

■ [공통: 수학 I·수학 II]

01. ⑤ 02. ④ 03. ② 04. ② 05. ①
06. ④ 07. ③ 08. ③ 09. ① 10. ②
11. ③ 12. ⑤ 13. ① 14. ③ 15. ②
16. 3 17. 33 18. 6 19. 8 20. 39
21. 110 22. 380

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{27} \times 4^{-\frac{1}{2}} &= (3^3)^{\frac{1}{3}} \times (2^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 3 \times 2^{-1} \\ &= 3 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

정답 ⑤

2. 출제의도 : 다항함수의 미분과 미분계수의 정의를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

에서

$$f'(x) = 2x - 2$$

이므로

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} &= f'(3) \\ &= 2 \times 3 - 2 \\ &= 4\end{aligned}$$

정답 ④

3. 출제의도 : 합의 기호 \sum 의 성질을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} (2a_k + 3) &= 2 \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 3 \\ &= 2 \sum_{k=1}^{10} a_k + 3 \times 10 \\ &= 2 \sum_{k=1}^{10} a_k + 30\end{aligned}$$

따라서

$$2 \sum_{k=1}^{10} a_k + 30 = 60$$

이므로

$$2 \sum_{k=1}^{10} a_k = 30$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 15$$

정답 ②

4. 출제의도 : 함수가 연속일 조건을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속
이므로 $x=1$ 에서도 연속이다.

즉,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4 - f(1)$$

에서

$$f(1) = 4 - f(1)$$

$$2f(1) = 4$$

따라서 $f(1) = 2$

정답 ②

따라서

$$\sin\theta = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

정답 ④

5. 출제의도 : 함수의 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$g(x) = (x^3 + 1)f(x)$$

이므로

$$g'(x) = 3x^2 f(x) + (x^3 + 1)f'(x)$$

이때 $f(1) = 2$, $f'(1) = 3$ 이므로

$$\begin{aligned} g'(1) &= 3f(1) + 2f'(1) \\ &= 3 \times 2 + 2 \times 3 \\ &= 12 \end{aligned}$$

정답 ①

6. 출제의도 : 삼각함수 사이의 관계를 이해하여 사인함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

이므로

$$\sin(-\theta) = \frac{1}{7}\cos\theta$$

에서

$$\cos\theta = -7\sin\theta$$

이때 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 이므로

$$\sin^2\theta + 49\sin^2\theta = 1$$

$$\sin^2\theta = \frac{1}{50}$$

한편, $\cos\theta < 0$ 이므로

$$\sin\theta = -\frac{1}{7}\cos\theta > 0$$

7. 출제의도 : 로그함수의 점근선을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y = \log_2(x-a)$ 의 그래프의 점근선은 직선 $x=a$ 이다.

곡선 $y = \log_2 \frac{x}{4}$ 와 직선 $x=a$ 가 만나는

점 A의 좌표는

$$\left(a, \log_2 \frac{a}{4}\right)$$

곡선 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 와 직선 $x=a$ 가 만나는

점 B의 좌표는

$$\left(a, \log_{\frac{1}{2}} a\right)$$

한편, $a > 2$ 에서

$$\log_2 \frac{a}{4} > \log_2 \frac{2}{4} = -1,$$

$$\log_{\frac{1}{2}} a < \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$$

이므로

$$\log_2 \frac{a}{4} > \log_{\frac{1}{2}} a$$

이때,

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \log_2 \frac{a}{4} - \log_{\frac{1}{2}} a \\ &= (\log_2 a - 2) + \log_2 a \\ &= 2\log_2 a - 2 \end{aligned}$$

이고,

$$\overline{AB} = 4$$

이므로

$$2\log_2 a - 2 = 4$$

$$\log_2 a = 3$$

따라서 $a = 2^3 = 8$

정답 ③

8. 출제의도 : 함수의 그래프의 개형을 이용하여 두 곡선이 두 점에서 만나도록 하는 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 곡선 $y = 2x^2 - 1$, $y = x^3 - x^2 + k$ 가 만나는 점의 개수가 2가 되려면

$$\text{방정식 } 2x^2 - 1 = x^3 - x^2 + k, \text{ 즉}$$

$$-x^3 + 3x^2 - 1 = k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

방정식 ①이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ 과 직선 $y = k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

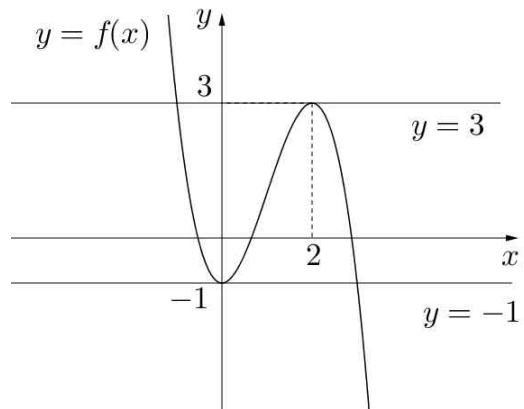
x	\dots	0	\dots	2	\dots
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	\searrow	극소	\nearrow	극대	\searrow

함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극솟값

$f(0) = -1$ 을 갖고, $x = 2$ 에서 극댓값

$f(2) = 3$ 을 갖는다.

이때 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 양수 k 의 값은 3이다.

정답 ③

9. 출제의도 : 주어진 조건을 이용하여 분수꼴로 나타낸 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)a_k} = n^2 + 2n \text{에서}$$

$n = 1$ 일 때

$$\frac{1}{a_1} = 3 \text{이므로}$$

$$a_1 = \frac{1}{3}$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2n-1)a_n} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)a_k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(2k-1)a_k} \\ &= n^2 + 2n - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\} \\ &= 2n + 1 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } (2n-1)a_n = \frac{1}{2n+1} \text{에서}$$

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

이때 $n=1$ 일 때 $a_1 = \frac{1}{3}$ 이므로

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \quad (n \geq 1)$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{10} a_n &= \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{21}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{20}{21} \\ &= \frac{10}{21} \end{aligned}$$

정답 ①

10. 출제의도 : 정적분을 이용하여 곡선과 좌표축으로 둘러싸인 두 영역의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$ 이므로 두 점 P, Q의 좌표는 각각 (2, 0), (3, 0)이다.

이때

$$(A \text{의 넓이}) = \int_0^2 f(x)dx,$$

$$(B \text{의 넓이}) = \int_2^3 \{-f(x)\}dx$$

이므로

$$(A \text{의 넓이}) - (B \text{의 넓이})$$

$$= \int_0^2 f(x)dx - \int_2^3 \{-f(x)\}dx$$

$$= \int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx$$

$$= \int_0^3 f(x)dx = 3$$

이어야 한다.

이때

$$\int_0^3 f(x)dx = k \int_0^3 (x^3 - 5x^2 + 6x)dx$$

$$= k \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^3$$

$$= k \left(\frac{81}{4} - 45 + 27 \right)$$

$$= \frac{9}{4}k$$

이므로

$$\frac{9}{4}k = 3$$

따라서

$$k = \frac{4}{3}$$

정답 ②

11. 출제의도 : 도함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 좌표를 (s, s^2) 이라 하면 점 P에서 곡선 $y=x^2$ 에 접하는 직선의 기울기가 $2t$ 가 되어야 한다.

$$f(x) = x^2 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 2x$$

이므로

$$2s = 2t$$

에서

$$s = t$$

즉, $P(t, t^2)$

이때 직선 OP의 방정식은 $y = tx$ 이므로

$$tx = 2tx - 1$$

에서

$$x = \frac{1}{t}$$

즉, 점 Q의 좌표는

$$Q\left(\frac{1}{t}, 1\right)$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1-} \frac{\overline{PQ}}{1-t} &= \lim_{t \rightarrow 1-} \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{t}-t\right)^2 + (1-t^2)^2}}{1-t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1-} \frac{(1-t^2)\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}{1-t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1-} (1+t)\sqrt{\frac{1}{t^2}+1} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

정답 ③

12. 출제의도 : 등차수열의 정의와 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 등차수열의 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 $d(d \neq 0)$ 이라 하자.

$$b_n = a_n + a_{n+1} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= (a_{n+1} + a_{n+2}) - (a_n + a_{n+1}) \\ &= a_{n+2} - a_n \\ &= 2d \end{aligned}$$

수열 $\{b_n\}$ 은 공차가 $2d$ 인 등차수열이다.

(i) $d > 0$ 일 때,

$$a_1 = a_2 - d = -4 - d < 0$$

$$a_2 = -4 < 0$$

이므로

$$b_1 = a_1 + a_2 = -8 - d < a_1$$

$$n(A \cap B) = 3 \text{이려면}$$

$$b_2 = a_1 \text{ 또는 } b_3 = a_1$$

이어야 한다.

① $b_2 = a_1$ 일 때,

$$b_3 = a_3, b_4 = a_5$$

이므로

$$n(A \cap B) = 3$$

이다.

한편, $b_2 = b_1 + 2d = -8 + d$ 이므로

$$b_2 = a_1 \text{에서}$$

$$-8 + d = -4 - d$$

$$2d = 4$$

$$d = 2$$

따라서

$$\begin{aligned} a_{20} &= a_2 + 18d \\ &= -4 + 18 \times 2 \\ &= 32 \end{aligned}$$

② $b_3 = a_1$ 일 때,

$$b_4 = a_3, b_5 = a_5$$

이므로

$$n(A \cap B) = 3$$

이다.

한편, $b_3 = b_1 + 4d = -8 + 3d$ 이므로

$$b_3 = a_1 \text{에서}$$

$$-8 + 3d = -4 - d$$

$$4d = 4$$

$$d = 1$$

따라서

$$a_{20} = a_2 + 18d$$

$= -4 + 18 \times 1$
 $= 14$
 (ii) $d < 0$ 일 때,
 ③ $a_1 > 0$ 이면 $a_2 < b_1 < a_1$ 이므로
 $n(A \cap B) = 0$
 ④ $a_1 = 0$ 이면 $b_1 = a_2, b_2 = a_4$ 이므로
 $n(A \cap B) = 2$
 ⑤ $a_1 < 0$ 이면 $b_1 < a_2$ 이므로
 $n(A \cap B) \leq 2$
 ③, ④, ⑤에서
 $d < 0$ 이면 주어진 조건을 만족하지 못한다.
 (i), (ii)에서
 $a_{20} = 32$ 또는 $a_{20} = 14$
 따라서 a_{20} 의 값의 합은
 $32 + 14 = 46$

정답 ⑤

[다른 풀이]
 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 $d(d \neq 0)$ 이라 하자.
 $b_n = a_n + a_{n+1}$ 이므로
 $b_{n+1} - b_n = (a_{n+1} + a_{n+2}) - (a_n + a_{n+1})$
 $= a_{n+2} - a_n$
 $= 2d$
 수열 $\{b_n\}$ 은 공차가 $2d$ 인 등차수열이다.
 $n(A \cap B) = 3$ 이라면
 $A \cap B = \{a_1, a_3, a_5\} = \{b_i, b_{i+1}, b_{i+2}\}$
 (단, $i = 1, 2, 3$)
 이어야 한다.
 (i) $\{a_1, a_3, a_5\} = \{b_1, b_2, b_3\}$ 인 경우
 $a_1 = b_1$
 이어야 한다.
 이때, $b_1 = a_1 + a_2 = a_1 - 4$ 이므로
 $a_1 = a_1 - 4$

즉, a_1 의 값은 존재하지 않는다.
 (ii) $\{a_1, a_3, a_5\} = \{b_2, b_3, b_4\}$ 인 경우
 $a_1 = b_2$
 이어야 한다.
 이때, $b_2 = b_1 + 2d = -8 + d$ 이므로
 $a_1 = b_2$ 에서
 $-4 - d = -8 + d$
 $2d = 4$
 $d = 2$
 따라서
 $a_{20} = a_2 + 18d$
 $= -4 + 18 \times 2$
 $= 32$
 (iii) $\{a_1, a_3, a_5\} = \{b_3, b_4, b_5\}$ 인 경우
 $a_1 = b_3$
 이어야 한다.
 이때, $b_3 = b_1 + 4d = -8 + 3d$ 이므로
 $a_1 = b_3$ 에서
 $-4 - d = -8 + 3d$
 $4d = 4$
 $d = 1$
 따라서
 $a_{20} = a_2 + 18d$
 $= -4 + 18 \times 1$
 $= 14$
 (i), (ii), (iii)에서
 $a_{20} = 32$ 또는 $a_{20} = 14$
 따라서 a_{20} 의 값의 합은
 $32 + 14 = 46$

13. 출제의도 : 사인법칙, 코사인법칙과 삼각형의 넓이를 이용하여 조건을 만족시키는 사각형의 변의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\angle BCD = \alpha, \angle DAB = \beta \left(\frac{\pi}{2} < \beta < \pi \right),$$

$$\overline{AB} = a, \overline{AD} = b \text{라 하자.}$$

삼각형 BCD에서

$$\overline{BC} = 3, \overline{CD} = 2, \cos(\angle BCD) = -\frac{1}{3}$$

이므로 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = 9 + 4 - 2 \times 3 \times 2 \times \left(-\frac{1}{3} \right)$$

$$= 17$$

그러므로 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta = 17 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

한편, 점 E가 선분 AC를 1:2로 내분하는 점이므로 두 삼각형 AP_1P_2 , CQ_1Q_2 의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r , $2r$ 로 놓을 수 있다.

이때 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{P_1P_2}}{\sin \beta} = r, \frac{\overline{Q_1Q_2}}{\sin \alpha} = 2r$$

이므로

$$\begin{aligned} \sin \alpha : \sin \beta &= \frac{\overline{Q_1Q_2}}{2r} : \frac{\overline{P_1P_2}}{r} \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{2} : 3 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \sin \beta = \frac{6 \sin \alpha}{5\sqrt{2}}$$

이때

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{9}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

이므로

$$\sin \beta = \frac{6}{5\sqrt{2}} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4}{5}$$

$\cos \beta < 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos \beta &= -\sqrt{1 - \sin^2 \beta} \\ &= -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} \\ &= -\sqrt{\frac{9}{25}} \\ &= -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

삼각형 ABD의 넓이가 2이므로

$$\frac{1}{2} ab \sin \beta = 2$$

에서

$$\frac{1}{2} ab \times \frac{4}{5} = 2$$

$$ab = 5$$

ⓐ에서

$$a^2 + b^2 - 2 \times 5 \times \left(-\frac{3}{5} \right) = 17$$

$$a^2 + b^2 = 11$$

따라서

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 11 + 2 \times 5 = 21$$

이므로

$$a+b = \sqrt{21}$$

정답 ①

14. 출제의도 : 정적분을 활용하여 위치의 변화량의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a \neq 0$, $a \neq \frac{1}{2}$, $a \neq 1$ 이면 점 P는 출발

후 운동 방향을 세 번 바꾼다.

그러므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(i) $a=0$ 일 때

$$v(t) = -t^3(t-1)$$

이때 점 P는 출발 후 운동 방향을 $t=1$ 에서 한 번만 바꾸므로 조건을 만족시킨다.

그러므로 시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\begin{aligned} \int_0^2 -t^3(t-1)dt &= \int_0^2 (-t^4 + t^3)dt \\ &= \left[-\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{4}t^4 \right]_0^2 \\ &= -\frac{32}{5} + 4 \\ &= -\frac{12}{5} \end{aligned}$$

(ii) $a = \frac{1}{2}$ 일 때

$$v(t) = -t\left(t - \frac{1}{2}\right)(t-1)^2$$

이때 점 P는 출발 후 운동 방향을 $t = \frac{1}{2}$ 에서 한 번만 바꾸므로 조건을 만족시킨다.

그러므로 시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\begin{aligned} \int_0^2 -t\left(t - \frac{1}{2}\right)(t-1)^2 dt &= \int_0^2 -\left(t^2 - \frac{1}{2}t\right)(t^2 - 2t + 1)dt \\ &= \int_0^2 \left(-t^4 + \frac{5}{2}t^3 - 2t^2 + \frac{1}{2}t\right)dt \\ &= \left[-\frac{1}{5}t^5 + \frac{5}{8}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^2 \right]_0^2 \\ &= -\frac{32}{5} + 10 - \frac{16}{3} + 1 \\ &= -\frac{32}{5} - \frac{16}{3} + 11 \\ &= \frac{(-96) + (-80) + 165}{15} \end{aligned}$$

$$= -\frac{11}{15}$$

(iii) $a=1$ 일 때

$$v(t) = -t(t-1)^2(t-2)$$

이때 점 P는 출발 후 운동방향을 $t=2$ 에서 한 번만 바꾸므로 조건을 만족시킨다.

그러므로 시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\begin{aligned} \int_0^2 -t(t-1)^2(t-2)dt &= \int_0^2 -t(t^2 - 2t + 1)(t-2)dt \\ &= \int_0^2 (-t^4 + 4t^3 - 5t^2 + 2t)dt \\ &= \left[-\frac{1}{5}t^5 + t^4 - \frac{5}{3}t^3 + t^2 \right]_0^2 \\ &= -\frac{32}{5} + 16 - \frac{40}{3} + 4 \\ &= -\frac{32}{5} - \frac{40}{3} + 20 \\ &= \frac{(-96) + (-200) + 300}{15} \\ &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은 $\frac{4}{15}$ 이다.

정답 ③

15. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열을 이해하고 주어진 조건을 만족시키는 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$ 이므로 a_3, a_4, a_5, a_6 은 어느 것도 0이 될 수 없다.

$$a_1 = k > 0 \text{이므로}$$

$$a_2 = a_1 - 2 - k = -2 < 0$$

$$a_3 = a_2 + 4 - k = 2 - k$$

$$(i) \ a_3 = 2 - k > 0 \text{인 경우}$$

$$2 - k > 0 \text{에서 } k < 2 \text{ 즉 } k = 1 \text{이므로}$$

$$a_4 = a_3 - 6 - k = -6 < 0$$

$$a_5 = a_4 + 8 - k = 1 > 0$$

$$a_6 = a_5 - 10 - k = -10 < 0$$

따라서 $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 > 0$ 이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

$$(ii) \ a_3 = 2 - k < 0 \text{인 경우}$$

$$\text{즉 } k > 2 \text{ 이므로}$$

$$a_4 = a_3 + 6 - k = 8 - 2k$$

$$\textcircled{1} \ a_4 = 8 - 2k > 0 \text{인 경우}$$

$$\text{즉 } k < 4 \text{ 이므로 } 2 < k < 4 \text{에서 } k = 3 \text{일 때}$$

$$a_4 = 8 - 6 = 2$$

$$a_5 = a_4 - 8 - k = -9 < 0$$

$$a_6 = a_5 + 10 - k = -2 < 0$$

따라서 $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$ 이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

$$\textcircled{2} \ a_4 = 8 - 2k < 0 \text{인 경우}$$

$$\text{즉 } k > 4 \text{ 이므로}$$

$$a_5 = a_4 + 8 - k = 16 - 3k$$

$$\textcircled{7} \ a_5 = 16 - 3k > 0 \text{인 경우}$$

$$\text{즉 } k < \frac{16}{3} \text{에서 } 4 < k < \frac{16}{3} \text{ 이므로}$$

$$k = 5$$

$$a_5 = 16 - 15 = 1$$

$$a_6 = a_5 - 10 - k = -14 < 0$$

따라서 $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$ 이므로 조건을 만족시킨다.

$$\textcircled{10} \ a_5 = 16 - 3k < 0 \text{인 경우}$$

$$\text{즉 } k > \frac{16}{3} \text{이므로 } k \geq 6 \text{인 경우이다.}$$

이때

$$a_6 = a_5 + 10 - k = 26 - 4k$$

$$\text{이고 } a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0 \text{이기 위해서는}$$

$$a_6 > 0 \text{이어야 하므로}$$

$$a_6 = 26 - 4k > 0$$

$$k < \frac{13}{2}$$

$$\text{즉 } 6 \leq k < \frac{13}{2} \text{에서 } k = 6$$

(i), (ii)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 k 의 값의 합은

$$3 + 5 + 6 = 14$$

정답 ②

16. 출제의도 : 지수부등식을 만족시키는 자연수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = (2^{-2})^x = 2^{-2x} \text{이므로 주어진}$$

부등식은

$$2^{x-6} \leq 2^{-2x}$$

양변의 밑 2가 1보다 크므로

$$x - 6 \leq -2x$$

$$3x \leq 6$$

$$x \leq 2$$

따라서 모든 자연수 x 의 값의 합은

$$1 + 2 = 3$$

정답 3

17. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (8x^3 - 1) dx \\ &= 2x^4 - x + C \quad (C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

$$f(0) = 3 \text{이므로 } C = 3$$

따라서

$$f(x) = 2x^4 - x + 3 \text{이므로}$$

$$f(2) = 32 - 2 + 3 = 33$$

정답 33

18. 출제의도 : 도함수를 활용하여 함수의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극솟값 -2 를 가지므로

$$f(1) = -2$$

에서

$$a + b + a = -2$$

$$2a + b = -2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또, $f'(x) = 3ax^2 + b$ 이고 $f'(1) = 0$ 이어야 하므로

$$3a + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦과 ⑧을 연립하면

$$a = 2, \quad b = -6$$

그러므로

$$f(x) = 2x^3 - 6x + 2$$

이고

$$f'(x) = 6x^2 - 6$$

$$= 6(x+1)(x-1)$$

이때 $f'(x) = 0$ 에서

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	\dots	-1	\dots	1	\dots
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	6	\searrow	-2	\nearrow

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극댓값 6 을 갖는다.

정답 6

19. 출제의도 : 사인함수의 최댓값, 최솟값 및 주기를 이해하고, 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$ 의 최솟값이

$$-a + 8 - a = 8 - 2a$$

이므로 조건 (가)를 만족시키려면

$$8 - 2a \geq 0$$

즉, $a \leq 4$ 이어야 한다.

그런데, $a=1$ 또는 $a=2$ 또는 $a=3$ 일 때는 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 0 보다 크므로 조건 (나)를 만족시킬 수 없다.

그러므로 $a=4$

이때 $f(x) = 4\sin bx + 4$ 이고 이 함수의 주

기는 $\frac{2\pi}{b}$ 이므로 $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{b}$ 일 때 방정

식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1 이다.

그러므로 $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4 가 되려면

$$\frac{15\pi}{2b} < 2\pi \leq \frac{19\pi}{2b}$$

이어야 한다.

즉, $\frac{15}{4} < b \leq \frac{19}{4}$ 이고 b 는 자연수이므로

$$b = 4$$

따라서 $a+b=4+4=8$

정답 8

20. 출제의도 : 정적분의 성질을 활용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 의 부정적분 중 하나를 $F(x)$ 라 하면

$$F'(x) = f(x)$$

이고

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt$$

$$= F(x) - F(0)$$

이므로

$$g'(x) = f(x)$$

그러므로 함수 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$ 인 삼차함수이다.

조건에서 $x \geq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \geq g(4)$ 이므로 삼차함수 $g(x)$ 는 구간 $[1, \infty)$ 에서 $x=4$ 일 때 최소이자 극소이다. ... ㉠

즉, $g'(4) = f(4) = 0$ 이므로

$$f(x) = (x-4)(x-a) \quad (a \text{는 상수}) \quad \dots \text{㉡}$$

로 놓을 수 있다.

(i) $g(4) \geq 0$ 인 경우

$x \geq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \geq g(4) \geq 0$ 이므로 이 범위에서

$$|g(x)| = g(x)$$

이다.

조건에서 $x \geq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $|g(x)| \geq |g(3)|$, 즉 $g(x) \geq g(3)$ 이어야 한다. ... ㉢

그런데 ㉠에서 $g(3) > g(4)$ 이므로 ㉢을 만족시키지 않는다.

(ii) $g(4) < 0$ 인 경우

$x \geq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $|g(x)| \geq |g(3)|$ 이려면

$$g(3) = 0 \quad \dots \text{㉣}$$

이어야 한다.

㉡에서 $f(x) = x^2 - (a+4)x + 4a$ 이므로

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{a+4}{2}x^2 + 4ax + C \quad (\text{단, } C \text{는}$$

적분상수)

그러므로

$$g(x) = F(x) - F(0)$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{a+4}{2}x^2 + 4ax$$

㉣에서

$$g(3) = 9 - \frac{9}{2}(a+4) + 12a = 0$$

$$\frac{15}{2}a = 9$$

$$a = \frac{6}{5}$$

따라서 $f(x) = (x-4)\left(x - \frac{6}{5}\right)$ 이므로

$$f(9) = (9-4)\left(9 - \frac{6}{5}\right)$$

$$= 5 \times \frac{39}{5} = 39$$

정답 39

[다른 풀이]

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt \quad \dots \text{㉤}$$

는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$ 인 삼차함수이다.

㉤에서

$$g(0) = 0 \quad \dots \text{㉥}$$

조건에서 $x \geq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여
 $g(x) \geq g(4)$ 이므로 삼차함수 $g(x)$ 는 구간
 $[1, \infty)$ 에서 $x=4$ 일 때 최소이자 극소이
 다. $\dots \ominus$

그러므로 $g'(4)=0 \quad \dots \omin�$

(i) $g(4) \geq 0$ 인 경우

$x \geq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여
 $g(x) \geq g(4) \geq 0$ 이므로 이 범위에서
 $|g(x)| = g(x)$
 이다.

조건에서 $x \geq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여
 $|g(x)| \geq |g(3)|$, 즉 $g(x) \geq g(3)$ 이어야 하
 므로 $g(3) = g(4)$ 이어야 한다.

이는 $\omin�$ 에 모순이다.

(ii) $g(4) < 0$ 인 경우

$x \geq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여
 $|g(x)| \geq |g(3)|$ 이려면
 $g(3) = 0 \quad \dots \omin�$
 이어야 한다.

$\omin�, \omin�$ 에서

$$g(x) = \frac{1}{3}x(x-3)(x+a)$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{a-3}{3}x^2 - ax \quad (a \text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

$$g'(x) = x^2 + \frac{2(a-3)}{3}x - a$$

$\omin�$ 에서

$$g'(4) = 16 + \frac{8}{3}(a-3) - a = 8 + \frac{5}{3}a = 0,$$

$$a = -\frac{24}{5}$$

$\omin�$ 에서

$$f(x) = g'(x) = x^2 - \frac{26}{5}x + \frac{24}{5}$$

이므로

$$f(9) = 81 - \frac{234}{5} + \frac{24}{5}$$

$$= 81 - \frac{210}{5} = 39$$

21. 출제의도 : 지수함수와 로그함수의
 그래프를 이해하고 활용할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. 곡선 $y = t - \log_2 x$ 는 곡선 $y = \log_2 x$
 를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축
 의 방향으로 t 만큼 평행이동한 것이
 므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값은
 감소한다.

또, 곡선 $y = 2^{x-t}$ 은 곡선 $y = 2^x$ 을
 x 축의 방향으로 t 만큼 평행이동한
 것이므로 x 의 값이 증가하면 y 의
 값도 증가한다.

그러므로 두 곡선 $y = t - \log_2 x$,
 $y = 2^{x-t}$ 은 한 점에서 만난다.

$t=1$ 일 때, 곡선 $y = 1 - \log_2 x$ 은
 $x=1$ 일 때 $y=1$ 이므로 점 $(1, 1)$ 을
 지난다.

또, 곡선 $y = 2^{x-1}$ 은 $x=1$ 일 때
 $y=1$ 이므로 점 $(1, 1)$ 을 지난다.

그러므로

$$f(1) = 1$$

$t=2$ 일 때, 곡선 $y = 2 - \log_2 x$ 는
 $x=2$ 일 때, $y=1$ 이므로 점 $(2, 1)$ 을
 지난다.

또, 곡선 $y = 2^{x-2}$ 은 $x=2$ 일 때,
 $y=1$ 이므로 점 $(2, 1)$ 을 지난다.

그러므로

$$f(2) = 2$$

이 명제가 참이므로

$$A = 100$$

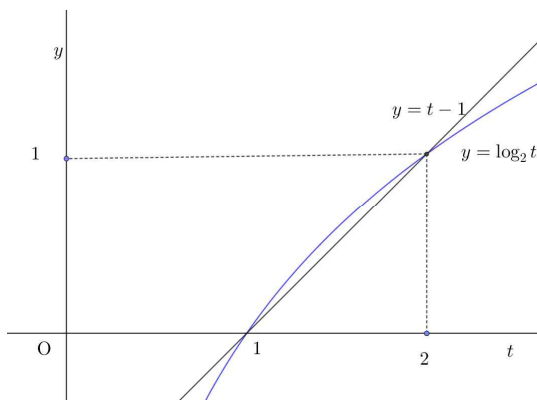
ㄴ. 곡선 $y = t - \log_2 x$ 는 곡선

$y = -\log_2 x$ 를 y 축의 방향으로 t 만큼 평행이동한 것이다. 이때 t 의 값이 증가하면 두 곡선 $y = t - \log_2 x$, $y = 2^x$ 의 교점의 x 좌표는 증가한다. 이때 곡선 $y = 2^{x-t}$ 은 곡선 $y = 2^x$ 을 x 축의 방향으로 t 만큼 평행이동한 것이므로 t 의 값이 증가하면 두 곡선 $y = t - \log_2 x$, $y = 2^{x-t}$ 의 교점의 x 좌표는 두 곡선 $y = t - \log_2 x$, $y = 2^x$ 의 교점의 x 좌표보다 커진다. 그러므로 t 의 값이 증가하면 $f(t)$ 의 값도 증가한다.

이 명제가 참이므로 $B = 10$

- ㄷ. $g(x) = t - \log_2 x$, $h(x) = 2^{x-t}$ 이라 하면 함수 $y = g(x)$ 는 감소함수이고, 함수 $y = h(x)$ 는 증가함수이므로 $f(t) \geq t$ 이기 위해서는 $g(t) \geq h(t)$ 이어야 한다. 즉, $t - \log_2 t \geq 2^{t-t}$
 $t - 1 \geq \log_2 t$ ㉠

이때 두 함수 $y = \log_2 t$, $y = t - 1$ 의 그래프는 두 점 $(1, 0)$, $(2, 1)$ 에서 만나고 다음 그림과 같다.



위에서 $1 < t < 2$ 일 때는 함수 $y = \log_2 t$ 의 그래프가 직선 $y = t - 1$ 보다 위쪽에 있으므로 ㉠을 만족시

키지 못한다.

즉, $1 < t < 2$ 일 때는 부등식

$$f(t) \geq t$$

를 만족시키지 못한다.

이 명제가 거짓이므로

$$C = 0$$

이상에서 $A = 100$, $B = 10$, $C = 0$ 이므로

$$A + B + C = 100 + 10 + 0$$

$$= 110$$

정답 110

22. 출제의도 : 도함수를 활용하고 함수의 극대, 극소를 고려하여 조건을 만족시키는 삼차함수를 찾아 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 조건을 만족시키려면 열린구간

$$\left(k, k + \frac{3}{2}\right) \text{에 두 점 } (x_1, f(x_1)),$$

$(x_2, f(x_2))$ 를 지나는 직선의 기울기와

두 점 $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$ 을 지나는

직선의 기울기의 부호가 다른 세 실수

x_1 , x_2 , x_3 이 존재해야 하는데, 그러려면

극대 또는 극소가 되는 점이 구간

$$\left(k, k + \frac{3}{2}\right) \text{에 존재해야 한다.}$$

이때 $f(x) = x^3 - 2ax^2$ 에서

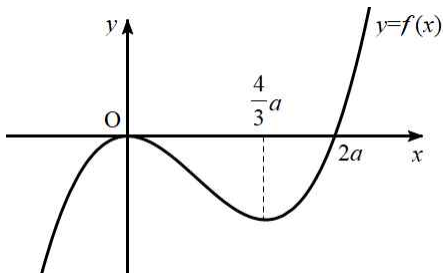
$$f'(x) = 3x^2 - 4ax$$

이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형을

a 의 값의 범위에 따라 다음과 같이 나누

어 생각할 수 있다.

(i) $a > 0$ 일 때



$k=-1$ 일 때 $x=0$ 이 구간 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

에 존재하므로 조건을 만족시킨다.

또, $x = \frac{4}{3}a$ 가 구간 $\left(k, k + \frac{3}{2}\right)$ 에 존

재하려면

$$k < \frac{4}{3}a < k + \frac{3}{2}$$

이므로

$$\frac{4}{3}a - \frac{3}{2} < k < \frac{4}{3}a$$

이어야 한다.

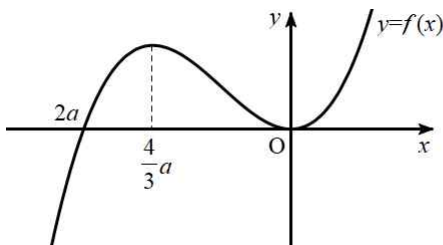
이때 조건을 만족시키는 모든 정수 k 의 값의 곱이 -12 가 되려면 이 구간에 $k=3, k=4$ 가 존재해야 하므로

$$\frac{4}{3}a - \frac{3}{2} < 3, \quad \frac{4}{3}a > 4$$

$$3 < a < \frac{27}{8}$$

그런데 이 부등식을 만족시키는 정수 a 는 존재하지 않는다.

(ii) $a < 0$ 일 때



$k=-1$ 일 때 $x=0$ 이 구간 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

에 존재하므로 조건을 만족시킨다.

또, $x = \frac{4}{3}a$ 가 구간 $\left(k, k + \frac{3}{2}\right)$ 에 존

재하려면

$$k < \frac{4}{3}a < k + \frac{3}{2}$$

이므로

$$\frac{4}{3}a - \frac{3}{2} < k < \frac{4}{3}a$$

이어야 한다.

이때 조건을 만족시키는 모든 정수 k 의 값의 곱이 -12 가 되려면 이 구간에 $k=-4, k=-3$ 이 존재해야 하므로

$$\frac{4}{3}a - \frac{3}{2} < -4, \quad \frac{4}{3}a > -3$$

$$-\frac{9}{4} < a < -\frac{15}{8}$$

즉, $a=-2$

(i), (ii)에서 $a=-2$ 이므로

$$f(x) = x^3 + 4x^2$$

$$f'(x) = 3x^2 + 8x$$

따라서

$$f'(10) = 3 \times 10^2 + 8 \times 10 = 380$$

정답 380

■ [선택: 기하]

23. ① 24. ④ 25. ② 26. ④ 27. ③
28. ⑤ 29. 80 30. 13

23. 출제의도 : 포물선의 방정식으로부터 포물선의 준선을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

포물선 $y^2 = -12x$ 의 준선의 방정식은 $x = 3$

포물선 $y^2 = -12(x-1)$ 은 포물선 $y^2 = -12x$ 를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 곡선이므로 포물선 $y^2 = -12(x-1)$ 의 준선은 직선 $x = 3$ 을 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선이다.

따라서 $k = 3 + 1 = 4$

정답 ①

24. 출제의도 : 벡터의 연산을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$2\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{BC} = q\overrightarrow{CA}$ 에서
 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$ 이므로

$2\overrightarrow{AB} + p(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -q\overrightarrow{AC}$
 $(2-p)\overrightarrow{AB} = -(p+q)\overrightarrow{AC}$

A, B, C가 서로 다른 세 점이므로
 $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$

이때 A, B, C가 한 직선 위에 있지 않으므로

$2-p = -(p+q) = 0$

이어야 한다.

따라서 $p = 2$, $q = -2$ 이므로

$p - q = 2 - (-2) = 4$

정답 ④

25. 출제의도 : 벡터의 내적을 이용하여 주어진 등식을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ 이고 정사각형 ABCD에서
 $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$ 이므로
 $\overrightarrow{AC} + 3k\overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + 3k(-\overrightarrow{AB})$
 $= (1-3k)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

이다.

$(\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AC} + 3k\overrightarrow{CD})$
 $= (\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC}) \cdot \{(1-3k)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\}$
 $= (1-3k)|\overrightarrow{AB}|^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
 $+ (k-3k^2)\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + k|\overrightarrow{BC}|^2$

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = 1$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ 이므로

$(\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AC} + 3k\overrightarrow{CD})$

$= (1-3k) + 0 + 0 + k = 1-2k$

따라서 $1-2k = 0$ 이므로

$k = \frac{1}{2}$

정답 ②

26. 출제의도 : 타원의 초점과 장축의 길이를 이용하여 조건을 만족시키는 타원의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

타원 C의 장축의 길이가 24이고

$\overrightarrow{F'P} = \overrightarrow{F'F} = 12 - (-4) = 16$ 이므로 타원의 정의에 의하여

$\overrightarrow{FP} + \overrightarrow{F'P} = \overrightarrow{FP} + 16 = 24$

$\overrightarrow{FP} = 8$

점 $F'(-4, 0)$ 이 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 한 초점이고 이 타원의 중심은 원점이므로 나머지 한 초점은 $A(4, 0)$ 이다. 또한, 타원의 방정식에서

$$a^2 - b^2 = 4^2 = 16 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

이다.

점 Q 는 선분 $F'P$ 의 중점이므로

$$\overline{F'Q} = 8$$

이때

$\overline{AF'} : \overline{FF'} = \overline{QF'} : \overline{PF'}$ 이므로 삼각형 $QF'A$ 와 삼각형 $PF'F$ 는 닮음비가 1:2인 닮은 도형이다.

즉, $\overline{QA} : \overline{PF} = 1:2$ 이고 $\overline{PF} = 8$ 이므로 $\overline{QA} = 4$

즉, $\overline{F'Q} + \overline{QA} = 8 + 4 = 12$ 이므로

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 장축의 길이는 12이다.

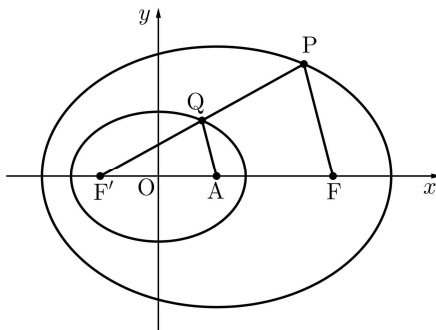
$2a = 12$ 에서 $a = 6$ 이므로 $a^2 = 36$

$\textcircled{7}$ 에 대입하면 $b^2 = 20$

따라서 $\overline{PF} + a^2 + b^2 = 8 + 36 + 20 = 64$

정답 ④

[참고] 점 P 가 제1사분면에 있다고 가정하면 다음과 같이 그림으로 나타낼 수 있다.



27. 출제 의도 :

포물선의 정의를 이용하여 거리의 합이 최소가 되는 점을 구할 수 있고 타원의 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 점의 y 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

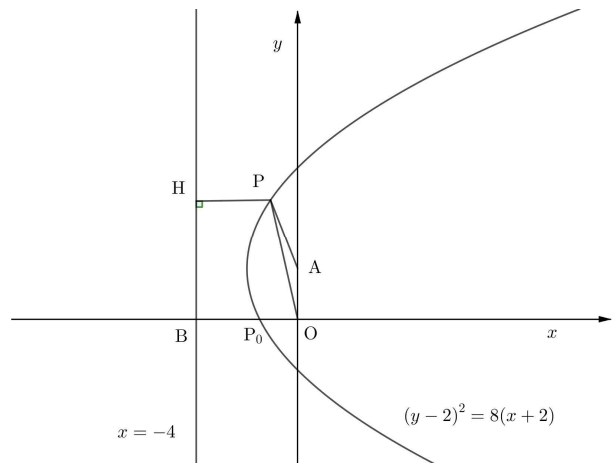
포물선 $(y-2)^2 = 8(x+2)$ 는 포물선 $y^2 = 8x$ 를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점이 점 $(2, 0)$, 준선이 직선 $x = -2$ 이므로 포물선 $(y-2)^2 = 8(x+2)$ 의 초점은 점 $A(0, 2)$, 준선은 직선 $x = -4$ 이다.

점 P 에서 준선 $x = -4$ 에 내린 수선의 발을 H , 준선이 x 축과 만나는 점을 B 라 하면

$$\begin{aligned} \overline{OP} + \overline{PA} \\ = \overline{OP} + \overline{PH} \\ \geq \overline{OB} \end{aligned}$$

이 값이 최소가 되는 점 P_0 은 포물선 $(y-2)^2 = 8(x+2)$ 와 x 축이 만나는 점이다.



이때

$$\overline{OQ} + \overline{QA} = \overline{OP_0} + \overline{P_0A} \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

에서

$$\overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0A} = \overrightarrow{OB} = 4$$

이므로 ㉠은

$$\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QA} = 4$$

그러므로 점 Q는 두 점 A, O를 초점으로 하고 거리의 합이 4인 타원 위의 점이다.

점 Q의 y좌표가 가장 큰 점은 이 타원이 y축의 양의 방향과 만나는 점이므로 이 점을 $Q_1(0, a)$ 라 하면

$$\overrightarrow{OQ_1} + \overrightarrow{Q_1A} = 4$$

에서

$$a + (a - 2) = 4$$

$$a = 3$$

또, 점 Q의 y좌표가 가장 작은 점은 이 타원이 y축의 음의 방향과 만나는 점이므로 이 점을 $Q_2(0, b)$ 라 하면

$$\overrightarrow{OQ_2} + \overrightarrow{Q_2A} = 4$$

에서

$$(0 - b) + (2 - b) = 4$$

$$b = -1$$

따라서 $M = 3$, $m = -1$ 이므로

$$M^2 + m^2 = 3^2 + (-1)^2 = 10$$

정답 ③

28. 출제의도 : 벡터로 표현된 직선과 원의 방정식을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 점을 구할 수 있는가?

점 X의 좌표를 (x, y) 라 하자.

조건 (가)에서

$$(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OD}) \cdot \overrightarrow{OC} = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{가}$$

또는

$$|\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OC}| - 3 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{나}$$

㉠에서 $\overrightarrow{DX} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ 에서 $\overrightarrow{DX} \perp \overrightarrow{OC}$ 이므로 점 X는 점 D(8, 6)을 지나고 벡터

$\overrightarrow{OC} = (4, 4)$ 에 수직인 직선 위의 점이다.

즉, 점 X는 직선 $l: y = -x + 14$ 위의 점이다.

㉡에서 $|\overrightarrow{CX}| = 3$ 이므로 점 X는 점 C(4, 4)를 지나고 반지름의 길이가 3인 원, 즉

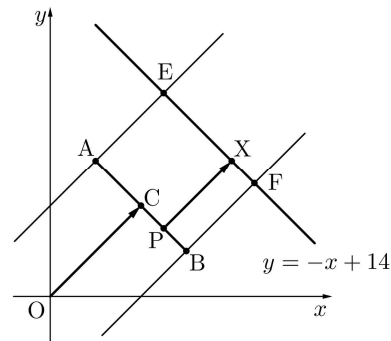
$$(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 9$$

위의 점이다.

조건 (나)를 만족시키는 점 X를 다음과 같이 경우를 나누어 생각하자.

(i) 점 X가 직선 l 위에 있는 경우

점 A를 지나고 직선 OC와 평행한 직선이 직선 l과 만나는 점을 E, 점 B를 지나고 직선 OC와 평행한 직선이 직선 l과 만나는 점을 F라 하자.

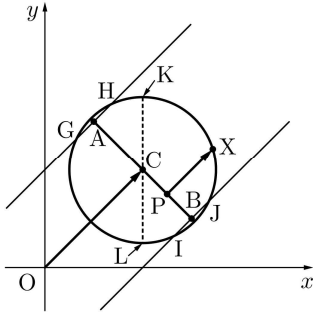


선분 EF 위의 임의의 점 X에 대하여 점 X를 지나고 직선 OC와 평행한 직선이 선분 AB와 만나는 점을 X'이라 하면 점 P가 점 X'과 일치할 때 두 벡터 \overrightarrow{PX} , \overrightarrow{OC} 는 평행하므로 조건 (나)를 만족시킨다. 직선 l 위의 점 중에서 선분 EF 위에 있지 않은 점 X에 대하여는 선분 AB 위의 임의의 점 P에 대하여 두 벡터 \overrightarrow{PX} , \overrightarrow{OC} 가 평행할 수 없으므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

즉, 점 X의 y좌표가 최대인 경우는 점 X가 점 E(5, 9)와 일치하는 경우이고, 점 X의 y좌표가 최소인 경우는 점 X가

점 F(9, 5)와 일치하는 경우이다.

(ii) 점 X가 원 $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 9$ 위에 있는 경우



그림과 같이 원이 점 A를 지나고 직선 OC와 평행한 직선과 만나는 두 점을 G, H라 하고, 원이 점 B를 지나고 직선 OC와 평행한 직선과 만나는 두 점을 I, J라 하자.

호 JH 또는 호 GI 위의 임의의 점 X에 대하여 점 X를 지나고 직선 OC와 평행한 직선이 선분 AB와 만나는 점을 X'이라 하면 점 P가 점 X'과 일치할 때 두 벡터 \overrightarrow{PX} , \overrightarrow{OC} 는 평행하므로 조건 (나)를 만족시킨다. 원 위의 점 중에서 호 JH 위에도 있지 않고 호 GI 위에도 있지 않은 점 X에 대하여는 선분 AB 위의 임의의 점 P에 대하여 두 벡터 \overrightarrow{PX} , \overrightarrow{OC} 가 평행할 수 없으므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

즉, 원 $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 9$ 위의 점 중에서 y좌표가 가장 큰 점을 K, y좌표가 가장 작은 점을 L이라 하면 점 X의 y좌표가 최대인 경우는 점 X가 점 K(4, 7)과 일치하는 경우이고, 점 X의 y좌표가 최소인 경우는 점 X가 점 L(4, 1)과 일치하는 경우이다.

(i), (ii)에서 두 점 Q, R는 각각 Q(5, 9), R(4, 1)이다. 따라서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OR} &= (5, 9) \cdot (4, 1) \\ &= 5 \times 4 + 9 \times 1 \\ &= 29\end{aligned}$$

정답 ⑤

29. 출제의도 : 초점이 일치하는 두 쌍곡선 위의 점이 조건을 만족시킬 때, 직선의 기울기를 구할 수 있는가?

쌍곡선 $C_1: x^2 - \frac{y^2}{24} = 1$ 의 주축의 길이는 2,

쌍곡선 $C_2: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{21} = 1$ 의 주축의 길이는 4,

두 쌍곡선 C_1 , C_2 의 초점은 모두 F(5, 0), F'(-5, 0)이다.

점 P는 쌍곡선 C_1 위에 있는 제2사분면 위의 점이므로

$$\overline{PF} = \overline{PF'} + 2 \quad \text{..... ㉠}$$

점 Q는 쌍곡선 C_2 위에 있는 제2사분면 위의 점이므로

$$\overline{QF} = \overline{QF'} + 4 \quad \text{..... ㉡}$$

$\overline{PQ} + \overline{QF}$, $2\overline{PF'}$, $\overline{PF} + \overline{PF'}$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로 등차중항의 성질에 의하여

$$4\overline{PF'} = (\overline{PQ} + \overline{QF}) + (\overline{PF} + \overline{PF'})$$

이때 ㉡에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{PQ} + \overline{QF} &= \overline{PQ} + \overline{QF'} + 4 \\ &= \overline{PF'} + 4\end{aligned}$$

이므로

$$4\overline{PF'} = \overline{PF'} + 4 + \overline{PF} + \overline{PF'}$$

$$2\overline{PF'} = 4 + \overline{PF}$$

㉠을 대입하면

$$2\overline{PF'} = 4 + (\overline{PF'} + 2)$$

즉, $\overline{PF'}=6$

삼각형 $PF'F$ 는 $\overline{PF'}=6$, $\overline{FF'}=10$,
 $\overline{PF}=8$ 인 직각삼각형이므로

$$\tan(\angle PF'F) = \frac{\overline{PF}}{\overline{PF'}} = \frac{4}{3}$$

따라서 직선 PQ의 기울기 m 도 $\frac{4}{3}$ 이다.

$$60m = 60 \times \frac{4}{3} = 80$$

정답 80

30. 출제의도 :

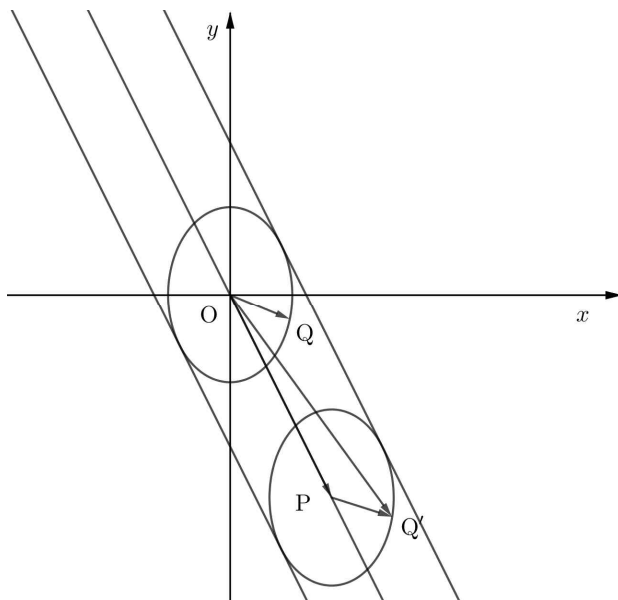
벡터의 합을 이용하여 점 X가 나타내는 영역을 나타낼 수 있고 타원의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PQ'}$ 이 되는 점을 잡으면 점 Q'은 타원 $2x^2 + y^2 = 3$ 을 중심이 P가 되도록 평행이동시킨 타원 위의 점이다.

이때,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} \\ &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ'} \\ &= \overrightarrow{OQ'}\end{aligned}$$



한편, 타원 $2x^2 + y^2 = 3$ 에 접하고 직선 $2x + y = 0$ 에 평행한 접선의 방정식은

$$y = -2x \pm \sqrt{\frac{3}{2} \times (-2)^2 + 3}$$

$$y = -2x \pm 3$$

그러므로 점 X가 나타내는 점은 직선 $y = -2x + 3$ 또는 이 직선의 아래쪽 부분과 직선 $y = -2x - 3$ 또는 이 직선의 위쪽 부분의 공통부분이다.

그러므로 x 좌표와 y 좌표가 모두 0이상인 모든 점 X가 나타내는 영역은 직선 $y = -2x + 3$ 과 x 축, y 축으로 둘러싸인 부분이다.

이때 직선 $y = -2x + 3$ 이 x 축과 만나는 점의 좌표는 $(\frac{3}{2}, 0)$, y 축과 만나는 점의 좌표는 $(0, 3)$ 이므로 구하는 영역의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{4}$$

따라서 $p = 4$, $q = 9$ 이므로

$$p + q = 4 + 9 = 13$$

정답 13

■ [선택: 확률과 통계]

23. ③ 24. ④ 25. ③ 26. ① 27. ②
28. ⑤ 29. 25 30. 51

23. 출제의도 : 같은 것이 있는 순열의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

구하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

정답 ③

24. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 두 사건에 대하여 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$P(B) = 1 - P(B^c)$$

$$= 1 - \frac{7}{18}$$

$$= \frac{11}{18}$$

따라서

두 사건 $A \cap B^c$ 와 B 는 서로소이므로

$$P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(B)$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{11}{18}$$

$$= \frac{13}{18}$$

정답 ④

25. 출제의도 : 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

흰색 손수건이 2장 이상인 사건을 A 라

하면

A^c 는 흰색 손수건이 없거나 1장인 사건이다.

$$P(A^c) = \frac{{}_4C_0 \times {}_5C_4}{{}_9C_4} + \frac{{}_4C_1 \times {}_5C_3}{{}_9C_4}$$

$$= \frac{1 \times 5}{126} + \frac{4 \times 10}{126}$$

$$= \frac{5}{14}$$

따라서

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$= 1 - \frac{5}{14}$$

$$= \frac{9}{14}$$

정답 ③

26. 출제의도 : 이항정리를 이용하여 다항식의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(x-1)^6(2x+1)^7$ 의 전개식에서 x^2 의 계수는 다음과 같이 나누어 구할 수 있다.

(i) $(x-1)^6$ 의 전개식에서 x^2 항은

$${}_6C_2 x^2 (-1)^4 = 15x^2$$

$(2x+1)^7$ 의 전개식에서 상수항은

$$1^7 = 1$$

(ii) $(x-1)^6$ 의 전개식에서 x 항은

$${}_6C_1 x^1 (-1)^5 = -6x$$

$(2x+1)^7$ 의 전개식에서 x 항은

$${}_7C_1 (2x) 1^6 = 14x$$

(iii) $(x-1)^6$ 의 전개식에서 상수항은

$$(-1)^6 = 1$$

$(2x+1)^7$ 의 전개식에서 x^2 항은

$${}_7C_2(2x)^21^5 = 21 \times 4x^2 = 84x^2$$

(i), (ii), (iii)에서 $(x-1)^6(2x+1)^7$ 의

전개식에서 x^2 의 계수는

$$\begin{aligned} & 15x^2 \times 1 + (-6x) \times 14x + 1 \times 84x^2 \\ &= 15x^2 - 84x^2 + 84x^2 \\ &= 15x^2 \end{aligned}$$

이므로 x^2 의 계수는 15이다.

정답 ①

27. 출제의도 : 독립시행의 확률을 이용하여 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 $a \times b$ 가 4의 배수인 사건을 A , $a+b \leq 7$ 인 사건을 B 라 하면 구하는 확률을 $P(B|A)$ 이다.

(i) a, b 가 모두 짝수일 확률은

$${}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

(ii) a, b 중 하나는 4이고 다른 하나는 홀수일 확률은

$${}_2C_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$$

(i), (ii)에서

$$P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

한편, 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수는 $6 \times 6 = 36$ 이다.

(iii) a, b 가 모두 짝수인 동시에 $a+b \leq 7$ 인 순서쌍 (a, b) 는

$(2, 2), (2, 4), (4, 2)$

의 3개다.

(iv) a, b 중 하나는 4이고 다른 하나는 홀수인 동시에 $a+b \leq 7$ 인 순서쌍 (a, b) 는

$(4, 1), (4, 3), (1, 4), (3, 4)$

의 4개다.

(iii), (iv)에서

$$P(A \cap B) = \frac{3+4}{36} = \frac{7}{36}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{36}}{\frac{5}{12}} = \frac{7}{15}$$

정답 ②

28. 출제의도 : 중복순열을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서 $f(1), f(3), f(5)$ 의 값은 모두 홀수이다.

(i) 함수 f 의 치역에 홀수가 1개 포함된 경우

홀수를 정하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

이때 $f(2) = 2, f(4) = 4$ 이므로

구하는 함수 f 의 개수는

3

(ii) 함수 f 의 치역에 홀수가 2개 포함된 경우

홀수를 정하는 경우의 수는

$${}_3C_2 = 3$$

① 집합 $\{f(1), f(3), f(5)\}$ 의 원소의 개수가 1이면

$f(1), f(3), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

2
 $f(2), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

2
 ② 집합 $\{f(1), f(3), f(5)\}$ 의 원소의 개수가 2이면

$f(1), f(3), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_2\Pi_3 - 2 = 6$$

$f(2), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$$2 \times 2 = 4$$

이상에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$3 \times (2 \times 2 + 6 \times 4) = 84$$

(iii) 함수 f 의 치역에 홀수가 3개 포함된 경우

홀수를 정하는 경우의 수는

$${}_3C_3 = 1$$

① 집합 $\{f(1), f(3), f(5)\}$ 의 원소의 개수가 1이면

$f(1), f(3), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$$3$$

$f(2), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$$1$$

② 집합 $\{f(1), f(3), f(5)\}$ 의 원소의 개수가 2이면

$f(1), f(3), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_3C_2 \times ({}_2\Pi_3 - 2) = 18$$

$f(2), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$$2$$

③ 집합 $\{f(1), f(3), f(5)\}$ 의 원소의 개수가 3이면

$f(1), f(3), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$$3! = 6$$

$f(2), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_3C_2 = 3$$

이상에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$1 \times (3 \times 1 + 18 \times 2 + 6 \times 3) = 57$$

(i), (ii), (iii)에서

구하는 함수 f 의 개수는

$$3 + 84 + 57 = 144$$

정답 ⑤

29. 출제의도 : 중복조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

검은색 카드의 왼쪽에 있는 흰색 카드의 장수를 a , 두 검은색 카드의 사이에 있는 흰색 카드의 장수를 b , 검은색 카드의 오른쪽에 있는 흰색 카드의 장수를 c 라 하면

$$a + b + c = 8$$

조건 (나)와 조건 (다)에서

$b \geq 2$ 이고, 검은색 카드 사이의 흰색 카드에 적힌 수가 모두 3의 배수가 아닌 경우를 제외해야 한다.

음이 아닌 정수 b' 에 대하여

$$b = b' + 2 \text{으로 놓으면}$$

$$a + (b' + 2) + c = 8$$

$$a + b' + c = 6$$

방정식 $a + b' + c = 6$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b', c 의 모든 순서쌍 (a, b', c) 의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28$$

이때 검은색 카드 사이의 흰색 카드에 적힌 수가

1, 2인 경우, 4, 5인 경우, 7, 8인 경우를 제외해야 한다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$28 - 3 = 25$$

정답 25

[다른 풀이]

(i) 왼쪽의 검은색 카드가 1이 적힌 카드의 왼쪽에 있는 경우

오른쪽의 검은색 카드가 놓이는 위치는 3이 적힌 카드의 오른쪽이므로

경우의 수는 6

(ii) 왼쪽의 검은색 카드가 1이 적힌 카드와 2가 적힌 카드의 사이에 있는 경우

오른쪽의 검은색 카드가 놓이는 위치는 3이 적힌 카드의 오른쪽이므로

경우의 수는 6

(iii) 왼쪽의 검은색 카드가 2가 적힌 카드와 3이 적힌 카드의 사이에 있는 경우

오른쪽의 검은색 카드가 놓이는 위치는 4가 적힌 카드의 오른쪽이므로

경우의 수는 5

(iv) 왼쪽의 검은색 카드가 3이 적힌 카드와 4가 적힌 카드의 사이에 있는 경우

오른쪽의 검은색 카드가 놓이는 위치는 6이 적힌 카드의 오른쪽이므로

경우의 수는 3

(v) 왼쪽의 검은색 카드가 4가 적힌 카드와 5가 적힌 카드의 사이에 있는 경우

오른쪽의 검은색 카드가 놓이는 위치는 6이 적힌 카드의 오른쪽이므로

경우의 수는 3

(vi) 왼쪽의 검은색 카드가 5가 적힌 카드와 6이 적힌 카드의 사이에 있는 경우

오른쪽의 검은색 카드가 놓이는 위치는 7이 적힌 카드의 오른쪽이므로

경우의 수는 2

(i)~(vi)에서 구하는 경우의 수는

$$6 + 6 + 5 + 3 + 3 + 2 = 25$$

30. 출제의도 : 경우의 수를 이용하여 수학적 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(i) 꺼낸 두 공이 서로 다른 색인 경우 얻는 점수가 12이므로 조건을 만족시킨다.

이 경우의 확률은

$$\frac{{}_4C_1 \times {}_4C_1}{{}_8C_2} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$$

(ii) 꺼낸 두 공이 서로 같은 색인 경우 8개의 공 중에서 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

$${}_8C_2 = 28$$

(ii-1) 꺼낸 두 공의 색이 모두 흰 색인 경우

두 공에 적힌 수의 곱이 짝수이면 조건을 만족시키므로 이 경우의 수는

$${}_4C_2 - {}_2C_2 = 6 - 1 = 5$$

(ii-2) 꺼낸 두 공이 모두 검은 색인 경우

두 공에 적힌 수의 집합이

$$\{4, 5\}, \{4, 6\}$$

이어야 하므로 이 경우의 수는 2이다.

그러므로 꺼낸 두 공이 서로 같은 색이고 얻은 점수가 24 이하의 짝수일 확률은

$$\frac{5+2}{28} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{4}{7} + \frac{1}{4} = \frac{23}{28}$$

이므로

$$p + q = 28 + 23 = 51$$

정답 51

■ [선택: 미적분]

23. ⑤ 24. ④ 25. ① 26. ② 27. ③
28. ② 29. 5 30. 24

23. 출제의도 : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 9n} - \sqrt{n^2 + 4n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{\sqrt{n^2 + 9n} + \sqrt{n^2 + 4n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{\sqrt{1 + \frac{9}{n}} + \sqrt{1 + \frac{4}{n}}} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

정답 ⑤

24. 출제의도 : 매개변수로 나타내어진 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{5(t^2 + 1) - 5t \times 2t}{(t^2 + 1)^2} \\ &= \frac{-5t^2 + 5}{(t^2 + 1)^2} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{3}{t^2 + 1} \times 2t \\ &= \frac{6t}{t^2 + 1} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{6t}{t^2 + 1} \\ &= \frac{-5t^2 + 5}{(t^2 + 1)^2} \\ &= \frac{6t(t^2 + 1)}{-5t^2 + 5} \end{aligned}$$

따라서 $t = 2$ 일 때 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\frac{6 \times 2 \times (2^2 + 1)}{-5 \times 2^2 + 5} = \frac{60}{-15} = -4$$

정답 ④

25. 출제의도 : 지수함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{ax+b} - 8}{2^{bx} - 1} = 16 \text{에서}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

이때 함수 $2^{ax+b} - 8$ 은 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2^{ax+b} - 8) = 2^b - 8 = 0$$

$$2^b = 8$$

$$b = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{ax+3} - 8}{2^{3x} - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8(2^{ax} - 1)}{2^{3x} - 1}$$

$$= \frac{8a}{3} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2^{ax} - 1}{ax}}{\frac{2^{3x} - 1}{3x}}$$

$$= \frac{8a}{3} \times \frac{\ln 2}{\ln 2}$$

$$= \frac{8a}{3}$$

이므로

$$\frac{8a}{3} = 16 \text{에서}$$

$$a = 6$$

따라서

$$a + b = 6 + 3 = 9$$

정답 ①

26. 출제의도 : 미분법을 이용하여 방정식이 서로 다른 실근의 개수가 2일 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$x^2 - 5x + 2\ln x = t \text{ 에서}$$

$$f(x) = x^2 - 5x + 2\ln x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 2x - 5 + \frac{2}{x}$$

$$= \frac{2x^2 - 5x + 2}{x}$$

$$= \frac{(2x-1)(x-2)}{x}$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)		$\frac{1}{2}$		2	
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗

이때 함수 $f(x)$ 의 극댓값은

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5 \times \frac{1}{2} + 2\ln \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{9}{4} - 2\ln 2$$

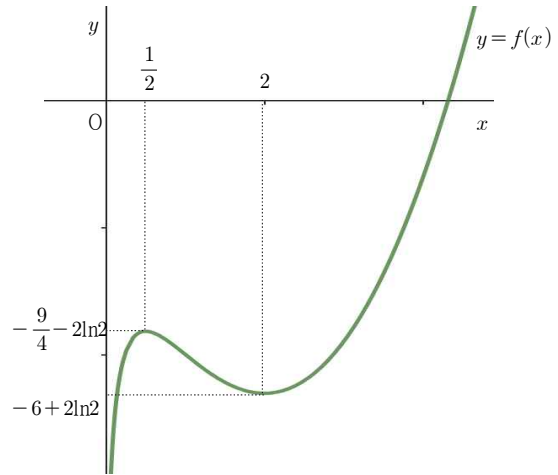
극솟값은

$$f(2) = 2^2 - 5 \times 2 + 2\ln 2$$

$$= -6 + 2\ln 2$$

이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과

같다.



이때 x 에 대한 방정식 $x^2 - 5x + 2\ln x = t$ 이 서로 다른 실근의 개수가 2가 되기 위해서는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = t$ 의 교점의 개수가 2가 되어야 하므로

$$t = -\frac{9}{4} - 2\ln 2 \text{ 또는 } t = -6 + 2\ln 2$$

따라서 모든 실수 t 의 값의 합은

$$\left(-\frac{9}{4} - 2\ln 2\right) + (-6 + 2\ln 2) = -\frac{33}{4}$$

정답 ②

27. 출제의도 : 두 직선이 이루는 예각의 크기를 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$y = \sin x \text{에서 } y' = \cos x \text{ 이므로}$$

곡선 $y = \sin x$ 위의 점 $P(t, \sin t)$ 에서의 접선의 기울기는 $\cos t$ 이다.

따라서 점 P 에서의 접선과 점 P 를 지나고 기울기가 -1 인 직선이 이루는 예각의 크기가 θ 이므로

$$\tan \theta = \left| \frac{\cos t - (-1)}{1 + \cos t \times (-1)} \right|$$

$$= \left| \frac{\cos t + 1}{1 - \cos t} \right|$$

그런데 $0 < t < \pi$ 이므로

$$\tan \theta = \frac{\cos t + 1}{1 - \cos t}$$

따라서

$$\lim_{t \rightarrow \pi^-} \frac{\tan \theta}{(\pi - t)^2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \pi^-} \frac{\frac{\cos t + 1}{1 - \cos t}}{(\pi - t)^2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \pi^-} \frac{\cos t + 1}{(\pi - t)^2 (1 - \cos t)}$$

이므로

$\pi - t = x$ 라 하면 $t \rightarrow \pi -$ 일 때 $x \rightarrow 0 +$ 이고

$$\cos t = \cos(\pi - x) = -\cos x$$

이므로

$$\lim_{t \rightarrow \pi^-} \frac{\tan \theta}{(\pi - t)^2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \pi^-} \frac{\cos t + 1}{(\pi - t)^2 (1 - \cos t)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 - \cos x}{x^2 (1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin^2 x}{x^2 (1 + \cos x)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \left\{ \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{1}{(1 + \cos x)^2} \right\}$$

$$= 1^2 \times \frac{1}{2^2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

정답 ③

28. 출제의도 : 무리수 e 를 포함하는 함수의 대칭성과 주기성을 이용하여 주어

진 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$\{f(0)\}^2 + 2f(0) = a + b \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

조건 (가)에서

양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$\{f(2)\}^2 + 2f(2) = a + b \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 에서

$$\{f(0)\}^2 + 2f(0) = \{f(2)\}^2 + 2f(2)$$

$$\{f(2) - f(0)\}\{f(2) + f(0) + 2\} = 0$$

$$f(2) = f(0) \text{ 또는 } f(2) + f(0) + 2 = 0$$

$f(2) = f(0)$ 이면

조건 (나)를 만족시키지 못하므로

$$f(2) + f(0) + 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

조건 (나)에서

$$f(0) = f(2) + 1$$

을 $\textcircled{㉢}$ 에 대입하면

$$2f(2) + 3 = 0$$

$$f(2) = -\frac{3}{2}$$

조건 (나)에서

$$f(0) = f(2) + 1 = -\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$$

$f(0) = -\frac{1}{2}$ 을 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = a + b$$

$$a + b = -\frac{3}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

한편, 조건 (가)에서

양변에 1을 더하면

$$\{f(x)\}^2 + 2f(x) + 1 = a \cos^3 \pi x \times e^{\sin^2 \pi x} + b + 1$$

$$\{f(x) + 1\}^2 = a \cos^3 \pi x \times e^{\sin^2 \pi x} + b + 1$$

이때 $g(x) = a \cos^3 \pi x \times e^{\sin^2 \pi x} + b + 1$ 이라

하면

$$g(2-x)$$

$$= a \cos^3 \pi(2-x) \times e^{\sin^2 \pi(2-x)} + b + 1$$

$$= a \cos^3 \pi x \times e^{\sin^2 \pi x} + b + 1$$

이므로 모든 실수 x 에 대하여

$$g(x) = g(2-x)$$

이다.

즉, 모든 실수 x 에 대하여

$$\{f(x)+1\}^2 = \{f(2-x)+1\}^2$$

이다. 이때,

$$\{f(x)-f(2-x)\}\{f(x)+f(2-x)+2\}=0$$

에서

$$f(x)=f(2-x) \text{ 또는 } f(x)+f(2-x)=-2$$

조건 (나)에서

$$f(0)=f(2)+1$$

이므로

$$f(x) \neq f(2-x)$$

이다.

즉, $f(x)+f(2-x)=-2$ 이므로

$x=1$ 을 대입하면

$$f(1)+f(1)=-2$$

$$f(1)=-1$$

조건 (가)에서

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$\{f(1)\}^2 + 2f(1) = -a + b$$

$$(-1)^2 + 2 \times (-1) = -a + b$$

$$-a + b = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{\text{㉑}}$$

㉑, ㉒을 연립하면

$$a = \frac{1}{8}, \quad b = -\frac{7}{8}$$

따라서

$$a \times b = \frac{1}{8} \times \left(-\frac{7}{8}\right) = -\frac{7}{64}$$

정답 ②

29. 출제의도 : 음함수의 미분법을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 상수의

값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $x^2 - 2xy + 2y^2 = 15$ 에서

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x - 2y - 2x \frac{dy}{dx} + 4y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x-2y} \quad (\text{단, } x \neq 2y)$$

점 A($a, a+k$)에서의 접선의 기울기는

$$\frac{a-(a+k)}{a-2(a+k)} = \frac{k}{a+2k}$$

점 B($b, b+k$)에서의 접선의 기울기는

$$\frac{b-(b+k)}{b-2(b+k)} = \frac{k}{b+2k}$$

두 점 A, B에서의 접선이 서로 수직이므로

$$\frac{k}{a+2k} \times \frac{k}{b+2k} = -1$$

$$ab + 2(a+b)k + 5k^2 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{\text{㉑}}$$

점 A가 곡선 $x^2 - 2xy + 2y^2 = 15$

즉, $(x-y)^2 + y^2 = 15$ 위의 점이므로

$$k^2 + (a+k)^2 = 15 \quad \cdots \cdots \textcircled{\text{㉒}}$$

점 B가 곡선 $x^2 - 2xy + 2y^2 = 15$

즉, $(x-y)^2 + y^2 = 15$ 위의 점이므로

$$k^2 + (b+k)^2 = 15 \quad \cdots \cdots \textcircled{\text{㉓}}$$

㉒, ㉓에서

$$(a+k)^2 = (b+k)^2$$

$$(a-b)(a+b+2k) = 0$$

$a \neq b$ 이므로

$$a+b = -2k \quad \cdots \cdots \textcircled{\text{㉔}}$$

㉓을 ㉑에 대입하면

$$ab - 4k^2 + 5k^2 = 0$$

$$k^2 = -ab \quad \cdots \cdots \textcircled{\text{㉕}}$$

㉒에서

$$2k^2 + 2ak + a^2 = 15$$

㉞, ㉟을 위 식에 대입하면

$$-2ab + a(-a-b) + a^2 = 15$$

$$ab = -5$$

따라서

$$k^2 = -ab = -(-5) = 5$$

정답 5

30. 출제의도 : 조건을 만족시키는 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

이라 하자. 이때 주어진 조건을 만족시키기 위해서는 $a_1 \neq 0$ 이다.

(i) $r > 1$ 인 경우

a_n 의 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(ii) $r = 1$ 인 경우

a_n 의 값이 일정한 값을 가지므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(iii) $r = -1$ 인 경우

a_n 의 값이 $a_1, -a_1, a_1, -a_1, a_1, \dots$ 이 반복되므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(iv) $r < -1$ 인 경우

a_n 의 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(v) $r = 0$ 인 경우

a_n 의 값이 첫째항을 제외하고 모두 0이므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

따라서 $-1 < r < 0$ 또는 $0 < r < 1$ 이다.

그런데 $b_3 = -1$ 이므로 $a_3 \leq -1$ 이다.

즉 $a_1 r^2 \leq -1$ 이다.

그런데 $0 < r^2 < 1$ 이므로

$$a_1 \leq -1$$

따라서 $b_1 = -1$ 이다.

또한 $a_1 \leq -1$ 이므로 $0 < r < 1$ 이면 a_n 의 모든 항은 음수이므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

따라서 $-1 < r < 0$ 이다.

① $a_2 = a_1 r \leq -1$ 일 때

$$r \geq -\frac{1}{a_1} > 0 \text{ 이므로 모순이다.}$$

따라서 $a_2 = a_1 r > -1$ 이므로

$$b_2 = a_2 = a_1 r$$

② $b_3 = -1$ 이므로 $a_3 = a_1 r^2 \leq -1$

③ $a_4 = a_1 r^3 \leq -1$ 일 때

$$a_4 = a_1 r^3 = a_1 r^2 \times r \geq -r > 0$$

이므로 모순이다.

즉 $a_4 > -1$ 이므로

$$b_4 = a_4 = a_1 r^3$$

④ $a_5 = a_1 r^4 \leq -1$ 일 때

$$b_5 = -1$$

인데

$$b_1 + b_3 + b_5 = -3$$

이므로 조건 (가)에 의하여 모순이다.

$$b_5 = a_5 = a_1 r^4$$

⑤ $a_6 = a_4 r^2$ 이고 $a_4 > -1$ 이므로

$$a_6 > -r^2 > -1$$

따라서

$$b_6 = a_6 = a_1 r^5$$

같은 방법으로 생각하면

$$b_7 = a_7, b_8 = a_8, b_9 = a_9, \dots$$

이므로

$$b_n = \begin{cases} -1 & (n=1, n=3) \\ a_1 r^{n-1} & (n=2, n \geq 4) \end{cases}$$

이다.

조건 (가)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}$$

$$= -1 + (-1) + a_1 r^4 + a_1 r^6 + a_1 r^8 + \dots$$

$$= -2 + \frac{a_1 r^4}{1-r^2} = -3$$

$$\frac{a_1 r^4}{1-r^2} = -1$$

$$a_1 r^4 = r^2 - 1 \dots \textcircled{\ominus}$$

조건 (나)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$$

$$= a_1 r + a_1 r^3 + a_1 r^5 + \dots$$

$$= \frac{a_1 r}{1-r^2} = 8$$

$$a_1 r = 8 - 8r^2 = 8(1-r^2) \dots \textcircled{\ominus}$$

$\textcircled{\ominus}$, $\textcircled{\ominus}$ 에서

$$a_1 r = -8a_1 r^4$$

이므로

$$r^3 = -\frac{1}{8}$$

즉 $r = -\frac{1}{2}$ 이므로 $\textcircled{\ominus}$ 에 대입하면

$$-\frac{1}{2}a_1 = 6, \quad a_1 = -12$$

따라서 $a_n = -12\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left| -12\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 12\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{12}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 24$$

[다른풀이]

b_2, b_3, \dots 의 값을 조사하면 다음과 같다.

(1) b_2 의 값

$a_1 \leq -1$ 이고 $-1 < r < 0$ 이므로

$$a_2 > 0$$

(2) b_3 의 값

주어진 조건으로부터

$$b_3 = -1$$

(3) b_4 의 값

$a_3 \leq -1$ 이고 $-1 < r < 0$ 이므로

$$a_4 > 0$$

그러므로

$$b_4 = a_4$$

그러므로 $a_{2n} > 0$ 이므로 $b_{2n} = a_{2n}$

조건 (나)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = 8$$

이므로

$$ar + ar^3 + ar^5 + \dots = 8$$

한편, 조건 (가)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} = -3 \quad \text{---} \textcircled{\ominus}$$

이고 $b_1 = b_3 = -1$ 이고 $b_5 = ar^4$, $b_7 = ar^6$,

...

라 하면 $\textcircled{\ominus}$ 은

$$(-1) + (-1) + r^3 \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = -3$$

$$r^3 \times 8 = -1$$

$$r = -\frac{1}{2}$$

■ [선택: 기하]

23. ① 24. ④ 25. ② 26. ④ 27. ③
28. ⑤ 29. 80 30. 13

23. 출제의도 : 포물선의 방정식으로부터 포물선의 준선을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

포물선 $y^2 = -12x$ 의 준선의 방정식은 $x = 3$

포물선 $y^2 = -12(x-1)$ 은 포물선 $y^2 = -12x$ 를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 곡선이므로 포물선 $y^2 = -12(x-1)$ 의 준선은 직선 $x = 3$ 을 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선이다.

따라서 $k = 3 + 1 = 4$

정답 ①

24. 출제의도 : 벡터의 연산을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$2\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{BC} = q\overrightarrow{CA}$ 에서
 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$ 이므로

$2\overrightarrow{AB} + p(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -q\overrightarrow{AC}$
 $(2-p)\overrightarrow{AB} = -(p+q)\overrightarrow{AC}$

A, B, C가 서로 다른 세 점이므로
 $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$

이때 A, B, C가 한 직선 위에 있지 않으므로

$2-p = -(p+q) = 0$

이어야 한다.

따라서 $p = 2$, $q = -2$ 이므로

$p - q = 2 - (-2) = 4$

정답 ④

25. 출제의도 : 벡터의 내적을 이용하여 주어진 등식을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ 이고 정사각형 ABCD에서
 $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$ 이므로
 $\overrightarrow{AC} + 3k\overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + 3k(-\overrightarrow{AB})$
 $= (1-3k)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

이다.

$(\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AC} + 3k\overrightarrow{CD})$
 $= (\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC}) \cdot \{(1-3k)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\}$
 $= (1-3k)|\overrightarrow{AB}|^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
 $+ (k-3k^2)\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + k|\overrightarrow{BC}|^2$

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = 1$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ 이므로

$(\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AC} + 3k\overrightarrow{CD})$

$= (1-3k) + 0 + 0 + k = 1-2k$

따라서 $1-2k = 0$ 이므로

$k = \frac{1}{2}$

정답 ②

26. 출제의도 : 타원의 초점과 장축의 길이를 이용하여 조건을 만족시키는 타원의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

타원 C의 장축의 길이가 24이고

$\overrightarrow{F'P} = \overrightarrow{F'F} = 12 - (-4) = 16$ 이므로 타원의 정의에 의하여

$\overrightarrow{FP} + \overrightarrow{F'P} = \overrightarrow{FP} + 16 = 24$

$\overrightarrow{FP} = 8$

점 $F'(-4, 0)$ 이 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 한 초점이고 이 타원의 중심은 원점이므로 나머지 한 초점은 $A(4, 0)$ 이다. 또한, 타원의 방정식에서

$$a^2 - b^2 = 4^2 = 16 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

이다.

점 Q 는 선분 $F'P$ 의 중점이므로

$$\overline{F'Q} = 8$$

이때

$\overline{AF'} : \overline{FF'} = \overline{QF'} : \overline{PF'}$ 이므로 삼각형 $QF'A$ 와 삼각형 $PF'F$ 는 닮음비가 1:2인 닮은 도형이다.

즉, $\overline{QA} : \overline{PF} = 1:2$ 이고 $\overline{PF} = 8$ 이므로 $\overline{QA} = 4$

즉, $\overline{F'Q} + \overline{QA} = 8 + 4 = 12$ 이므로

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 장축의 길이는 12이다.

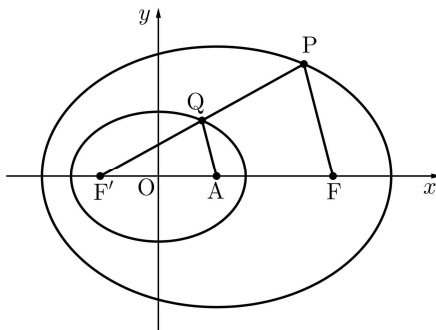
$2a = 12$ 에서 $a = 6$ 이므로 $a^2 = 36$

⑦에 대입하면 $b^2 = 20$

따라서 $\overline{PF} + a^2 + b^2 = 8 + 36 + 20 = 64$

정답 ④

[참고] 점 P 가 제1사분면에 있다고 가정하면 다음과 같이 그림으로 나타낼 수 있다.



27. 출제 의도 :

포물선의 정의를 이용하여 거리의 합이 최소가 되는 점을 구할 수 있고 타원의 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 점의 y 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

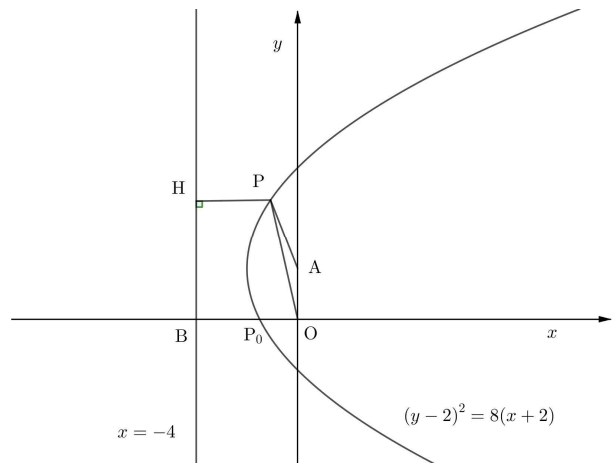
포물선 $(y-2)^2 = 8(x+2)$ 는 포물선 $y^2 = 8x$ 를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점이 점 $(2, 0)$, 준선이 직선 $x = -2$ 이므로 포물선 $(y-2)^2 = 8(x+2)$ 의 초점은 점 $A(0, 2)$, 준선은 직선 $x = -4$ 이다.

점 P 에서 준선 $x = -4$ 에 내린 수선의 발을 H , 준선이 x 축과 만나는 점을 B 라 하면

$$\begin{aligned} \overline{OP} + \overline{PA} \\ &= \overline{OP} + \overline{PH} \\ &\geq \overline{OB} \end{aligned}$$

이 값이 최소가 되는 점 P_0 은 포물선 $(y-2)^2 = 8(x+2)$ 와 x 축이 만나는 점이다.



이때

$$\overline{OQ} + \overline{QA} = \overline{OP_0} + \overline{P_0A} \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

에서

$$\overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0A} = \overrightarrow{OB} = 4$$

이므로 ㉠은

$$\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QA} = 4$$

그러므로 점 Q는 두 점 A, O를 초점으로 하고 거리의 합이 4인 타원 위의 점이다.

점 Q의 y좌표가 가장 큰 점은 이 타원이 y축의 양의 방향과 만나는 점이므로 이 점을 $Q_1(0, a)$ 라 하면

$$\overrightarrow{OQ_1} + \overrightarrow{Q_1A} = 4$$

에서

$$a + (a - 2) = 4$$

$$a = 3$$

또, 점 Q의 y좌표가 가장 작은 점은 이 타원이 y축의 음의 방향과 만나는 점이므로 이 점을 $Q_2(0, b)$ 라 하면

$$\overrightarrow{OQ_2} + \overrightarrow{Q_2A} = 4$$

에서

$$(0 - b) + (2 - b) = 4$$

$$b = -1$$

따라서 $M = 3$, $m = -1$ 이므로

$$M^2 + m^2 = 3^2 + (-1)^2 = 10$$

정답 ③

28. 출제의도 : 벡터로 표현된 직선과 원의 방정식을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 점을 구할 수 있는가?

점 X의 좌표를 (x, y) 라 하자.

조건 (가)에서

$$(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OD}) \cdot \overrightarrow{OC} = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{가}$$

또는

$$|\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OC}| - 3 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{나}$$

㉠에서 $\overrightarrow{DX} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ 에서 $\overrightarrow{DX} \perp \overrightarrow{OC}$ 이므로 점 X는 점 D(8, 6)을 지나고 벡터

$\overrightarrow{OC} = (4, 4)$ 에 수직인 직선 위의 점이다. 즉, 점 X는 직선 $l: y = -x + 14$ 위의 점이다.

㉡에서 $|\overrightarrow{CX}| = 3$ 이므로 점 X는 점 C(4, 4)를 지나고 반지름의 길이가 3인 원, 즉

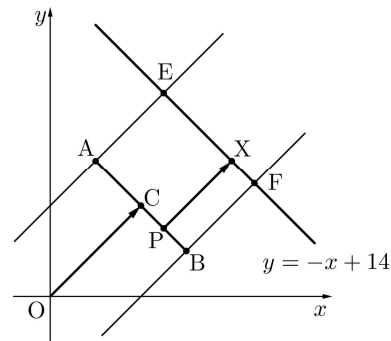
$$(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 9$$

위의 점이다.

조건 (나)를 만족시키는 점 X를 다음과 같이 경우를 나누어 생각하자.

(i) 점 X가 직선 l 위에 있는 경우

점 A를 지나고 직선 OC와 평행한 직선이 직선 l과 만나는 점을 E, 점 B를 지나고 직선 OC와 평행한 직선이 직선 l과 만나는 점을 F라 하자.

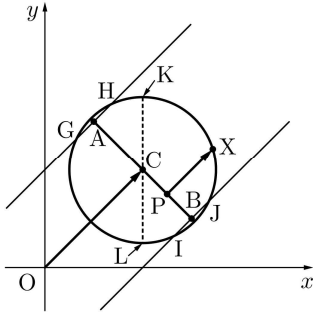


선분 EF 위의 임의의 점 X에 대하여 점 X를 지나고 직선 OC와 평행한 직선이 선분 AB와 만나는 점을 X'이라 하면 점 P가 점 X'과 일치할 때 두 벡터 \overrightarrow{PX} , \overrightarrow{OC} 는 평행하므로 조건 (나)를 만족시킨다. 직선 l 위의 점 중에서 선분 EF 위에 있지 않은 점 X에 대하여는 선분 AB 위의 임의의 점 P에 대하여 두 벡터 \overrightarrow{PX} , \overrightarrow{OC} 가 평행할 수 없으므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

즉, 점 X의 y좌표가 최대인 경우는 점 X가 점 E(5, 9)와 일치하는 경우이고, 점 X의 y좌표가 최소인 경우는 점 X가

점 F(9, 5)와 일치하는 경우이다.

(ii) 점 X가 원 $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 9$ 위에 있는 경우



그림과 같이 원이 점 A를 지나고 직선 OC와 평행한 직선과 만나는 두 점을 G, H라 하고, 원이 점 B를 지나고 직선 OC와 평행한 직선과 만나는 두 점을 I, J라 하자.

호 JH 또는 호 GI 위의 임의의 점 X에 대하여 점 X를 지나고 직선 OC와 평행한 직선이 선분 AB와 만나는 점을 X'이라 하면 점 P가 점 X'과 일치할 때 두 벡터 \overrightarrow{PX} , \overrightarrow{OC} 는 평행하므로 조건 (나)를 만족시킨다. 원 위의 점 중에서 호 JH 위에도 있지 않고 호 GI 위에도 있지 않은 점 X에 대하여는 선분 AB 위의 임의의 점 P에 대하여 두 벡터 \overrightarrow{PX} , \overrightarrow{OC} 가 평행할 수 없으므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

즉, 원 $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 9$ 위의 점 중에서 y좌표가 가장 큰 점을 K, y좌표가 가장 작은 점을 L이라 하면 점 X의 y좌표가 최대인 경우는 점 X가 점 K(4, 7)과 일치하는 경우이고, 점 X의 y좌표가 최소인 경우는 점 X가 점 L(4, 1)과 일치하는 경우이다.

(i), (ii)에서 두 점 Q, R는 각각 Q(5, 9), R(4, 1)이다. 따라서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OR} &= (5, 9) \cdot (4, 1) \\ &= 5 \times 4 + 9 \times 1 \\ &= 29\end{aligned}$$

정답 ⑤

29. 출제의도 : 초점이 일치하는 두 쌍곡선 위의 점이 조건을 만족시킬 때, 직선의 기울기를 구할 수 있는가?

쌍곡선 $C_1: x^2 - \frac{y^2}{24} = 1$ 의 주축의 길이는 2,

쌍곡선 $C_2: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{21} = 1$ 의 주축의 길이는 4,

두 쌍곡선 C_1 , C_2 의 초점은 모두 F(5, 0), F'(-5, 0)이다.

점 P는 쌍곡선 C_1 위에 있는 제2사분면 위의 점이므로

$$\overline{PF} = \overline{PF'} + 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

점 Q는 쌍곡선 C_2 위에 있는 제2사분면 위의 점이므로

$$\overline{QF} = \overline{QF'} + 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$\overline{PQ} + \overline{QF}$, $2\overline{PF'}$, $\overline{PF} + \overline{PF'}$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로 등차중항의 성질에 의하여

$$4\overline{PF'} = (\overline{PQ} + \overline{QF}) + (\overline{PF} + \overline{PF'})$$

이때 ⑧에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{PQ} + \overline{QF} &= \overline{PQ} + \overline{QF'} + 4 \\ &= \overline{PF'} + 4\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}4\overline{PF'} &= \overline{PF'} + 4 + \overline{PF} + \overline{PF'} \\ 2\overline{PF'} &= 4 + \overline{PF}\end{aligned}$$

⑦을 대입하면

$$2\overline{PF'} = 4 + (\overline{PF'} + 2)$$

즉, $\overline{PF'} = 6$

삼각형 $PF'F$ 는 $\overline{PF'} = 6$, $\overline{FF'} = 10$,
 $\overline{PF} = 8$ 인 직각삼각형이므로

$$\tan(\angle PF'F) = \frac{\overline{PF}}{\overline{PF'}} = \frac{4}{3}$$

따라서 직선 PQ의 기울기 m 도 $\frac{4}{3}$ 이다.

$$60m = 60 \times \frac{4}{3} = 80$$

정답 80

30. 출제의도 :

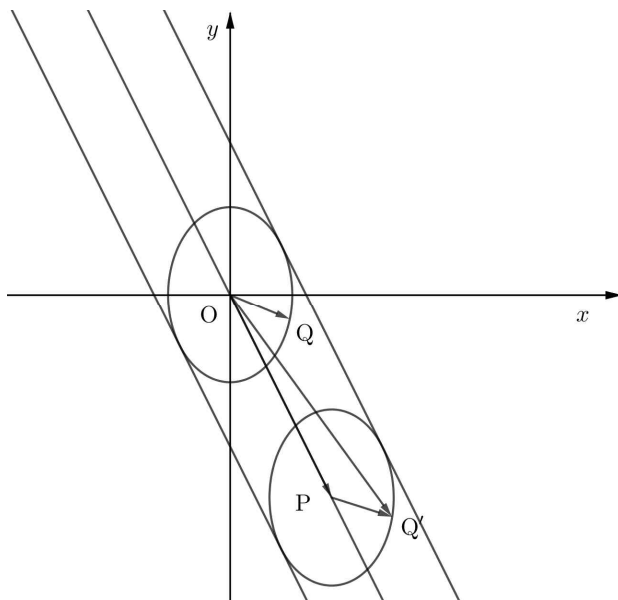
벡터의 합을 이용하여 점 X가 나타내는 영역을 나타낼 수 있고 타원의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PQ'}$ 이 되는 점을 잡으면 점 Q'은 타원 $2x^2 + y^2 = 3$ 을 중심이 P가 되도록 평행이동시킨 타원 위의 점이다.

이때,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} \\ &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ'} \\ &= \overrightarrow{OQ'}\end{aligned}$$



한편, 타원 $2x^2 + y^2 = 3$ 에 접하고 직선 $2x + y = 0$ 에 평행한 접선의 방정식은

$$y = -2x \pm \sqrt{\frac{3}{2} \times (-2)^2 + 3}$$

$$y = -2x \pm 3$$

그러므로 점 X가 나타내는 점은 직선 $y = -2x + 3$ 또는 이 직선의 아래쪽 부분과 직선 $y = -2x - 3$ 또는 이 직선의 위쪽 부분의 공통부분이다.

그러므로 x 좌표와 y 좌표가 모두 0이상인 모든 점 X가 나타내는 영역은 직선 $y = -2x + 3$ 과 x 축, y 축으로 둘러싸인 부분이다.

이때 직선 $y = -2x + 3$ 이 x 축과 만나는 점의 좌표는 $(\frac{3}{2}, 0)$, y 축과 만나는 점의 좌표는 $(0, 3)$ 이므로 구하는 영역의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{4}$$

따라서 $p = 4$, $q = 9$ 이므로

$$p + q = 4 + 9 = 13$$

정답 13