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_4=0$이 되도록 하는 모든 실수 p의 값의 합을 구하시오.

[4점][2018년 3월 나26]

99. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$이고 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\frac{a_n+1}{3a_n-2}$$

을 만족시킬 때, a_4의 값은?

[3점][2018년 4월 나11]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

100. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=p$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=a_n-2n$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제5항까지의 합이 10이 되도록 하는 상수 p의 값은?

[3점][2018년 전북5월 나12]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

101. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$, $a_2=3$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}-a_{n+1}+2a_n=5$$

를 만족시킨다. a_6의 값은?

[3점][2018년 7월 나13]

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

102. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n a_{n+1}=2n$$

이고 $a_3=1$일 때, a_2+a_5의 값은?

[3점][2018년 9월 나11]

① $\frac{13}{3}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{19}{3}$ ④ $\frac{22}{3}$ ⑤ $\frac{25}{3}$

103. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-2n & (a_n\ge 0) \\ a_n+2n & (a_n<0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. a_7의 값은?

[3점][2018년 경남10월 나13]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

104. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2a_n - 6$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10}\frac{a_n}{2^n}$의 값은?

[3점][2018년 전북10월 나12]

① 26 ② 30 ③ 34 ④ 38 ⑤ 42

105. 첫째항이 $\frac{1}{3}$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n & (a_n\le 1) \\ a_n-1 & (a_n>1) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{18}a_n$의 값을 구하시오.

[4점][2018년 대구11월 나27]

106. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{a_n}{2-3a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 1+a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{40}a_n$의 값은?

[3점][2019학년도 수능 나13]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

107. 첫째항이 4인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$$

을 만족시킨다. $a_4=34$일 때, a_2의 값을 구하시오.

[3점][2019년 3월 나25]

108. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}(a_n)^2+1 & (a_n\text{이 짝수인 경우})\\ 3a_n-1 & (a_n\text{이 홀수인 경우})\end{cases}$$

를 만족시킨다. a_4의 값은?

[3점][2019년 4월 나10]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

109. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=15$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{n} & (n\text{이 홀수인 경우})\\ na_n & (n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

를 만족시킨다. a_5+a_6의 값은?

[3점][2019년 5월 나10]

① 24 ② 30 ③ 36 ④ 42 ⑤ 48

110. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}+(-1)^n\times a_n=2^n$$

을 만족시킨다. a_5의 값은?

[3점][2019년 6월 나09]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

111. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}+a_n=3n-1$$

을 만족시킨다. $a_3=4$일 때, a_1+a_5의 값을 구하시오.

[3점][2019년 9월 나24]

112. 첫째항이 짝수인 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+3 & (a_n\text{이 홀수인 경우})\\ \dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_5=5$일 때, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 될 수 있는 모든 수의 합을 구하시오.

[4점][2019년 10월 나29]

113. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n} ka_k$$

를 만족시킨다. $a_1=2$일 때, $a_2+\frac{a_{51}}{a_{50}}$의 값은?

[4점][2020년 3월 나15]

① 47 ② 49 ③ 51 ④ 53 ⑤ 55

114. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=7$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n+3}{2} & (a_n\text{이 소수인 경우})\\ a_n+n & (a_n\text{이 소수가 아닌 경우})\end{cases}$$

를 만족시킨다. a_8의 값은?

[3점][2020년 3월 가09]

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

115. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}+3a_n=(-1)^n\times n$$

을 만족시킨다. a_5의 값을 구하시오.

[4점][2020년 4월 나27]

116. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{cases}a_{3n-1}=2a_n+1\\ a_{3n}=-a_n+2\\ a_{3n+1}=a_n+1\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{11}+a_{12}+a_{13}$의 값은?

[4점][2020년 6월 나14]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

117. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=9$, $a_2=3$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$$

을 만족시킨다. $|a_k|=3$을 만족시키는 100 이하의 자연수 k의 개수를 구하시오.

[3점][2020년 6월 가24]

118. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$이고 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}2^{a_n} & (a_n\le 1)\\ \log_{a_n}\sqrt{2} & (a_n>1)\end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_{12}\times a_{13}$의 값은?

[3점][2020년 7월 가11]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

119. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 12$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} + a_n = (-1)^{n+1} \times n$$

을 만족시킨다. $a_k > a_1$인 자연수 k의 최솟값은?

[3점][2020년 9월 가10]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

120. 수열 $\{a_n\}$은 $0 < a_1 < 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$
(나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$

$a_7 = 2$일 때, a_{25}의 값은?

[4점][2021학년도 수능 나21]

① 78 ② 80 ③ 82 ④ 84 ⑤ 86

121. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_1 = 2$, $a_2 = 4$이고 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}S_n = a_nS_{n+1}$$

이 성립할 때, S_5의 값을 구하시오.

[3점][2021년 3월 19]

122. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 2 & (a_n \geq 0) \\ a_n + 5 & (a_n < 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{15} < 0$이 되도록 하는 a_1의 최솟값을 구하시오.

[4점][2021년 4월 21]

123. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이고 $a_{12} = \dfrac{1}{2}$일 때, $a_1 + a_4$의 값은?

[4점][2021년 6월 09]

① $\dfrac{3}{4}$ ② $\dfrac{9}{4}$ ③ $\dfrac{5}{2}$ ④ $\dfrac{17}{4}$ ⑤ $\dfrac{9}{2}$

124. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 10$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 5 - \dfrac{10}{a_n} & (a_n\text{이 정수인 경우}) \\ -2a_n + 3 & (a_n\text{이 정수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_9 + a_{12}$의 값은?

[3점][2021년 7월 07]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

125. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=-4$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{n}$$

을 만족시킨다. a_{13}의 값은?

[3점][2021년 9월 07]

① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

126. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n+a_{n+1}=2n$$

을 만족시킬 때, a_1+a_{22}의 값은?

[4점][2021년 10월 09]

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

127. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{n+2}=\begin{cases} a_n-3 & (n=1,\ 3) \\ a_n+3 & (n=2,\ 4) \end{cases}$

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=a_{n+6}$이 성립한다.

$\sum_{k=1}^{32}a_k=112$ 일 때, a_1+a_2의 값을 구하시오.

[3점][2021년 10월 19]

128. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n & (a_n<7) \\ a_n-7 & (a_n\ge 7) \end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{8}a_k$의 값은?

[3점][2022학년도 수능 05]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

129. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $1\le n\le 4$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n+a_{n+4}=15$이다.

(나) $n\ge 5$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n=n$이다.

$\sum_{n=1}^{4}a_n=6$일 때, a_5의 값은?

[4점][2022년 4월 공통12]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

130. 수열 $\{a_n\}$은 $1 < a_1 < 2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n & (a_n < 0) \\ a_n - 2 & (a_n \geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_7 = -1$일 때, $40 \times a_1$의 값을 구하시오.

[4점][2022년 3월 공통20]

131. 첫째항이 $\frac{1}{2}$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & (a_n < 0) \\ -2a_n + 1 & (a_n \geq 0) \end{cases}$$

일 때, $a_{10} + a_{20}$의 값은?

[3점][2022년 7월 공통07]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

132. 첫째항이 20인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = |a_n| - 2$$

를 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{30} a_n$의 값은?

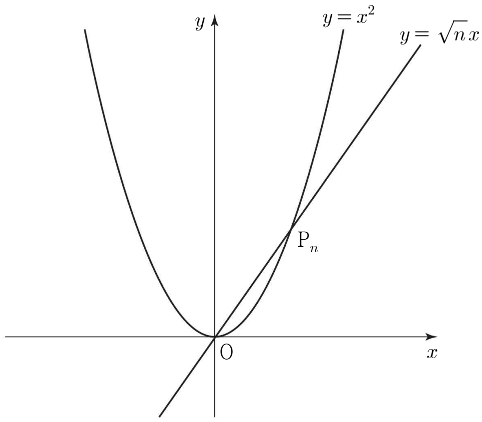
[3점][2022년 10월 공통08]

① 88 ② 90 ③ 92 ④ 94 ⑤ 96

활용문제

133. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 그림과 같이 곡선 $y = x^2$과 직선 $y = \sqrt{n}x$가 제1사분면에서 만나는 점을 P_n이라 하자. 점 P_n을 지나고 직선 $y = \sqrt{n}x$와 수직인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 Q_n, R_n이라 하자. 삼각형 $\mathrm{OQ}_n\mathrm{R}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{5} \frac{2S_n}{\sqrt{n}}$의 값은? (단, O는 원점이다.)

[4점][2015년 4월 나14]



① 80 ② 85 ③ 90 ④ 95 ⑤ 100

134. 자연수 n에 대하여

$$\left| \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - m \right| < \frac{1}{2}$$

을 만족시키는 자연수 m을 a_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{5} a_k$의 값은?

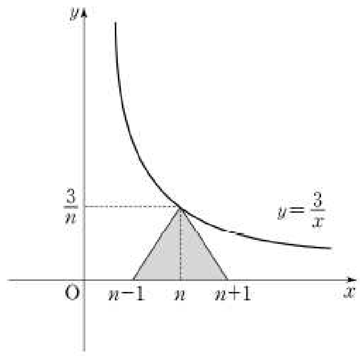
[4점][2016년 3월 나20]

① 65 ② 70 ③ 75 ④ 80 ⑤ 85

135. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\frac{3}{x}$ $(x>0)$ 위의 점 $\left(n,\ \frac{3}{n}\right)$과 두 점 $(n-1,\ 0)$, $(n+1,\ 0)$을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} \frac{9}{a_n a_{n+1}}$의 값은?

[4점][2016년 9월 나17]

① 410 ② 420 ③ 430 ④ 440 ⑤ 450



136. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 A의 좌표는 $(1, 0)$이다.
(나) 점 P_n은 선분 OA를 $2^n:1$로 내분하는 점이다.

$l_n=\overline{\mathrm{OP}_n}$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{l_n}$의 값은? (단, O는 원점이다.)

[4점][2016년 10월 나15]

① $10-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ ② $10+\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ ③ $11-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

④ $11+\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ ⑤ $12-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

137. 함수 $f(x)=x^2+x-\frac{1}{3}$에 대하여 부등식

$$f(n)<k<f(n)+1 \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

을 만족시키는 정수 k의 값을 a_n이라 하자.

$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{a_n}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2017년 3월 나27]

138. 수열 $\{a_n\}$의 각 항이

$$a_1=1$$
$$a_2=1+3$$
$$a_3=1+3+5$$
$$\vdots$$
$$a_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)$$
$$\vdots$$

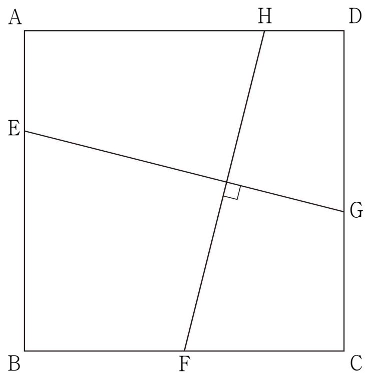
일 때, $\log_4\left(2^{a_1}\times 2^{a_2}\times 2^{a_3}\times \cdots \times 2^{a_{12}}\right)$의 값은?

[4점][2017년 7월 나16]

① 315 ② 320 ③ 325 ④ 330 ⑤ 335

139. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 한 변의 길이가 $2n$인 정사각형 ABCD가 있고, 네 점 E, F, G, H가 각각 네 변 AB, BC, CD, DA 위에 있다. 선분 HF의 길이는 $\sqrt{4n^2+1}$이고 선분 HF와 선분 EG가 서로 수직일 때, 사각형 EFGH의 넓이를 S_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} S_n$의 값은?

[4점][2018년 4월 나20]



① 765 ② 770 ③ 775 ④ 780 ⑤ 785

140. 자연수 k에 대하여 두 함수

$$f(x)=\frac{-kx+2k}{x-1}, \quad g(x)=\frac{2kx-4k}{x-1}$$

가 있다. 직선 $x=a\ (a>2)$가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, 선분 PQ의 길이가 자연수가 되도록 하는 실수 a의 최댓값을 a_k라 하자. $\sum_{k=1}^{15} a_k$의 값을 구하시오.

[4점][2019년 5월 나29]

141. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$$S_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^n+1$$

일 때, $\sum_{k=1}^{6} \frac{a_{2k}}{a_k}$의 값은?

[4점][2019년 5월 나16]

① $\frac{31}{32}$ ② $\frac{63}{64}$ ③ $\frac{127}{128}$ ④ $\frac{65}{64}$ ⑤ $\frac{33}{32}$

142. 첫째항이 2이고 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 있다. x에 대한 이차방정식

$$a_n x^2 - a_{n+1}x + a_n = 0$$

이 모든 자연수 n에 대하여 중근을 가질 때, $\sum_{k=1}^{8} a_k$의 값을 구하시오.

[4점][2019년 7월 나26]

143. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) S_n은 n에 대한 이차식이다.
(나) $S_{10}=S_{50}=10$
(다) S_n은 $n=30$에서 최댓값 410을 갖는다.

50보다 작은 자연수 m에 대하여 $S_m > S_{50}$을 만족시키는 m의 최솟값을 p, 최댓값을 q라 할 때, $\sum_{k=p}^{q} a_k$의 값은?

[4점][2019년 10월 나17]

① 39 ② 40 ③ 41 ④ 42 ⑤ 43

144. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2^x & (x<3) \\ \left(\frac{1}{4}\right)^{x+a}-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8 & (x \geq 3) \end{cases}$$

에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 y좌표가 정수인 점의 개수가 23일 때, 정수 a의 값은?

[4점][2021년 3월 13]

① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

145. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ 1]$에서

$$f(x)=\begin{cases} 3 & (0<x<1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$를 만족시킨다.
$\sum_{k=1}^{20} \frac{k \times f(\sqrt{k})}{3}$의 값은?

[4점][2021년 6월 13]

① 150 ② 160 ③ 170 ④ 180 ⑤ 190

23년도 문제

146. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은?

[4점][2023년 3월 공통10]

(가) $\lvert a_4 \rvert + \lvert a_6 \rvert = 8$
(나) $\sum_{k=1}^{9} a_k = 27$

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

147. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. S_n이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{13}의 값을 구하시오.

[4점][2023년 4월 공통20]

(가) S_n은 $n=7$, $n=8$에서 최솟값을 갖는다.
(나) $|S_m|=|S_{2m}|=162$인 자연수 $m(m>8)$이 존재한다.

148. 모든 항이 정수이고 공차가 5인 등차수열 $\{a_n\}$과 자연수 m이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sum_{k=1}^{2m+1} a_k < 0$
(나) $|a_m|+|a_{m+1}|+|a_{m+2}|<13$

$24 < a_{21} < 29$일 때, m의 값은?

[4점][2023년 7월 공통12]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

149. 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. a_7이 13의 배수이고 $\sum_{k=1}^{7} S_k = 644$일 때, a_2의 값을 구하시오.

[4점][2023년 9월 공통21]

150. n이 자연수일 때, x에 대한 이차방정식

$$x^2-5nx+4n^2=0$$

의 두 근을 α_n, β_n이라 하자.
$\sum_{n=1}^{7}(1-\alpha_n)(1-\beta_n)$의 값을 구하시오.

[3점][2023년 3월 공통18]

151. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)a_k} = n^2+2n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은?

[4점][2023년 6월 공통09]

① $\frac{10}{21}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{16}{21}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

152. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3)=40,\ \sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=-10$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(b_k+5)$의 값을 구하시오.

[3점][2023년 7월 공통18]

153. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$|a_6|=a_8,\ \sum_{k=1}^{5}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{5}{96}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{15} a_k$의 값은?

[4점][2024학년도 수능 공통11]

① 60 ② 65 ③ 70 ④ 75 ⑤ 80

154. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은?

[4점][2023학년도 수능 공통15]

(가) $a_7=40$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

① 216 ② 218 ③ 220 ④ 222 ⑤ 224

155. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}+a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n) & (a_{n+1}+a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_1=1$일 때, $a_6=34$가 되도록 하는 모든 a_2의 값의 합은?

[4점][2023년 3월 공통15]

① 60 ② 64 ③ 68 ④ 72 ⑤ 76

156. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $\log_2 \frac{M}{m}$의 값은?

[4점][2023년 4월 공통15]

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2^{n-2} & (a_n<1) \\ \log_2 a_n & (a_n \ge 1) \end{cases}$$

이다.

(나) $a_5+a_6=1$

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

157. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$a_1=k$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+2n-k & (a_n \le 0) \\ a_n-2n-k & (a_n>0) \end{cases}$$

이다.

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$이 되도록 하는 모든 k의 값은?

[4점][2023년 6월 공통15]

① 10 ② 14 ③ 18 ④ 22 ⑤ 26

158. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1<300$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \frac{1}{3}a_n & (\log_3 a_n\text{이 자연수인 경우}) \\ a_n+6 & (\log_3 a_n\text{이 자연수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

이다.

$\sum_{k=4}^{7} a_k=40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

[4점][2023년 7월 공통15]

① 315 ② 321 ③ 327
④ 333 ⑤ 339

159. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_2+a_4=40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

[4점][2023년 9월 공통12]

① 172 ② 175 ③ 178 ④ 181 ⑤ 184

160. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \frac{1}{2}a_n+2n & (a_n\text{이 4의 배수인 경우}) \\ a_n+2n & (a_n\text{이 4의 배수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

이다.

(나) $a_3>a_5$

$50<a_4+a_5<60$이 되도록 하는 a_1의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은?

[4점][2023년 10월 공통15]

① 224 ② 228 ③ 232 ④ 236 ⑤ 240

161. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6+a_7=3$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

[4점][2024학년도 수능 공통15]

① 139 ② 146 ③ 153 ④ 160 ⑤ 167

162. $a_2=-4$이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=a_n+a_{n+1}\ (n\geq 1)$이라 하고, 두 집합 A, B를

$$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\},\ B=\{b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5\}$$

라 하자. $n(A\cap B)=3$이 되도록 하는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{20}의 값의 합은?

[4점][2023년 6월 공통12]

① 30 ② 34 ③ 38 ④ 42 ⑤ 46

[해설] 수1-수열

1) 10

$a,\ a+b,\ 2a-b$가 등차수열이므로

$2(a+b)=3a-b \quad \therefore\ a=3b$

$1,\ a-1,\ 3b-1$이 등비수열이므로

$(a-1)^2=3b+1,\ (a-1)^2=a+1,\ a^2-3a=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 $a=3$

공비가 양수이므로 $a=3,\ b=1$

$\therefore\ a^2+b^2=3^2+1^2=10$

2) ①

$a_n=2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이고, A_n은 $\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}$의 넓이이므로

$A_n=\frac{1}{2}\times 2\left|-\frac{1}{2}\right|^{n-1}\times 1=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{20}A_n=\frac{1\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{19}$

3) ③

수열 $\{a_n\}$이 공차가 3인 등차수열이므로 $a_n<a_{n+1}$이다.

따라서 주어진 부등식에서

$x\ge\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$이므로 $b_n=\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$이다.

ㄱ. $b_1=\frac{a_1+a_2}{2}$ (참)

ㄴ. $b_n=\frac{1+3(n-1)+1+3n}{2}=3n-\frac{1}{2}$이므로

수열 $\{b_n\}$은 공차가 3인 등차수열이다. (거짓)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{10}b_n=\sum_{n=1}^{10}\left(3n-\frac{1}{2}\right)=3\times\frac{10\times 11}{2}-5=160$(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

4) ③

[출제의도] 등비중항 이해하기

$\mathrm{A}(k,\ 3\sqrt{k}),\ \mathrm{B}(k,\ \sqrt{k}),\ \mathrm{C}(k,\ 0)$에서

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{k},\ \overline{\mathrm{OC}}=k,\ \overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{k}$

$\sqrt{k},\ k,\ 3\sqrt{k}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$k^2=\sqrt{k}\cdot 3\sqrt{k},\ k^2=3k,\ k(k-3)=0$

따라서 $k=3(\because\ k>0)$

5) ②

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1a_2=a_{10}$에서 $a\cdot ar=ar^9$

$a>0,\ r>0$이므로 $a=r^8$ ⋯⋯ ㉠

$a_1+a_9=20$에서 $a+ar^8=20$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a+a^2=20,\ a^2+a-20=0$

$(a+5)(a-4)=0$이므로 $a=4(\because\ a>0)$

㉠에 $a=4$를 대입하면 $r^8=4,\ r^4=2$이고

$r^{20}=(r^8)^2r^4=4^2\times 2=32$

$(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)(a_1-a_3+a_5-a_7+a_9)$

$=\frac{a\{1-(r^2)^5\}}{1-r^2}\cdot\frac{a\{1-(-r^2)^5\}}{1-(-r^2)}$

$=\frac{a(1-r^{10})}{1-r^2}\cdot\frac{a(1+r^{10})}{1+r^2}=\frac{a^2(1-r^{20})}{1-r^4}$

$=\frac{4^2(1-32)}{1-2}=16\times 31=496$

6) 50

[출제의도] 등차수열의 일반항 이해하기

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$|a+2\times 2-1|=|a+5\times 2-3|$

$|a+3|=|a+7|$이므로 $a=-5$

$a_n=2n-7>92 \quad \therefore\ n>49.5$

따라서 n의 최솟값은 50

7) 256

조건 ㈏에서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 -2인 등비수열이므로

$a_2=-2\times a_1$

조건 ㈎에서 $a_1=-2a_1+3,\ a_1=1$

$\therefore\ a_n=1\cdot(-2)^{n-1}$

$\therefore\ a_9=1\cdot(-2)^8=256$

8) 37

첫째항이 a이고 공차가 -4인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n은

$S_n=\frac{n\{2a-4(n-1)\}}{2}=-2n^2+(a+2)n$

모든 자연수 n에 대하여 $S_n<200$이므로

$-2n^2+(a+2)n<200$

$2n^2+200>(a+2)n$

$2n+\frac{200}{n}>a+2$ ⋯ ㉠

이때 $n>0$이므로

$2n+\frac{200}{n}\ge 2\sqrt{2n\times\frac{200}{n}}=2\sqrt{400}=40$

(단, 등호는 $n=10$일 때 성립)

따라서 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립하려면 $a+2<40$이어야 하므로 자연수 a의 최댓값은 37이다.

[다른 풀이]

$S_n=\frac{n\{2a-4(n-1)\}}{2}=-2n^2+(a+2)n$에서

모든 자연수 n에 대하여 $S_n<200$이므로

$-2n^2+(a+2)n<200$

$2n^2-(a+2)n>-200$

$f(n)=2n^2-(a+2)n$이라 하면

$f(n)=2\left(n^2-\frac{a+2}{2}n\right)$

$=2\left\{\left(n-\frac{a+2}{4}\right)^2-\frac{(a+2)^2}{16}\right\}$

$=2\left(n-\frac{a+2}{4}\right)^2-\frac{(a+2)^2}{8}$

이때 a는 자연수이므로 $f(n)$이 최소가 되게 하는 n은 $\frac{a}{4},\ \frac{a+1}{4},\ \frac{a+2}{4},\ \frac{a+3}{4}$ 중의 하나이다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)>-200$이 성립하려면 네 부등식

$f\left(\frac{a}{4}\right)>-200,\ f\left(\frac{a+1}{4}\right)>-200,$

$f\left(\frac{a+2}{4}\right) > -200$, $f\left(\frac{a+3}{4}\right) > -200$

이 모두 성립해야 한다.

$f\left(\frac{a}{4}\right) = 2 \times \frac{1}{4} - \frac{(a+2)^2}{8} > -200$ 에서

$(a+2)^2 < 1604$ ⋯ ㉠

$f\left(\frac{a+1}{4}\right) = 2 \times \frac{1}{16} - \frac{(a+2)^2}{8} > -200$ 에서

$(a+2)^2 < 1601$ ⋯ ㉡

$f\left(\frac{a+2}{4}\right) = -\frac{(a+2)^2}{8} > -200$ 에서

$(a+2)^2 < 1600$ ⋯ ㉢

$f\left(\frac{a+3}{4}\right) = 2 \times \frac{1}{16} - \frac{(a+2)^2}{8} > -200$ 에서

$(a+2)^2 < 1601$ ⋯ ㉣

㉠, ㉡, ㉢, ㉣이 모두 성립하려면 $(a+2)^2 < 1600$ 이어야 한다.

$\therefore a+2 < 40$

따라서 자연수 a의 최댓값은 37이다.

9) ②

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 30이고 공차가 $-d$인 등차수열이므로

$a_n = 30-(n-1)d$ $(n \ge 1)$

이때

$a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{m+k}$

$= \frac{(k+1)\{30-(m-1)d+30-(m+k-1)d\}}{2}$

$= \frac{(k+1)\{60-(2m+k-2)d\}}{2} = 0$

$k+1>0$이므로

$(2m+k-2)d = 60$

$2m+k = 2+\frac{60}{d}$

이를 만족하는 자연수 m, k이 존재하기 위해서는 d가 60의 약수이어야 한다.

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$이므로 d의 개수는 $3 \times 2 \times 2 = 12$

[다른 풀이]

등차수열의 연속된 $(k+1)$개의 항의 합이 0이기 위한 수열의 조건은 다음과 같다.

ⅰ) $k+1$이 홀수일 때

$\cdots, d, 0, -d, \cdots$

이때 d는 30의 양의 약수가 되어야 하므로

$d = 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$

ⅱ) $k+1$이 짝수일 때

$\cdots, \frac{d}{2}, -\frac{d}{2}, \cdots$

이때 $30-(n-1)d = \frac{d}{2}$에서

$n = \frac{1}{2} + \frac{30}{d}$

n은 자연수이므로

$d = 4, 12, 20, 60$

ⅰ), ⅱ)에서 구하는 d의 개수는 12이다.

10) ③

함수 $y = |x^2-9|$의 그래프는 y축 대칭이므로

$a_2 = -a_3$

이 등차수열의 공차는 $a_3 - a_2 = 2a_3$이므로

$a_4 = a_3 + 2a_3 = 3a_3$

점 (a_3, k)는 곡선 $y = -x^2+9$ 위의 점이므로

$-a_3{}^2 + 9 = k$ ⋯⋯㉠

점 (a_4, k)는 곡선 $y = x^2-9$ 위의 점이므로

$a_4{}^2 - 9 = 9a_3{}^2 - 9 = k$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡에서 $10k = 72$

따라서 $k = \frac{36}{5}$

11) ④

$\overline{OP} = 1$, $\overline{OR} = 1+r$, $\overline{QR} = 2+r$

$\overline{OP}$, $\overline{OR}$, $\overline{QR}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(1+r)^2 = 1 \times (2+r)$

$r^2 + r - 1 = 0$

따라서 $r = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $(\because 0 < r < \sqrt{2})$

12) 13

첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3 a_5 = a_1$에서 $(ar^2) \times (ar^4) = a$이므로 $a = \frac{1}{r^6}$이다.

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{r^n}\right)}{1-\frac{1}{r}} = \frac{r(r^n-1)}{ar^n(r-1)}$, $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

이므로 $\frac{r(r^n-1)}{ar^n(r-1)} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ 에서 $r^{n-1} = \frac{1}{a^2}$이다.

$r^{n-1} = r^{12}$이므로 $n = 13$

13) ④

$\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = 3n^2 + n$ 에서

$n=1$일 때, $a_1 = 3 \times 1 + 1 = 4$

$n=2$일 때, $a_1 + a_3 = 3 \times 4 + 2 = 14$

따라서, $a_3 = 14-4 = 10$이므로 등차수열 a_n의 공차를 d라 하면

$2d = a_3 - a_1 = 10 - 4 = 6$ $\quad \therefore d = 3$

$\therefore a_8 = a_1 + 7d = 4 + 7 \times 3 = 25$

14) 502

[출제의도] 등비수열과 등비수열의 합의 관계를 이해하고 수열의 합을 구한다.

모든 항이 양의 실수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\,(a>0)$, 공비를 $r\,(r>0)$이라 하면

$S_3 = 7a_3$에서 $a + ar + ar^2 = 7ar^2$

$a > 0$이므로

$1 + r + r^2 = 7r^2$

$6r^2 - r - 1 = 0$

$(3r+1)(2r-1) = 0$

$r > 0$이므로 $r = \frac{1}{2}$

따라서 $a_n = a\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$S_n = \frac{a\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}} = 2a\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

이므로

$$\sum_{n=1}^{8}\frac{S_n}{a_n}=\sum_{n=1}^{8}\frac{2a\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{a\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}=\sum_{n=1}^{8}(2^n-1)$$

$$=\frac{2(2^8-1)}{2-1}-8=502$$

[다른 풀이]

모든 항이 양의 실수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\,(a>0)$, 공비를 $r\,(r>0)$이라 하면

i) $r=1$일 때

$S_3=7a_3$에서 $a+a+a=7a$

$4a=0$에서 $a=0$

$a>0$이므로 조건을 만족하지 않는다.

ii) $r\neq 1$일 때

$S_3=7a_3$에서 $\frac{a(1-r^3)}{1-r}=7ar^2$

$\frac{a(1-r)(1+r+r^2)}{1-r}=7ar^2$

$r\neq 1$이므로 $a(1+r+r^2)=7ar^2$

$a>0$이므로

$1+r+r^2=7r^2$

$6r^2-r-1=0$

$(3r+1)(2r-1)=0$

$r>0$이므로 $r=\frac{1}{2}$

따라서 $\sum_{n=1}^{8}\frac{S_n}{a_n}=502$

15) 120

[출제의도] 등차수열을 활용하여 문제해결하기

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 일반항은 $a_n=3+(n-1)d$

$a_{5n}-a_n=4dn$이므로

$\sum_{n=1}^{10}4dn=4d\times\frac{10\times 11}{2}=220d=440$

$d=2$이므로 $a_n=2n+1$

따라서 $\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(2n+1)=120$

16) 18

[출제의도] 등차수열과 등비수열의 성질을 이해하여 조건을 만족하는 값을 구한다.

수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 $a_1+a_8=a_4+a_5$

수열 $\{b_n\}$은 등비수열이므로 $b_2\,b_7=b_4\,b_5$

이때 $b_4\,b_5=a_4\,a_5$이므로

$a_4+a_5=8$, $a_4\,a_5=12$

a_4, a_5가 두 이차방정식의 근이라 하면 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해

이차방정식 $x^2-8x+12=0$의 두 근이다.

따라서 $a_4=6$, $a_5=2$

($\because$ $a_4=b_4$, $a_5=b_5$, $b_4>b_5$)

수열 $\{a_n\}$은 공차가 -4인 등차수열이므로

$a_4=a_1+(4-1)\times(-4)=6$

따라서 $a_1=18$

17) ①

[출제의도] 등차수열의 뜻을 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

등차수열의 첫째항을 a, 공차를 $d(d>0)$라 하면 조건 (가)에서

$(a+5d)+(a+7d)=0$

$a=-6d$ $\cdots$ ㉠

조건 (나)에서 $|a_6|=|a_7|+3$이므로

$|a+5d|=|a+6d|=3$

㉠을 대입하면 $d>0$이므로

$d=3$ 따라서,

$a_2=a+d=-5d=-15$

18) ②

a_n은 등차수열이고 공차를 $d(d>0)$라 하면

$a_3=a+2d$, $a_8=a+7d$

근과 계수의 관계에 의해

$(a+2d)+(a+7d)=14$

$2a+9d=14$

따라서

$\sum_{n=3}^{8}a_n=a_3+\cdots+a_8$

$=\frac{6\{(a+2d)+(a+7d)\}}{2}$

$=3\times(2a+9d)=3\times 14=42$

[다른풀이]

$a_3+a_8=14$이므로 $a_4+a_7=14$, $a_5+a_6=14$

$\therefore$ $3\times 14=42$

19) 13

$b_1=a_1$

$b_2=b_1+a_2=a_1+a_2$

$b_3=b_2-a_3=a_1+a_2-a_3$

$b_4=b_3+a_4=a_1+a_2-a_3+a_4$

$b_5=b_4+a_5=a_1+a_2-a_3+a_4+a_5$

$b_6=b_5-a_6=a_1+a_2-a_3+a_4+a_5-a_6$

$\vdots$

$b_{10}=a_1+a_2-a_3+a_4+a_5-a_6+a_7+a_8-a_9+a_{10}=a_{10}$

$a_2-a_3=a_5-a_6=a_8-a_9=-d$이므로

$b_{10}-a_{10}=(a_1-d)+(a_1+2d)+(a_1+5d)=0$

$a_1=-2d$

$a_n=-2d+(n-1)d=d(n-3)$

$b_8=(a_1-d)+(a_1+2d)+a_7+a_8=6d$

$b_{10}=(a_1-d)+(a_1+2d)+(a_1+5d)+a_{10}=7d$

$\therefore$ $\frac{b_8}{b_{10}}=\frac{6}{7}$

20) ③

[출제의도] 등비수열의 성질 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3+a_5=ar^2+ar^4=ar^2(1+r^2)=24$ $\cdots$ (ㄱ)

$\frac{ar^2}{ar}=\frac{1}{6}ar^3$, $ar^2=6$ $\cdots$ (ㄴ)

(ㄴ)을 (ㄱ)에 대입하면 $1+r^2=4$, $r^2=3$

$\therefore a_5=ar^4=a(r^2)^2=2\times 3^2=18$

21) ④

[출제의도] 이해능력-수열

$a_n=1+(n-1)\times 3=3n-2$이고

$a_{n+1}-a_n=3$ 이므로

$$\frac{3}{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{3(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})}{a_{n+1}-a_n}=\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{33}\frac{3}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}=\sum_{k=1}^{33}(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})$$

$$=\sum_{k=1}^{33}(\sqrt{3k+1}-\sqrt{3k-2})$$

$$=(\sqrt{4}-\sqrt{1})+(\sqrt{7}-\sqrt{4})+(\sqrt{10}-\sqrt{7})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{97})$$

$$=10-1=9$$

22) ①

[출제의도] 조건을 만족시키는 등차 수열의 첫째항과 공차를 구할 수 있는가?

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$\frac{a_5+a_{13}}{2}=a_9$ 이므로 $a_9=0$에서

$a+8d=0$ …… ㉠

또, $\sum_{k=1}^{18}a_k=\frac{18}{2}\times(a_1+a_{18})=9(2a+17d)$

이므로 $9(2a+17d)=\frac{9}{2}$에서

$2a+17d=\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여

$a=-4,\ d=\frac{1}{2}$ 이므로

$a_{13}=a+12d=-4+12\times\frac{1}{2}=2$

23) 200

[출제의도] 두 직선의 교점을 이용하여 등차수열의 합을 구하는 문제를 해결한다.

점 $(n,\ 0)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 일차함수의 그래프와 만나는 점의 y좌표를 a_n이라 하면 a_n을 n에 관한 일차식으로 나타낼 수 있으므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

$a_4=\frac{7}{2}$이고 $a_7=5$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$3d=a_7-a_4=5-\frac{7}{2}=\frac{3}{2}$

$d=\frac{1}{2}$

$a_1=a_4-3d=\frac{7}{2}-3\times\frac{1}{2}=2$

$\sum_{k=1}^{25}a_k$의 값은 첫째항이 2이고 공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열의 첫째항부터 제25항까지의 합과 같으므로

$$\sum_{k=1}^{25}a_k=\frac{25\left\{2\times2+(25-1)\times\frac{1}{2}\right\}}{2}=\frac{25\times16}{2}=200$$

[다른 풀이 1]

점 $(n,\ 0)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 일차함수의 그래프와 만나는 점의 y좌표를 a_n이라 하면 a_n을 n에 관한 일차식으로 나타낼 수 있으므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

$a_4=\frac{7}{2}$이고 $a_7=5$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$3d=a_7-a_4=5-\frac{7}{2}=\frac{3}{2}$

$d=\frac{1}{2}$

$a_{13}=a_7+6d=5+3=8$이므로

$$\sum_{k=1}^{25}a_k=(a_1+a_{25})+(a_2+a_{24})+\cdots+(a_{12}+a_{14})+a_{13}$$

$$=2a_{13}+2a_{13}+\cdots+2a_{13}+a_{13}$$

$$=12\times2a_{13}+a_{13}=25a_{13}=25\times8=200$$

[다른 풀이 2]

$a_4=\frac{7}{2}$이고 $a_7=5$이므로

직선 l은 두 점 $\left(4,\ \frac{7}{2}\right)$, $(7,\ 5)$를 지난다.

직선 l의 기울기는 $\frac{5-\frac{7}{2}}{7-4}=\frac{\frac{3}{2}}{3}=\frac{1}{2}$ 이므로

직선 l의 방정식은 $y=\frac{1}{2}(x-4)+\frac{7}{2}=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

점 $(n,\ 0)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 l과 만나는 점의 y좌표가 a_n이므로 $a_n=\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}$

$$\sum_{k=1}^{25}a_k=\sum_{k=1}^{25}\left(\frac{1}{2}k+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{25\times26}{2}+\frac{3}{2}\times25$$

$$=\frac{25\times13+3\times25}{2}=\frac{25\times16}{2}=25\times8=200$$

24) 26

[출제의도] 등차수열을 활용하여 추론하기

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

(가)에서

$a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)=159$이므로

$a_1+d=53$ …… ㉠

(나)에서

$(a_m-2d)+(a_m-d)+a_m=96$이므로

$a_m-d=32$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a_1+a_m=85$이므로

$\sum_{k=1}^{m}a_k=\frac{m}{2}(a_1+a_m)=\frac{m}{2}\times85=425$이고

$m=10$이다.

또한 ㉠, ㉡에서 $a_1=56,\ d=-3$이므로

$a_n=-3n+59$

따라서 $a_{11}=-33+59=26$

25) ③

[출제의도] 이해능력-수열

등비수열 a_n의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=ar>0$ … ㉠

$a_1a_7=9$에서 $a\times ar^6=(ar^3)^2=9$

$ar^3=3$ 또는 $ar^3=-3$

이때 ㉠에 의하여 $ar^3>0$이므로

$ar^3=3$

따라서

$a_4+a_2a_6=ar^3+a^2r^6=3+3^2=12$

26) ③

a_n이 등비수열이므로 $a_3=4(a_2-a_1)$에서

$ar^2 = 4(ar-a)$

$r^2 = 4r-4$

$(r-2)^2 = 0$

$\therefore r = 2$

$\sum_{k=1}^{6} a_k = \frac{a(1-r^6)}{1-r} = 15$ 에서 $a = \frac{15}{63} = \frac{5}{21}$

따라서

$a_1 + a_3 + a_5 = a + ar^2 + ar^4 = a(1+r^2+r^4)$

$= \frac{5}{21}(1+2^2+2^4) = 5$

27) ①

$|a_3| = a_4$에서 $a_3 < 0$, $a_4 > 0$이고 $a_3 + a_4 = 0$이다.

$a_n = -15 + (n-1)d$라 하면

$a_3 + a_4 = -15 + 2d - 15 + 3d = 0$에서 $d = 6$이다.

따라서 $a_n = 6n - 21$이므로 $a_7 = 21$이다.

28) ⑤

[출제의도] 등비수열의 합을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3 + a_5 = ar^2 + ar^4 = ar^2(1+r^2) = 18$ ⋯㉠

$\frac{ar^2}{ar} = \frac{1}{6}ar^3$, $ar^2 = 6$ ⋯㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $1 + r^2 = 3$

따라서 $a = 3$, $r^2 = 2$

$\sum_{n=1}^{5} a_{2n-1} = \frac{3(2^5-1)}{2-1} = 93$

29) 420

[출제의도] 이해능력-수열

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$a_1 + 2a_3 + a_5 = a_2 + a_4 + a_6$에서

$a + 2(a+2d) + a + 4d = a + d + a + 3d + a + 5d$

$4a + 8d = 3a + 9d$, $a = d$

따라서 $a_n = na$

$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} ka = a \times \frac{10 \times 11}{2} = 55a = 110$ 에서 $a = 2$ 이므로

$\sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{20} 2k = 2 \times \frac{20 \times 21}{2} = 420$

30) ①

[출제의도] 수열의 합을 이용하여 첫째항을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 양수, 공비가 음수이므로

$a_{2n-1} > 0$ 에서 $|a_{2n-1}| + a_{2n-1} = 2a_{2n-1}$ 이고

$a_{2n} < 0$ 에서 $|a_{2n}| + a_{2n} = 0$ 이다.

수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 a_1, 공비가 $(-2)^2 = 4$인 등비수열이므로

$\sum_{k=1}^{9} (|a_k| + a_k) = 2(a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9)$

$= 2 \times \frac{a_1(4^5-1)}{4-1}$

$= \frac{2 \times 1023 \times a_1}{3}$

$= 682a_1$

따라서 $682a_1 = 66$ 이므로 $a_1 = \frac{3}{31}$

31) 477

[출제의도] 등비수열의 공비를 이용하여 문제를 해결한다.

$A(200)$은 조건의 등비수열에서 제k항이 3×2^{200}이 되는 모든 k의 값의 합이다.

공비를 2^p이라 하면 $2^{200} = (2^p)^{\frac{200}{p}}$ 이고 $\frac{200}{p}$ 은 자연수이어야 하므로

p는 200의 양의 약수이다. 그러므로 $3 \times 2^{200} = 3 \times (2^p)^{\frac{200}{p}}$ 은 첫째항이 3이고 공비가 2^p인 등비수열의 제$\left(\frac{200}{p}+1\right)$항이다.

$200 = 2^3 \times 5^2$ 이므로 200의 모든 양의 약수는

1, 2, 2^2, 2^3, 5, 2×5, $2^2 \times 5$, $2^3 \times 5$, 5^2, 2×5^2, $2^2 \times 5^2$, $2^3 \times 5^2$

따라서

$A(200) = (2^3 \times 5^2 + 1) + (2^2 \times 5^2 + 1) + \cdots + (2+1) + (1+1)$

$= (2^3 \times 5^2 + 2^2 \times 5^2 + \cdots + 2 + 1) + 12 = 465 + 12 = 477$

32) ①

[출제의도] 등차수열을 활용하여 문제해결하기

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 $S_9 = 27$이므로

$\frac{9(2a+8d)}{2} = 27$ $\therefore$ $a + 4d = 3$

$|S_3| = 27$이므로

$\left|\frac{3(2a+2d)}{2}\right| = 27$, $|a+d| = 9$

$\therefore$ $a + d = 9$ 또는 $a + d = -9$

(i) $a + d = 9$인 경우

$a + 4d = 3$과 $a + d = 9$를 연립하여 풀면

$a = 11$, $d = -2$가 되어 공차가 양수라는 조건에 맞지 않는다.

(ii) $a + d = -9$인 경우

$a + 4d = 3$과 $a + d = -9$를 연립하여 풀면

$a = -13$, $d = 4$

따라서 $a_{10} = -13 + 9 \times 4 = 23$

33) 162

[출제의도] 등비수열의 일반항과 등비수열의 합을 이용하여 특정 항의 값을 구할 수 있는가?

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r (r은 정수)라 하면

첫째항이 2이므로 $a_n = 2r^{n-1}$

$a_2 = 2r$, $a_3 = 2r^2$이므로

조건 (가)에서 $4 < 2r + 2r^2 \le 12$ 즉, $2 < r + r^2 \le 6$

$r^2 + r > 2$에서

$r^2 + r - 2 = (r+2)(r-1) > 0$ 이므로

$r < -2$ 또는 $r > 1$ ⋯ ㉠

$r^2 + r \le 6$에서

$r^2 + r - 6 = (r+3)(r-2) \le 0$ 이므로

$-3 \le r \le 2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$-3 \le r < -2$ 또는 $1 < r \le 2$

r는 정수이므로 $r = -3$ 또는 $r = 2$

(i) $r = 2$인 경우

조건 (나)에서

$\sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m} (2 \times 2^{k-1}) = \frac{2(2^m-1)}{2-1} = 2(2^m-1)$

$2(2^m-1)=122$ 에서
$2^m-1=61,\ 2^m=62$
이때, $2^m=62$를 만족시키는 m의 값은 존재하지 않는다.
(ii) $r=-3$인 경우
조건 (나)에서
$\sum_{k=1}^{m} a_k=\sum_{k=1}^{m}\{2\times(-3)^{k-1}\}=\frac{2\{1-(-3)^m\}}{1-(-3)}=\frac{2-(-3)^m}{2}$
$\frac{2-(-3)^m}{2}=122$ 에서
$1-(-3)^m=244$
$(-3)^m=-243$
즉, $(-3)^m=(-3)^5$ 이므로 $m=5$
(i), (ii)에 의하여 $r=-3,\ m=5$ 이므로
$a_m=a_5=2\times(-3)^4=162$

34) ③

[출제의도] 등차수열에 관련된 문제를 이용하여 해결할 수 있는가?
x에 대한 이차방정식 $x^2-nx+4(n-4)=0$을 풀면
$(x-4)(x-n+4)=0$
$x=4$ 또는 $x=n-4$
한편, 세 수 1, α, β가 등차수열을 이루므로
$2\alpha=\beta+1$ ⋯ ㉠
이대, 다음 각 경우로 나눌 수 있다.
(i) $\alpha=4$이고, $\beta=n-4$인 경우
이때, $\alpha<\beta$이므로 $n>8$
또, ㉠에서
$8=(n-4)+1$
$n=11$
그러므로 조건을 만족시킨다.
(ii) $\alpha=n-4$이고, $\beta=4$
이때, $\alpha<\beta$이므로 $n<8$
또, ㉠에서
$2(n-4)=4+1$
$n=\frac{13}{2}$
n은 자연수이어야 하므로 조건을 만족시키지 못한다.
따라서 (i), (ii)에서 구하는 자연수의 값은 11이다.

35) ①

[출제의도] 등차수열의 성질 이해하기
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a+8d=2(a+2d)$, $a=4d$
$\sum_{n=1}^{24}\frac{(a_{n+1}-a_n)^2}{a_na_{n+1}}$
$=\sum_{n=1}^{24}\frac{d^2}{a_na_{n+1}}=d^2\sum_{n=1}^{24}\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$
$=d\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{24}}-\frac{1}{a_{25}}\right)\right\}$
$=d\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{25}}\right)=d\left(\frac{a_{25}-a_1}{a_1\times a_{25}}\right)$
$=d\times\frac{24d}{a\times(a+24d)}=\frac{24d^2}{4d\times28d}=\frac{3}{14}$

36) ⑤

[출제의도] 등차수열과 등비수열의 성질 이해하기
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r라 하면
$a_7=a_6+d$, $b_7=b_6\times r$
$9+d=9r$
$r=1+\frac{d}{9}$ 이므로 d는 9의 배수
$a_{11}=a_6+5d=9+5d$
$94<9+5d<109$, $17<d<20$
d는 9의 배수이므로 $d=18$
$9+18=9r$, $r=3$
$a_7+b_8=(a_6+d)+(b_6\times r^2)$
$=(9+18)+(9\times3^2)=108$

37) 273

[출제의도] 수열의 합을 활용하여 추론하기
수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\,(a\neq0)$, 공차를 d라 하면
$S_9=S_{18}$ 이므로
$\frac{9(2a+8d)}{2}=\frac{18(2a+17d)}{2}$
$a=-13d$
$S_n=\frac{n\{-26d+(n-1)d\}}{2}=\frac{d}{2}n(n-27)$
$S_1=S_{26}=-13d$,
$S_2=S_{25}=-25d$,
$S_3=S_{24}=-36d$,
⋮
$S_{13}=S_{14}=-91d$,
$S_{27}=0$, $S_{28}=14d$, $S_{29}=29d$, ⋯
집합 T_n의 원소의 개수가 13이 되도록 하는 자연수 n의 값은
13, 14, ⋯, 26
따라서 모두 자연수 n의 값의 합은 $13+14+15+\cdots+26=273$

38) ②

$a_n=a+(n-1)d$라 하자
$a_1=a_3+8$은 $a=a+2d+8$이고, $d=-4$(공차)
$2a_4-3a_6=3$은 $2a+6d-3a-15d=3$이 된다.
$d=-4$이므로 $a=33$임을 알 수 있다.
즉 일반항 $a_n=33-4(n-1)=37-4n$
$\therefore 37-4n<0$ 즉 $\frac{37}{4}<n$ 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 10

39) ④

[출제의도] 등차수열의 합의 공식을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?
$S_n=\frac{n\{2\times50+(n-1)\times(-4)\}}{2}$
$=-2n^2+52n$
$=-2(n-13)^2+2\times13^2$
이므로 S_n의 값은 $n=13$일 때 최대이다.
따라서 $\sum_{k=m}^{m+4}S_k$의 값은 $m=11$일 때 최대가 된다.

40) ①

[출제의도] 주어진 두 수열의 관계를 이해하여 등차수열의 제 3 항을 구한다.
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r라 하면
$a_n=3+(n-1)d,\ b_n=3r^{n-1}$
$b_3=-a_2$를 $a_2+b_2=a_3+b_3$에 대입하면
$a_2+b_2=a_3-a_2=d$

그러므로 $3+d+3r=d$, $3r=-3$에서 $r=-1$ …… ㉠

$b_3=-a_2$에서 $3r^2=-(3+d)$ …… ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면 $3\times(-1)^2=-3-d$에서 $d=-6$

따라서 $a_3=3+2\times(-6)=-9$

41) ③

[출제의도] 등차중항을 이용하여 등차수열의 합과 관련된 문제를 해결한다.

a_{k-3}, a_{k-2}, a_{k-1}은 이 순서대로 등차수열을 이루므로

a_{k-2}는 a_{k-3}과 a_{k-1}의 등차중항이다. 즉,

$a_{k-2}=\dfrac{a_{k-3}+a_{k-1}}{2}=\dfrac{-24}{2}=-12$

$S_k=\dfrac{k(a_1+a_k)}{2}=\dfrac{k(a_3+a_{k-2})}{2}$

$=\dfrac{k\{42+(-12)\}}{2}=15k$

따라서 $k^2=15k$이고 $k\neq0$이므로 $k=15$

[다른 풀이 1]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=42$ …… ㉠

$a_{k-2}=\dfrac{a_{k-3}+a_{k-1}}{2}$,

$a+(k-3)d=-12$ …… ㉡

$S_k=\dfrac{k\{2a+(k-1)d\}}{2}=k^2$이고, $k\neq0$이므로

$2a+(k-1)d=2k$ …… ㉢

㉢에서 ㉠을 빼면 $a+(k-3)d=2k-42$ …… ㉣

㉡, ㉣에서 $2k-42=-12$이므로 $k=15$

[다른 풀이 2]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=42$, $a=42-2d$ …… ㉠

$a_{k-3}+a_{k-1}=a+(k-4)d+a+(k-2)d=-24$이므로

$a+(k-3)d=-12$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$42-2d+kd-3d=-12$, $kd-5d=-54$ …… ㉢

$S_k=\dfrac{k\{2a+(k-1)d\}}{2}=k^2$이고, $k\neq0$이므로

$2a+(k-1)d=2k$ …… ㉣

㉠을 ㉣에 대입하면

$84-4d+kd-d=2k$, $kd-5d=2k-84$ …… ㉤

㉢, ㉤에서 $2k-84=-54$이므로 $k=15$

42) ②

[출제의도] 등비수열의 성질을 이해하여 수열의 항을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

조건 (가)에서 $ar^2\times ar^4\times ar^6=125$

$(ar^4)^3=5^3$, 즉 $ar^4=5$

조건 (나)에서 $\dfrac{ar^3+ar^7}{ar^5}=\dfrac{13}{6}$, $\dfrac{1}{r^2}+r^2=\dfrac{13}{6}$

$r^2=X$로 치환하면 $X+\dfrac{1}{X}=\dfrac{13}{6}$에서

$6X^2-13X+6=0$, $(2X-3)(3X-2)=0$

$X=\dfrac{3}{2}$ 또는 $X=\dfrac{2}{3}$에서 $r^2=\dfrac{3}{2}$ 또는 $r^2=\dfrac{2}{3}$

공비가 1보다 커야 하므로 $r^2=\dfrac{3}{2}$

따라서 $a_9=ar^8=ar^4\times r^4=5\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{45}{4}$

43) ①

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

$r=1$이면 조건 (가)에서 $a=\dfrac{45}{4}$이고

조건 (나)에서는 $a=\dfrac{63}{2}$이므로 $r\neq1$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{4}a_k=\frac{a(r^4-1)}{r-1}=45$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\frac{a_2\times a_5}{a_k}=(a_2\times a_5)\times\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{a_k}$

$=ar\times ar^4\times\dfrac{\dfrac{1}{a}\left\{1-\left(\dfrac{1}{r}\right)^6\right\}}{1-\dfrac{1}{r}}=a^2r^5\times\dfrac{r^6-1}{a(r^6-r^5)}=\dfrac{a(r^6-1)}{r-1}$

$=189$

$\dfrac{\dfrac{a(r^6-1)}{r-1}}{\dfrac{a(r^4-1)}{r-1}}=\dfrac{r^6-1}{r^4-1}=\dfrac{(r^2-1)(r^4+r^2+1)}{(r^2-1)(r^2+1)}=\dfrac{r^4+r^2+1}{r^2+1}$

$=\dfrac{189}{45}$

이므로 $5r^4+5r^2+5=21r^2+21$

$5r^4-16r^2-16=0$, $(5r^2+4)(r^2-4)=0$

$r>0$이므로 $r=2$

$\dfrac{a(2^4-1)}{2-1}=15a=45$이므로 $a=3$

따라서 $a_3=3\times2^2=12$

44) 64

[출제의도] 등비수열의 일반항과 합을 이용하여 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

$a_1=1$이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_n=1\times r^{n-1}=r^{n-1}$

$\dfrac{S_6}{S_3}=\dfrac{\dfrac{r^6-1}{r-1}}{\dfrac{r^3-1}{r-1}}=\dfrac{r^6-1}{r^3-1}=\dfrac{(r^3+1)(r^3-1)}{r^3-1}=r^3+1$ ……㉠

또, $2a_4-7=2r^3-7$ ……㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$r^3+1=2r^3-7$, $r^3=8$

$\therefore\ r=2$

따라서

$\therefore\ a_7=2^6=64$

45) 7

[출제의도] 등차수열의 합을 이용하여 등차수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

$S_{k+2}-S_k=a_{k+2}+a_{k+1}$

$S_k=-16$, $S_{k+2}=-12$이므로

$a_{k+2}+a_{k+1}=4$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로

$a_1+2(k+1)+a_1+2k=4$

$a_1+2k=1$

$a_1=1-2k$…… ㉠

$S_k=-16$에서

$\dfrac{k\{2a_1+(k-1)\times 2\}}{2}=-16$

$k(a_1+k-1)=-14$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$k\{(1-2k)+k-1\}=-16$

$k^2=16$

k는 자연수이므로 $k=4$

$k=4$를 ㉠에 대입하면 $a=-7$

따라서

$\therefore\ a_{2k}=a_8=-7+7\times 2=7$

46) ④

조건 (가), (나)에 의하여

$S_7=T_7$이고 $S_7+T_7=84$이므로 $S_7=42$

$S_7=T_7$이므로 7 이하의 모든 자연수 n에 대하여

$a_n\geq 0$ … ㉠

조건 (나)에 의하여 6 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$(S_{n+1}+T_{n+1})-(S_n+T_n)=0$

$a_{n+1}+|a_{n+1}|=0$

$a_{n+1}\leq 0$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $0\leq a_7\leq 0$이므로 $a_7=0$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$S_7=\dfrac{7(2a+6d)}{2}=42,\ a_7=a+6d=0$에서

$a=12,\ d=-2$

$a_n=14-2n$

$S_{15}=\dfrac{15\times(24-28)}{2}=-30$

$S_{15}+T_{15}=84$

따라서 $T_{15}=84-(-30)=114$

47) 9

모든 자연수 n에 대하여

$S_{n+3}-S_n=13\times 3^{n-1}$

이 성립하고

$S_{n+3}-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$

이므로 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=13\times 3^{n-1}$ … ㉠

이 성립한다.

㉠에 $n=1$을 대입하면 $a_2+a_3+a_4=13$이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_1r+a_1r^2+a_1r^3=13$

$a_1r(1+r+r^2)=13$ … ㉡

또, ㉠에 $n=2$를 대입하면 $a_3+a_4+a_5=13\times 3=39$이므로

$a_1r^2+a_1r^3+a_1r^4=39$

$a_1r^2(1+r+r^2)=39$ … ㉢

㉢÷㉡을 하면 $\dfrac{a_1r^2(1+r+r^2)}{a_1r(1+r+r^2)}=\dfrac{39}{13}$에서 $r=3$

$r=3$을 ㉡에 대입하면 $a_1\times 3\times(1+3+9)=13$에서

$a_1=\dfrac{1}{3}$

따라서 $a_4=a_1r^3=\dfrac{1}{3}\times 3^3=9$

[다른 풀이]

$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=13\times 3^{n-1}$

$a_{n+2}+a_{n+3}+a_{n+4}=13\times 3^n$

에서 $r=3$을 쉽게 구할 수 있다.

48) ③

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $d=-3$이므로

$a_7=a_3+4d=a_3-12$

$a_3a_7=a_3(a_3-12)=64$에서

${a_3}^2-12a_3-64=0,\ (a_3+4)(a_3-16)=0$

$a_3=-4$ 또는 $a_3=16$

(ⅰ) $a_3=-4$일 때,

$a_8=a_3+5d=-4-15=-19<0$이므로 $a_8>0$이라는 조건에 모순이다.

(ⅱ) $a_3=16$일 때,

$a_8=a_3+5d=16-15=1>0$이므로 조건을 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a_3=16$

따라서 $a_2=a_3-d=16-(-3)=19$

49) ②

[출제의도] 절댓값을 포함한 등차수열의 합을 이용하여 항의 값을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d\ (d>0)$이라 하면

$a_5=5$이므로 $a_3=5-2d,\ a_4=5-d,\ a_6=5+d,\ a_7=5+2d$

그러므로

$\displaystyle\sum_{k=3}^{7}|2a_k-10|=|2a_3-10|+|2a_4-10|+|2a_5-10|$

$+|2a_6-10|+|2a_7-10|$

$=|-4d|+|-2d|+0+|2d|+|4d|$

$=12d=20$

따라서 $d=\dfrac{5}{3}$이므로 $a_6=a_5+d=\dfrac{20}{3}$

50) 257

[출제의도] 등비수열의 합을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

(ⅰ) $x\neq 1$일 때

$f(x)=(1+x^4+x^8+x^{12})(1+x+x^2+x^3)$

$=\dfrac{(x^4)^4-1}{x^4-1}\times\dfrac{x^4-1}{x-1}=\dfrac{x^{16}-1}{x-1}$

(ⅱ) $x=1$일 때 $f(1)=4\times 4=16$ 따라서

$\dfrac{f(2)}{\{f(1)-1\}\{f(1)+1\}}=\dfrac{2^{16}-1}{(16-1)(16+1)}$

$=\dfrac{(2^8-1)(2^8+1)}{(2^4-1)(2^4+1)}=2^8+1=257$

51) ②

[출제의도] 등차수열에서 주어진 조건을 만족시키는 수열의 합을 구할 수 있는가?

$S_3-S_2=a_3$이므로 $a_6=2a_3$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$2+5d=2(2+2d)$

$2+5d=4+4d$에서

$d=2$

따라서 $a_{10}=2+9\times 2=20$이므로

$S_{10}=\dfrac{10(a_1+a_{10})}{2}=\dfrac{10\times(2+20)}{2}=110$

52) ②

[출제의도] 등비수열의 일반항 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = ar^{n-1}$

$2a = S_2 + S_3$이므로

$2a = (a + ar) + (a + ar + ar^2)$

$ar(2 + r) = 0$

$r^2 = 64a^2 \, (a > 0)$에 의하여

$r \neq 0$이므로 $r = -2$, $a = \dfrac{1}{4}$

따라서 $a_5 = \dfrac{1}{4} \times (-2)^4 = 4$

53) ②

[출제의도] 등차수열의 성질과 합을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 등차수열의 공차를 구할 수 있는가?

$a_1 = -45 < 0$이고 $d > 0$이므로

조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$a_m < 0$, $a_{m+3} > 0$

즉, $-a_m = a_{m+3}$에서 $a_m + a_{m+3} = 0$

따라서

$\{-45 + (m-1)d\} + \{-45 + (m+2)d\} = 0$

$-90 + (2m+1)d = 0$

$(2m+1)d = 90$ …… ㉠

이고 $2m+1$은 1보다 큰 홀수이므로 d는 짝수이다.

그런데, $90 = 2 \times 3^2 \times 5$이므로 ㉠을 만족시키는 90의 약수 중에서 짝수인 것은 2, 6, 10, 18, 30이다.

또한, 조건 (나)에서

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n\{2 \times (-45) + (n-1)d\}}{2} > -100$

$n\{-90 + (n-1)d\} > -200$ …… ㉡

따라서 2, 6, 10, 18, 30 중에서 모든 자연수 n에 대하여 ㉡을 만족시키는 경우는 18, 30이므로 구하는 모든 자연수 d의 값의 합은

$18 + 30 = 48$

54) ①

[출제의도] 등차수열의 합을 이용하여 수열의 첫째항을 구하는 문제를 해결한다.

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자. $d \geq 0$이면 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 양수이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > 0$이 되어 조건을 만족시키지 않는다. 따라서 $d < 0$이어야 한다.

(i) $S_3 = S_6$인 경우

$\dfrac{3(2a_1 + 2d)}{2} = \dfrac{6(2a_1 + 5d)}{2}$에서 $a_1 = -4d$이므로

$S_3 = S_6 = -9d > 0$,

$S_{11} = \dfrac{11(2a_1 + 10d)}{2} = 11d < 0$

즉, $S_3 = -S_{11} - 3$에서

$-9d = -11d - 3$, $d = -\dfrac{3}{2}$

$a_1 = -4d = 6$

(ii) $S_3 = -S_6$인 경우

$\dfrac{3(2a_1 + 2d)}{2} = -\dfrac{6(2a_1 + 5d)}{2}$에서 $a_1 = -2d$이므로

$S_3 = -S_6 = -3d > 0$

$S_{11} = \dfrac{11(2a_1 + 10d)}{2} = 33d < 0$

즉, $S_3 = -S_{11} - 3$에서

$-3d = -33d - 3$, $d = -\dfrac{1}{10}$

$a_1 = -2d = \dfrac{1}{5}$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$의 첫째항의 합은

$6 + \dfrac{1}{5} = \dfrac{31}{5}$이다.

55) ②

[출제의도] 등비수열의 합 이해하기

모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n} + b_{2n} = 0$이고

$a_{2n+1} + b_{2n+1} = 3(a_{2n-1} + b_{2n-1})$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{8} a_n + \sum_{n=1}^{8} b_n = \sum_{n=1}^{8} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{4} (a_{2n-1} + b_{2n-1})$

$= \dfrac{(a_1 + b_1)(3^4 - 1)}{3 - 1} = 80a_1 = 160$

에서 $a_1 = 2$

따라서 $a_3 + b_3 = 3(a_1 + b_1) = 12$

56) ③

[출제의도] 등차수열의 일반항을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 양수이고 조건 (가)에서

$a_5 \times a_7 < 0$ 이므로

$a_5 < 0$, $a_7 > 0$

즉, $n \leq 5$일 때 $a_n < 0$이고, $n \geq 7$일 때 $a_n > 0$이다.

이때 조건 (나)에서

$\displaystyle\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$

이므로

$|a_7| + |a_8| + |a_9| + |a_{10}| + |a_{11}| + |a_{12}|$

$= 6 + |a_2| + |a_4| + |a_6| + |a_8| + |a_{10}| + |a_{12}|$

$a_7 + a_9 + a_{11} = 6 - a_2 - a_4 + |a_6|$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 3이므로

$(a_1 + 18) + (a_1 + 24) + (a_1 + 30) = 6 - (a_1 + 3) - (a_1 + 9) + |a_1 + 15|$

$|a_1 + 15| = 5a_1 + 78$ …… ㉠

㉠에서 $a_1 + 15 \geq 0$이면

$a_1 + 15 = 5a_1 + 78$

$4a_1 = -63$

$a_1 = -\dfrac{63}{4} < -15$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $a_1 + 15 < 0$이므로 ㉠에서

$-a_1 - 15 = 5a_1 + 78$

$6a_1 = -93$

$a_1 = -\dfrac{31}{2}$

따라서

$a_{10} = a_1 + 9 \times 3 = -\dfrac{31}{2} + 27 = \dfrac{23}{2}$

57) ③

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (x-k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (x+k)^2$에서

$\displaystyle x^2 + \sum_{k=1}^{n} (x-k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (x+k)^2$

$\displaystyle x^2 + \sum_{k=1}^{n} \{(x-k)^2 - (x+k)^2\} = 0$

$x^2-\sum_{k=1}^{n}4kx=0$, $x^2-4x\sum_{k=1}^{n}k=0$

$x^2-4x\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}=0$

$x\neq 0$이므로 $x=2n(n+1)=a_n$

$\therefore\ a_{10}=20\cdot 11=220$

58) 508

$a_n=S_n-S_{n-1}=n+1\ (n\geq 2)$, $a_1=S_1=2$이므로

$a_n=n+1\ (n\geq 1)$

$$\sum_{n=1}^{7}2^{a_n}=\sum_{n=1}^{7}2^{n+1}=\frac{2^2(2^7-1)}{2-1}=508$$

59) ①

$a_{k+1}=S_{k+1}-S_k$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{a_{k+1}}{S_kS_{k+1}}=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}}\right)=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{11}}=\frac{1}{3}$$

$a_1=S_1=2$ 이므로 $\therefore\ S_{11}=6$

60) ④

$x^2-(n+1)x+n^2=nx-n$

$x^2-(2n+1)x+n(n+1)=0$

$x=n\ ,\ n+1$

$a_nb_n=n(n+1)$

$$\sum_{n=1}^{19}\frac{100}{n(n+1)}=100\sum_{n=1}^{19}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=100\left(1-\frac{1}{20}\right)=95$$

61) ①

$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{k+1}=n^2+n$을 전개하면

$\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{3}+\dfrac{a_3}{4}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=n^2+n$ … ㉠

㉠에 의해 2이상의 자연수 n에 대하여

$\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{3}+\dfrac{a_3}{4}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{n}=(n-1)^2+(n-1)$ … ㉡

㉠-㉡에서

$\dfrac{a_n}{n+1}=n^2+n-\{(n-1)^2+(n-1)\}=2n$

$\therefore\ a_n=2n(n+1)\ (n=2,3,4,\cdots)$

한편 ㉠에서 $\dfrac{a_1}{2}=1^2+1$, $a_1=4$

$\therefore\ a_n=2n(n+1)\ (n=1,2,3,\cdots)$

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2n(n+1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{11}\right)$$

$$=\frac{5}{11}$$

62) ④

자연수 n에 대하여 6^n은 짝수, 3^n은 홀수이므로

$a_n=f(6^n)-f(3^n)=\log_2 6^n-\log_3 3^n$

$=n\cdot\log_2 6-n$

$=n\cdot(1+\log_2 3)-n$

$=n\cdot\log_2 3$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{15}a_n=\sum_{n=1}^{15}n\cdot\log_2 3=\log_2 3\times\frac{15\cdot 16}{2}=120\log_2 3$$

63) ④

$a_1=0$이고

$a_n=\{n^2-n\}-\{(n-1)^2-(n-1)\}=2n-2\ (n\geqq 2)$

$\therefore\ a_n=2n-2$ (단, $n\geq 1$)

$$\sum_{k=1}^{10}ka_{4k+1}=\sum_{k=1}^{10}8k^2=8\cdot\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}=3080$$

64) ④

$a_{10}=a_1+\sum_{k=1}^{9}(a_{k+1}-a_k)=15+(2\times 9+1)=34$

[다른풀이]

$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_1$ 이므로

$a_{n+1}=2n+16$ (단, $n\geq 1$)

$\therefore\ a_{10}=34$

65) ⑤

$a^{\log_5 16}=16^{\log_5 a}=2^{4\log_5 a}$이므로

$2^{4\log_5 a}=2,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots$

$\log_5 a=\dfrac{1}{4},\ \dfrac{2}{4},\ \dfrac{3}{4},\ \cdots$

$a_1=5^{\frac{1}{4}},\ a_2=5^{\frac{2}{4}},\ a_3=5^{\frac{3}{4}},\ \cdots$

따라서 $\sum_{k=1}^{40}\log_5 a_k=\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{4}+\cdots+\dfrac{40}{4}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{40(40+1)}{2}=205$

66) 502

[출제의도] 양의 약수와 등비수열의 합을 활용하여 주어진 문제를 해결한다.

2^{n-1}의 모든 양의 약수 : $1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^{n-1}$

$a_n=1+2+\cdots+2^{n-1}=\dfrac{1\times(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$

$$\sum_{n=1}^{8}a_n=\sum_{n=1}^{8}(2^n-1)=\sum_{n=1}^{8}2^n-\sum_{n=1}^{8}1=\frac{2\times(2^8-1)}{2-1}-8$$

$=2^9-2-8=502$

67) ③

[출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계 이해하기

$S_n=-n^2+6n$

$a_6=S_6-S_5$

따라서 $a_6=-5$

68) ②

[출제의도] 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

$a_n=4+(n-1)\times 1=n+3$이므로

$$\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}$$

$$=\sum_{k=1}^{12}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{\left(\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}\right)\left(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}\right)}$$

$$=\sum_{k=1}^{12}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k}$$

$=\sum_{k=1}^{12}\left(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}\right)$

$=\left(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}\right)+\left(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}\right)+\cdots+\left(\sqrt{a_{13}}-\sqrt{a_{12}}\right)$

$=\sqrt{a_{13}}-\sqrt{a_1}$

$=\sqrt{16}-\sqrt{4}$

$=4-2=2$

69) 120

[출제의도] 수열의 합을 활용하여 문제해결하기

$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)a_k=n(n+1)(4n-1)=S_n$이라 하면

수열의 합과 일반항 사이의 관계에 의하여 $n\geq 2$일 때

$(2n-1)a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n(n+1)(4n-1)-(n-1)n(4n-5)$

$=n(12n-6)$

$=6n(2n-1)$

$a_n=6n(n\geq 2)$, $a_1=S_1=6$

$\therefore\ a_n=6n(n\geq 1)$

따라서 $a_{20}=120$

70) 15

[출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 2, 공차가 4이므로

일반항 $a_n=4n-2$, $a_5=18$

$a_5b_5=\sum_{k=1}^{5}a_kb_k-\sum_{k=1}^{4}a_kb_k=270$

따라서 $b_5=\frac{270}{18}=15$

71) 4

[출제의도] 로그의 성질을 이해하여 수열의 합을 구하는 문제를 해결한다.

$\sum_{k=1}^{n}a_k=\log_2(n^2+n)$ 이므로

$a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k$

$=\log_2(n^2+n)-\log_2(n^2-n)$

$=\log_2\frac{n+1}{n-1}$ (단, $n\geq 2$)

$a_{2n+1}=\log_2\frac{n+1}{n}$ (단, $n\geq 1$)

$\sum_{n=1}^{15}a_{2n+1}=\log_2 2+\log_2\frac{3}{2}+\log_2\frac{4}{3}+\cdots+\log_2\frac{16}{15}$

$=\log_2\left(2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{16}{15}\right)=4$

72) 40

[출제의도] 발견적 추론능력(추측)-수열

$S_1=2+(-1)^1=1=a_1$

$S_2=a_1+a_2=2+(-1)^2=3$ 에서 $a_2=2$

$S_3=S_2+a_3=2+(-1)^3=1$ 에서 $a_3=-2$

$S_4=S_3+a_4=2+(-1)^4=3$ 에서 $a_4=2$

$S_5=S_4+a_5=2+(-1)^5=1$ 에서 $a_5=-2$

$\vdots$

이므로

$\sum_{k=1}^{10}(a_{2k}-a_{2k+1})=10\{2-(-2)\}=10\times 4=40$

73) ①

[출제의도] 이해능력-수열

등차수열 a_n의 공차를 d라 하자.

만약 $d=0$이라면 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=1$이 되어 주어진 등식이 성립하지 않으므로 $d\neq 0$이다.

등차수열의 정의에 의하여 $a_{k+1}-a_k=d$이므로

$\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{a_{k+1}-a_k}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$

$a_1=1$, $a_{21}=1+20d$이므로

$\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$

$=\frac{1}{d}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{20}}-\frac{1}{a_{21}}\right)\right\}$

$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{21}}\right)=\frac{1}{d}\left(1-\frac{1}{1+20d}\right)=\frac{20d}{d(1+20d)}$

$=\frac{20}{1+20d}$

$\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=5$ 에서

$\frac{20}{1+20d}=5$, $100d=15$

$d=\frac{3}{20}$ 이므로 $a_{11}=1+10\times\frac{3}{20}=\frac{5}{2}$

74) ④

[출제의도] 여러 가지 수열의 합을 활용하여 문제해결하기

$a_n=n^3+(1-n)n^2+n=n(n+1)$

$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$

$=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$

75) 9

$x^2-(2n-1)x+n(n-1)=(x-n)\{x-(n-1)\}=0$이므로

$x=n,\ n-1$

$\sum_{n=1}^{81}\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}+\sqrt{\beta_n}}$

$=\sum_{n=1}^{81}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\sum_{n=1}^{81}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)=\sqrt{81}=9$

76) 91

[출제의도] 나머지정리를 이용하여 수열의 일반항을 구하고, 수열의 합을 구할 수 있는가?

$a_n=2n^2-3n+1$이므로

$\sum_{n=1}^{7}\left(a_n-n^2+n\right)=\sum_{n=1}^{7}\left(n^2-2n+1\right)=\sum_{n=1}^{7}(n-1)^2=\sum_{k=1}^{6}k^2$

$=\frac{6\times 7\times 13}{6}=91$

77) 58

[출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 항의 값을 구할 수 있는가?

$n=1$일 때 $\frac{1}{a_1}=9$

$n \geq 2$일 때

$\frac{4n-3}{a_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{4k-3}{a_k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4k-3}{a_k}$

$=2n^2+7n-\{2(n-1)^2+7(n-1)\}$

$=4n+5$

이것은 $n=1$일 때도 성립하므로

$\frac{4n-3}{a_n}=4n+5(n\geq 1)$

즉, $a_n=\frac{4n-3}{4n+5}$ 이므로

$a_5\times a_7\times a_9=\frac{17}{25}\times\frac{25}{33}\times\frac{33}{41}=\frac{17}{41}$

따라서

$\therefore\ p+q=41+17=58$

78) ②

$\sum_{n=1}^{12}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{12}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\sum_{n=1}^{12}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{27}\right)=\frac{4}{27}$

79) ②

$\sum_{k=1}^{10}(a_k-a_{k+1})=a_1-a_2+a_2-a_3+\cdots+a_{10}-a_{11}$

$=a_1-a_{11}=-10^2+10=-90$

따라서 $a_{11}=91$

80) 160

$\frac{5\times(3+a_5)}{2}=55$에서 $a_5=19$이고 $d=4$

$a_n=4n-1$

$\sum_{k=1}^{5}k(a_k-3)=\sum_{k=1}^{5}(4k^2-4k)$

$=\frac{4\times5\times6\times11}{6}-2\times5\times6=220-60=160$

81) ⑤

[출제의도] Σ의 성질을 이용하여 수열의 합을 구한다.

자연수 k에 대하여

$n=2k-1$ 일 때, $a_n=a_{2k-1}=\frac{\{(2k-1)+1\}^2}{2}=2k^2$

$n=2k$ 일 때, $a_n=a_{2k}=\frac{(2k)^2}{2}+2k+1=2k^2+2k+1$

따라서 $\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{k=1}^{5}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{5}a_{2k}$

$=\sum_{k=1}^{5}2k^2+\sum_{k=1}^{5}(2k^2+2k+1)$

$=\sum_{k=1}^{5}\{2k^2+(2k^2+2k+1)\}$

$=\sum_{k=1}^{5}(4k^2+2k+1)$

$=4\sum_{k=1}^{5}k^2+2\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}1$

$=4\times\frac{5\times6\times11}{6}+2\times\frac{5\times6}{2}+1\times5$

$=255$

82) 12

[출제의도] 합의 기호 $\sum$의 성질을 이용하여 수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

$\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{7}\frac{a_k}{2}=56$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{10}2a_k-\sum_{k=1}^{8}a_k=100$에서

$\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{8}\frac{a_k}{2}=50$ …… ㉡

㉠-㉡을 하면

$\frac{a_8}{2}=6$

따라서 $a_8=12$

83) 105

[출제의도] 등차수열과 등비수열의 합을 이해하여 부등식을 만족시키는 자연수의 값을 구한다.

$\sum_{k=1}^{5}2^{k-1}=\frac{2^5-1}{2-1}=31$

$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\times\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2$

$\sum_{k=1}^{5}(2\times3^{k-1})=\frac{2\times(3^5-1)}{3-1}=242$

이므로 주어진 부등식에서 $31<n^2<242$이다.

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 n의 값은 6, 7, 8, …, 15이고

그 합은 $\frac{10\times(6+15)}{2}=105$이다.

84) ⑤

$\sum_{k=1}^{10}S_k-\sum_{k=1}^{10}a_k=\left(1-\frac{1}{11}\right)-\frac{1}{10\times11}$

$=\frac{10}{11}-\frac{1}{10\times11}=\frac{99}{110}$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}(S_k-a_k)=\frac{9}{10}$

85) ④

[출제의도] 등차수열의 일반항과 $\sum$의 정의를 이용하여 등차수열의 항을 구할 수 있는가?

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차가 같으므로 $a_1=a$라 하면

$a_n=a+(n-1)\times a=an$

한편

$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=2$ 에서

$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{ak}+\sqrt{a(k+1)}}$

$=\sum_{k=1}^{15}\frac{\sqrt{a(k+1)}-\sqrt{ak}}{a}=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{15}\left(\sqrt{a(k+1)}-\sqrt{ak}\right)$

$=\frac{1}{a}\{(\sqrt{2a}-\sqrt{a})+(\sqrt{3a}-\sqrt{2a})+\cdots+(\sqrt{16a}-\sqrt{15a})\}$

$=\frac{1}{a}(4\sqrt{a}-\sqrt{a})=\frac{3\sqrt{a}}{a}=\frac{3}{\sqrt{a}}=2$

이때,

$2\sqrt{a}=3$

$a=\frac{9}{4}$

따라서

$a_4 = 4a = 4 \times \frac{9}{4} = 9$

86) 51

수열 $\{a_n\}$의 각 항을 구하면 다음과 같다.

$a_3 = a_1 = 1,\ a_5 = a_3 = 1,\ a_7 = a_5 = 1,\ \cdots$

$\therefore\ a_{2n-1} = 1$

$a_4 = a_2 + 1 = 2,\ a_6 = a_4 + 1 = 3,\ a_8 = a_6 + 1 = 4,\ \cdots$

$\therefore\ a_{2n} = n$

따라서 $a_{100} + a_{101} = 50 + 1 = 51$이다.

87) 11

(가) $a_{n+2} = a_n - 4$, $a_2 = x$ 라 하면

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \cdots$ 은 차례로 $7, x, 3, x-4, -1, x-8$ 의 값을 가지는 주기가 6인 주기 함수가 된다.

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 3x - 3$

조건 $\sum_{k=1}^{50} a_k = 8(3x-3) + 7 + x = 258$

$a_2 = x = 11$

88) ①

문제에서 주어진 조건이 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이므로

$a_n > 0,\ a_1 = 2$...①

문제에서 주어진 등식이 $\log_2 a_{n+1} = 1 + \log_2 a_n \quad (n \geq 1)$이므로

로그의 밑을 같게 하여 로그의 성질을 사용하면

$a_{n+1} = 2a_n,\ a_1 = 2$이며 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$...②

문제에서 주어진 등식이 $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_8 = 2^k$이며

②을 사용하면

$[\text{좌변}] = 2^1 \times 2^2 \times 2^3 \cdots \times 2^7 \times 2^8 = 2^{1+2+3+\cdots+8}$

$= 2^{\frac{8}{2}(1+8)} = 2^{36}$

$\therefore k = 36$

89) ①

$b_n = na_n$이라 놓으면

$b_{n+1} - b_n = 3$에서 $b_n = 3n - 2$이므로

$a_n = \frac{3n-2}{n}$

$\therefore\ a_6 = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$

90) 123

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 추론하기

(가)에서 $a_1 = 1,\ a_2 = 2$

(나)에서 $n \geq 3$인 자연수에 대하여

a_n은 a_{n-2}와 a_{n-1}의 합을 4로 나눈 나머지이므로

$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ a_4 = 1,\ a_5 = 0,\ a_6 = 1,$

$a_7 = 1,\ a_8 = 2,\ \cdots$

$\sum_{k=1}^{6} a_k = 8,\ a_{n+6} = a_n$이므로 $\sum_{k=1}^{6n} a_k = 8n$

$n = 20$일 때, $\sum_{k=1}^{120} a_k = 160$

$a_{121} = a_1 = 1,\ a_{122} = a_2 = 2,\ a_{123} = a_3 = 3$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{m} a_k = 160 + 1 + 2 + 3 = \sum_{k=1}^{120} a_k + a_{121} + a_{122} + a_{123}$

따라서 $m = 123$

91) 235

[출제의도] 여러 가지 수열을 이용하여 추론하기

$a_1 = 3$

$a_2 = \frac{3+93}{2} = 48$

$a_3 = \frac{48}{2} = 24$

$a_4 = \frac{24}{2} = 12$

$a_5 = \frac{12}{2} = 6$

$a_6 = \frac{6}{2} = 3$

$\vdots$

$a_k = 3$을 만족시키는 50이하의 모든 자연수 k는

$1,\ 6,\ 11,\ 16,\ \cdots,\ 46$

따라서 모든 자연수 k의 값의 합은

$\sum_{m=1}^{10} (5m-4) = 5 \times \frac{10 \times (10+1)}{2} - 4 \times 10 = 235$

92) ⑤

$a_1 = a$라고 할 때,

$a_2 = a-2,\ a_3 = a,\ a_4 = a+1,\ a_5 = a+3,\ a_6 = a+1,\ a_7 = a+2,$

$\cdots\cdots,\ a_{13} = a+4,\ a_{14} = a+2,$

$a_{15} = a+4 = 43$

따라서 $a = 39$

93) ③

[출제의도] 수열의 규칙성을 추측하여 수열의 합을 구한다.

$a_1 = \frac{1}{5}$, $a_2 = 2a_1 = \frac{2}{5}$,

$a_3 = 2a_2 = \frac{4}{5}$, $a_4 = 2a_3 = \frac{8}{5}$,

$a_5 = a_4 - 1 = \frac{3}{5}$, $a_6 = 2a_5 = \frac{6}{5}$,

$a_7 = a_6 - 1 = \frac{1}{5}$, $\cdots$

이므로 $a_n = a_{n+6}\,(n \geq 1)$이 성립한다.

$20 = 3 \times 6 + 2$ 이므로

$\sum_{n=1}^{20} a_n = 3 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{4}{5} + \frac{8}{5} + \frac{3}{5} + \frac{6}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\right)$

$= 3 \times \frac{24}{5} + \frac{3}{5} = 15$

94) ③

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 미지수의 값을 추론한다.

$a_{n+1} = \frac{k}{a_n + 2}$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $n = 1$을 대입하면

$a_2 = \frac{k}{a_1 + 2} = \frac{k}{3}$ 이고

㉠의 양변에 $n = 2$를 대입하면

$a_3 = \dfrac{k}{a_2+2} = \dfrac{k}{\dfrac{k}{3}+2} = \dfrac{3}{2}$

이므로

$3\times\left(\dfrac{k}{3}+2\right) = k+6 = 2k$

따라서 $k=6$

95) 92

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 추론하기

$a_{n+1} = 2(a_n+2)$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_2 = 2(a_1+2) = 2\times(2+2) = 8$

$a_3 = 2(a_2+2) = 2\times(8+2) = 20$

$a_4 = 2(a_3+2) = 2\times(20+2) = 44$

$a_5 = 2(a_4+2) = 2\times(44+2) = 92$

96) ①

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

$a_3 = \dfrac{1}{2}a_1 + k = \dfrac{1}{2}+k$

$a_4 = \dfrac{1}{2}a_2 + k = 1+k$

$a_5 = \dfrac{1}{2}a_3 + k = \dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}+k\right)+k = \dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}k$

$a_6 = \dfrac{1}{2}a_4 + k = \dfrac{1}{2}\times(1+k)+k = \dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}k$

따라서 $a_6 - a_5 = \dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}k - \left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}k\right) = \dfrac{1}{4}$

97) ②

[출제의도] 귀납적으로 주어진 수열의 항을 구할 수 있는가?

$a_1 = 2$이고 이 수는 짝수이므로

$a_2 = a_1 - 1 = 1$

이때, a_2는 홀수이므로

$a_3 = a_2 + 2 = 1+2 = 3$

a_3는 홀수이므로

$a_4 = a_3 + 3 = 3+3 = 6$

a_4는 짝수이므로

$a_5 = a_4 - 1 = 6-1 = 5$

a_5는 홀수이므로

$a_6 = a_5 + 5 = 5+5 = 10$

a_6는 짝수이므로

$a_7 = a_6 - 1 = 10-1 = 9$

98) 8

[출제의도] 조건을 만족시키는 수열을 추론하여 값을 구한다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 6이므로 $a_1 > 0$

이때 $a_2 = 2-6 = -4$

$a_2 < 0$이므로 $a_3 = a_2 + p = -4+p$

(ⅰ) $-4+p \geq 0$, 즉 $p \geq 4$일 때

$a_4 = 2 - a_3$

$= 2-(-4+p)$

$= 6-p$

$= 0$에서

$p = 6$

(ⅱ) $-4+p < 0$, 즉 $p < 4$일 때

$a_4 = a_3 + p$

$= (-4+p)+p$

$= -4+2p$

$= 0$에서

$p = 2$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a_4 = 0$이 되도록 하는 모든 실수 p의 값의 합은 $6+2=8$

99) ④

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 추론하기

$a_1 = 1$

$a_2 = \dfrac{a_1+1}{3a_1-2} = \dfrac{1+1}{3\times1-2} = 2$

$a_3 = \dfrac{a_2+1}{3a_2-2} = \dfrac{2+1}{3\times2-2} = \dfrac{3}{4}$

$a_4 = \dfrac{a_3+1}{3a_3-2} = \dfrac{\dfrac{3}{4}+1}{3\times\dfrac{3}{4}-2} = 7$

100) ②

[출제의도] 이해능력-수열

$a_2 = p-2$

$a_3 = (p-2)-4 = p-6$

$a_4 = (p-6)-6 = p-12$

$a_5 = (p-12)-8 = p-20$

따라서 수열 a_n의 첫째항부터 제5항까지의 합은

$p+(p-2)+(p-6)+(p-12)+(p-20) = 5p-40$

$5p-40 = 10$에서

$p = 10$

101) ①

[출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기

$a_{n+2} = a_{n+1} - 2a_n + 5$

$a_3 = 3-4+5 = 4$

$a_4 = 4-6+5 = 3$

$a_5 = 3-8+5 = 0$

$a_6 = 0-6+5 = -1$

따라서 $a_6 = -1$

102) ②

주어진 식에 $n=1,\ 2,\ 3,\ 4$를 차례로 대입하면

$a_1a_2 = 2,\ a_2a_3 = 4,\ a_3a_4 = 6,\ a_4a_5 = 8$

$a_3 = 1$이므로 $a_2 = 4,\ a_4 = 6$이고 $a_1 = \dfrac{1}{2},\ a_5 = \dfrac{4}{3}$이다.

따라서 $a_2 + a_5 = 4+\dfrac{4}{3} = \dfrac{16}{3}$이다.

103) ⑤

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

$a_1 = 1 \geq 0$ 이므로 $a_2 = a_1 - 2 = -1$

$a_2 = -1 < 0$ 이므로 $a_3 = a_2 + 4 = 3$

$a_3 = 3 \geq 0$ 이므로 $a_4 = a_3 - 6 = -3$

$a_4 = -3 < 0$ 이므로 $a_5 = a_4 + 8 = 5$

$a_5 = 5 \geq 0$ 이므로 $a_6 = a_5 - 10 = -5$

$a_6=-5<0$ 이므로 $a_7=a_6+12=7$
따라서 $a_7=7$

104) ②

[출제의도] 이해능력-수열

$\sum_{k=1}^{n}a_k=2a_n-6$ 에 $n=1$ 을 대입하면
$a_1=2a_1-6$ 에서 $a_1=6$
$\sum_{k=1}^{n+1}a_k=2a_{n+1}-6$ 이므로 모든 자연수 n에 대하여
$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_k=2a_{n+1}-2a_n$
$a_{n+1}=2a_n$ 이므로
수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 6이고, 공비가 2인 등비수열이다.
따라서 $a_n=6\times2^{n-1}=3\times2^n$ 이므로
$\sum_{n=1}^{10}\frac{a_n}{2^n}=\sum_{n=1}^{10}3=30$

105) 14

[출제의도] 수열의 성질을 이용하여 문제해결하기

$a_1=\frac{1}{3}$, $a_2=\frac{2}{3}$, $a_3=\frac{4}{3}$, $a_4=\frac{1}{3}$, $a_5=\frac{2}{3}$, $a_6=\frac{4}{3}$, $\cdots$
이므로 $a_n=a_{n+3}$ $(n\geq1)$이 성립한다.
$a_1+a_2+a_3=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}$
$18=3\times6$이므로 $\sum_{n=1}^{18}a_n=6\times\frac{7}{3}=14$

106) ①

[출제의도] 귀납적으로 정의된 수열에서 특정한 항의 값의 합을 구할 수 있는가?

$a_1=2$ 이므로
$a_2=\frac{a_1}{2-3a_1}=\frac{2}{2-6}=-\frac{1}{2}$
$a_3=1+a_2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
$a_4=\frac{a_3}{2-3a_3}=\frac{\frac{1}{2}}{2-\frac{3}{2}}=1$
$a_5=1+a_4=1+1=2$
$\vdots$
이때, $a_n=a_{n+4}$ (n은 자연수) 이므로
$a_1+a_2+a_3+a_4=a_5+a_6+a_7+a_8=\cdots$
$=a_{37}+a_{38}+a_{39}+a_{40}=3$
따라서
$\sum_{n=1}^{40}a_n=10\times3=30$

107) 15

[출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 관계식을 이용하여 수열의 항을 구한다.

$a_2=p$라 하면
$a_1=4$, $a_2=p$, $a_3=a_2+a_1=p+4$,
$a_4=a_3+a_2=(p+4)+p=2p+4$이므로
$2p+4=34$ 에서 $p=15$
따라서 $a_2=15$

108) ⑤

[출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기

a_1이 홀수이므로 $a_2=3a_1-1=2$
a_2가 짝수이므로 $a_3=(a_2)^2+1=5$
a_3이 홀수이므로 $a_4=3a_3-1=14$

109) ⑤

[출제의도] 이해능력-수열

$a_1=15$이고
$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n}{n} & (n\text{이 홀수인 경우})\\ na_n & (n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$ 이므로
위의 등식의 n에 1, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면
$a_2=\frac{a_1}{1}=15$, $a_3=2a_2=2\times15=30$
$a_4=\frac{a_3}{3}=\frac{30}{3}=10$, $a_5=4a_4=4\times10=40$
$a_6=\frac{a_5}{5}=\frac{40}{5}=8$
따라서 $a_5+a_6=48$

110) ④

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

$a_{n+1}=-(-1)^n\times a_n+2^n$
$=(-1)^{n+1}\times a_n+2^n$이므로
$a_2=(-1)^2\times a_1+2^1=1+2=3$
$a_3=(-1)^3\times a_2+2^2=-3+4=1$
$a_4=(-1)^4\times a_3+2^3=1+8=9$
따라서
$a_5=(-1)^5\times a_4+2^4=-9+16=7$

111) 8

$a_1+a_2=2$이고, $a_2+a_3=5$, $a_3=4$이므로 $a_2=1$, $a_1=1$
또한, $a_3+a_4=8$, $a_4+a_5=11$이므로 $a_4=4$, $a_5=7$
$a_1+a_5=8$

112) 142

[출제의도] 수열의 규칙성을 추측하여 첫째항을 구하는 문제를 해결한다.

a_1이 짝수이므로 $a_1=4k$인 경우와 $a_1=4k+2$인 경우로 나누어
$a_5=5$가 되는 정수 k의 값을 구하면 다음 표와 같다.

<table>
<tr><td>a_1</td><td colspan="3">$4k$</td><td colspan="2">$4k+2$</td></tr>
<tr><td>a_2</td><td colspan="3">$2k$</td><td colspan="2">$2k+1$</td></tr>
<tr><td>a_3</td><td colspan="3">k</td><td colspan="2">$2k+4$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">a_4</td><td>a_3이 홀수</td><td colspan="2">a_3이 짝수</td><td colspan="2" rowspan="2">$k+2$</td></tr>
<tr><td>$k+3$</td><td colspan="2">$\frac{k}{2}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">a_5</td><td rowspan="2">$\frac{k+3}{2}$</td><td>a_4가 홀수</td><td>a_4가 짝수</td><td>a_4가 홀수</td><td>a_4가 짝수</td></tr>
<tr><td>$\frac{k}{2}+3$</td><td>$\frac{k}{4}$</td><td>$k+5$</td><td>$\frac{k+2}{2}$</td></tr>
<tr><td>k</td><td>7</td><td>4</td><td>20</td><td>0</td><td>8</td></tr>
</table>

$k=4$인 경우 $a_4=\frac{k}{2}$가 짝수이므로 $a_5\neq\frac{k}{2}+3$
$k=0$인 경우 $a_4=k+2$가 짝수이므로 $a_5\neq k+5$

그러므로 $k=7$ 또는 $k=20$ 또는 $k=8$

a_1이 될 수 있는 수는 28, 80, 34

따라서 구하는 값은 $28+34+80=142$

113) ④

[출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}ka_k$에서 $n=1$을 대입하면

$a_2=\sum_{k=1}^{1}ka_k=a_1$이므로 $a_2=2$

$n\ge 2$일 때 $a_n=\sum_{k=1}^{n-1}ka_k$이므로

$a_{n+1}-a_n=\sum_{k=1}^{n}ka_k-\sum_{k=1}^{n-1}ka_k=na_n$

그러므로 $a_{n+1}=(n+1)a_n$ (단, $n\ge 2$)

위 식에 $n=50$을 대입하면

$a_{51}=51a_{50}$이고 $a_{50}>0$이므로 $\frac{a_{51}}{a_{50}}=51$

따라서 $a_2+\frac{a_{51}}{a_{50}}=2+51=53$

[보충 설명]

2 이상의 자연수 n에 대하여 $a_n>0$ …… (*)

임을 수학적 귀납법을 이용하여 보일 수 있다.

$a_2=2$이고 $n\ge 2$일 때 $a_{n+1}=(n+1)a_n$이므로

(ⅰ) $n=2$일 때

$a_2=2>0$이므로 (*)이 성립한다.

(ⅱ) 2 이상의 자연수 k에 대하여

$n=k$일 때 (*)이 성립한다고 가정하면 $a_k>0$

$n=k+1$일 때 $a_{k+1}=(k+1)a_k>0$이므로

$n=k+1$일 때도 (*)이 성립한다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의해 2 이상의 자연수 n에 대하여 $a_n>0$이다.

114) ④

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 항을 추론한다.

수열의 귀납적 정의에 따라 각 항을 구하면

$a_1=7$, $a_2=\frac{7+3}{2}=5$, $a_3=\frac{5+3}{2}=4$,

$a_4=4+3=7$, $a_5=\frac{7+3}{2}=5$, $a_6=\frac{5+3}{2}=4$,

$a_7=4+6=10$, $a_8=10+7=17$

115) 139

$n=1$일 때, $a_2+3a_1=-1$이므로 $a_2=-4$

$n=2$일 때, $a_3+3a_2=2$이므로 $a_3=14$

$n=3$일 때, $a_4+3a_3=-3$이므로 $a_4=-45$

$n=4$일 때, $a_5+3a_4=4$이므로 $a_5=139$

116) ③

[출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

$a_1=1$이므로

$a_4=a_1+1=2$

$a_4=2$이므로

$a_{11}=2a_4+1=2\times2+1=5$

$a_{12}=-a_4+2=-2+2=0$

$a_{13}=a_4+1=2+1=3$

따라서

$\therefore\ a_{11}+a_{12}+a_{13}=5+0+3=8$

117) 33

[출제의도] 귀납적으로 정의된 수열에서 조건을 만족시키는 항의 개수를 구할 수 있는가?

$a_3=a_2-a_1=-6$

$a_4=a_3-a_2=-9$

$a_5=a_4-a_3=-3$

$a_6=a_5-a_4=6$

$a_7=a_6-a_5=9$

$a_8=a_7-a_6=3$

…

즉, 수열 $\{a_n\}$의 각 항은 $9,3,-6,-9,-3,6,\dots$이 반복되므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=a_{n+6}$ 이 성립한다.

이때, $9,3,-6,-9,-3,6$ 중에서 $|a_k|=3$을 만족시키는 항의 개수는 2이고

$100=6\times16+4$ 이므로 구하는 100이하의 자연수 k의 개수는

$\therefore\ 16\times2+1=33$

118) ③

$a_1=1$

$a_2=2^1=2$

$a_3=\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$

$a_4=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

$a_5=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{2}=1$

⋮

$a_{12}=a_8=a_4=\sqrt{2}$

$a_{13}=a_9=a_5=a_1=1$

따라서 $a_{12}\times a_{13}=\sqrt{2}$

119) ④

$a_{n+1}+a_n=(-1)^{n+1}\times n$에서

$a_{n+1}=-a_n+(-1)^{n+1}\times n$

이때 $a_1=12$이므로

$a_2=-a_1+1=-11$

$a_3=-a_2-2=9$

$a_4=-a_3+3=-6$

$a_5=-a_4-4=2$

$a_6=-a_5+5=3$

$a_7=-a_6-6=-9$

$a_8=-a_7+7=16$

따라서 $a_k>a_1$을 만족시키는 k의 최솟값은 8이다.

120) ③

$a_2=a_2\times a_1-1$

$a_7=a_2\times a_3-2$

$=a_2\times(a_2\times a_1-2)-2$

$=a_2\times(a_2-1-2)-2$

$=(a_2)^2-3a_2-2=2$

$(a_2)^2-3a_2-4=0$

$a_2 > 0$이므로 $a_2 = 4$이고 $a_1 = \frac{3}{4}$

$a_{25} = 4a_{12} - 2$
$= 4(4a_6 + 1) - 2 = 16a_6 + 2$
$= 16(4a_3 + 1) + 2$
$= 64a_3 + 18$
$= 64(4a_1 - 2) + 18 = 82$

121) 162

[출제의도] 수열의 귀납적 성질을 이용하여 수열의 합을 구한다.

$S_{n+1} = a_{n+1} + S_n$ 이므로 $a_{n+1}S_n = a_n(a_{n+1} + S_n)$,
$(S_n - a_n)a_{n+1} = a_nS_n$
즉, $S_{n-1}a_{n+1} = a_nS_n (n \geq 2)$ …… ㉠
$a_1 = S_1 = 2$, $a_2 = 4$ 이므로 $S_2 = a_1 + a_2 = 6$
㉠에서 $a_{n+1} = \frac{a_nS_n}{S_{n-1}}$ …… ㉡
㉡에 $n = 2, 3, 4$를 차례로 대입하면
$a_3 = \frac{a_2S_2}{S_1} = \frac{4 \times 6}{2} = 12$ 에서 $S_3 = S_2 + a_3 = 6 + 12 = 18$
$a_4 = \frac{a_3S_3}{S_2} = \frac{12 \times 18}{6} = 36$ 에서 $S_4 = S_3 + a_4 = 18 + 36 = 54$
$a_5 = \frac{a_4S_4}{S_3} = \frac{36 \times 54}{18} = 108$
따라서 $S_5 = S_4 + a_5 = 162$

122) 5

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

(i) $a_1 = 1$일 때
$a_1 \geq 0$이므로 $a_2 = a_1 - 2 = -1$
$a_2 < 0$이므로 $a_3 = a_2 + 5 = 4$
$a_3 \geq 0$이므로 $a_4 = a_3 - 2 = 2$
$a_4 \geq 0$이므로 $a_5 = a_4 - 2 = 0$
$a_5 \geq 0$이므로 $a_6 = a_5 - 2 = -2$
$a_6 < 0$이므로 $a_7 = a_6 + 5 = 3$
$a_7 \geq 0$이므로 $a_8 = a_7 - 2 = 1 = a_1$
$a_8 \geq 0$이므로 $a_9 = a_8 - 2 = -1 = a_2$
⋮
그러므로 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7} = a_n$을 만족시키고 $a_{15} = a_8 = a_1 = 1$

(ii) $a_1 = 2$일 때
(i)과 같은 방법으로 구하면 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7} = a_n$을 만족시키고
$a_{15} = a_8 = a_1 = 2$

(iii) $a_1 = 3$일 때
(i)과 같은 방법으로 구하면 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7} = a_n$을 만족시키고
$a_{15} = a_8 = a_1 = 3$

(iv) $a_1 = 4$일 때
(i)과 같은 방법으로 구하면 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7} = a_n$을 만족시키고
$a_{15} = a_8 = a_1 = 4$

(v) $a_1 = 5$일 때
$a_1 \geq 0$이므로 $a_2 = a_1 - 2 = 3$
$a_2 \geq 0$이므로 $a_3 = a_2 - 2 = 1$
$a_3 \geq 0$이므로 $a_4 = a_3 - 2 = -1$
$a_4 < 0$이므로 $a_5 = a_4 + 5 = 4$
$a_5 \geq 0$이므로 $a_6 = a_5 - 2 = 2$
$a_6 \geq 0$이므로 $a_7 = a_6 - 2 = -2$
$a_7 \geq 0$이므로 $a_8 = a_7 - 2 = -2$
$a_8 < 0$이므로 $a_9 = a_8 + 5 = 3 = a_2$
$a_9 \geq 0$이므로 $a_{10} = a_9 - 2 = 1 = a_3$
⋮
그러므로 수열 $\{a_n\}$이 2이상의 모든 자연수 n에 대하여
$a_{n+7} = a_n$을 만족시키고
$a_{15} = a_8 = -2 < 0$

따라서 $a_{15} < 0$이 되도록 하는 a_1의 최솟값은 5이다.

123) ⑤

[출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 항을 찾을 수 있는가?

$a_{12} = \frac{1}{2}$이고 $a_{12} = \frac{1}{a_{11}}$이므로 $a_{11} = 2$
또, $a_{11} = 8a_{10}$이므로 $a_{10} = \frac{1}{4}$
또, $a_{10} = \frac{1}{a_9}$이므로 $a_9 = 4$
또, $a_9 = 8a_8$이므로 $a_8 = \frac{1}{2}$
또, $a_8 = \frac{1}{a_7}$이므로 $a_7 = 2$
또, $a_7 = 8a_6$이므로 $a_6 = \frac{1}{4}$
또, $a_6 = \frac{1}{a_5}$이므로 $a_5 = 4$
또, $a_5 = 8a_4$이므로 $a_4 = \frac{1}{2}$
또, $a_4 = \frac{1}{a_3}$이므로 $a_3 = 2$
또, $a_3 = 8a_2$이므로 $a_2 = \frac{1}{4}$
또, $a_2 = \frac{1}{a_1}$이므로 $a_1 = 4$
따라서
$a_1 + a_4 = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

124) ④

[출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기

$a_1 = 10$이므로
$a_2 = 5 - \frac{10}{10} = 4$
$a_3 = 5 - \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$
$a_4 = -2 \times \frac{5}{2} + 3 = -2$
$a_5 = 5 - \frac{10}{-2} = 5 + 5 = 10$
⋮
$a_9 = a_5 = a_1 = 10$, $a_{12} = a_8 = a_4 = -2$
따라서 $a_9 + a_{12} = 8$

125) ④

[출제의도] 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}$$
$$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{n}$$

이때, $\frac{1}{a_{n+1}}=-\frac{1}{n}-\frac{1}{4}$이므로

$n=12$을 대입하면

$\frac{1}{a_{13}}=-\frac{1}{12}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}$

즉, $a_{13}=-3$

126) ⑤

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 합을 구한다.

자연수 k 에 대하여

(ⅰ) $n=2k-1$ 일 때,

$a_{2k-1}+a_{2k}=2(2k-1)=4k-2$이므로

$$\sum_{n=1}^{22}a_n=\sum_{k=1}^{11}(a_{2k-1}+a_{2k})=\sum_{k=1}^{11}(4k-2)$$
$$=4\times\frac{11\times12}{2}-2\times11=242$$

(ⅱ) $n=2k$ 일 때,

$a_{2k}+a_{2k+1}=2\times2k=4k$이므로

$$\sum_{n=2}^{21}a_n=\sum_{k=1}^{10}(a_{2k}+a_{2k+1})=\sum_{k=1}^{10}4k$$
$$=4\times\frac{10\times11}{2}=220$$

따라서 $a_1+a_{22}=\sum_{n=1}^{22}a_n-\sum_{n=2}^{21}a_n=242-220=22$

[다른 풀이]

자연수 k 에 대하여

$a_{2k}+a_{2k+1}=4k$, $a_{2k-1}+a_{2k}=4k-2$이므로

$a_{2k+1}-a_{2k-1}=2$

즉, 수열 $\{a_{2k-1}\}$은 공차가 2 인 등차수열이다.

그러므로 $a_{2k-1}=a_1+(k-1)\times2$ …… ㉠

㉠에 $k=11$ 을 대입하면 $a_{21}=a_1+20$ …… ㉡

모든 자연수 n 에 대하여 $a_n+a_{n+1}=2n$ 이므로

$n=21$ 을 대입하면 $a_{21}+a_{22}=42$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면 $(a_1+20)+a_{22}=42$

따라서 $a_1+a_{22}=22$

127) 7

[출제의도] Σ의 성질을 이용하여 수열의 합을 구한다.

조건 (가)에서 $a_3=a_1-3$, $a_4=a_2+3$,

$a_5=a_3-3=a_1-6$, $a_6=a_4+3=a_2+6$이므로

$$\sum_{k=1}^{6}a_k=a_1+a_2+(a_1-3)+(a_2+3)+(a_1-6)+(a_2+6)$$
$=3(a_1+a_2)$

조건 (나)에서

$$\sum_{k=1}^{32}a_k=5\sum_{k=1}^{6}a_k+a_1+a_2=16(a_1+a_2)$$

따라서 $16(a_1+a_2)=112$ 이므로 $a_1+a_2=7$

128) ①

[출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 합을 구할 수 있는가?

$a_1=1$이므로 $a_2=2$

$a_2=2$이므로 $a_3=4$

$a_3=4$이므로 $a_4=8$

$a_4=8$이므로 $a_5=1$

$a_5=1$이므로 $a_6=2$

$a_6=2$이므로 $a_7=4$

$a_7=4$이므로 $a_8=8$

따라서

$$\sum_{k=1}^{8}a_k=2(1+2+4+8)$$
$$=2\times15$$
$$=30$$

129) ③

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

조건 (가)에 의하여

$$\sum_{n=1}^{8}a_n=(a_1+a_5)+(a_2+a_6)+(a_3+a_7)+(a_4+a_8)$$
$=15\times4=60$

$\sum_{n=1}^{4}a_n=6$이므로 $\sum_{n=5}^{8}a_n=54$

조건 (나)에 의하여

$a_6=a_5+5$,

$a_7=a_6+6=a_5+11$

$a_8=a_7+7=a_5+18$

따라서 $\sum_{n=5}^{8}a_n=4a_5+34=54$에서 $a_5=5$

130) 70

[출제의도] 귀납적으로 정의된 수열을 해석하여 수열의 첫째항을 추론한다.

$$a_{n+1}=\begin{cases}-2a_n & (a_n<0)\\ a_n-2 & (a_n\ge0)\end{cases}\ \cdots\cdots\ ㉠$$

이고 $1<a_1<2$ 에서 $a_1\ge0$ 이므로

$a_2=a_1-2<0$

$a_3=-2a_2=-2(a_1-2)>0$

$a_4=a_3-2=-2(a_1-2)-2=-2(a_1-1)<0$

$a_5=-2a_4=4(a_1-1)>0$

$a_6=a_5-2=4(a_1-1)-2=4a_1-6$

이때 ㉠에서 $a_6<0$ 이면 $a_7=-2a_6>0$이므로

$a_7=-1\le0$ 에서 $a_6\ge0$ 이다.

$a_7=a_6-2=(4a_1-6)-2=4a_1-8=-1$

$a_1=\frac{7}{4}$

따라서

$40\times a_1=40\times\frac{7}{4}=70$

131) ②

[출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기

$a_1=\frac{1}{2}$ 이므로

$a_2=-2\times\frac{1}{2}+1=0$

$a_3=-2\times0+1=1$

$a_4=-2\times1+1=-1$

$a_5=-1+1=0$

⋮

이때, $a_{n+3}=a_n\ \ (n\ge 2)$이므로

$a_{10}=a_7=a_4=-1$

$a_{20}=a_{17}=a_{14}=\cdots=a_2=0$

따라서 $a_{10}+a_{20}=-1+0=-1$

132) ②

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 합을 구한다.

(ⅰ) $1\le n\le 10$인 경우

$a_1=20,\ a_{n+1}=a_n-2$이므로 $a_n=-2n+22$

$$\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(-2n+22)=110$$

(ⅱ) $11\le n\le 30$인 경우

$$a_{10}=2\text{이므로 } a_n=\begin{cases}0 & (n\text{이 홀수인 경우})\\ -2 & (n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

$$\sum_{n=11}^{30}a_n=(-2)\times 10=-20$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\sum_{n=1}^{30}a_n=100+(-20)=90$

133) ③

[출제의도] 여러 가지 수열을 활용하여 문제해결하기

점 $P_n(\sqrt{n},\ n)$을 지나고 직선 $y=\sqrt{n}x$와 수직인

직선의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{\sqrt{n}}(x-\sqrt{n})+n$이므로

$Q_n((n+1)\sqrt{n},\ 0),\ R_n(0,\ n+1)$

$$S_n=\frac{1}{2}\times(n+1)\sqrt{n}\times(n+1)$$

$$\text{따라서 }\sum_{n=1}^{5}\frac{2S_n}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{5}\left\{\frac{2}{\sqrt{n}}\times\frac{(n+1)^2\sqrt{n}}{2}\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{5}(n+1)^2=\sum_{n=1}^{5}(n^2+2n+1)$$

$$=\frac{5\times 6\times 11}{6}+2\times\frac{5\times 6}{2}+5=90$$

134) ②

[출제의도] 절댓값의 성질을 활용하여 수열의 합을 구하는 문제를 해결한다.

$$\left|\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-m\right|<\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}<\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-m<\frac{1}{2}$$

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)^2=n^2+n+\frac{1}{4}\text{ 에서}$$

$$-\frac{3}{4}<n^2+n-m<\frac{1}{4}$$

$m,\ n$은 정수이므로 $n^2+n-m=0$이다.

m은 n^2+n이다. 즉, $a_n=n^2+n$

$$\text{따라서 }\sum_{k=1}^{5}a_k=\sum_{k=1}^{5}(k^2+k)=\frac{5\times 6\times 11}{6}+\frac{5\times 6}{2}$$

$$=55+15=70\text{이다.}$$

135) ④

[출제의도] 도형과 관련된 수열의 일반항을 찾고, 수열의 합을 구할 수 있는가?

$$a_n=\frac{1}{2}\times\{(n+1)-(n-1)\}\times\frac{3}{n}$$

$$=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{3}{n}=\frac{3}{n}\text{ 이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{9}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{10}\frac{9}{\frac{3}{n}\times\frac{3}{n+1}}=\sum_{n=1}^{10}(n^2+n)$$

$$=\frac{10\times 11\times 21}{6}+\frac{10\times 11}{2}$$

$$=385+55=440$$

136) ③

[출제의도] 내분하는 점을 구하여 수열의 합을 구하는 문제를 해결한다.

선분 OA를 $2^n:1$로 내분하는 점 P_n의 좌표는

$\left(\dfrac{2^n}{2^n+1},\ 0\right)$이므로 $l_n=\dfrac{2^n}{2^n+1}$

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{l_n}=\sum_{n=1}^{10}\frac{2^n+1}{2^n}=\sum_{n=1}^{10}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{10}1+\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^n=10+\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=10+\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}=11-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

137) 201

[출제의도] 이차함수의 그래프를 이용하여 여러 가지 수열의 합을 구하는 문제를 해결한다.

부등식 $f(n)<k<f(n)+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$은

$n^2+n-\dfrac{1}{3}<k<n^2+n+\dfrac{2}{3}$ …… ㉠

부등식 ㉠을 만족시키는 자연수 k는 n^2+n이므로

$a_n=n^2+n$

$$\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n^2+n}=\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{100}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)$$

$$=1-\frac{1}{101}=\frac{100}{101}$$

따라서 $p+q=101+100=201$

138) ③

[출제의도] 로그의 성질을 활용하여 문제해결하기

$a_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

$\log_4\left(2^{a_1}\times 2^{a_2}\times 2^{a_3}\times\cdots\times 2^{a_{12}}\right)$

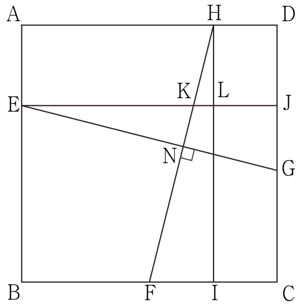
$$=\frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{12})$$

$$=\frac{1}{2}(1^2+2^2+3^2+\cdots+12^2)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{12\times 13\times 25}{6}=325$$

139) ③

[출제의도] 수열의 합을 활용하여 문제해결하기



점 H에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 I라 하고
점 E에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 J라 하자.
두 선분 HF, HI와 선분 EJ가 만나는 점을 각각 K, L이라 하고,
선분 EG와 선분 HF가 만나는 점을 N이라 하면
$\angle HKL=\angle NKE$이고, $\angle KLH=\angle ENK=90^{\circ}$
이므로 $\angle KEN=\angle LHK$
또한 $\overline{HI}=\overline{EJ}$이고 $\angle FIH=\angle GJE=90^{\circ}$ 이므로
두 삼각형 HFI, EGJ는 합동이다.
따라서 $\overline{EG}=\overline{HF}=\sqrt{4n^2+1}$

$S_n=\frac{1}{2}\times\sqrt{4n^2+1}\times\sqrt{4n^2+1}=\frac{4n^2+1}{2}=2n^2+\frac{1}{2}$

따라서

$\sum_{n=1}^{10}S_n=\sum_{n=1}^{10}\left(2n^2+\frac{1}{2}\right)$

$=2\times\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{1}{2}\times10$

$=775$

140) 375

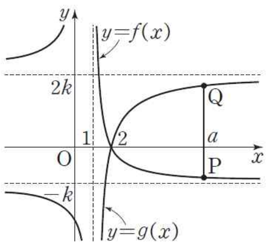
[출제의도] 수학내적 문제해결능력-수열

$f(x)=-\frac{-kx+2k}{x-1}=\frac{k}{x-1}-k$이므로

곡선 $y=f(x)$의 두 점근선의 방정식은 $x=1,\ y=-k$

또, $g(x)=\frac{2kx-4k}{x-1}=\frac{-2k}{x-1}+2k$이므로

곡선 $y=g(x)$의 두 점근선의 방정식은 $x=1,\ y=2k$



따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 점근선 중 x축과 평행한 두 직선 $y=-k$, $y=2k$ 사이의 거리는 $3k$이므로 위 그림에서 선분 $\overline{PQ}$의 길이가 자연수가 되도록 하는 실수 a가 최대인 경우는 $\overline{PQ}=3k-1$일 때이다.

두 점 P, Q의 y좌표는 각각 $\frac{k}{a-1}-k$, $\frac{-2k}{a-1}+2k$ 이므로

$\overline{PQ}=\left(\frac{-2k}{a-1}+2k\right)-\left(\frac{k}{a-1}-k\right)=\frac{-3k}{a-1}+3k$

따라서 $\frac{-3k}{a-1}+3k=3k-1$에서 $\frac{-3k}{a-1}=-1$이므로

$a=3k+1$, 즉 $a_k=3k+1$

따라서

$\sum_{k=1}^{15}a_k=\sum_{k=1}^{15}(3k+1)=3\times\frac{15\times16}{2}+15=375$

141) ②

[출제의도] 이해능력-수열

$S_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^n+1$이므로

(ⅰ) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}\ \cdots$ ㉠

(ⅱ) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(-\frac{1}{2^n}+1\right)-\left(-\frac{1}{2^{n-1}}+1\right)$

$=\frac{1}{2^{n-1}}\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2^n}\ \cdots$ ㉡

$n=1$일 때, ㉡이 성립하므로 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=\frac{1}{2}$이고, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다. 따라서

$a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^n}\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

이므로 $\frac{a_{2k}}{a_k}=\frac{\frac{1}{2^{2k}}}{\frac{1}{2^k}}=\frac{1}{2^k}$

따라서

$\sum_{k=1}^{6}\frac{a_{2k}}{a_k}=\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{2^k}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^6}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$

142) 510

[출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기

판별식 $D=(a_{n+1})^2-4(a_n)^2=0$

$(a_{n+1}+2a_n)(a_{n+1}-2a_n)=0$

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $a_{n+1}=2a_n$

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{8}a_k=\frac{2(2^8-1)}{2-1}=510$

143) ①

[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 S_n을 이용하여 수열의 합을 구한다.

S_n의 이차항의 계수를 a라 하자. 조건에서 $S_{10}=S_{50}$이고 S_n은 $n=30$일 때 최댓값 410을 가지므로

$S_n=a(n-30)^2+410$

$S_{10}=10$이므로 $10=a(10-30)^2+410$에서 $a=-1$

그러므로 $S_n=-(n-30)^2+410$

$S_m>S_{50}=S_{10}$을 만족시키는 자연수 m의 범위는

$10<m<50$이므로 $p=11,\ q=49$

따라서 $\sum_{k=p}^{q}a_k=\sum_{k=11}^{49}a_k=S_{49}-S_{10}$

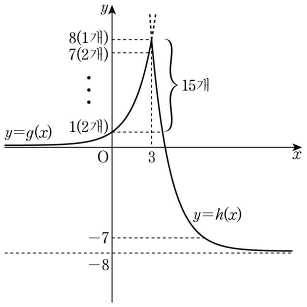
$=\{-(49-30)^2+410\}-10=39$

144) ③

[출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결한다.

$g(x)=2^x$, $h(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{x+a}-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8$이라 하면

곡선 $y=g(x)$의 점근선의 방정식은 $y=0$이고,
곡선 $y=h(x)$의 점근선의 방정식은
$y=-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8$이다.
그러므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 y좌표가 정수인 점의 개수가 23이므로 $y \le 0$에서 y좌표가 정수인 점의 개수는 8이다.

곡선 $y=h(x)$의 점근선이 $y=-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8$이므로

$-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8$은 -8 이상 -7 미만이어야 한다.

즉, $-8 \le -\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8 < -7$,

$15 < \left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} \le 16$, $4 < 15 < 4^{-3-a} \le 4^2$,

$1 < -3-a \le 2$, $-5 \le a < -4$

따라서 구하는 정수 a의 값은 -5

145) ⑤

[출제의도] 주기함수에서 함숫값을 구하고, 그 합을 구할 수 있는가?

(i) $k=1,\ 4,\ 9,\ 16$일 때

$f(1)=1$이고 $f(x+1)=f(x)$이므로

$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=1$에서

$f(\sqrt{k})=1$

(ii) $k \ne 1,\ 4,\ 9,\ 16$일 때

$f(\sqrt{k})=3$

따라서

$\sum_{k=1}^{20} k=210$이고, $1+4+9+16=30$이므로

$$\sum_{k=1}^{20} \frac{k \times f(\sqrt{k})}{3}$$

$$=\sum_{k=1}^{20}\left\{k \times f\frac{(\sqrt{k})}{3}\right\}$$

$$=30 \times \frac{1}{3}+(210-30) \times \frac{3}{3}$$

$$=10+180=190$$

146) ②

[출제의도] 등차수열의 성질을 이용하여 등차수열의 항을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

조건 (나)에서 $\sum_{k=1}^{9} a_k=\frac{9(2a+8d)}{2}=27$

$a+4d=3$ 즉, $a_5=3$ …… ㉠

$a_5>0$이고 $d>0$이므로 $a_6>0$

(i) $a_4 \ge 0$인 경우

$|a_4|+|a_6|=(a+3d)+(a+5d)=2a+8d=8$

$a+4d=4$이므로 ㉠에 모순이다.

(ii) $a_4<0$인 경우

$|a_4|+|a_6|=-(a+3d)+a+5d=2d=8,\ d=4$

(i), (ii)에서 $d=4$이므로

$a_{10}=a_5+5d=3+5 \times 4=23$

147) 30

[출제의도] 등차수열의 합을 이용하여 추론하기

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

조건 (가)에 의하여 $a_8=S_8-S_7=0$이므로

$a_8=a_1+7d=0$에서 $a_1=-7d$

S_n의 값은 $n=8$에서 최소이므로 $S_9 \ge S_8$

$a_9=a_8+d=d \ge 0$

$d=0$이면 $a_1=0$에서 모든 자연수 n에 대하여

$S_n=0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $d>0$

$n \ge 9$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$이므로

$m>8$일 때 $S_{2m}>S_m$

조건 (나)에 의하여 $-S_m=S_{2m}=162$

$$-\frac{m\{2a_1+(m-1)d\}}{2}=\frac{2m\{2a_1+(2m-1)d\}}{2}$$

$14d-(m-1)d=-28d+2(2m-1)d$

$-m+15=4m-30$에서 $m=9$

$S_9=\frac{9(-14d+8d)}{2}=-162$에서

$d=6,\ a_1=-42$

따라서 $a_{13}=a_1+12d=-42+12 \times 6=30$

148) ③

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하자.

조건 (가)에 의하여

$$\sum_{k=1}^{2m+1} a_k=\frac{(2m+1)\{2a+5 \times (2m+1-1)\}}{2}$$

$=(2m+1)(a+5m)<0$

$2m+1>0$이므로 $a+5m=a_{m+1}<0$

(i) $a_{m+1}=-1$인 경우

$|a_m|+|a_{m+1}|+|a_{m+2}|=11$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

$a_{m+1}=-1$이므로

$a_{m+6}=24,\ a_{m+7}=29$

$24<a_{21}<29$인 a_{21}이 존재하지 않는다.

(ii) $a_{m+1}=-2$인 경우

$|a_m|+|a_{m+1}|+|a_{m+2}|=12$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

$a_{m+1}=-2$이므로 $a_{m+7}=28$

따라서 $m+7=21$이므로 $m=14$

(iii) $a_{m+1} \le -3$인 경우

$|a_m|+|a_{m+1}|+|a_{m+2}| \ge 13$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 $m=14$

149) 19

S_n이 등차수열의 합이므로 모든 자연수 n에 대하여

$S_n=pn^2+qn$ (p, q는 상수)

라 하면 $a_n=2pn-p+q$

모든 항이 자연수이므로 $2p$는 음이 아닌 정수이다.

$\sum_{n=1}^{7} S_n = \sum_{n=1}^{7}(pn^2+qn)$

$= p\times\frac{7\cdot 8\cdot 15}{6}+q\times\frac{7\cdot 8}{2}$

$=140p+28q=644$

$\therefore\ 5p+q=23$

$S_1=a_1=p+q=-4p+23\ge 1$에서 $\quad p\le\frac{11}{2}$

$a_7=S_7-S_6=13p+q=8p+23$에서

$a_7=8p+23\le 67$

a_7이 13의 배수이므로 가능한 수는 13, 26, 39, 52, 65이다.

이 중에서 $2p$가 정수인 경우는

$a_7=8p+23=39$

일 때이다.

따라서 $p=2$이고, $a_2=3p+q=-2p+23=19$이다.

150) 427

[출제의도] $\sum$의 성질을 이해하여 수열의 합을 구한다.

$x^2-5nx+4n^2=(x-n)(x-4n)=0$에서

$x=n$ 또는 $x=4n$

$\sum_{n=1}^{7}(1-\alpha_n)(1-\beta_n)=\sum_{n=1}^{7}(1-n)(1-4n)$

$=\sum_{n=1}^{7}(1-5n+4n^2)=7-5\times\frac{7\times 8}{2}+4\times\frac{7\times 8\times 15}{6}=427$

151) ①

[출제의도] 주어진 조건을 이용하여 분수꼴로 나타낸 수열의 합을 구할 수 있는가

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)a_k}=n^2+2n$에서

$n=1$일 때 $\frac{1}{a_1}=3$이므로 $a_1=\frac{1}{3}$

$n\ge 2$일 때

$\frac{1}{(2n-1)a_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)a_k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(2k-1)a_k}$

$=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}=2n+1$

이므로 $(2n-1)a_n=\frac{1}{2n+1}$에서

$a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

이때 $n=1$일 때 $a_1=\frac{1}{3}$이므로

$a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\quad(n\ge 1)$

따라서

$\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{20}{21}=\frac{10}{21}$

152) 65

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3)=2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}3=40,\ \sum_{k=1}^{10}a_k=5$

$\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k=-10$

$\sum_{k=1}^{10}b_k=15$

따라서 $\sum_{k=1}^{10}(b_k+5)=\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}5=65$

153) ①

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d\ (d\neq 0)$라 하자.

$|a_6|=a_8$이고, $d\neq 0$이므로

$a_8=-a_6,\quad a_6+a_8=0$

$a_8>0$이므로 $\quad a_6<0$

등차중항의 성질에 의하여

$2a_7=a_6+a_8,\quad a_7=0$

수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n-a_7=(n-7)\times d,\quad a_n=d(n-7)$

$\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{5}{96}$ 이다.

$\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{d(k-7)\times d(k-6)}$

$=\frac{1}{d^2}\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{k-7}-\frac{1}{k-6}\right)$

$=\frac{1}{d^2}\times\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right)$

$=\frac{1}{d^2}\times\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{1}\right)$

$=\frac{5}{6d^2}$

$\frac{5}{6d^2}=\frac{5}{96}$ 이므로

$d^2=16,\quad d=\pm 4$

$a_6<0,\ a_8>0$이므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=4(n-7)$

이다.

$a_7=0$이므로 등차중항의 성질에 의하여

$a_{7-k}+a_{7+k}=0\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$

이다. 따라서 $\sum_{k=1}^{15}a_k$의 값은

$\sum_{k=1}^{15}a_k=\{(a_1+a_{13})+\cdots+(a_6+a_8)+a_7\}+(a_{14}+a_{15})$

$=a_{14}+a_{15}=4(7+8)=60$

154) ⑤

[출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 a_9의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있는가?

(ⅰ) a_6이 3의 배수인 경우

$a_7=40$이므로 $\frac{a_6}{3}=a_7$

$a_6=3a_7=3\times 40=120$

$a_7=40$이 3의 배수가 아니므로

$a_8=a_6+a_7=120+40=160$

$a_8=160$이 3의 배수가 아니므로

$a_9=a_7+a_8=40+160=200$

(ⅱ) $a_6=3k-2$ (k는 자연수)인 경우

$a_5+a_6=a_7$

$a_5=a_7-a_6=40-(3k-2)=42-3k=3(14-k)$

a_5는 자연수이므로

$3(14-k)>0$에서 $k<14$

한편, a_5는 3의 배수이므로

$a_6=\dfrac{a_5}{3}$

즉, $3k-2=\dfrac{3(14-k)}{3}$에서 $4k=16$

$k=4$

따라서

$a_6=3\times4-2=10$ 이므로

$a_8=a_6+a_7=10+40=50$

$a_8=50$이 3의 배수가 아니므로

$a_9=a_7+a_8=40+50=90$

(iii) $a_6=3k-1$ (k는 자연수)인 경우

$a_5+a_6=a_7$

$a_5=a_7-a_6=40-(3k-1)=41-3k$

a_5는 자연수이므로

$41-3k>0$에서

$k<\dfrac{41}{3}$ …… ㉠

한편, a_5는 3의 배수가 아니므로

$a_4+a_5=a_6$에서

$a_4=a_6-a_5=(3k-1)-(41-3k)=6k-42=3(2k-14)$

a_4가 자연수이므로

$3(2k-14)>0$에서

$k>7$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$7<k<\dfrac{41}{3}$

한편, a_4는 3의 배수이므로 $a_5=\dfrac{a_4}{3}$

즉, $41-3k=\dfrac{3(2k-14)}{3}$에서

$5k=55$

$k=11$

따라서

$a_6=3\times11-1=32$ 이므로

$a_8=a_6+a_7=32+40=72$

$a_8=72$가 3의 배수이므로

$a_9=\dfrac{a_8}{3}=\dfrac{72}{3}=24$

(i), (ii), (iii)에서 a_9의 최댓값은 $M=200$이고 최솟값은 $m=24$이다.

따라서

$M+m=200+24=224$

155) ③

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 항의 값을 추론한다.

a_5+a_4가 홀수이면 a_6이 홀수이므로 $a_6=34$에 모순이다. 따라서 a_5+a_4는 짝수이고 a_4, a_5는 모두 짝수이거나 모두 홀수이다.

a_4, a_5가 모두 짝수이면 a_3도 짝수이고 마찬가지로 a_2, a_1도 모두 짝수이다. 이는 $a_1=1$에 모순이므로 a_4, a_5는 모두 홀수이다.

따라서 a_1, a_4는 모두 홀수이므로 가능한 a_2, a_3의 값은 다음과 같다.

(i) a_2, a_3이 모두 홀수인 경우

$a_2=2l-1$ (l은 자연수)라 하자.

$a_3=\dfrac{1}{2}(a_2+a_1)=l$

$a_4=\dfrac{1}{2}(a_3+a_2)=\dfrac{3}{2}l-\dfrac{1}{2}$

$a_5=\dfrac{1}{2}(a_4+a_3)=\dfrac{5}{4}l-\dfrac{1}{4}$

$a_6=\dfrac{1}{2}(a_5+a_4)=\dfrac{11}{8}l-\dfrac{3}{8}=34$

이므로 $l=25$이다.

따라서 $a_2=2\times25-1=49$

(ii) a_2는 짝수, a_3은 홀수인 경우

$a_2=2m$ (m은 자연수)라 하자.

$a_3=a_2+a_1=2m+1$

$a_4=a_3+a_2=4m+1$

$a_5=\dfrac{1}{2}(a_4+a_3)=3m+1$

$a_6=\dfrac{1}{2}(a_5+a_4)=\dfrac{7}{2}m+1=34$

이므로 m은 자연수가 아니다.

(iii) a_2는 홀수, a_3은 짝수인 경우

$a_2=2n-1$ (n은 자연수)라 하자.

$a_3=\dfrac{1}{2}(a_2+a_1)=n$

$a_4=a_3+a_2=3n-1$

$a_5=a_4+a_3=4n-1$

$a_6=\dfrac{1}{2}(a_5+a_4)=\dfrac{7}{2}n-1=34$

이므로 $n=10$이다.

따라서 $a_2=2\times10-1=19$

(i), (ii), (iii)에서 모든 a_2의 값의 합은

$49+19=68$

156) ④

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

조건 (가)에서 자연수 n에 대하여

$a_n<1$이면 $a_{n+1}=2^{n-2}>0$이고

$a_n\ge1$이면 $a_{n+1}=\log_2 a_n\ge0$이므로

2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\ge0$이다.

조건 (가), (나)에서 a_5, a_6의 값을 구하면

(i) $0\le a_5<1$일 때

$a_6=2^{5-2}$에서 $a_5+a_6\ge8$이므로

$a_5+a_6=1$을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_5\ge1$일 때

$a_6=\log_2 a_5\ge0$에서 $a_5+a_6\ge1$

$a_5+a_6=1$을 만족시키려면 $a_5=1$, $a_6=0$

그러므로 $a_5=1$, $a_6=0$

a_4의 값을 구하면

(i) $0\le a_4<1$일 때

$a_5=2^{4-2}=4$이므로 $a_5=1$을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_4\ge1$일 때

$a_5=\log_2 a_4=1$이므로 $a_4=2$

그러므로 $a_4=2$

a_1, a_2, a_3의 값을 구하면
(i) $0 \le a_3 < 1$일 때
$a_4 = 2^{3-2} = 2$이므로 $0 \le a_3 < 1$
(a) $0 \le a_2 < 1$일 때
$a_3 = 2^{2-2} = 1$이므로 $0 \le a_3 < 1$을 만족시키지 않는다.
(b) $a_2 \ge 1$일 때
$a_3 = \log_2 a_2$에서 $1 \le a_2 < 2$
$a_1 < 1$이면 $a_2 = 2^{1-2} = \frac{1}{2}$이므로 $1 \le a_2 < 2$를 만족시키지 않는다.
$a_1 \ge 1$이면 $a_2 = \log_2 a_1$에서 $2 \le a_1 < 4$
(ii) $a_3 \ge 1$일 때
$a_4 = \log_2 a_3$에서 $a_3 = 2^2 = 4$
(a) $0 \le a_2 < 1$일 때
$a_3 = 2^{2-2} = 1$이므로 $a_3 = 4$를 만족시키지 않는다.
(b) $a_2 \ge 1$일 때
$a_3 = \log_2 a_2$에서 $a_2 = 2^4 = 16$
$a_1 < 1$이면 $a_2 = 2^{1-2} = \frac{1}{2}$이므로 $a_2 = 16$을 만족시키지 않는다.
$a_1 \ge 1$이면 $a_2 = \log_2 a_1$에서 $a_1 = 2^{16}$
따라서 a_1의 값은 $2 \le a_1 < 4$ 또는 $a_1 = 2^{16}$이므로
$M = 2^{16}$, $m = 2$이고 $\log_2 \frac{M}{m} = \log_2 2^{15} = 15$

157) ②

[출제의도] 귀납적으로 정의된 수열을 이해하고 주어진 조건을 만족시키는 수열의 항을 구할 수 있는가

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이므로 a_3, a_4, a_5, a_6은 어느 것도 0이 될 수 없다.
$a_1 = k > 0$이므로
$a_2 = a_1 - 2 - k = -2 < 0$
$a_3 = a_2 + 4 - k = 2 - k$
(i) $a_3 = 2 - k > 0$인 경우
$2 - k > 0$에서 $k < 2$ 즉 $k = 1$이므로
$a_4 = a_3 - 6 - k = -6 < 0$
$a_5 = a_4 + 8 - k = 1 > 0$
$a_6 = a_5 - 10 - k = -10 < 0$
따라서 $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 > 0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.
(ii) $a_3 = 2 - k < 0$인 경우
즉 $k > 2$이므로
$a_4 = a_3 + 6 - k = 8 - 2k$
① $a_4 = 8 - 2k > 0$인 경우
즉 $k < 4$이므로 $2 < k < 4$에서 $k = 3$일 때
$a_4 = 8 - 6 = 2$
$a_5 = a_4 - 8 - k = -9 < 0$
$a_6 = a_5 + 10 - k = -2 < 0$
따라서 $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.
② $a_4 = 8 - 2k < 0$인 경우
즉 $k > 4$이므로
$a_5 = a_4 + 8 - k = 16 - 3k$
㉠ $a_5 = 16 - 3k > 0$인 경우
즉 $k < \frac{16}{3}$에서 $4 < k < \frac{16}{3}$이므로
$k = 5$
$a_5 = 16 - 15 = 1$
$a_6 = a_5 - 10 - k = -14 < 0$
따라서 $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이므로 조건을 만족시킨다.
㉡ $a_5 = 16 - 3k < 0$인 경우
즉 $k > \frac{16}{3}$이므로 $k \ge 6$인 경우이다.
이때
$a_6 = a_5 + 10 - k = 26 - 4k$
이고 $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이기 위해서는
$a_6 > 0$이어야 하므로
$a_6 = 26 - 4k > 0$
$k < \frac{13}{2}$
즉 $6 \le k < \frac{13}{2}$에서 $k = 6$
(i), (ii)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 k의 값의 합은
$3 + 5 + 6 = 14$

158) ④

(i) $4 \le n \le 7$인 모든 자연수 n에 대하여 $\log_3 a_n$이 자연수가 아닌 경우
$a_5 = a_4 + 6$, $a_6 = a_5 + 6 = a_4 + 12$,
$a_7 = a_6 + 6 = a_4 + 18$이므로
$\sum_{k=4}^{7} a_k = 4a_4 + 36 = 40$, $a_4 = 1$
순서쌍 (a_1, a_2, a_3)은 $(27, 9, 3)$ 그러므로 $a_1 = 27$
(ii) $4 \le n \le 7$인 자연수 n에 대하여 $\log_3 a_n$이 자연수인 n이 존재하는 경우
$a_n = 3^m$ (m은 자연수)인 n $(4 \le n \le 7)$이 존재한다.
a_4, a_5, a_6, a_7 중 3^m $(m \ge 4)$가 존재하면
$\sum_{k=4}^{7} a_k > 40$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
그러므로 a_4, a_5, a_6, a_7 중 3^m $(m \ge 4)$가 존재하지 않는다.
또한 a_4, a_5, a_6, a_7 중 27이 존재하지 않으면 $n = 4, 5, 6, 7$에 대하여
$\sum_{k=4}^{7} a_k < 40$
그러므로 a_4, a_5, a_6, a_7 중 하나가 27이다.
만약 a_5, a_6, a_7 중 하나가 27이면 $\sum_{k=4}^{7} a_k > 40$이므로 $a_4 = 27$
$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 27 + 9 + 3 + 1 = 40$
그러므로 $a_4 = 27$일 때 조건을 만족시킨다.
$a_1 < 300$을 만족시키는 순서쌍 (a_1, a_2, a_3)은
$(69, 75, 81)$, $(237, 243, 81)$이므로
$a_1 = 69$ 또는 $a_1 = 237$
따라서 (i), (ii)에 의하여
모든 a_1의 값의 합은 $27 + 69 + 237 = 333$

159) ①

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하자. 자연수 a를 자연수 k에 대하여 나타내면
(i) $a = 4k - 3$일 때
$a_2 = 4k - 2$, $a_3 = 2k - 1$, $a_4 = 2k$
$a_2 + a_4 = 40$이므로

$6k-2=40, \quad k=7$

$\therefore\ a=25$

(ii) $a=4k-2$일 때

$a_2=2k-1,\ a_3=2k,\ a_4=k$

$a_2+a_4=40$이므로 $\quad 3k-1=40$

$3k-1=40$인 자연수 k의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $a=4k-1$일 때

$a_2=4k,\ a_3=2k,\ a_4=k$

$a_2+a_4=40$이므로

$5k=40, \quad k=8$

$\therefore\ a=31$

(iv) $a=4k$일 때

$a_2=2k,\ a_3=k$

자연수 k를 자연수 m에 대하여 나타내면

(1) $k=2m-1$일 때

$a_4=2m=k+1$

$a_2+a_4=40$이므로

$3k+1=40, \quad k=13$

$\therefore\ a=52$

(2) $k=2m$일 때

$a_4=m=\frac{k}{2}$

$a_2+a_4=40$이므로

$\frac{5}{2}k=40, \quad k=16$

$\therefore\ a=64$

이상에서 자연수 a의 값은

25, 31, 52, 64

a_1의 값은 25, 31, 52, 64이므로 합은 172이다.

160) ②

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 항의 값을 추론한다.

조건 (나)에서 $a_3>a_5$이므로 a_3이 4의 배수인 경우와 4의 배수가 아닌 경우로 나누어 생각하자.

(i) a_3이 4의 배수인 경우

$a_3=4k$(k는 자연수)라 하면 $a_4=2k+6$

k가 홀수일 때 a_4는 4의 배수이고

$a_5=k+11,\ a_4+a_5=3k+17$이므로

$50<3k+17<60,\ a_3>a_5$에서 $k>\frac{11}{3}$

k는 홀수이므로 $k=13$이고 $a_3=52$

k가 짝수일 때 a_4는 4의 배수가 아니고

$a_5=2k+14,\ a_4+a_5=4k+20$이므로

$50<4k+20<60,\ a_3>a_5$에서 $k>7$

k는 짝수이므로 $k=8$이고 $a_3=32$

따라서 $a_3=52$ 또는 $a_3=32$

$a_3=52$인 경우 $a_2=96$이고

$a_1=94$ 또는 $a_1=188$

$a_3=32$인 경우 $a_2=56$이고

$a_1=54$ 또는 $a_1=108$

(ii) a_3이 4의 배수가 아닌 경우

$a_3=4k-1$ 또는 $a_3=4k-3$(k는 자연수)일 때

$a_3,\ a_4,\ a_5$는 모두 홀수이고

$a_5=a_4+8=a_3+14>a_3$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

$a_3=4k-2$(k는 자연수)일 때

$a_4=4k+4,\ a_5=2k+10$이고

$a_4+a_5=6k+14$이므로 $50<6k+14<60$

$a_3>a_5$에서 $k>6$, 이때 $k=7$이므로 $a_3=26$

따라서 $a_2=22$ 또는 $a_2=44$이다.

$a_2=22$인 경우 $a_1=40$

$a_2=44$인 경우 $a_1=42$ 또는 $a_1=84$

(i), (ii)에서 $M=188,\ m=40$이고 $M+m=228$

161) ③

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$에서 $a_6+a_7=3$이다.

자연수 k에 대하여 $a_{k+1}=1$이면 $2^{a_k}=1$인 홀수 a_k는 존재하지 않는다. $a_{k+1}=1$일 때 a_k의 값이 짝수이면

$\frac{a_k}{2}=1, \quad a_k=2$

따라서 자연수 k에 대하여 $a_{k+1}=1$이면 $a_k=2$이다.

수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 자연수이므로

$a_6=1,\ a_7=2$ 또는 $a_6=2,\ a_7=1$

(i) $a_6=1,\ a_7=2$일 때 $a_5=2$

(1) a_4가 홀수일 때

$2^{a_4}=2$에서 $\quad a_4=1,\ a_3=2$

(a) a_2가 홀수일 때

$2^{a_2}=2$에서 $\quad a_2=1$

$\therefore\ a_1=2$

(b) a_2가 짝수일 때

$\frac{a_2}{2}=2$에서 $\quad a_2=4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$2^{a_1}=4$인 홀수 a_1은 존재하지 않는다.

a_1이 짝수이면 $\quad \frac{a_1}{2}=4$

$\therefore\ a_1=8 \quad \cdots\cdots$ ㉡

(2) a_4가 짝수일 때

$\frac{a_4}{2}=2$에서 $\quad a_4=4$

㉡에서 $a_2=4$일 때 $a_1=8$이므로 같은 방법으로 하면 a_3의 값은

$a_3=8$

(a) a_2가 홀수일 때

$2^{a_2}=8$에서 $\quad a_2=3$

$2^{a_1}=3$인 홀수 a_1은 존재하지 않는다.

a_1이 짝수이면 $\quad \frac{a_1}{2}=3 \quad \therefore\ a_1=6$

(b) a_2가 짝수일 때

$\frac{a_2}{2}=8$에서 $\quad a_2=16 \quad \cdots\cdots$ ㉢

$2^{a_1}=16$인 홀수 a_1은 존재하지 않는다.

a_1이 짝수이면 $\quad \frac{a_1}{2}=16$

$\therefore\ a_1=32$

(ii) $a_6=2,\ a_7=1$일 때

㉠에서 $a_3=2$일 때 $a_2=1$ 또는 $a_2=4$이므로 같은 방법으로 하면 a_5의 값은 $a_5=1$ 또는 $a_5=4$

(1) $a_5=1$일 때 $a_4=2$

㉠에서 $a_3=2$일 때 $a_2=1$ 또는 $a_2=4$이므로 같은 방법으로 하면

a_3의 값은

$a_3=1$ 또는 $a_3=4$

$a_3=1$이면 $a_2=2$

㉡에 의하여 $a_3=4$이면 $a_2=8$

(a) $a_2=2$일 때

㉠에 의하여 $a_1=1$ 또는 $a_1=4$

(b) $a_2=8$일 때

㉢에서 $a_3=8$일 때 $a_2=3$ 또는 $a_2=16$이므로 같은 방법으로 하면

$a_1=3$ 또는 $a_1=16$

(2) $a_5=4$일 때

㉡에 의하여 $a_4=8$

a_3이 홀수이면 $2^{a_3}=8$에서 $a_3=3$

a_3이 짝수이면 $\dfrac{a_3}{2}=8$에서 $a_3=16$

$2^{a_2}=3$ 또는 $2^{a_2}=16$인 홀수 a_2는 존재하지 않는다.

$a_3=3$에서 a_2의 값이 짝수이면 $\dfrac{a_2}{2}=3$에서

$a_2=6$

$a_3=16$에서 a_2의 값이 짝수이면 $\dfrac{a_2}{2}=16$에서

$a_2=32$

(a) $a_2=6$일 때

$2^{a_1}=6$인 홀수 a_1은 존재하지 않는다.

a_1이 짝수이면 $\dfrac{a_1}{2}=6$ $\therefore a_1=12$

(b) $a_2=32$일 때

a_1이 홀수이면 $2^{a_1}=32$ $\therefore a_1=5$

a_1이 짝수이면 $\dfrac{a_1}{2}=32$ $\therefore a_1=64$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 a_1의 값은

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 16, 32, 64

이다. 따라서 모든 a_1의 값의 합은 153이다.

162) ⑤

[출제의도] 등차수열의 정의와 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 등차수열의 특정한 항의 값을 구할 수 있는가

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(d\neq 0)$이라 하자.

$b_n=a_n+a_{n+1}$이므로

$b_{n+1}-b_n=(a_{n+1}+a_{n+2})-(a_n+a_{n+1})=a_{n+2}-a_n=2d$

수열 $\{b_n\}$은 공차가 $2d$인 등차수열이다.

(ⅰ) $d>0$일 때,

$a_1=a_2-d=-4-d<0$

$a_2=-4<0$ 이므로

$b_1=a_1+a_2=-8-d<a_1$

$n(A\cap B)=3$이려면

$b_2=a_1$ 또는 $b_3=a_1$ 이어야 한다.

① $b_2=a_1$일 때,

$b_3=a_3$, $b_4=a_5$

이므로 $n(A\cap B)=3$ 이다.

한편, $b_2=b_1+2d=-8+d$이므로

$b_2=a_1$에서 $-8+d=-4-d$

$2d=4$

$d=2$

따라서

$a_{20}=a_2+18d=-4+18\times 2=32$

② $b_3=a_1$일 때,

$b_4=a_3$, $b_5=a_5$ 이므로 $n(A\cap B)=3$이다.

한편, $b_3=b_1+4d=-8+3d$이므로

$b_3=a_1$에서 $-8+3d=-4-d$

$4d=4$

$d=1$

따라서

$a_{20}=a_2+18d=-4+18\times 1=14$

(ⅱ) $d<0$일 때,

③ $a_1>0$이면 $a_2<b_1<a_1$이므로 $n(A\cap B)=0$

④ $a_1=0$이면 $b_1=a_2$, $b_2=a_4$이므로 $n(A\cap B)=2$

⑤ $a_1<0$이면 $b_1<a_2$이므로 $n(A\cap B)\leq 2$

③, ④, ⑤에서

$d<0$이면 주어진 조건을 만족하지 못한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서

$a_{20}=32$ 또는 $a_{20}=14$

따라서 a_{20}의 값의 합은

$32+14=46$