수능, 모의고사 연도별 문제모음

수1,수2 고난도 기출 문제

반: 번호: 이름:

1. 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n = \log_2 \sqrt{\frac{2(n+1)}{n+2}}$$

이다. $\sum_{k=1}^{m} a_k$의 값이 100 이하의 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 m의 값의 합은?

[4점][2020년 6월 가21]

① 150 ② 154 ③ 158 ④ 162 ⑤ 166

2. 자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오.

[4점][2022년 6월 공통21]

3. 상수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 좌표평면의 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$가 오직 하나 존재한다.

(가) 점 A는 곡선 $y=\log_2(x+2)+k$ 위의 점이다.
(나) 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 곡선 $y=4^{x+k}+2$ 위에 있다.

$a\times b$의 값을 구하시오. (단, $a\neq b$)

[4점][2022년 3월 공통21]

4. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} |\,3^{x+2}-n\,| & (x<0) \\ |\,\log_2(x+4)-n\,| & (x\geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

[4점][2023학년도 수능 공통21]

5. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

[4점][2021년 6월 21]

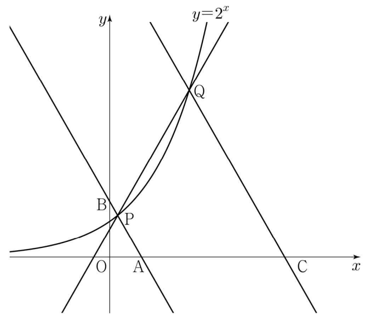
> (가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
> (나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

6. 그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위에 두 점 $\mathrm{P}(a, 2^a)$, $\mathrm{Q}(b, 2^b)$이 있다. 직선 PQ의 기울기를 m이라 할 때, 점 P를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자.

$$\overline{\mathrm{AB}}=4\overline{\mathrm{PB}},\quad \overline{\mathrm{CQ}}=3\overline{\mathrm{AB}}$$

일 때, $90\times(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $0<a<b$)

[4점][2022년 9월 공통21]

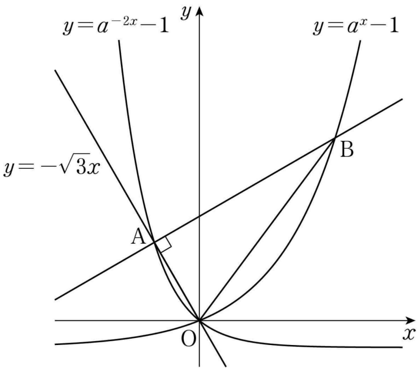


7. 그림과 같이 $a>1$인 실수 a에 대하여 두 곡선

$$y=a^{-2x}-1,\ y=a^{x}-1$$

이 있다. 곡선 $y=a^{-2x}-1$과 직선 $y=-\sqrt{3}x$가 서로 다른 두 점 O, A에서 만난다. 점 A를 지나고 직선 OA에 수직인 직선이 곡선 $y=a^{x}-1$과 제1사분면에서 만나는 점 B라 하자. $\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{3}:\sqrt{19}$일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다.)

[4점][2022년 10월 공통21]



8. $-1\le t\le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2}-t\right)=0$$

의 실근 중에서 집합 $\{x\mid 0\le x<4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2021년 6월 15]

| 보기 |

ㄱ. $-1\le t<0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t)+\beta(t)=5$이다.

ㄴ. $\{t\mid\beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)\}=\left\{t\,\middle|\,0\le t\le\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

ㄷ. $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2-t_1=\frac{1}{2}$이면 $t_1\times t_2=\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & \left(0\le x\le \dfrac{k}{6}\pi\right)\\ 2\sin\left(\dfrac{k}{6}\pi\right)-\sin x & \left(\dfrac{k}{6}\pi< x\le 2\pi\right)\end{cases}$$

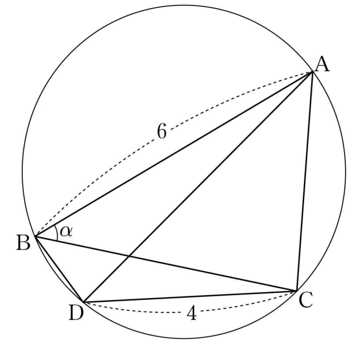
이다. 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=\sin\left(\dfrac{k}{6}\pi\right)$의 교점의 개수를 a_k라 할 때, $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$의 값은?

[4점][2021년 10월 11]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

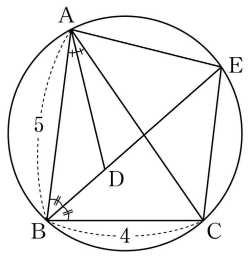
10. 그림과 같이 예각삼각형 ABC가 한 원에 내접하고 있다. $\overline{\mathrm{AB}}=6$이고, $\angle\mathrm{ABC}=\alpha$라 할 때 $\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$이다. 점 A를 지나지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{\mathrm{CD}}=4$이다. 두 삼각형 ABD, CBD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1:S_2=9:5$이다. 삼각형 ADC의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오.

[4점][2020년 3월 나29]



11. 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=4$, $\cos(\angle ABC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle ABC$의 이등분선과 $\angle CAB$의 이등분선이 만나는 점을 D, 선분 BD의 연장선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 E라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2021년 3월 15]



< 보 기 >

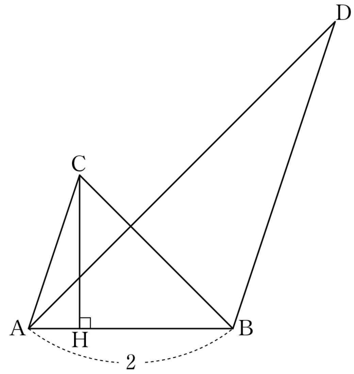
ㄱ. $\overline{AC}=6$

ㄴ. $\overline{EA}=\overline{EC}$

ㄷ. $\overline{ED}=\frac{31}{8}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}\,/\!/\,\overline{BD}$, $\overline{AC}:\overline{BD}=1:2$인 두 삼각형 ABC, ABD가 있다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발 H는 선분 AB를 $1:3$으로 내분한다.



두 삼각형 ABC, ABD의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r, R라 할 때, $4(R^2-r^2)\times\sin^2(\angle CAB)=51$이다. $\overline{AC}^2$의 값을 구하시오. (단, $\angle CAB<\frac{\pi}{2}$)

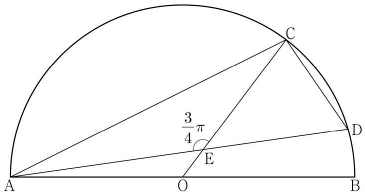
[4점][2021년 3월 21]

13. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{\mathrm{CE}}=4,\quad \overline{\mathrm{ED}}=3\sqrt{2},\quad \angle \mathrm{CEA}=\frac{3}{4}\pi$$

이다. $\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CD}}$의 값은?

[4점][2022년 9월 공통13]



① $6\sqrt{10}$ ② $10\sqrt{5}$ ③ $16\sqrt{2}$
④ $12\sqrt{5}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

14. 첫째항이 60인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{T_n\}$을

$$T_n = |a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n|$$

이라 하자. 수열 $\{T_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $T_{19} < T_{20}$	(나) $T_{20} = T_{21}$

$T_n > T_{n+1}$을 만족시키는 n의 최솟값과 최댓값의 합을 구하시오.

[4점][2013년 3월 나30]

15. 첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$과 첫째항이 자연수이고 공비가 음의 정수인 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_7+b_7의 값을 구하시오.

[4점][2019학년도 수능 나29]

(가) $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=27$

(나) $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}(a_n+|b_n|)=67$

(다) $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}(|a_n|+|b_n|)=81$

16. 공차가 d이고 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 \le d$

(나) 어떤 자연수 $k(k \ge 3)$에 대하여
세 항 a_2, a_k, a_{3k-1}이 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

$90 \le a_{16} \le 100$일 때, a_{20}의 값을 구하시오.

[4점][2021년 7월 21]

17. 공차가 자연수 d이고 모든 항이 정수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 d의 값의 합을 구하시오.

[4점][2022년 4월 공통21]

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \neq 0$이다.

(나) $a_{2m} = -a_m$이고 $\sum_{k=m}^{2m} |a_k| = 128$인 자연수 m이 존재한다.

18. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sum_{k=1}^{2n} a_k = 17n$

(나) $|a_{n+1} - a_n| = 2n - 1$

$a_2 = 9$일 때, $\sum_{n=1}^{10} a_{2n}$의 값을 구하시오.

[4점][2022년 7월 공통21]

19. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases}2a_n+a_{n+1} & (a_n \le a_{n+1})\\ a_n+a_{n+1} & (a_n > a_{n+1})\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3=2$, $a_6=19$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

[4점][2020년 9월 나21]

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

20. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}-2a_n-2 & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right)\\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}\right)\\ -2a_n+2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \le 1\right)\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5+a_6=0$이고, $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

[4점][2021년 9월 15]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

21. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lvert a_1 \rvert = 2$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\lvert a_{n+1} \rvert = 2\lvert a_n \rvert$이다.
(다) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} a_n = -14$

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$의 값을 구하시오.

[4점][2022학년도 수능 21]

22. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$a_1 = 0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \dfrac{1}{k+1} & (a_n \le 0) \\ a_n - \dfrac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$
이다.

$a_{22} = 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은?

[4점][2022년 6월 공통15]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

23. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k}=r^k$이다.
> (단, r는 $0<|r|<1$인 상수이다.)
> (나) $a_1<0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3 & (|a_n|<5) \\ -\frac{1}{2}a_n & (|a_n|\geq 5) \end{cases}$$이다.

$|a_m|\geq 5$를 만족시키는 100 이하의 자연수 m의 개수를 p라 할 때, $p+a_1$의 값은?

[4점][2022년 9월 공통15]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

24. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 두 자연수 p, q에 대하여 $S_n=pn^2-36n+q$일 때, S_n이 다음 조건을 만족시키도록 하는 p의 최솟값을 p_1이라 하자.

> 임의의 두 자연수 i, j에 대하여 $i\neq j$이면 $S_i\neq S_j$이다.

$p=p_1$일 때, $|a_k|<a_1$을 만족시키는 자연수 k의 개수가 3이 되도록 하는 모든 q의 값의 합은?

[4점][2022년 10월 공통15]

① 372 ② 377 ③ 382 ④ 387 ⑤ 392

25. 최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(1)=0$
(나) $\lim_{x \to n} \frac{f(x)}{g(x)} = (n-1)(n-2)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

$g(5)$의 값은?

[4점][2014년 6월 나21]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

26. 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최댓값을 구하시오.

[4점][2022년 10월 공통20]

(가) $\lim_{x \to 0} \frac{\lvert f(x)-1 \rvert}{x}$ 의 값이 존재한다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $xf(x) \geq -4x^2+x$이다.

27. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x)=\begin{cases} x & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \\ f(x) & (-1 \le x \le 1) \end{cases}$$

함수 $h(x)=\lim_{t\to 0+} g(x+t)\times \lim_{t\to 2+} g(x+t)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2023학년도 수능 공통14]

<보기>

ㄱ. $h(1)=3$

ㄴ. 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 감소하고 $g(-1)=-2$이면 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 최솟값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

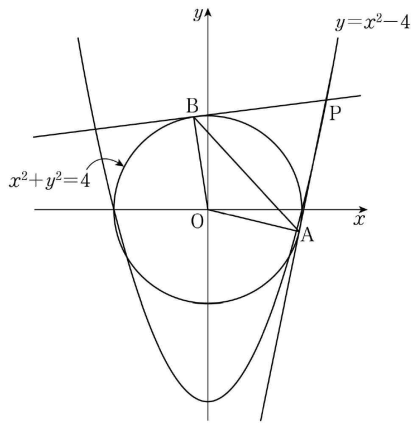
28. 곡선 $y=x^2-4$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2-4)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 $S(t)$, 삼각형 PBA의 넓이를 $T(t)$라 할 때,

$$\lim_{t\to 2+}\frac{T(t)}{(t-2)S(t)}+\lim_{t\to\infty}\frac{T(t)}{(t^4-2)S(t)}$$

의 값은? (단, O는 원점이고, $t>2$이다.)

[4점][2021년 10월 12]

① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 2



29. $a>2$인 상수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & (x \le 2) \\ -x^2+ax & (x>2) \end{cases}$$

라 하자. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $h(1)+h(3)$의 값은?

[4점][2022년 3월 공통12]

(가) $x \ne 1$, $x \ne a$일 때, $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$이다.

(나) $h(1)=h(a)$

① $-\dfrac{15}{6}$ ② $-\dfrac{7}{3}$ ③ $-\dfrac{13}{6}$ ④ -2 ⑤ $-\dfrac{11}{6}$

30. 이차함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고, 삼차함수 $g(x)$는 이차항의 계수가 0이다. 함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le 0) \\ g(x) & (x>0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킬 때, $h'(-3)+h'(4)$의 값을 구하시오.

[4점][2020년 6월 나30]

(가) 방정식 $h(x)=h(0)$의 모든 실근의 합은 1이다.

(나) 닫힌구간 $[-2, 3]$에서 함수 $h(x)$의 최댓값과 최솟값의 차는 $3+4\sqrt{3}$이다.

31. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=f(3)=0$
(나) 집합 $\{x \mid x \geq 1$이고 $f'(x)=0\}$의 원소의 개수는 1이다.

상수 a에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)f(a-x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\dfrac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}$의 값을 구하시오.

[4점][2020년 9월 나30]

32. 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} |f(x)-g(x)| & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오.

[4점][2021학년도 수능 나30]

33. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
> (나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2021년 6월 22]

34. 삼차함수 $f(x)=\frac{2\sqrt{3}}{3}x(x-3)(x+3)$에 대하여 $x\geq -3$에서 정의된 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (-3\leq x\leq 3) \\ \frac{1}{k+1}f(x-6k) & (6k-3\leq x<6k+3) \end{cases}$$

(단, k는 모든 자연수)

이다. 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$과 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{12} a_n$의 값을 구하시오.

[4점][2021년 7월 22]

35. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

[4점][2021년 9월 22]

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
> (나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 네 실근 α_1, α_2, α_3, α_4를 갖고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$이다.

36. 양수 a에 대하여 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $$|x(x-2)|g(x)=x(x-2)(|f(x)|-a)$$
> 이다.
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서 미분가능하다.

$g(3a)$의 값을 구하시오.

[4점][2021년 10월 22]

37. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 방정식 $f'(x)=0$이 닫힌구간 $[t,\ t+2]$에서 갖는 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim\limits_{t\to a+}g(t)+\lim\limits_{t\to a-}g(t)\le 2$이다.
>
> (나) $g(f(1))=g(f(4))=2,\ g(f(0))=1$

$f(5)$의 값을 구하시오.

[4점][2022학년도 수능 22]

38. 정수 k와 함수

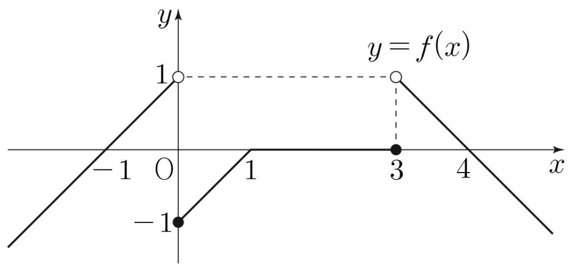
$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<0) \\ x-1 & (0\le x<1) \\ 0 & (1\le x\le 3) \\ -x+4 & (x>3) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x-k)|$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2022년 4월 공통14]

> | 보기 |
>
> ㄱ. $k=-3$일 때, $\lim\limits_{x\to 0-}g(x)=g(0)$이다.
>
> ㄴ. 함수 $f(x)+g(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 정수 k가 존재한다.
>
> ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은 -5이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



39. 두 양수 a, $b\,(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\(x+a)f(x-b) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$의 값을 구하시오.

[4점][2022년 6월 공통22]

> $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$ 의 값이 존재하지 않는 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

40. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=|f(x)|+g(x)$$

라 하자. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(k,\ 0)\,(k\neq 0)$에서의 접선의 방정식은 $y=0$이다.
> (나) 방정식 $h(x)=0$의 실근 중에서 가장 큰 값은 12이다.

$h(3)=-\dfrac{9}{2}$일 때, $k\times\{h(6)-h(11)\}$의 값을 구하시오.
(단, k는 상수이다.)

[4점][2022년 7월 공통22]

41. 최고차항의 계수가 1이고 $x=3$에서 극댓값 8을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq t) \\ -f(x)+2f(t) & (x < t) \end{cases}$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개일 때, $f(8)$의 값을 구하시오.

[4점][2022년 9월 공통22]

42. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 구간 $(-\infty,\ t]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 m_1이라 하고, 구간 $[t,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 m_2라 할 때,

$$g(t)=m_1-m_2$$

라 하자. $k>0$인 상수 k와 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$g(t)=k$를 만족시키는 모든 실수 t의 값의 집합은 $\{t \mid 0 \leq t \leq 2\}$이다.

$g(4)=0$일 때, $k+g(-1)$의 값을 구하시오.

[4점][2022년 10월 공통22]

43. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오.

[4점][2023학년도 수능 공통22]

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$이다.
>
> (나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 $\frac{5}{2}$이다.
>
> (다) $f(0)=-3$, $f(g(1))=6$

44. $t \geq 6-3\sqrt{2}$인 실수 t에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2+tx & (x<0) \\ -3x^2+tx & (x \geq 0) \end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 실수 k의 최솟값을 $g(t)$라 하자.

> (가) 닫힌구간 $[k-1,\ k]$에서 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 최댓값을 갖는다.
>
> (나) 닫힌구간 $[k,\ k+1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=k+1$에서 최솟값을 갖는다.

$3\int_{2}^{4}\{6g(t)-3\}^2\,dt$의 값을 구하시오.

[4점][2020년 7월 나30]

45. 함수 $f(x)=\begin{cases}-3x^2 & (x<1)\\ 2(x-3) & (x\geq 1)\end{cases}$ 에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x (t-1)f(t)\,dt$$

라 할 때, 실수 t에 대하여 직선 $y=t$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 하자.
$\left|\lim_{t\to a+}h(t)-\lim_{t\to a-}h(t)\right|=2$를 만족시키는 모든 실수 a에 대하여 $|a|$의 값의 합을 S라 할 때, $30S$의 값을 구하시오.

[4점][2020년 10월 나30]

46. 양수 a와 일차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_0^x (t^2-4)\{|f(t)|-a\}\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.
(나) $g(2)=5$

$g(0)-g(-4)$의 값을 구하시오.

[4점][2021년 3월 22]

47. 실수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=3x+a,\ g(x)=\int_2^x (t+a)f(t)dt$$

라 하자. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $h(-1)$의 최솟값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2021년 4월 22]

(가) 곡선 $y=h(x)$ 위의 어떤 점에서의 접선이 x축이다. (나) 곡선 $y=\lvert h(x)\rvert$가 x축과 평행한 직선과 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값은 4이다.

48. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0인 삼차함수 $g(x)$가 있다. 양의 상수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $x\lvert g(x)\rvert=\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)dt$이다. (나) 방정식 $g(f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$\int_{-2a}^{2a} f(x)dx$의 값을 구하시오.

[4점][2022년 3월 공통22]

49. 양수 a와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x \{f'(t+a)\times f'(t-a)\}\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$과 $x=\frac{13}{2}$에서만 극값을 갖는다.

$f(0)=-\frac{1}{2}$일 때, $a\times f(1)$의 값을 구하시오.

[4점][2022년 4월 공통22]

50. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x+2) & (x<0) \\ \int_0^x tf(t)dt & (x\geq 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 실수 a에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=|g(x)-g(a)|$$

라 할 때, 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은?

[4점][2022년 7월 공통15]

① $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{7\sqrt{3}}{6}$ ③ $-\sqrt{3}$
④ $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

[해설] 수1,수2 고난도 문제

1) ④

[출제의도] 로그의 성질과 시그마의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구할 수 있는가?

$\sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m} \log_2 \sqrt{\frac{2(k+1)}{k+2}}$

$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\log_2 \frac{2(k+1)}{k+2}$

$= \frac{1}{2}\left\{\log_2 \frac{2\times 2}{3} + \log_2 \frac{2\times 3}{4} + \log_2 \frac{2\times 4}{5} + \cdots + \log_2 \frac{2\times(m+1)}{m+2}\right\}$

$= \frac{1}{2}\log_2 \left\{\frac{2\times 2}{3}\times\frac{2\times 3}{4}\times\frac{2\times 4}{5}\times\cdots\times\frac{2\times(m+1)}{m+2}\right\}$

$= \frac{1}{2}\log_2 \frac{2^{m+1}}{m+2}$

$\sum_{k=1}^{m} a_k = \mathrm{N}$ (N은 100 이하의 자연수) 라 하면

$\frac{1}{2}\log_2 \frac{2^{m+1}}{m+2} = \mathrm{N}$

$\frac{2^{m+1}}{m+2} = 2^{2\mathrm{N}}$

$2^{m+1-2\mathrm{N}} = m+2$

따라서 $m+2$는 2의 거듭제곱이어야 한다.

(ⅰ) $m+2=2^2$, 즉 $m=2$일 때

$2^{3-2\mathrm{N}} = 2^2$

$3-2\mathrm{N}=2,\ \mathrm{N}=\frac{1}{2}$

N은 100 이하의 자연수이므로 $m \neq 2$

(ⅱ) $m+2=2^3$, 즉 $m=6$일 때

$2^{7-2\mathrm{N}} = 2^3$

$7-2\mathrm{N}=3,\ \mathrm{N}=2$

(ⅲ) $m+2=2^4$, 즉 $m=14$일 때

$2^{15-2\mathrm{N}} = 2^4$

$15-2\mathrm{N}=4,\ \mathrm{N}=\frac{11}{2}$

N은 100 이하의 자연수이므로 $m \neq 14$

(ⅳ) $m+2=2^5$, 즉 $m=30$일 때

$2^{31-2\mathrm{N}} = 2^5$

$31-2\mathrm{N}=5,\ \mathrm{N}=13$

(ⅴ) $m+2=2^6$, 즉 $m=62$일 때

$2^{63-2\mathrm{N}} = 2^6$

$63-2\mathrm{N}=6,\ \mathrm{N}=\frac{57}{2}$

N은 100 이하의 자연수이므로 $m \neq 62$

(ⅵ) $m+2=2^7$, 즉 $m=126$일 때

$2^{127-2\mathrm{N}} = 2^7$

$127-2\mathrm{N}=7,\ \mathrm{N}=60$

(ⅶ) $m+2 \geq 2^8$일 때

$\mathrm{N} > 100$

(ⅰ)~(ⅶ)에서

$\therefore\ m=6,\ 30,\ 126$

따라서 모든 m의 값의 합은

$\therefore\ 6+30+126=162$

2) 426

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 모든 자연수를 찾을 수 있는가?

$4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right) = \log_8\left(\frac{3}{4n+16}\right)^2$

이므로 이 값이 정수가 되려면

$\left(\frac{3}{4n+16}\right)^2 = 8^m$ (m은 정수) …… ㉠

의 꼴이 되어야 한다.

그러려면 우선 $4n+16$이 3의 배수가 되어야 하므로

$n=3k-1$ (k는 $1 \leq k \leq 333$인 자연수)

이어야 한다. 이때 ㉠에서

$\left(\frac{1}{4k+4}\right)^2 = 2^{3m}$

$16(k+1)^2 = 2^{-3m}$

$(k+1)^2 = 2^{-3m-4}$

이어야 하므로

$(k+1)^2 = 2^2,\ 2^8,\ 2^{14}$

$k+1 = 2,\ 2^4,\ 2^7$

$k=1$ 또는 $k=15$ 또는 $k=127$

즉, $n=2$ 또는 $n=44$ 또는 $n=380$이므로 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합은

$2+44+380=426$

3) 12

[출제의도] 지수함수와 로그함수를 이용하여 점의 좌표를 구하는 문제를 해결한다.

점 $\mathrm{A}(a,\ b)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하면 $\mathrm{B}(b,\ a)$이다.

조건 (가)에서 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$가 곡선 $y=\log_2(x+2)+k$ 위의 점이므로

$b=\log_2(a+2)+k$ …… ㉠

조건 (나)에서 점 $\mathrm{B}(b,\ a)$가 곡선 $y=4^{x+k}+2$ 위의 점이므로

$a=4^{b+k}+2$ …… ㉡

㉠에서

$b-k=\log_2(a+2),\ 2^{b-k}=a+2$

$a=2^{b-k}-2$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 정리하면

$4^{b+k}+2=2^{b-k}-2$

$4^k\times 4^b - 2^{-k}\times 2^b + 4 = 0$ …… ㉣

조건을 만족시키는 점 A가 오직 하나이므로 방정식 ㉣을 만족시키는 실수 b는 오직 하나이고

$2^b=t\ (t>0)$으로 놓으면 t에 대한 이차방정식

$4^k t^2 - 2^{-k}t + 4 = 0$ …… ㉤

은 오직 하나의 양의 실근을 갖는다. t에 대한 이차방정식 ㉤의 두 근의 곱은 $\frac{4}{4^k}=4^{1-k}>0$이므로 t에 대한 이차방정식 ㉤이 오직 하나의 양의 실근을 가지려면 ㉤의 판별식을 D라 할 때 $D=0$이어야 한다.

$D=(-2^{-k})^2-4\times 4^k\times 4 = 4^{-k}-16\times 4^k=0$

위의 방정식의 양변에 4^k을 곱하여 정리하면

$2^{4k+4}=1,\ k=-1$

㉤에 대입하여 정리하면

$\frac{1}{4}t^2-2t+4=0,\ \frac{1}{4}(t-4)^2=0$

$t=4$

즉, $2^b=4$에서 $b=2$이다.

$k=-1,\ b=2$를 ㉡에 대입하여 정리하면

$a=4^{2+(-1)}+2=6$

따라서 $a\times b=6\times 2=12$

4) 33

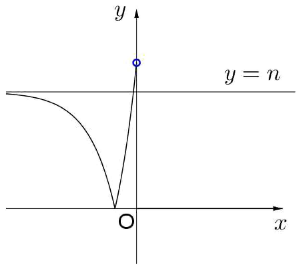
[출제의도] 지수함수의 그래프와 로그함수의 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 자연수의 값의 합을 구할 수 있는가?

함수 $y=3^{x+2}-n$의 그래프는 함수 $y=3^{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 $-n$만큼 평행이동한 그래프이다.

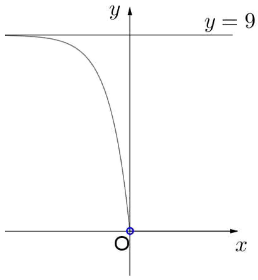
함수 $y=\left|3^{x+2}-n\right|$의 그래프는 점 $(0,\ |9-n|)$을 지나고 점근선의 방정식은 $y=n$이다.

$x<0$일 때, 자연수 n의 값에 따른 함수 $y=\left|3^{x+2}-n\right|$의 그래프는 다음과 같다.

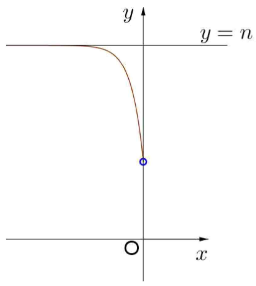
$1\le n<9$일 때,



$n=9$일 때,



$n>9$일 때,

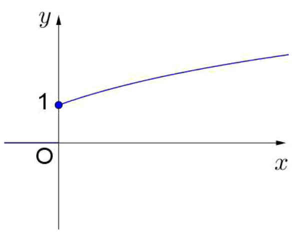


또, 함수 $y=\log_2(x+4)-n$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 $-n$만큼 평행이동한 그래프이다.

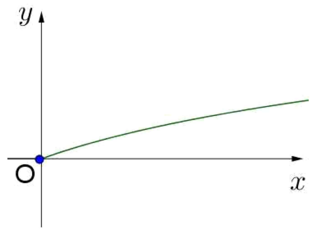
함수 $y=\left|\log_2(x+4)-n\right|$의 그래프는 점 $(0,\ |2-n|)$을 지나고 점근선의 방정식은 $x=-4$이다.

$x\ge 0$일 때, 자연수 n의 값에 따른 함수 $y=\left|\log_2(x+4)-n\right|$의 그래프는 다음과 같다.

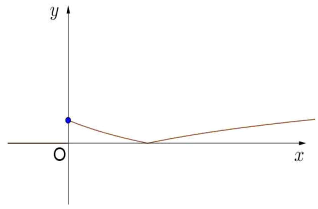
$n=1$일 때,



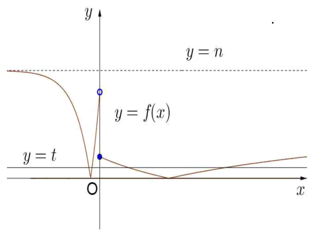
$n=2$일 때,



$n>2$일 때,



x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수 $g(t)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수와 같다.



함수 $g(t)$의 최댓값이 4이므로 $9-n>0$이고 $2-n<0$이어야 한다.

즉, $2<n<9$이다.

따라서 자연수 n의 값은 3, 4, 5, 6, 7, 8

이고, 그 합은

$3+4+5+6+7+8=33$

이다.

5) 24

[출제의도] a의 n제곱근의 의미를 이해하고 있는가?

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 최솟값이 음수이므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i) n이 홀수일 때,

방정식 $x^n=64$의 실근의 개수는 1이다.

그러므로 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$의 근이 모두 중근일 수는 없다.

(ii) n이 짝수일 때,

방정식 $x^n=64$의 실근은

$x=\sqrt[n]{64}$ 또는 $x=-\sqrt[n]{64}$

즉,

$x=2^{\frac{6}{n}}$ 또는 $x=-2^{\frac{6}{n}}$

이때, 조건 (가)를 만족하기 위해서는

$f(x)=\left(x-2^{\frac{6}{n}}\right)\left(x+2^{\frac{6}{n}}\right)$ …… ㉠

한편, 조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다. ㉠에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖고 그 값은

$-2^{\frac{6}{n}}\times 2^{\frac{6}{n}}=-2^{\frac{12}{n}}$

이 값이 음의 정수이기 위해서는 n의 값은

2, 4, 6, 12

따라서 (i), (ii)에서 n의 값의 합은

$2+4+6+12=24$

6) 220

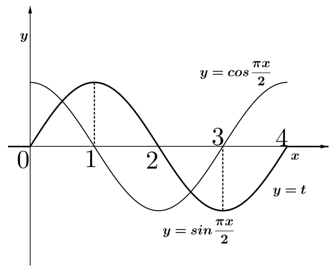
$2^a : 2^b = 1 : 4$에서 $2^b = 2^{a+2}$, $b = a+2$
P$(a,\ 2^a)$, Q$(a+2,\ 2^{a+2})$라 할 때,
기울기 $m = \dfrac{2^{a+2}-2^a}{2} = 3\times 2^{a-1}$
직선 AB의 방정식은
$y = -3\times 2^{a-1}(x-a)+2^a$에서 y절편은
$3a\times 2^{a-1}+2^a$
닮음비에 따라 $3a\times 2^{a-1}+2^a : 2^a = 4:3$가 성립하므로
$2^{a+2} = 9a\times 2^{a-1}+3\times 2^a$,
2^a으로 양변을 나눠주면
$4 = \dfrac{9}{2}a+3$, $a = \dfrac{2}{9}$,
$b = a+2$이므로 $b = \dfrac{20}{9}$
$\therefore\ 90\times(a+b) = 90\times\dfrac{22}{9} = 220$

7) 8

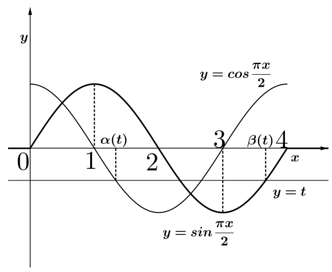
[출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 문제를 해결한다.
$\overline{\text{OA}} : \overline{\text{OB}} = \sqrt{3} : \sqrt{19}$이므로 $\overline{\text{OA}} = \sqrt{3}k\ (k>0)$이라 하면
$\overline{\text{OB}} = \sqrt{19}k$이고 $\overline{\text{AB}} = 4k$이다.
두 점 A, B의 좌표를 각각 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 하자.
직선 OA와 x축이 이루는 예각의 크기가 $60°$이므로
$x_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}k$, $y_1 = \dfrac{3}{2}k$
따라서 A$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}k,\ \dfrac{3}{2}k\right)$
직선 AB의 기울기는 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로
직선 AB와 x축이 이루는 예각의 크기가 $30°$이다.
$x_2 - x_1 = 4k\cos 30° = 2\sqrt{3}k$에서
$x_2 = x_1 + 2\sqrt{3}k = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}k$
$y_2 - y_1 = 4k\sin 30° = 2k$에서
$y_2 = y_1 + 2k = \dfrac{7}{2}k$
따라서 B$\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}k,\ \dfrac{7}{2}k\right)$
점 A는 곡선 $y = a^{-2x}-1$ 위의 점이므로
$\dfrac{3}{2}k = a^{\sqrt{3}k}-1$에서 $a^{\sqrt{3}k} = \dfrac{3k+2}{2}$ …… ㉠
점 B는 곡선 $y = a^x - 1$ 위의 점이므로
$\dfrac{7}{2}k = a^{\frac{3\sqrt{3}k}{2}}-1$에서 $a^{\frac{3\sqrt{3}}{2}k} = \dfrac{7k+2}{2}$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$\left(\dfrac{3k+2}{2}\right)^3 = \left(\dfrac{7k+2}{2}\right)^2$
$27k^3 - 44k^2 - 20k = 0$, $k(k-2)(27k+10) = 0$
$k>0$이므로 $k = 2$
따라서 $\overline{\text{AB}} = 4k = 8$

8) ②

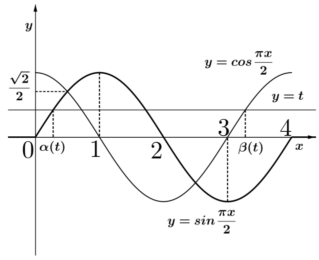
[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하고 이를 이용하여 삼각함수가 포함된 방정식의 근에 관련된 문제를 추론할 수 있는가?
ㄱ. 방정식
$\left(\sin\dfrac{\pi x}{2} - t\right)\left(\cos\dfrac{\pi x}{2} - t\right) = 0$ 에서
$\sin\dfrac{\pi x}{2} = t$ 또는 $\cos\dfrac{\pi x}{2} = t$
이 방정식의 실근은 두 함수
$y = \sin\dfrac{\pi x}{2}$, $y = \cos\dfrac{\pi x}{2}$의 그래프와 $y = t$와의 교점의 x좌표이다.
한편, 두 함수 $y = \sin\dfrac{\pi x}{2}$, $y = \cos\dfrac{\pi x}{2}$의 주기가 모두 4이므로 다음과 같다.



$-1 \le t < 0$이면 직선 $y = t$와 $\alpha(t)$, $\beta(t)$는 다음 그림과 같다.



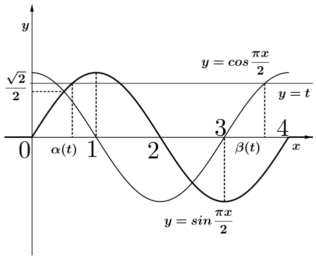
이때, 함수 $y = \cos\dfrac{\pi x}{2}$의 그래프는 함수 $y = \sin\dfrac{\pi x}{2}$의 그래프를 평행이동시키면 겹쳐질 수 있고 함수 $y = \sin\dfrac{\pi x}{2}$의 그래프는 직선 $x = 1$, $x = 3$에 대하여 대칭이고 점 $(2,\ 0)$에 대하여 대칭이다.
그러므로
$\alpha(t) = 1 + k\ \ (0 < k \le 1)$
로 놓으면
$\beta(t) = 4 - k$
그러므로
$\alpha(t) + \beta(t) = 5$ <참>
ㄴ. 실근 $\alpha(t)$, $\beta(t)$는 집합 $\{x \mid 0 \le x < 4\}$의 원소이므로
$\beta(0) = 3$, $\alpha(0) = 0$
그러므로 주어진 식은
$\{t \mid \beta(t) - \alpha(t) = \beta(0) - \alpha(0)\} = \{t \mid \beta(t) - \alpha(t) = 3\}$
(ⅰ) $0 \le t \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$일 때,
$t = 0$이면 $\beta(0) - \alpha(0) = 3 - 0 = 3$
$t \ne 0$이면 다음 그림과 같다.



이때, $\alpha(t) = k\ \left(0 < k \le \dfrac{1}{2}\right)$
이라 하면
$\beta(t) = 3 + k$

그러므로 $\beta(t)-\alpha(t)=3$

(ii) $\frac{\sqrt{2}}{2}<t<1$일 때,



이때, $\alpha(t)=k\ \left(0<k<\frac{1}{2}\right)$

이라 하면

$\beta(t)=4-k$

그러므로

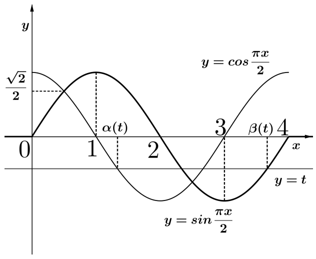
$\beta(t)-\alpha(t)=4-2k\ (0<2k<1)$

(iii) $t=1$일 때,

$\alpha(1)=0,\ \beta(1)=1$이므로

$\beta(1)-\alpha(1)=1$

(iv) $-1\le t<0$일 때,



$1<\alpha(t)\le 2,\ 3\le\beta(t)<4$이므로

$\beta(t)-\alpha(t)<3$

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에서

$\{t\mid\beta(t)-\alpha(t)=3\}=\left\{t\,\middle|\,0\le t\le\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ <참>

ㄷ. $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$이기 위해서는

$0<t_1<\frac{\sqrt{2}}{2}<t_2$

이때, $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)=\alpha$라 하면

$t_1=\sin\frac{\pi}{2}\alpha,\ t_2=\cos\frac{\pi}{2}\alpha$

이때, $t_2=t_1+\frac{1}{2}$이므로

$\cos\frac{\pi}{2}\alpha=\sin\frac{\pi}{2}\alpha+\frac{1}{2}$

이 식을 $\cos^2\frac{\pi}{2}\alpha+\sin^2\frac{\pi}{2}\alpha=1$에 대입하면

$2\sin^2\frac{\pi}{2}\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\alpha+\frac{1}{4}=1$

$8\sin^2\frac{\pi}{2}\alpha+4\sin\frac{\pi}{2}\alpha-3=0$

$\sin\frac{\pi}{2}\alpha=\frac{-2\pm\sqrt{28}}{8}$

이때, $\sin\frac{\pi}{2}\alpha>0$이므로

$\sin\frac{\pi}{2}\alpha=\frac{-1+\sqrt{7}}{4}$

그러므로

$t_1=\frac{-1+\sqrt{7}}{4}$,

$t_2=t_1+\frac{1}{2}=\frac{1+\sqrt{7}}{4}$

따라서

$t_1\times t_2=\frac{(-1+\sqrt{7})(1+\sqrt{7})}{16}=\frac{3}{8}$ <거짓>

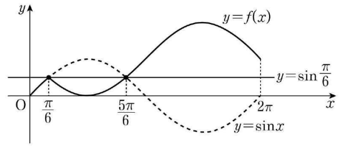
9) ④

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 문제를 해결한다.

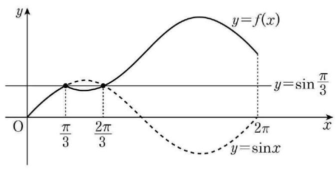
그림은 k의 값에 따른 두 곡선 $y=f(x)$, $y=\sin x$와 직선 $y=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$를 좌표평면에 나타낸 것이다.

각 그림에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$의 교점의 개수 a_k를 구하면 다음과 같다.

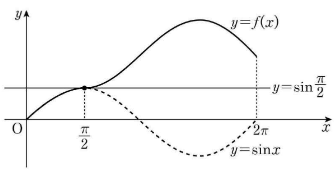
(i) $k=1$ 일 때, $a_1=2$



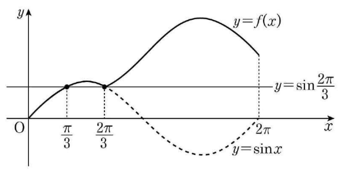
(ii) $k=2$ 일 때, $a_2=2$



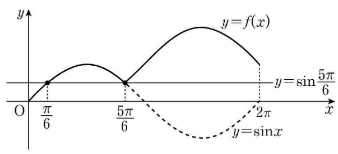
(iii) $k=3$ 일 때, $a_3=1$



(iv) $k=4$ 일 때, $a_4=2$



(v) $k=5$ 일 때, $a_5=2$



따라서 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2+2+1+2+2=9$

[다른 풀이]

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$의 교점의 개수는 방정식 $f(x)=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$의 서로 다른 실근의 개수와 같다. 즉,

(i) $0\le x\le\frac{k}{6}\pi$일 때, $\sin x=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$

(ii) $\frac{k}{6}\pi<x\le 2\pi$일 때,

$2\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)-\sin x=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$에서

$\sin x=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$

그러므로 교점의 개수는 구간 $[0,\ 2\pi]$ 에서 방정식

$\sin x=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$k=1,\ k=5$일 때, $\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}$이므로

$\sin x=\frac{1}{2}$의 서로 다른 실근의 개수는 각각 2이다.

$k=2,\ k=4$일 때, $\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 서로 다른 실근의 개수는 각각 2이다.

$k=3$일 때, $\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)=1$이므로

$\sin x=1$의 서로 다른 실근의 개수는 1 이다.

따라서 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2+2+1+2+2=9$

10) 63

[출제의도] 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 넓이 구하는 문제를 해결한다.

$\angle\mathrm{BAD}$와 $\angle\mathrm{BCD}$는 같은 호에 대한 원주각이므로 그 크기가 같다.

$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{BCD}=\theta$, $\overline{\mathrm{AD}}=a$, $\overline{\mathrm{CB}}=b$라 하면

삼각형 ABD의 넓이 S_1은

$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times6\times a\times\sin\theta=3a\sin\theta$

삼각형 CBD의 넓이 S_2는

$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CB}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times b\times4\times\sin\theta=2b\sin\theta$

$S_1:S_2=9:5$이므로 $3a:2b=9:5$

$a:b=6:5$이므로 $a=6k,\ b=5k\,(k>0)$라고 하자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$\overline{\mathrm{AC}}^2=6^2+(5k)^2-2\times6\times5k\times\cos\alpha$ …… ㉠

$\angle\mathrm{ABC}$와 $\angle\mathrm{ADC}$는 같은 호에 대한 원주각이므로

$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ADC}=\alpha$

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2=(6k)^2+4^2-2\times6k\times4\times\cos\alpha$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$11k^2+9k-20=0,\ (11k+20)(k-1)=0$

$k>0$이므로 $k=1$이고 $a=6k=6$

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

삼각형 ADC의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin\alpha=\frac{1}{2}\times6\times4\times\frac{\sqrt{7}}{4}=3\sqrt{7}$

따라서 $S^2=(3\sqrt{7})^2=63$

11) ②

[출제의도] 코사인법칙을 이용하여 도형의 성질을 추론한다.

$\angle\mathrm{ABC}=\theta$라 하자.

ㄱ. 삼각형 ABC에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\cos\theta$

이므로 $\overline{\mathrm{AC}}^2=5^2+4^2-2\times5\times4\times\frac{1}{8}=36$

그러므로 $\overline{\mathrm{AC}}=6$ (참)

ㄴ. 호 EA에 대한 원주각의 크기는 서로 같으므로 $\angle\mathrm{ACE}=\angle\mathrm{ABE}$

호 CE에 대한 원주각의 크기는 서로 같으므로 $\angle\mathrm{EAC}=\angle\mathrm{EBC}$

한편, $\angle\mathrm{ABE}=\angle\mathrm{EBC}$이므로 $\angle\mathrm{ACE}=\angle\mathrm{EAC}$

그러므로 삼각형 EAC는 $\overline{\mathrm{EA}}=\overline{\mathrm{EC}}$인 이등변삼각형이다. (참)

ㄷ. 삼각형 ABD에서 $\angle\mathrm{ADE}=\angle\mathrm{DAB}+\angle\mathrm{ABD}$

한편, $\angle\mathrm{DAB}=\angle\mathrm{CAD}$, $\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{EBC}$

그러므로 $\angle\mathrm{ADE}=\angle\mathrm{CAD}+\angle\mathrm{EBC}$

$=\angle\mathrm{CAD}+\angle\mathrm{EAC}$

$=\angle\mathrm{EAD}$

즉, 삼각형 EAD는 $\overline{\mathrm{EA}}=\overline{\mathrm{ED}}$인 이등변삼각형이다. 삼각형 EAC에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{EA}}^2+\overline{\mathrm{EC}}^2-2\times\overline{\mathrm{EA}}\times\overline{\mathrm{EC}}\times\cos(\pi-\theta)$이고

ㄴ에서 $\overline{\mathrm{EA}}=\overline{\mathrm{EC}}$이므로

$36=2\times\overline{\mathrm{EA}}^2-2\times\overline{\mathrm{EA}}^2\times\left(-\frac{1}{8}\right)$, $\overline{\mathrm{EA}}=4$

그러므로 $\overline{\mathrm{EA}}=\overline{\mathrm{ED}}$에서 $\overline{\mathrm{ED}}=4$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

12) 15

[출제의도] 사인법칙을 이용하여 문제를 해결한다.

$\overline{\mathrm{AC}}=k$라 하면 $\overline{\mathrm{BD}}=2k$이고

$\overline{\mathrm{AH}}:\overline{\mathrm{HB}}=1:3$이므로 $\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}$

$\angle\mathrm{CAB}=\theta$라 할 때, 두 삼각형 ABC, ABD에서 사인법칙을 이용하면

$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta}=2r$, $\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin(\pi-\theta)}=\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin\theta}=2R$

즉, $\overline{\mathrm{BC}}=2r\sin\theta$, $\overline{\mathrm{AD}}=2R\sin\theta$

$4(R^2-r^2)\times\sin^2\theta=(2R\sin\theta)^2-(2r\sin\theta)^2$이므로

두 식을 $(2R\sin\theta)^2-(2r\sin\theta)^2=51$에 대입하면

$\overline{\mathrm{AD}}^2-\overline{\mathrm{BC}}^2=51$ …… ㉠

삼각형 AHC에서 $\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{CA}}}=\frac{1}{2k}$이므로

두 삼각형 ABC, ABD에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\cos\theta$

$=4+k^2-2\times2\times k\times\cos\theta=k^2+2$ …… ㉡

$\overline{\mathrm{AD}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BD}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\cos(\pi-\theta)$

$=4+4k^2+2\times2\times2k\times\cos\theta=4k^2+8$ …… ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면 $\overline{\mathrm{AD}}^2-\overline{\mathrm{BC}}^2=3k^2+6=51$

즉, $k^2=15$

따라서 $\overline{\mathrm{AC}}^2=15$

13) ⑤

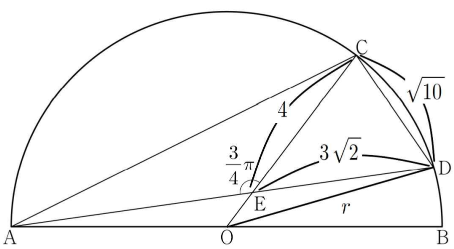
삼각형 CDE에서 코사인 법칙에 따라

$\overline{\mathrm{CD}}^2=4^2+(3\sqrt{2})^2-2\times4\times3\sqrt{2}\times\cos(\angle\mathrm{CED})$

$=16+18-24\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=10,$

$\therefore\ \overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{10}$

원의 반지름을 r이라 할 때,



삼각형 OED에서 코사인 법칙에 따라

$r^2=(r-4)^2+(3\sqrt{2})^2-2\times3\sqrt{2}\times(r-4)\times\cos\frac{3}{4}\pi$

$r^2=r^2-8r+16+18+6(r-4)$, $10-2r=0$, $r=5$

삼각형 ACD에서 $\angle \mathrm{CAD}=\theta$라 할 때, 사인법칙에 따라

$\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\theta}=2r$, $\dfrac{\sqrt{10}}{\sin\theta}=10$, $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

삼각형 AEC에서

$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\frac{3}{4}\pi}=\dfrac{4}{\sin\theta}$, $\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{4}{\frac{\sqrt{10}}{10}}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{40}{2\sqrt{5}}=4\sqrt{5}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CD}}=4\sqrt{5}\times\sqrt{10}=20\sqrt{2}$

14) 61

[출제의도] 등차수열의 합에 대한 성질을 이용하여 조건에 맞는 자연수를 추측한다.

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$T_n=\left|\dfrac{n\{120+(n-1)d\}}{2}\right|$

$T_{20}=T_{21}$ 이므로

$\left|\dfrac{20(120+19d)}{2}\right|=\left|\dfrac{21(120+20d)}{2}\right|$

i) $\dfrac{20(120+19d)}{2}=\dfrac{21(120+20d)}{2}$ 일 때, $d=-3$

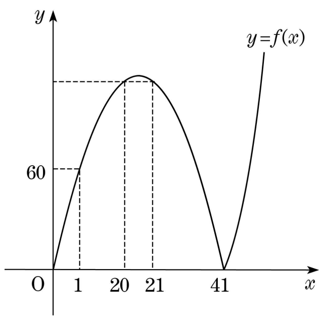
이때 조건 $T_{19}<T_{20}$이 성립한다.

ii) $\dfrac{20(120+19d)}{2}=-\dfrac{21(120+20d)}{2}$ 일 때, $d=-\dfrac{123}{20}$

이때 조건 $T_{19}<T_{20}$이 성립하지 않는다.

따라서 $T_n=\left|\dfrac{-3n^2+123n}{2}\right|$ 이다.

$f(x)=\left|\dfrac{-3x^2+123x}{2}\right|$ 라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위 그래프에서 $f(41)=0$ 이므로 $T_{41}=0$

그러므로 $T_{21}>T_{22}>T_{23}>\cdots>T_{41}=0$, $T_{41}<T_{42}$

따라서 $T_n>T_{n+1}$을 만족시키는 n의 값은

21, 22, 23, $\cdots$, 40 이다.

그러므로 최솟값과 최댓값의 합은

$21+40=61$

15) 117

[출제의도] 등차수열과 등비수열의 합을 이용하여 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

조건 (가)와 조건 (나)에서

$\sum_{n=1}^{5}(a_n+|b_n|)-\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=67-27$

이므로 $\sum_{n=1}^{5}(|b_n|-b_n)=40$ ⋯ ㉠

한편, 등비수열 b_n의 공비를 r(r는 음의 정수)라 하면

$b_1>0,\ b_2<0,\ b_3>0,\ b_4<0,\ b_5>0$ 이므로 ㉠에서

$-2(b_2+b_4)=40$

즉, $b_1r+b_1r^3=-20$ ⋯ ㉡

$b_1r(1+r^2)=-20$

이다. 이때 b_1r는 음의 정수이고, $1+r^2$은 자연수이므로

$1+r^2$은 20의 양의 약수이어야 한다.

20의 양의 약수는 1, 2, 4, 5, 10, 20이고, r가 음의 정수이므로

$r=-1$ 또는 $r=-2$ 또는 $r=-3$ 이다.

㉡에서

$r=-1$일 때, $b_1=10$

$r=-2$일 때, $b_1=2$

$r=-3$일 때, $b_1=\dfrac{2}{3}$

이때, b_1은 자연수이므로

$b_1=10,\ r=-1$ 또는 $b_1=2,\ r=-2$

(i) $b_1=10,\ r=-1$일 때

$\sum_{n=1}^{5}b_n=10$ 이고, 조건(가)에서 $\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=27$ 이므로

$\sum_{n=1}^{5}a_n=17$

이때 $\sum_{n=1}^{5}a_n=5a_3=17$ 에서 $a_3=\dfrac{17}{5}$

한편, 등차수열 a_n의 첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수이므로

등차수열 a_n의 모든 항은 정수이다.

따라서 $b_1=10,\ r=-1$은 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $b_1=2,\ r=-2$ 일 때

$\sum_{n=1}^{5}b_n=\dfrac{2\{1-(-2)^5\}}{1-(-2)}=22$

조건 (가)에서 $\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=27$ 이므로

$\sum_{n=1}^{5}a_n=5$

이때 $\sum_{n=1}^{5}a_n=5a_3=5$ 에서 $a_3=1$

또, $\sum_{n=1}^{5}|b_n|=\dfrac{2\{1-|-2|^5\}}{1-|-2|}=62$

조건 (다)에서 $\sum_{n=1}^{5}(|a_n|+|b_n|)=81$ 이므로

$\sum_{n=1}^{5}|a_n|=19$ ⋯ ㉢

한편, 등차수열 a_n의 공차를 d (d는 음의 정수)라 하면

$a_3=1$ 이므로

$a_1>a_2>a_3>0\geq a_4>a_5$

이다. 이때,

$a_1=1-2d,\ a_2=1-d,\ a_4=1+d,\ a_5=1+2d$ 이므로 ㉢에서

$(1-2d)+(1-d)+1-(1+d)-(1+2d)=19$

$1-6d=19$

$d=-3$

따라서 $a_1=1-2\times(-3)=7$

(i), (ii)에서

$a_1=7,\ d=-3,\ b_1=2,\ r=-2$

등차수열 a_n의 일반항은

$a_n=7+(n-1)\times(-3)=-3n+10$

등비수열 b_n의 일반항은

$b_n = 2\times(-2)^{n-1}$
따라서
$a_7 + b_7 = -11+128 = 117$

16) 117

[출제의도] 등차수열과 등비수열의 성질을 활용하여 문제해결하기

$a_1 = a$라 하면
조건 (나)에 의하여
$\{a+(k-1)d\}^2 = (a+d)\{a+(3k-2)d\}$
$d\{k^2-5k+3\} = a(k+1)$ …… ㉠
모든 항이 자연수이므로
조건 (가)에서 $0 < a \le d$
$a(k+1) \le d(k+1)$
$k^2-5k+3 \le k+1$
$k^2-6k+2 \le 0$
$3-\sqrt{7} \le k \le 3+\sqrt{7}$
$k \ge 3$이므로 자연수 $k=3,\ 4,\ 5$
㉠에서 $k^2-5k+3>0$이므로 $k=5,\ d=2a$
$90 \le a_{16} \le 10,\ a_{16} = a+15d = 31a$
이므로 $a=3,\ d=6$
따라서 $a_{20} = a+19d = 117$

17) 170

[출제의도] 등차수열을 이용하여 추론하기

$a_{2m} = -a_m$에서 $a_m + md = -a_m$
$2a_m = -md$이므로
m과 d 중에서 적어도 하나는 짝수이다.
m이 짝수, 즉 $m=2p$(p는 자연수)라 하면
$a_{2m}+a_m = a_{4p}+a_{2p}$
$=\{a_1+(4p-1)d\}+\{a_1+(2p-1)d\}$
$=2\{a_1+(3p-1)d\}$
$=2a_{3p}=0$
이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.
그러므로 m은 홀수이고 d는 짝수이다.
$m=2l-1$(l은 자연수)라 하면
$a_{4l-2} = -a_{2l-1}$에서
$a_{3l-1} = a_{4l-2}-(l-1)d = -a_{2l-1}-(l-1)d = -a_{3l-2}$
이고 $d>0$이므로
$1 \le n \le 3l-2$일 때 $a_n < 0$
$n \ge 3l-1$일 때 $a_n > 0$이다.
$$\sum_{k=m}^{2m}|a_k| = \sum_{k=2l-1}^{4l-2}|a_k|$$
$= -a_{2l-1}-a_{2l}-a_{2l+1}-\cdots-a_{3l-2}+a_{3l-1}+a_{3l}+a_{3l+1}+\cdots+a_{4l-2}$
$= -a_{2l-1}-(a_{2l-1}+d)-(a_{2l-1}+2d)-\cdots-(a_{2l-1}+(l-1)d)$
$+(a_{2l-1}+ld)+\{a_{2l-1}+(l+1)d\}+\cdots+\{a_{2l-1}+(2l-1)d\}$
$=-\{1+2+3\cdots+(l-1)\}+\{l+(l+1)+(l+2)+\cdots+(2l-1)\}d$
$= -\dfrac{l(l-1)}{2}d + \dfrac{l\{l+(2l-1)\}}{2}d$
$= l^2 d = 128$
l은 자연수이고 d는 짝수이므로 모든 순서쌍 $(l,\ d)$는
$(1,\ 128),\ (2,\ 32),\ (4,\ 8),\ (8,\ 2)$이다.
따라서 모든 d의 값의 합은 $2+8+32+128=170$

18) 180

[출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 활용하여 문제 해결하기

조건 (가)에 의하여
$$a_{2n-1}+a_{2n} = \sum_{k=1}^{2n}a_k - \sum_{k=1}^{2(n-1)}a_k = 17n-17(n-1) = 17\ \ (n \ge 2)$$
조건 (나)에 의하여
$|a_{2n}-a_{2n-1}| = 2(2n-1)-1 = 4n-3\ \ (n \ge 1)$
(ⅰ) $n=2$인 경우
$|a_4-a_3| = 5$이고 $a_3+a_4=17$
$(a_3,\ a_4) = (6,\ 11)$ 또는 $(a_3,\ a_4) = (11,\ 6)$
조건 (나)에 의하여
$|a_3-a_2| = |a_3-9| = 3$이므로
$a_3 = 6,\ a_4 = 11$
(ⅱ) $n=3$인 경우
$|a_6-a_5| = 9$이고 $a_5+a_6 = 17$
$(a_5,\ a_6) = (4,\ 13)$ 또는 $(a_5,\ a_6) = (13,\ 4)$
조건 (나)에 의하여
$|a_5-a_4| = |a_5-11| = 7$이므로
$a_5 = 4,\ a_6 = 13$
(ⅰ), (ⅱ)와 같은 방법을 반복하면
$a_8 = 15,\ a_{10} = 17,\ \cdots,\ a_{20} = 27$이므로
$\sum_{n=1}^{10}a_{2n}$의 값은 첫째항이 9이고 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합과 같다.
따라서 $\sum_{n=1}^{10}a_{2n} = \dfrac{10\times(18+9\times2)}{2} = 180$

19) ②

(ⅰ) $a_1 \leqq a_2$일 때,
$a_3 = 2a_1+a_2 = 2$ … ㉠
이므로 $a_2 > 0$
① $a_1 \geqq 0$일 때
$a_2 \leqq a_3$이므로 $a_4 = 2a_2+a_3 = 2a_2+2$
$a_3 \leqq a_4$이므로 $a_5 = 2a_3+a_4 = 2a_2+6$
$a_4 \leqq a_5$이므로 $a_6 = 2a_4+a_5 = 6a_2+10$
이때, $a_6 = 19$이므로 $6a_2+10 = 19$
$a_2 = \dfrac{3}{2}$
$a_2 = \dfrac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면 $2a_1+\dfrac{3}{2} = 2$
$a_1 = \dfrac{1}{4}$
② $a_1 < 0$일 때
$a_2 > a_3$이므로 $a_4 = a_2+a_3 = a_2+2$
$a_3 \leqq a_4$이므로 $a_5 = 2a_3+a_4 = a_2+6$
$a_4 \leqq a_5$이므로 $a_6 = 2a_4+a_5 = 3a_2+10$
이때, $a_6 = 19$이므로 $3a_2+10 = 19$
$a_2 = 3$
$a_2 = 3$을 ㉠에 대입하면 $2a_1+3 = 2$
$a_1 = -\dfrac{1}{2}$
(ⅱ) $a_1 > a_2$일 때
$a_3 = a_1+a_2 = 2$ … ㉡
이므로 $a_1 > 0$
$a_2 \leqq a_3$이므로 $a_4 = 2a_2+a_3 = 2a_2+2$
① $a_2 \geqq 0$일 때

$a_3 \leq a_4$이므로 $a_5 = 2a_3 + a_4 = 2a_2 + 6$

$a_4 \leq a_5$이므로 $a_6 = 2a_4 + a_5 = 6a_2 + 10$

이때, $a_6 = 19$이므로 $6a_2 + 10 = 19$

$a_2 = \frac{3}{2}$

$a_2 = \frac{3}{2}$을 ㉡에 대입하면 $a_1 + \frac{3}{2} = 2$

$a_1 = \frac{1}{2}$

이때, $a_1 < a_2$이므로 주어진 조건을 만족시키는 a_1의 값은 존재하지 않는다.

② $a_2 < 0$일 때

$a_3 > a_4$이므로 $a_5 = a_3 + a_4 = 2a_2 + 4$

$a_4 \leq a_5$이므로 $a_6 = 2a_4 + a_5 = 6a_2 + 8$

이때, $a_6 = 19$이므로 $6a_2 + 8 = 19$

$a_2 = \frac{11}{6}$

이때, $a_2 > 0$이므로 주어진 조건을 만족시키는 a_2와 a_1의 값은 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a_1 = \frac{1}{4}$ 또는 $a_1 = -\frac{1}{2}$

따라서 모든 a_1의 값의 합은 $\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

[다른 풀이]

$a_3 = 2$, $a_6 = 19$

(ⅰ) $a_3 \leq a_4$인 경우

$a_5 = 4 + a_4$, $a_6 = 3a_4 + 4$

$\therefore a_4 = 5$

① $a_2 \leq a_3$인 경우 : $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$

- $a_1 \leq a_2$일 때 $a_1 = \frac{1}{4}$

- $a_1 > a_2$일 때 $a_1 = \frac{1}{2}$(조건을 만족하지 않는다.)

② $a_2 > a_3$인 경우 : $a_2 = 3$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$

- $a_1 \leq a_2$일 때 $a_1 = -\frac{1}{2}$

- $a_1 > a_2$일 때 $a_1 = -1$(조건을 만족하지 않는다.)

(ⅱ) $a_3 > a_4$인 경우

$a_5 = a_4 + 2$, $a_6 = 3a_4 + 2$

$\therefore a_4 = \frac{13}{3}$(조건을 만족하지 않는다.)

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a_1 = \frac{1}{4}$ 또는 $a_1 = -\frac{1}{2}$

따라서 모든 a_1의 값의 합은 $\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

20) ①

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 첫째항을 구할 수 있는가?

먼저 a_5의 값을 구해 보자.

$-1 \leq a_5 \leq -\frac{1}{2}$이면 $a_6 = -2a_5 - 2$이므로

$a_5 + a_6 = 0$에서 $-a_5 - 2 = 0$

즉, $a_5 = -2$이고 이것은 조건을 만족시키지 않는다.

$-\frac{1}{2} \leq a_5 \leq \frac{1}{2}$이면 $a_6 = 2a_5$이므로

$a_5 + a_6 = 0$에서 $3a_5 = 0$

즉, $a_5 = 0$

$\frac{1}{2} < a_5 \leq 1$이면 $a_6 = -2a_5 + 2$이므로

$a_5 + a_6 = 0$에서 $-a_5 + 2 = 0$

즉, $a_5 = 2$이고 이것을 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a_5 = 0$이고 이때 $a_4 = -1$ 또는 $a_4 = 0$ 또는 $a_4 = 1$이다.

한편 $0 \leq a_{n+1} \leq 1$일 때

$a_n = \frac{1}{2}a_{n+1}$ 또는 $a_n = 1 - \frac{1}{2}a_{n+1}$

(ⅰ) $a_4 = -1$인 경우

$a_3 < 0$, $a_2 < 0$, $a_1 < 0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a_4 = 0$인 경우

㉠ $a_3 = -1$인 경우

$a_2 < 0$, $a_1 < 0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

㉡ $a_3 = 0$인 경우

$a_2 = 0$ 또는 $a_2 = 1$이고,

$a_2 = 0$일 때 $a_1 = 1$이면 조건을 만족시키고,

$a_2 = 1$일 때 $a = \frac{1}{2}$이고 이 경우도 조건을 만족시킨다.

㉢ $a_3 = 1$인 경우

$a_2 = \frac{1}{2}$이고 이때 $a_1 = \frac{1}{4}$ 또는 $a_1 = \frac{3}{4}$이며,

이것은 조건을 만족시킨다.

(ⅲ) $a_4 = 1$인 경우

$a_3 = \frac{1}{2}$이고 이때 $a_2 = \frac{1}{4}$ 또는 $a_2 = \frac{3}{4}$

㉠ $a_2 = \frac{1}{4}$인 경우

$a_1 = \frac{1}{8}$ 또는 $a_1 = \frac{7}{8}$이고 이것은 조건을 만족시킨다.

㉡ $a_2 = \frac{3}{4}$인 경우

$a_1 = \frac{3}{8}$ 또는 $a_1 = \frac{5}{8}$이고 이것은 조건을 만족시킨다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값의 합은

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} + \frac{7}{8} + \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{9}{2}$

21) 678

[출제의도] 등비수열의 합을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

조건 (가), (나)에서

수열 $\{|a_n|\}$은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이므로

$|a_n| = 2^n$

한편,

$$\sum_{k=1}^{9}|a_k| = \sum_{k=1}^{9}2^k = \frac{2(2^9-1)}{2-1} = 2^{10} - 2$$

$|a_{10}| = 2^{10}$

조건 (다)에서

$$\sum_{k=1}^{10}a_n = -14$$

를 만족하기 위해서는

$a_1 = -2$, $a_2 = -4$

$$\sum_{k=3}^{9}|a_k| = \sum_{k=3}^{9}2^k = \frac{2^3(2^7-1)}{2-1} = 2^{10} - 8,$$

$a_{10} = -1024$
이어야 한다.
따라서
$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$
$= (-2) + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^9$
$= 678$

22) ②

[출제의도] 귀납적으로 주어진 수열의 정의를 이해하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

$a_1 = 0$이므로

$a_2 = a_1 + \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{k+1}$

$a_2 > 0$이므로

$a_3 = a_2 - \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k}$

$a_3 < 0$이므로

$a_4 = a_3 + \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{2}{k+1} - \dfrac{1}{k} = \dfrac{k-1}{k(k+1)}$

이때 $k=1$이면 $a_4 = 0$이므로 $n = 3m-2$(m은 자연수)일 때 $a_n = 0$이다.
즉, $a_{22} = 0$이므로 $k=1$은 조건을 만족시킨다.
한편 $k > 1$이면 $a_4 > 0$이므로

$a_5 = a_4 - \dfrac{1}{k} = \dfrac{2}{k+1} - \dfrac{2}{k}$

$a_5 < 0$이므로

$a_6 = a_5 + \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{3}{k+1} - \dfrac{2}{k} = \dfrac{k-2}{k(k+1)}$

이때 $k=2$이면 $a_6 = 0$이므로 $n = 5m-4$(m은 자연수)일 때 $a_n = 0$이다. 즉, $a_{22} \neq 0$이므로 $k=2$는 조건을 만족시키지 않는다.
한편 $k > 2$이면 $a_6 > 0$이므로

$a_7 = a_6 - \dfrac{1}{k} = \dfrac{3}{k+1} - \dfrac{3}{k}$

$a_7 < 0$이므로

$a_8 = \dfrac{4}{k+1} - \dfrac{3}{k} = \dfrac{k-3}{k(k+1)}$

마찬가지 방법으로 계속하면
$k=3$이면 $a_8 = 0$이고 이때 $a_{22} = 0$이다.
$k=4$이면 $a_{10} = 0$이고 이때 $a_{22} \neq 0$이다.
$5 \leq k \leq 9$이면 $a_{22} \neq 0$이다.
$k=10$이면 $a_{22} = 0$이다.
$k \geq 11$이면 $a_{22} \neq 0$이다.
따라서 조건을 만족시키는 모든 k의 값은 1, 3, 10
이므로 구하는 모든 k의 값의 합은
$1+3+10 = 14$

23) ③

$a_4 = r$에서 $0 < r < 1$ 또는 $-1 < r < 0$이므로
$a_5 = a_4 + 3 = r + 3$
$a_6 = a_5 + 3 = r + 6$

$a_7 = -\dfrac{1}{2}a_6 = -\dfrac{r+6}{2}$

$a_8 = a_7 + 3 = 3 - \dfrac{r+6}{2} = -\dfrac{r}{2}$

a_{4k-2}에서 $|a_m| \geq 5$이 만족한다.

$a_8 = r^2$이므로 $r^2 = -\dfrac{r}{2}$에서 $r=0$ 또는 $-\dfrac{1}{2}$

$0 < |r| < 1$이므로 $r = -\dfrac{1}{2}$

$a_4 = a_3 + 3$이라 할 때, $-\dfrac{1}{2} = a_3 + 3$에서 $a_3 = -\dfrac{7}{2}$

얻어진 a_3의 절댓값이 5보다 작으므로 만족하므로 $a_3 = -\dfrac{7}{2}$

$a_3 = a_2 + 3$, $-\dfrac{7}{2} = a_2 + 3$에서 $a_2 = -\dfrac{13}{2} > 5$이므로

$a_3 = -\dfrac{1}{2}a_2$, $-\dfrac{7}{2} = -\dfrac{1}{2}a_2$이므로 $a_2 = 7$

$a_2 = a_1 + 3$에서 $a_1 = 4$이므로 $a_1 < 0$을 만족하지 않는다.

$a_2 = -\dfrac{1}{2}a_1$, $7 = -\dfrac{1}{2}a_1$에서 $a_1 = -14$

$\therefore$ $4k-2$는 100이하에서 25개, $a_1 = -14$의 절댓값도 5보다 크므로
$p = 26$
$\therefore$ $p + a_1 = 26 + (-14) = 12$

24) ①

[출제의도] 수열의 합의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

S_n이 주어진 조건을 만족시키면 $i \neq j$인 임의의 두 자연수 i, j에 대하여
$S_i - S_j \neq 0$이므로
$S_i - S_j = (\pi^2 - 36i + q) - (pj^2 - 36j + q) = (i-j)(pi + pj - 36) \neq 0$

따라서 $i + j \neq \dfrac{36}{p}$

$p \leq 4$이면 $i + j = \dfrac{36}{p}$인 서로 다른 두 자연수 i, j가 존재한다.

$p = 5$이면 $i + j = \dfrac{36}{p}$인 서로 다른 두 자연수 i, j가 존재하지 않는다.

따라서 p의 최솟값은 5, 즉 $p_1 = 5$이다.
$p = 5$일 때, $S_n = 5n^2 - 36n + q$이므로
$a_1 = S_1 = q - 31$,
$n \geq 2$일 때, $a_n = S_n - S_{n-1} = 10n - 41$
이때
$a_2 = -21$, $a_3 = -11$, $a_4 = -1$, $a_5 = 9$, $a_6 = 19$, $a_7 = 29$, $\cdots$
$|a_k| < a_1$을 만족시키는 자연수 k의 개수가 3이므로
k의 값은 3, 4, 5이다.
$11 < a_1 \leq 19$, $11 < q - 31 \leq 19$
$42 < q \leq 50$이다.
따라서 모든 q의 값의 합은

$43 + 44 + \cdots + 50 = \dfrac{8 \times (43 + 50)}{2} = 372$

25) ⑤

$n=1$일 때, $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ······㉠

$n=2$일 때, $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ······㉡

$n=3$일 때, $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$ ······㉢

$n=4$일 때, $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{f(x)}{g(x)} = 6$ ······㉣

조건 ㈎에서 $g(1) = 0$이므로 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$는
$g(x) = (x-1)(x^2 + ax + b)$로 놓을 수있다.
따라서 ㉠, ㉡에서 $f(x) = (x-1)^2(x-2)$이고

㉢에서 $\dfrac{f(3)}{g(3)} = \dfrac{2}{9 + 3a + b} = 2$이므로 $3a + b + 8 = 0$ ······㉤

㉣에서 $\dfrac{f(4)}{g(4)}=\dfrac{6}{16+4a+b}=6$이므로 $4a+b+15=0$ ……㉥

㉤, ㉥을 연립하여 풀면 $a=-7,\ b=13$

$\therefore\ g(x)=(x-1)(x^2-7x+13)$

따라서 구하는 $g(5)$의 값은 $4\times3=12$

26) 226

[출제의도] 함수의 극한의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

조건 (가)에 의하여

$\lim\limits_{x\to0}|f(x)-1|=0$이므로

삼차식 $f(x)-1$은 x를 인수로 갖는다.

이차식 $g(x)$에 대하여 $f(x)-1=xg(x)$라 하자.

$$\lim_{x\to0+}\frac{|f(x)-1|}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{|xg(x)|}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{|x||g(x)|}{x}$$

$$=\lim_{x\to0+}|g(x)|=|g(0)|$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{|f(x)-1|}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{|xg(x)|}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{|x||g(x)|}{x}$$

$$=-\lim_{x\to0-}|g(x)|=-|g(0)|$$

$|g(0)|=-|g(0)|$에서 $g(0)=0$

이차식 $g(x)$도 x를 인수로 가지므로

$f(x)-1=x^2(x+a)$ (a는 실수)라 하면

$f(x)=x^3+ax^2+1$

$xf(x)\geq-4x^2+x$에서

$x(x^3+ax^2+1)\geq-4x^2+x$

$x^4+ax^3+4x^2\geq0$

$x^2(x^2+ax+4)\geq0$

$x^2\geq0$이므로 모든 실수 x에 대하여

$x^2+ax+4\geq0$이 성립한다.

이차방정식 $x^2+ax+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-16\leq0$

$-4\leq a\leq4$

$f(5)=25a+126$이므로 구하는 $f(5)$의 최댓값은

$a=4$일 때, 226이다.

27) ①

[출제의도] 극한으로 표현된 함수에 대하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

ㄱ. $x>1$에서 $g(x)=x$이므로

$h(1)=\lim\limits_{t\to0+}g(1+t)\times\lim\limits_{t\to2+}g(1+t)$

$=\lim\limits_{t\to0+}(1+t)\times\lim\limits_{t\to2+}(1+t)$

$=1\times3$

$=3$ (참)

ㄴ. $h(x)=\lim\limits_{t\to0+}g(x+t)\times\lim\limits_{t\to2+}g(x+t)$ 이므로

$x<-3$일 때 $h(x)=x\times(x+2)$

$x=-3$일 때 $h(-3)=-3\times f(-1)$

$-3<x<-1$일 때 $h(x)=x\times f(x+2)$

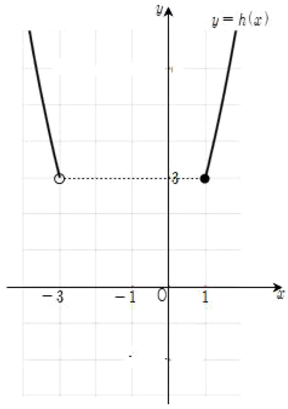
$x=-1$일 때 $h(-1)=f(-1)\times1$

$-1<x<1$일 때 $h(x)=f(x)\times(x+2)$

$x=1$일 때 $h(1)=1\times3$

$x>1$일 때 $h(x)=x\times(x+2)$

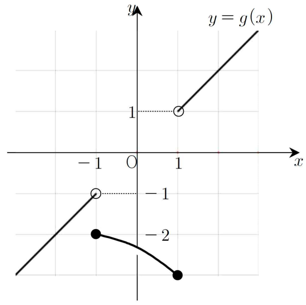
즉, $x<-3$ 또는 $x\geq1$일 때, 함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(-3)\neq3$이면 함수 $h(x)$는 $x=-3$에서 불연속이다.

즉, 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이라 할 수 없다. (거짓)

ㄷ. 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 감소하고 $g(-1)=-2$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



이때,

$h(-3)=-3\times f(-1)=-3\times(-2)=6$

$h(-1)=f(-1)\times1=-2\times1=-2$

이다.

$-3<x<-1$에서 $h(x)>0$

또 $-1<x<1$에서 $h(x)=f(x)\times(x+2)$이므로

$h'(x)=f'(x)\times(x+2)+f(x)$

$f'(x)<0,\ x+2>0,\ f(x)<0$ 이므로 $h'(x)<0$

즉, $-1<x<1$에서 함수 $h(x)$는 감소하고, $f(1)=3$이므로

함수 $h(x)$는 최솟값을 갖지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

[다른 풀이]

ㄴ. <반례>

$f(x)=2$라 하자.

$-3<x<-1$일 때, $h(x)=x\times2=2x$

$x=-1$일 때, $h(x)=2\times1=2$

$-1<x<1$일 때, $h(x)=2(x+2)$

이때, $\lim\limits_{x\to-1-}h(x)=\lim\limits_{x\to-1-}2x=-2$

$\lim\limits_{x\to-1+}h(x)=\lim\limits_{x\to-1+}2(x+2)=2$

$h(-1)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to-1-}h(x)\neq\lim\limits_{x\to-1+}h(x)$ 이다.

즉, 함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. <반례>

$f(x)=-x-3$이라 하자.

$x<-3$일 때, $h(x)=x(x+2)$

$x=-3$일 때, $h(x)=-3\times(-2)=6$

$-3<x<-1$일 때, $h(x)=x\times\{-(x+2)-3\}=-x(x+5)$

$x=-1$일 때, $h(-1)=-2\times1=-2$

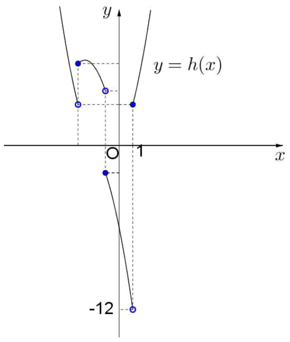
$-1<x<1$일 때, $h(x)=(-x-3)\times(x+2)=-(x+3)(x+2)$

$x=1$일 때, $h(x)=1\times3=3$

$x>1$일 때, $h(x)=x(x+2)$

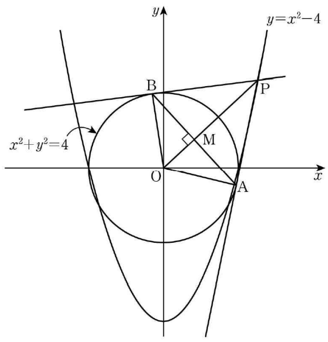
이때, $\displaystyle\lim_{x\to1-}h(x)=-12$, $h(1)=3$이므로 함수 $h(x)$의 최솟값은 없다.

(거짓)



28) ②

[출제의도] 함수의 극한을 이용하여 문제를 해결한다.



두 선분 AB, OP의 교점을 M이라 하면 직선 OP는 선분 AB를 수직이등분하므로 직각삼각형 OAP와 직각삼각형 OMA는 서로 닮음이다.

삼각형 OAP와 삼각형 OMA의 닮음비는 $\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{OA}}$이므로 넓이의 비는 $\overline{\mathrm{OP}}^2:\overline{\mathrm{OA}}^2$이다.

삼각형 OAP의 넓이는 $\dfrac{S(t)+T(t)}{2}$,

삼각형 OMA의 넓이는 $\dfrac{S(t)}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{OP}}^2:\overline{\mathrm{OA}}^2=\dfrac{S(t)+T(t)}{2}:\dfrac{S(t)}{2}$

$\overline{\mathrm{OA}}^2\times\dfrac{S(t)+T(t)}{2}=\overline{\mathrm{OP}}^2\times\dfrac{S(t)}{2}$,

$\dfrac{T(t)}{S(t)}=\dfrac{\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{OA}}^2}{\overline{\mathrm{OA}}^2}$

$\overline{\mathrm{OA}}=2$, $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+(t^2-4)^2}$이므로

$\dfrac{T(t)}{S(t)}=\dfrac{t^2+(t^2-4)^2-2^2}{2^2}=\dfrac{1}{4}(t+2)(t-2)(t^2-3)$

따라서

$$\lim_{t\to2+}\frac{T(t)}{(t-2)S(t)}+\lim_{t\to\infty}\frac{T(t)}{(t^4-2)S(t)}$$
$$=\lim_{t\to2+}\frac{(t+2)(t^2-3)}{4}+\lim_{t\to\infty}\frac{(t+2)(t-2)(t^2-3)}{4(t^4-2)}$$
$$=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

29) ③

[출제의도] 함수의 연속을 이해하여 상수의 값을 구한다.

함수 $f(x)$는 $f(1)=0$, $f(a)=0$이고,

$\displaystyle\lim_{x\to2-}f(x)=-1$, $\displaystyle\lim_{x\to2+}f(x)=-4+2a$에서

$\displaystyle\lim_{x\to2-}f(x)\neq\lim_{x\to2+}f(x)$이므로 $x=2$에서 불연속이다.

함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $h(x)$는 $x=1$, $x=a$, $x=2$에서 연속이어야 한다.

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{f(x)}=h(1)$, $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=h(a)$에서

$\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1}g(x)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=0$ 즉, $g(1)=0$, $g(a)=0$

또, $\displaystyle\lim_{x\to2-}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to2+}\frac{g(x)}{f(x)}$, $\dfrac{g(2)}{-1}=\dfrac{g(2)}{-4+2a}$이므로

$g(2)=0$이고 $g(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$이다.

$$\lim_{x\to1}h(x)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-2)(x-a)}{x-3}=\frac{1-a}{2}$$

$$\lim_{x\to a}h(x)=\lim_{x\to a}\frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{-x(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-1)(x-2)}{-x}=-\frac{(a-1)(a-2)}{a}$$

$h(1)=h(a)$이므로

$\dfrac{1-a}{2}=-\dfrac{(a-1)(a-2)}{a}$

$a>2$이므로 $a=4$

따라서

$$h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\begin{cases}\dfrac{(x-2)(x-4)}{x-3} & (x\le2)\\ -\dfrac{(x-1)(x-2)}{x} & (x>2)\end{cases}$$

이므로

$h(1)+h(3)=-\dfrac{3}{2}+\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{13}{6}$

30) 38

[출제의도] 미분을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

이차함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극대이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=-1$에서 대칭이다. 그러므로 $f(-2)=f(0)=h(0)$

이때 $h(0)=k$라 하면 $f(x)$는

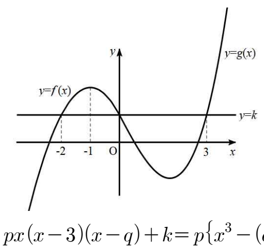
$f(x)=ax(x+2)+k=ax^2+2ax+k\,(a<0)$

로 놓을 수 있다.

한편, $g(x)$가 삼차함수이므로 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $x=0$에서의 곡선 $y=g(x)$에 접하는 접선의 기울기는 음수이어야 한다.

또, 방정식 $h(x)=h(0)$의 모든 실근이 합이 1이어야 하므로 다음 두 가지로 나눌 수 있다.

(ⅰ) $g(x)$의 최고차항의 계수가 양수인 경우



$g(x)=px(x-3)(x-q)+k=p\{x^3-(q+3)x^2+3qx\}+k$

한편, $g(x)$의 이차항의 계수가 0이므로 $q=-3$이고

$g(x)=p(x^3-9x)+k$

이때, $g'(x)=p(3x^2-9)$이므로 $g'(x)=0$에서

$x=\sqrt{3}$ 또는 $x=-\sqrt{3}$

그러므로 함수 $h(x)$는 $x=\sqrt{3}$에서 극소이다.

한편, $x=0$에서의 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기와 $x=0$에서의 곡선 $y=g(x)$의 접선의 기울기가 같아야 하고 $f'(x)=2ax+2a$,

$g'(x)=p(3x^2-9)$이므로

$2a=-9p$ ……㉠

또, 구간 $[-2,3]$에서

$h(x)$의 최댓값은 $f(-1)$, 최솟값은 $g(\sqrt{3})$이므로 ㉠을 이용하면

$f(-1)-g(\sqrt{3})=(-a+k)-(-6\sqrt{3}p+k)$

$=-a+6\sqrt{3}p=\dfrac{9}{2}p+6\sqrt{3}p=\dfrac{9+12\sqrt{3}}{2}p=3+4\sqrt{3}$

그러므로 $p=\dfrac{2}{3}$ 이고

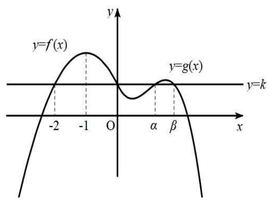
$a=-\dfrac{9}{2}p=-3$

따라서

$f'(x)=-6x-6$, $g'(x)=2x^2-6$ 이므로

$h'(-3)+h'(4)=f'(-3)+g'(4)=12+26=38$

(ii) $g(x)$의 최고차항의 계수가 음수인 경우



$g(x)=px(x-\alpha)(x-\beta)+k(\alpha+\beta=3)$ 로 놓으면

$g(x)=p\{x^3-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\}+k=p\{x^3-3x^2+\alpha\beta x\}+k$

이므로 이차항의 계수가 0이 아니다.

그러므로 이러한 경우는 없다.

따라서(i)에서 구하는 값은 38이다.

31) 105

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 $p(\neq 0)$라 하면 조건 (가)에서

$f(x)=p(x-1)(x-3)(x-q)$ (p, q는 상수)

로 놓을 수 있고, 조건 (나)에서 $q<1$이다.

이때

$f(a-x)=p(a-x-1)(a-x-3)(a-x-q)$

$\quad=-p(x-a+1)(x-a+3)(x-a+q)$

이므로

$f(x)f(a-x)=-p^2(x-1)(x-3)(x-q)$

$\quad\times(x-a+1)(x-a+3)(x-a+q)$

따라서

$g(x)=|f(x)f(a-x)|$

$\quad=|p^2||(x-1)(x-3)(x-q)\times(x-a+1)(x-a+3)(x-a+q)|$

이고 $q<1<3$이고 $a-3<a-1<a-q$이므로 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$g(x)=p^2|(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^2|$

꼴이어야 한다. 따라서

$a-3=q$, $a-1=1$, $a-q=3$ 이어야 한다.

따라서 $a=2$, $q=-1$이므로

$f(x)=p(x+1)(x-1)(x-3)$,

$f(a-x)=-p(x+1)(x-1)(x-3)=-f(x)$

이다.

따라서 $g(x)=|f(x)f(a-x)|=\{f(x)\}^2$이므로

$\dfrac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}=\dfrac{\{f(8)\}^2}{f(0)\times f(8)}=\dfrac{f(8)}{f(0)}$

$\quad=\dfrac{p\times 9\times 7\times 5}{p\times 1\times(-1)\times(-3)}=105$

[다른 풀이]

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 $p(\neq 0)$라 하면 조건 (가)에서

$f(x)=p(x-1)(x-3)(x-q)$ (p, q는 상수)

로 놓을 수 있고, 조건 (나)에서 $q<1$이다.

$f(a-x)$는 $f(x)$를 $x=\dfrac{a}{2}$에 대하여 선대칭한 함수이고

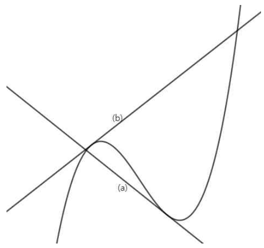
$g(x)=|f(x)f(a-x)|=\{f(x)\}^2$

가 되려면 $a=2$, $q=-1$

32) 39

$h(0)=0$에서 $f(x)$와 $g(x)$는 $x=0$에서 교점을 갖는다. $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=0$에서 $f(x)$와 $g(x)$는 서로 접해야 한다. 아래 그림의 (a)처럼 접하면 $h(x)$는 $x<0$에서 미분가능하지 않은 경우가 생기므로 (b)처럼 접해야 한다.

$g(x)=mx+n$이라 하면



$f(x)-g(x)=f(x)-mx-n=x^2(x-k)$으로 놓을 수 있다.

(b)의 경우 $f(x)$와 $g(x)$가 접하는 점을 제외하고 만나는 점의 x좌표를 k라 하자.

(i) $k<1$이면

$x\to 1-$일 때 $h(x)=f(x)-g(x)$

$x\to 1+$일 때 $h(x)=f(x)+g(x)$

$f(1)-g(1)=f(1)+g(1)$에서 $g(1)=0$이고

$f'(1)-g'(1)=f'(1)+g'(1)$ 에서 $g'(1)=0$이다.

$g'(1)=0$이면 $g(x)$는 일차함수가 아니므로 조건에 맞지 않는다.

(ii) $k\geq 1$이면

$h(x)=\begin{cases} g(x)-f(x) & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x\geq 1) \end{cases}$

$h(x)$가 $x=1$에서 연속이고 미분가능하므로

$g(1)-f(1)=f(1)+g(1)$에서 $f(1)=0$이고

$g'(1)-f'(1)=f'(1)+g'(1)$ 에서 $f'(1)=0$이다.

따라서 $f(x)=(x-1)^2(x+a)$, $g(x)=px+q$로 놓을 수 있다.

$f'(x)=2(x-1)(x+a)+(x-1)^2$

$g'(x)=p$

$f(0)=g(0)$, $f'(0)=g'(0)$에서

$a=q$, $-2a+1=p$

$h(2)=f(2)+g(2)=2+a+2p+q=5$

이상에서 $a=-\dfrac{1}{2}$, $p=2$, $q=-\dfrac{1}{2}$

$f(x)=(x-1)^2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$, $g(x)=2x-\dfrac{1}{2}$ 이므로

$h(4)=f(4)+g(4)=39$

33) 61

[출제의도] 방정식의 실근의 개수를 이용하여 조건을 만족시키는 삼차함수의 그래프를 찾고, 함숫값을 구할 수 있는가?

조건 (가)에서 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하면

$f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)$

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서

$x-f(x)=\alpha$ 또는 $x-f(x)=\beta$

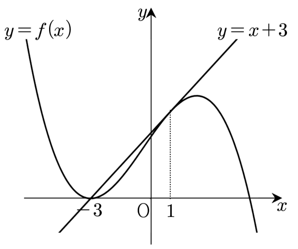
를 만족시키는 서로 다른 x의 값의 개수가 3이어야 한다.

즉 $f(x)=x-\alpha$ 또는 $f(x)=x-\beta$에서 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=x-\alpha$, $y=x-\beta$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 3이어야 한다.

한편, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 기울기가 1이므로

접선의 방정식은 $y=x+3$

그런데 $f(0)>0$, $f'(0)>1$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x+3$는 그림과 같다.



$f(x)-(x+3)=k(x+3)(x-1)^2$이므로

$f(x)=k(x+3)(x-1)^2+x+3$

$f'(x)=k(x-1)^2+k(x+3)\times 2(x-1)+1$ …… ㉠

이때, $f'(-3)=0$이므로

㉠에 $x=-3$을 대입하면

$0=k\times 16+1$에서 $k=-\dfrac{1}{16}$

따라서

$f(x)=-\dfrac{1}{16}(x+3)(x-1)^2+x+3$이므로

$f(0)=-\dfrac{1}{16}\times 3\times 1+3=\dfrac{45}{16}$

즉 $p=16$, $q=45$이므로

$p+q=16+45=61$

34) 64

[출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

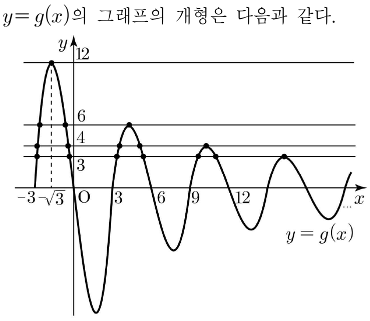
$f(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x(x-3)(x+3)$

$f'(x)=2\sqrt{3}(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$이므로

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	12 (극대)	↘	−12 (극소)	↗

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



자연수 k에 대하여

$6k-3\le x<6k+3$일 때

함수 $g(x)=\dfrac{1}{k+1}f(x-6k)$

$k+1$이 12의 양의 약수가 될 때

함수 $g(x)$의 극댓값이 자연수이므로

$k=1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 11$일 때

함수 $g(x)$의 극댓값은

각각 6, 4, 3, 2, 1이다.

$a_1=2\times 11+1=23$

$a_2=2\times 5+1=11$

$a_3=2\times 3+1=7$

$a_4=2\times 2+1=5$

$a_5=2\times 2=4$

$a_6=2\times 1+1=3$

$7\le n\le 11$일 때, $a_n=2\times 1=2$

$a_{12}=1$

따라서

$\displaystyle\sum_{k=1}^{12}a_n=23+11+7+5+4+3+2\times 5+1=64$

35) 108

[출제의도] 함수의 연속성과 미분가능성 및 삼차함수의 그래프를 이해하고 활용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

$i(x)=|f(x)|$로 놓으면 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 모든 x의 값에 대하여

$\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}$, $\displaystyle\lim_{h\to 0-}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}$

의 값이 항상 존재한다.

따라서

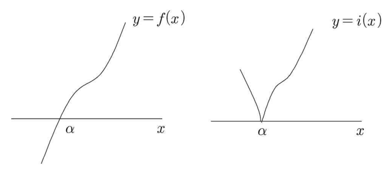
$$\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)-f(x-h)|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x)|-|f(x-h)|+|f(x)|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim_{h\to 0+}\frac{i(x-h)-i(x)}{-h}$$

(ⅰ) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않고

$f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)\ne 0$인 경우



$g(x)$

$\displaystyle =f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)-f(x-h)|}{h}$

$\displaystyle =f(x-3)\times\left\{\lim_{h\to 0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim_{h\to 0+}\frac{i(x-h)-i(x)}{-h}\right\}$

$=\begin{cases} f(x-3)\times\{-2f'(x)\} & (x<\alpha) \\ 0 & (x=\alpha) \\ f(x-3)\times\{2f'(x)\} & (x>\alpha)\end{cases}$

이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$\displaystyle\lim_{x\to\alpha-}g(x)=\lim_{x\to\alpha+}g(x)=g(\alpha)$

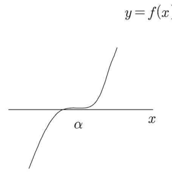
이어야 하므로

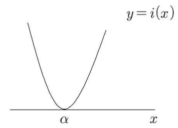
$f(\alpha-3)\{-2f'(\alpha)\}=f(\alpha-3)\times\{2f'(\alpha)\}=0$

그런데 $f'(\alpha)\ne 0$, $f(\alpha-3)\ne 0$이므로 모순이다.

(ⅱ) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않고

$f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$인 경우





$g(x)$

$=f(x-3)\times \lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{|f(x+h)-f(x-h)|}{h}$

$=f(x-3)\times\left\{\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{i(x-h)-i(x)}{-h}\right\}$

$=\begin{cases} f(x-3)\times\{-2f'(x)\} & (x<\alpha) \\ 0 & (x=\alpha) \\ f(x-3)\times\{2f'(x)\} & (x>\alpha)\end{cases}$

이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$\lim\limits_{x\to\alpha-}g(x)=\lim\limits_{x\to\alpha+}g(x)=g(\alpha)$

이어야 하고 $f'(\alpha)=0$이므로

$f(\alpha-3)\{-2f'(\alpha)\}=f(\alpha-3)\times\{2f'(\alpha)\}=0$

이 성립한다.

그런데, 방정식 $g(x)=0$을 만족시키는 실근은 $x=\alpha$ 또는 $x=\alpha+3$으로 2개 뿐이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

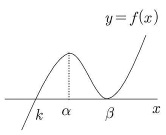
(iii) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고

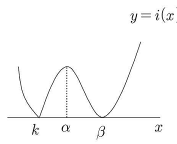
$f(\alpha)\neq 0$, $f(\beta)\neq 0$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$인 경우

(i)의 경우와 같이 $f(k)=0$을 만족시키는 $x=k$에서 함수 $g(x)$는 연속이 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(iv) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고

$f(k)=0$, $f(\alpha)\neq 0$, $f(\beta)=0$, $f'(\alpha)f'(\beta)=0$ $(k<\alpha<\beta)$인 경우





(i)의 경우와 같이 $f(k)=0$을 만족시키는 $x=k$에서 함수 $g(x)$는 연속이 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(v) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고

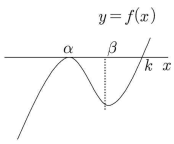
$f(k)=0$, $f(l)=0$, $f(m)=0$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$

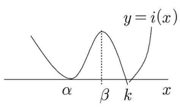
$(k<\alpha<l<\beta<m)$인 경우

(i)의 경우와 같이 $f(k)=0$을 만족시키는 $x=k$에서 함수 $g(x)$는 연속이 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(vi) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고

$f(k)=0$, $f(\alpha)=0$, $f(\beta)\neq 0$, $f'(\alpha)f'(\beta)=0$ $(\alpha<\beta<k)$인 경우





$g(x)$

$=f(x-3)\times \lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{|f(x+h)-f(x-h)|}{h}$

$=f(x-3)\times\left\{\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{i(x-h)-i(x)}{-h}\right\}$

$=\begin{cases} f(x-3)\times\{-2f'(x)\} & (x<k) \\ 0 & (x=k) \\ f(x-3)\times\{2f'(x)\} & (x>k)\end{cases}$

이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$\lim\limits_{x\to k-}g(x)=\lim\limits_{x\to k+}g(x)=g(k)$

이어야 하므로

$f(k-3)\{-2f'(k)\}=f(k-3)\times\{2f'(k)\}=0$

그런데 $f(k)\neq 0$이므로 $f(k-3)=0$이고

$k-3=\alpha$ …… ㉠

즉, $k=\alpha+3$이면 조건 (가)를 만족시킨다.

또한, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근은

$x<k$일 때 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$

$x=k$일 때 $x=k$

$x>k$일 때 $x=k+3$

이고 조건 (나)에서 서로 다른 네 실근의 합이 4이므로

$\alpha+\beta+k+k+3=7$

$\alpha+\beta+2k=4$ …… ㉡

또한,

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-k)$이고

$f'(x)=(x-\alpha)(3x-2k-\alpha)$이므로

$f'(x)=0$에서

$\beta=\dfrac{\alpha+2k}{3}$

㉡에 대입하여 정리하면

$\alpha+2k=3$

㉠, ㉡에서 $\alpha=-1$, $k=2$이므로

$f(x)=(x+1)^2(x-2)$

따라서

$f(5)=(5+1)^2(5-2)=36\times 3=108$

36) 108

[출제의도] 함수의 극값을 이용하여 문제를 해결한다.

조건 (가)에서 $x\neq 0$, $x\neq 2$ 일 때,

$g(x)=\dfrac{x(x-2)}{|x(x-2)|}\ (|f(x)|-a)$

$x<0$ 또는 $x>2$ 일 때, $x(x-2)>0$이고

$0<x<2$일 때, $x(x-2)<0$이므로

$g(x)=\begin{cases}|f(x)|-a & (x<0 \text{ 또는 } x>2) \\ a-|f(x)| & (0<x<2)\end{cases}$

조건 (나)에 의해 함수 $g(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 미분가능하므로 $x=0$, $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0-}g(x)=\lim\limits_{x\to 0+}g(x)$에서

$|f(0)|-a=a-|f(0)|$

그러므로 $|f(0)|=a$에서 $g(0)=\lim\limits_{x\to 0+}g(x)=0$

같은 방법으로 $|f(2)|=a$에서 $g(2)=0$

그러므로 $g(x)=\begin{cases}|f(x)|-a & (x<0 \text{ 또는 } x>2) \\ a-|f(x)| & (0\le x\le 2)\end{cases}$

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}$

즉, $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{|f(x)|-a}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{a-|f(x)|}{x}$ …… ㉠

(i) $f(0)=a$인 경우

$f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 $f(0)>0$이므로

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)>0$이다. 그러므로

$\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{|f(x)|-a}{x}=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$,

$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{a-|f(x)|}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(0)-f(x)}{x}=-f'(0)$

㉠에서 $f'(0)=-f'(0)$, $f'(0)=0$

(ii) $f(0)=-a$인 경우

$f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 $f(0)<0$이므로

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)<0$이다. 그러므로

$\lim_{x\to 0-}\frac{|f(x)|-a}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{-f(x)+f(0)}{x}=-f'(0)$,

$\lim_{x\to 0+}\frac{a-|f(x)|}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{-f(0)+f(x)}{x}=f'(0)$

㉠에서 $-f'(0)=f'(0)$, $f'(0)=0$

(i), (ii)에 의해 $f'(0)=0$이다.

함수 $g(x)$가 $x=2$에서도 미분가능하므로 같은 방법으로 $f'(2)=0$이다.

그러므로 삼차함수 $f(x)$는 $x=0$ 과 $x=2$에서 극값을 갖고 최고차항의 계수가 1이므로 $x=0$에서 극댓값 $f(0)=a$, $x=2$에서 극솟값 $f(2)=-a$를 갖는다.

$f(x)=x^3+px^2+qx+a$ (p, q는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2px+q$이고 $f'(0)=f'(2)=0$이므로

$p=-3$, $q=0$이다. 즉, $f(x)=x^3-3x^2+a$

$f(2)=2^3-3\times 2^2+a=-a$이므로 $a=2$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+2$이므로

$g(3a)=g(6)=|f(6)|-2=|6^3-3\times 6^2+2|-2=108$

[참고]

[1] $f(0)=f(2)=a$ 또는 $f(0)=f(2)=-a$인 경우

삼차함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값이 서로 같을 수 없으므로 모순이다.

[2] $f(0)=-a$, $f(2)=a$인 경우

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 모순이다.

37) 9

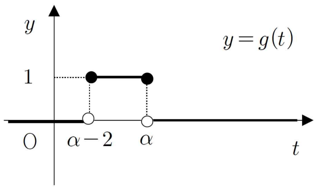
[출제의도] 함수의 극한을 이용하여 도함수 $f'(x)$의 특징을 찾아 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구할 수 있는가?

이차방정식 $f'(x)=0$이 근을 갖지 않는 경우에는

$g(t)=0$

이는 조건 (나)에서 $g(t)$가 함숫값 1 또는 2를 갖는 것에 모순이다.

이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 α를 갖는 경우에는 $y=g(t)$는 그림과 같다.

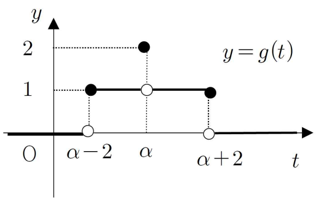


이는 조건 (나)에서 $g(t)$가 함숫값 2를 갖는 것에 모순이다.

그러므로 이차방정식 $f'(x)=0$는 서로 다른 두 실근 α, $\beta(\alpha<\beta)$를 갖는다.

(i) $\beta=\alpha+2$일 때,

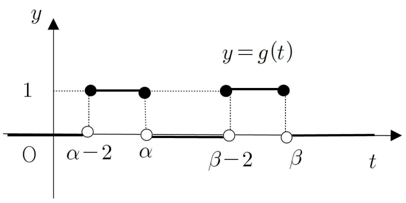
함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



이는 조건 (가)를 만족한다.

(ii) $\beta>\alpha+2$일 때,

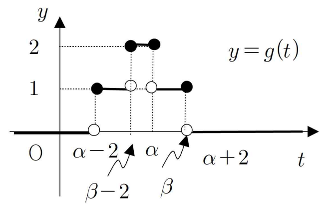
함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



이는 조건 (나)에서 $g(t)$가 함숫값 2를 갖는 것에 모순이다.

(iii) $\beta<\alpha+2$일 때,

함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



이때, $\beta-2\le a\le\alpha$인 a에 대하여 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

따라서 위에서 조건을 만족시키는 것은 (i)의 경우이다.

한편, 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이므로

함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수는 $\frac{3}{2}$이다.

그러므로

$$f'(x)=\frac{3}{2}(x-\alpha)\{x-(\alpha+2)\}$$
$$=\frac{3}{2}\{x^2-(2\alpha+2)x+\alpha^2+2\alpha\}$$

로 놓을 수 있다.

이때,

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}(\alpha+1)x^2+\frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)x+C$$

(단, C는 적분상수) …… ㉠

한편, 조건 (나)에서

$g(f(1))=g(f(4))=2$

이고 $g(t)$의 함숫값이 2인 t의 값의 개수는 1이므로

$f(1)=f(4)$

㉠에서

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(\alpha+1)+\frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)+C=32-24(\alpha+1)+6(\alpha^2+2\alpha)+C$$

따라서

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(\alpha+1)+\frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)=32-24(\alpha+1)+6(\alpha^2+2\alpha)$$

양변에 2를 곱하면

$1-3(\alpha+1)+3(\alpha^2+2\alpha)=64-48(\alpha+1)+12(\alpha^2+2\alpha)$

이 식을 정리하면

$3\alpha^2+3\alpha-2=12\alpha^2-24\alpha+16$

$9\alpha^2-27\alpha+18=0$

$\alpha^2-3\alpha+2=0$

$(\alpha-1)(\alpha-2)=0$

$\alpha=1$ 또는 $\alpha=2$

((i)-①) $\alpha=1$일 때,

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x+C$

이때, $f(1)=\alpha$에서 $f(1)=1$이어야 하므로

$\frac{1}{2}-3+\frac{9}{2}+C=1$

$2+C=1$

$C=-1$

이때, $f(0)=-1$이므로

$g(f(0))=g(-1)=1$

그러므로 조건을 만족시킨다.

((i)-②) $\alpha=2$일 때,

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+12x+C$

이때, $f(1)=\alpha$에서

$f(1)=2$이어야 하므로

$\frac{1}{2}-\frac{9}{2}+12+C=2$

$8+C=1$

$C=-6$

이때, $f(0)=-6$이므로

$g(f(0))=g(-6)=0$

그러므로 조건을 만족시키지 못한다.

따라서 ((ⅰ)-①)에서

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x-1$

이므로

$f(5)=\frac{1}{2}\times 5^3-3\times 25+\frac{9}{2}\times 5-1$

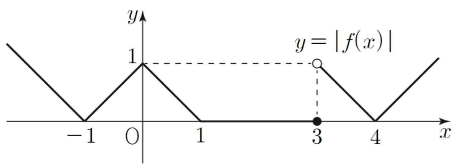
$=\frac{125}{2}-75+\frac{45}{2}-1$

$=9$

38) ④

[출제의도] 도함수를 이용하여 추론하기

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이므로 함수 $g(x)$는 $x=k+3$에서만 불연속이다.

ㄱ. $k=-3$일 때

$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0-}|f(x+3)|=0$,

$g(0)=|f(0+3)|=0$에서 $\lim_{x\to 0-}g(x)=g(0)$

ㄴ. $\lim_{x\to 0-}f(x)=1$, $f(0)=-1$에서 $\lim_{x\to 0-}f(x)\neq f(0)$

$k\neq -3$일 때 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-}\{f(x)+g(x)\}\neq f(0)+g(0)$

$k=-3$일 때 $\lim_{x\to 0-}g(x)=g(0)$이므로

$\lim_{x\to 0-}\{f(x)+g(x)\}\neq f(0)+g(0)$

그러므로 모든 정수 k에 대하여

함수 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하기 위해서는 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to 0-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 0-}g(x)$,

$\lim_{x\to 0+}f(x)g(x)=-\lim_{x\to 0+}g(x)$,

$f(0)g(0)=-g(0)$

에서 $\lim_{x\to 0-}g(x)=-\lim_{x\to 0+}g(x)=-g(0)$

모든 정수 k에 대하여 $\lim_{x\to 0-}g(x)=g(0)$이므로

$\lim_{x\to 0}g(x)=g(0)=0$

그러므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 정수 k의 값은 -4, -2, -1, 1

(ⅰ) $k=-4$ 또는 $k=1$일 때,

$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{(x+1)(-x)}{x}=-1$

$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{(x-1)x}{x}=-1$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(ⅱ) $k=-2$일 때,

$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=0$

$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=0$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(ⅲ) $k=-1$일 때,

$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{(x+1)(-x)}{x}=-1$

$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=0$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 모든 정수 k의 값의 합은

$-4+(-2)+1=-5$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

39) 19

[출제의도] 연속함수의 성질을 이용하여 극한값을 계산할 수 있는가?

함수

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\ (x+a)f(x-b) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 실수 전체에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 한다.

따라서

$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0+}g(x)=g(0)$ …… ㉠

이 성립한다.

이때

$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0-}(x+3)f(x)=3f(0)$,

$\lim_{x\to 0+}g(x)=\lim_{x\to 0+}(x+a)f(x-b)=af(-b)$,

$g(0)=af(-b)$

이므로 ㉠에서

$3f(0)=af(-b)$ …… ㉡

한편,

$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$

$=\lim_{x\to -3}\frac{|g(x)|}{(x+3)^2\{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\}}$

$=\lim_{x\to -3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\}}$

$=\lim_{x\to -3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\times 2|g(t)|}$ …… ㉢

이때 $t\neq -3$이고 $t\neq 6$인 모든 실수 t에 대하여 ㉢의 값이 존재하므로

$f(x)=(x+3)(x+k)$ (k는 상수)

의 꼴이어야 하고, ㉢에서

$\lim_{x\to -3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\times 2|g(t)|}$

$=\lim_{x\to -3}\frac{|(x+3)(x+k)|}{(x+3)^2\times 2|g(t)|}$

$=\lim_{x\to -3}\frac{|x+k|}{2|g(t)|}$ …… ㉣

이때 $t=3$과 $t=6$에서만 ㉣의 값이 존재하지 않으므로 방정식 $g(x)=0$의 모든 실근은 $x=-3$과 $x=6$ 뿐이다.

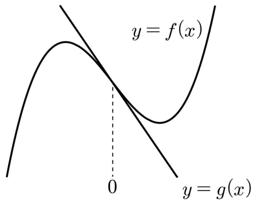
주어진 식에서 $g(-3)=0$이므로

$g(6)=0$, 즉 $(6+a)f(6-b)=0$
이어야 한다.
이때 $a>0$이므로
$f(6-b)=0$에서
$6-b=-3$ 또는 $6-b=-k$
따라서 $b=9$ 또는 $k-b=-6$
(ⅰ) $b=9$인 경우
$x<0$에서
$g(x)=(x+3)f(x)=(x+3)^2(x+k)$
이때
$x<0$에서 $g(x)=0$의 해는 -3뿐이므로
$-k\geq 0$ 또는 $k=3$ …… ㉤
$x\geq 0$에서
$g(x)=(x+a)f(x-9)$
$=(x+a)(x-6)(x-9+k)$
이때 $x\geq 0$에서 $g(x)=0$의 해는 6뿐이므로
$9-k<0$ 또는 $9-k=6$ …… ㉥
㉤, ㉥에서
$k=3$
따라서 $f(x)=(x+3)^2$이므로 ㉡에서
$3\times 3^2=af(-9)$, $27=36a$
$a=\dfrac{3}{4}$
따라서
$g(4)=(4+a)f(4-b)=\left(4+\dfrac{3}{4}\right)f(-5)=\dfrac{19}{4}\times(-2)^2=19$
(ⅱ) $k-b=-6$인 경우
$x<0$에서
$g(x)=(x+3)f(x)=(x+3)^2(x+k)$
이때 $x<0$에서 $g(x)=0$의 해는 -3뿐이므로
$-k\geq 0$ 또는 $k=3$
$x\geq 0$에서
$g(x)=(x+a)f(x-b)$
$=(x+a)(x-b+3)(x-b+k)$
$=(x+a)(x-b+3)(x-6)$
이때 $x\geq 0$에서 $g(x)=0$의 해는 6뿐이고, $b>3$이므로
$b-3=6$에서 $b=9$
$k-b=-6$에서 $k=3$
따라서 (ⅰ)과 같은 결과이므로
$g(4)=19$이다.

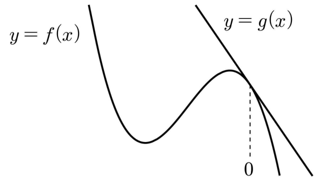
40) 121

[출제의도] 접선의 방정식과 그래프의 개형을 활용하여 문제 해결하기

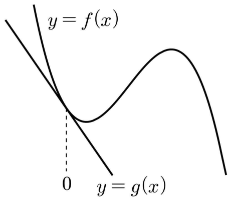
$f(0)=0$이므로
$f(x)=ax^3+bx^2+cx$ (a, b, c는 상수)라 하면
$f'(0)=c$, $g(x)=cx$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 기울기 c에 대하여
(ⅰ) $c=0$이면 조건 (가)를 만족시키지 않는다.
(ⅱ) $c>0$이면 $h(12)>0$이므로
조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(ⅲ) $c<0$, $a>0$이면 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같으므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.



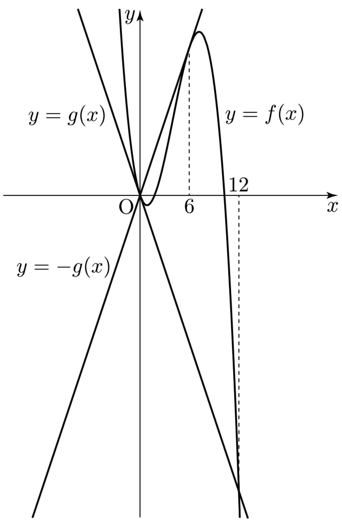
(ⅳ) $c<0$, $a<0$이면
두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같은 경우에는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.



그러므로 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같은 경우에만 조건 (가), (나)를 만족시킨다.



조건 (가)에 의하여
$f(x)+g(x)=ax(x-k)^2$ … ㉠
조건 (나)에 의하여
$-f(x)+g(x)=-ax^2(x-12)$ … ㉡
두 식 ㉠, ㉡을 연립하면
$2g(x)=2a(6-k)x^2+ak^2x$
$6-k=0$, $k=6$
$g(x)=18ax$
$f(x)=ax(x-6)^2-18ax=ax(x^2-12x+18)$



방정식 $x^2-12x+18=0$의 두 근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면
$\alpha=6-3\sqrt{2}$, $\beta=6+3\sqrt{2}$
함수 $h(x)$는 다음과 같다.

$$h(x)=\begin{cases} ax(x-6)^2 & (x<0 \text{ 또는 } \alpha\leq x<\beta) \\ -ax^2(x-12) & (0\leq x<\alpha \text{또는 } x\geq\beta) \end{cases}$$

$\alpha < 3 < \beta$ 이므로

$h(3) = a\times 3\times(3-6)^2 = 27a = -\dfrac{9}{2}$

$a = -\dfrac{1}{6}$, $c = -3$

$$h(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{6}x(x-6)^2 & (x<0 \text{ 또는 } \alpha \le x < \beta) \\ \dfrac{1}{6}x^2(x-12) & (0 \le x < \alpha \text{ 또는 } x \ge \beta) \end{cases}$$

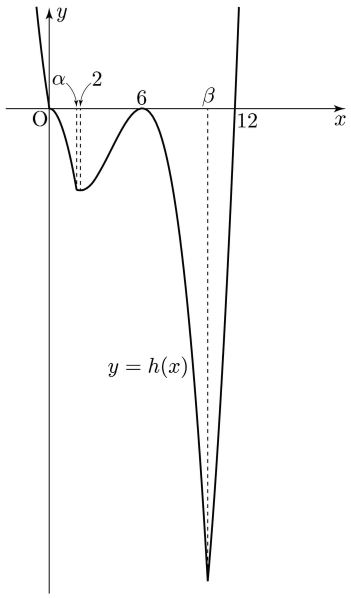
$\alpha = 6-3\sqrt{2}$, $\beta = 6+3\sqrt{2}$ 이므로
$\alpha < 6 < \beta < 11$

$h(6) = 0$, $h(11) = \dfrac{1}{6}\times 11^2 \times(-1) = -\dfrac{121}{6}$

따라서

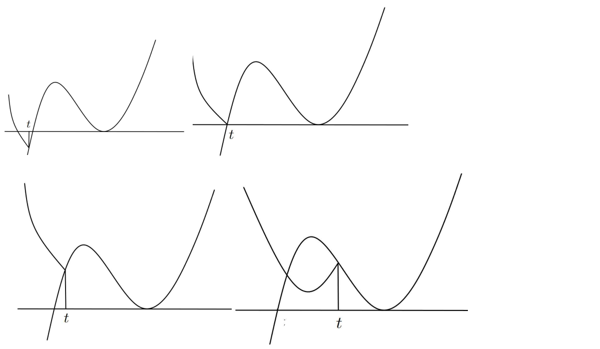
$k\times\{h(6)-h(11)\} = 6\times\left\{0-\left(-\dfrac{121}{6}\right)\right\} = 121$

[참고]
함수 $y=h(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.

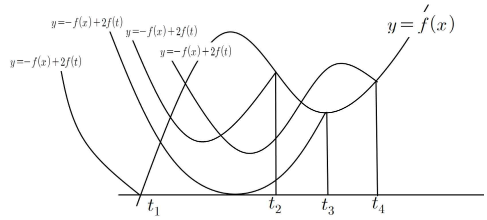


41) 58

$g(t) = -f(t)+2f(t) = f(t)$이고 $y=f(t)$에서 그래프를 꺾어 올린다.

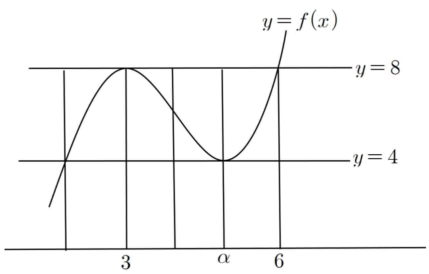


위의 그림처럼 극솟값이 0일 때 $f(t)=0$이 될 때 한번 불연속
$f(t)=4$가 돼서 $-f(x)+2f(t)=0$이 될 때, 한번 t가 극솟점이 될 때 또, 한번 이미 3번 불연속이 나타나므로 가능하지 않다.



극솟값이 양수일 때, 위의 그림처럼 $y=g(x)$가 그려질 때,
t가 극소가 될 때, x축에 접한다면 불연속점이 2번 나타난다.
t_1왼쪽에서 $g(x)=0$의 실근이 1개에서 t_1을 지나면서 0개로 바뀌고
t_3에서 다시 1개 t_3를 지나서 다시 0개로 두 번 불연속
그러므로 $f(t_3)=4$가 되어야 위의 그림처럼 x축과의 교점이 발생한다.
$f(t_3)>4$이면 t_1에서만 1번 불연속이 되고,
$f(t_3)<4$이면 접하는 순간을 지나 실근이 2개가 되고,
$f(t)$의 값이 증가하면서 다시 접하는 순간, 다시 말해 실근이 1개가 되는 순간이 발생하므로 불연속점이 3개가 된다.
극솟점의 x좌표를 α라 할 때, 극대, 극솟값의 차가 4이므로

$\dfrac{1}{2}(\alpha-3)^3 = 4$, $\alpha = 5$



위의 그림처럼 3차함수의 대칭성을 이용하면,
$y=8$과 만나는 점의 x좌표는 6임을 알 수 있다. 그러므로
$f(x)-8 = (x-3)^2(x-6)$
$f(8) = (8-3)^2(8-6)+8 = 25\times 2+8 = 58$

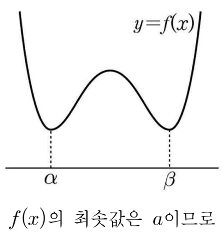
42) 82

[출제의도] 다항함수의 도함수를 활용하여 함수에 대한 문제를 해결한다.

사차함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서만 극솟값을 갖는다고 하면 함수 $g(t)$는

$$g(t) = \begin{cases} f(t)-f(\alpha) & (t<\alpha) \\ f(\alpha)-f(t) & (t \ge \alpha) \end{cases}$$

구간 $(-\infty,\ \alpha)$에서 함수 $f(t)$가 감소하므로 함수 $g(t)$도 감소하고,
구간 $[\alpha,\ \infty)$에서 함수 $f(t)$가 증가하므로 함수 $g(t)$는 감소한다.
실수 전체의 집합에서 함수 $g(t)$가 감소하므로
조건을 만족시키는 양수 k가 존재하지 않는다.
그러므로 함수 $f(x)$는 극댓값을 가져야 한다.
함수 $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta(\alpha<\beta)$에서 극솟값을 가지고,
$f(\alpha)=a$, $f(\beta)=b$라 하자.
(ⅰ) $f(\alpha)=f(\beta)$인 경우

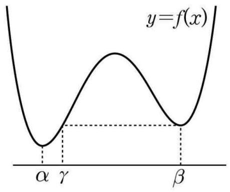


함수 $f(x)$의 최솟값은 a이므로

$$g(t)=\begin{cases} f(t)-a & (t<\alpha) \\ 0 & (\alpha \le t \le \beta) \\ a-f(t) & (t>\beta)\end{cases}$$

따라서 조건을 만족시키는 양수 k가 존재하지 않는다.

(ii) $f(\alpha)<f(\beta)$인 경우

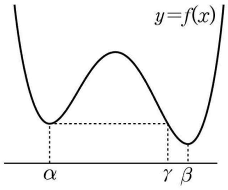


$\alpha<x<\beta$일 때, $f(x)=f(\beta)$의 해를 γ라 하면

$$g(t)=\begin{cases} f(t)-a & (t<\alpha) \\ a-f(t) & (\alpha \le t<\gamma) \\ a-b & (\gamma \le t \le \beta) \\ a-f(t) & (t>\beta)\end{cases}$$

$a-b<0$이므로 조건을 만족시키는 양수 k가 존재하지 않는다.

(iii) $f(\alpha)>f(\beta)$인 경우



$\alpha<x<\beta$일 때, $f(x)=f(\alpha)$의 해를 γ라 하면

$$g(t)=\begin{cases} f(t)-b & (t<\alpha) \\ a-b & (\alpha \le t \le \gamma) \\ f(t)-b & (\gamma<t<\beta) \\ b-f(t) & (t \ge \beta)\end{cases}$$

$a-b>0$이므로 $k=a-b$, $\alpha=0$, $\gamma=2$이면 k는 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에서

$f'(0)=0$, $f(0)=f(2)$이다.

또 $g(4)=0$이므로 $\beta=4$이고 $f'(4)=0$이다.

$f(x)-f(0)=x^2(x-2)(x-p)$(p는 상수)라 하자.

$f'(x)=2x(x-2)(x-p)+x^2(2x-p-2)$이므로

$f'(4)=0$에서 $16(4-p)+16(6-p)=0$

$10-2p=0$, $p=5$

그러므로

$f(x)=x^2(x-2)(x-5)+f(0)$

$k=f(\alpha)-f(\beta)=f(0)-f(4)=f(0)-\{-32+f(0)\}=32$

$g(-1)=f(-1)-f(4)=\{18+f(0)\}-\{-32+f(0)\}=50$

따라서 $k+g(-1)=82$

43) 13

[출제의도] 미분계수의 정의와 연속성을 이용하여 함수 $f(x)$를 구할 수 있는가?

조건 (다)에서 $f(0)=-3$이므로 두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$f(x)=x^3+ax^2+bx-3$

한편, 조건 (가)에서

$f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$

이므로 $x\ne1$일 때,

$$f'(g(x))=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\frac{(x^3+ax^2+bx-3)-(a+b-2)}{x-1}$$

$$=\frac{(x^3-1)+a(x^2-1)+b(x-1)}{x-1}$$

$$=(x^2+x+1)+a(x+1)+b$$

$$=x^2+(a+1)x+a+b+1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 최솟값 $\frac{5}{2}$를 가지므로 이 값을 갖는 x의 값을 α라 하자. 이때, $f'(x)$는 이차함수이고 ㉠의 우변의 이차함수의 그래프가 대칭이므로 $g(x)$도 $x=\alpha$에 대하여 대칭이어야 한다. 이때, 함수 $y=f'(g(x))$의 그래프는 $x=\alpha$에 대하여 대칭이다.

한편, ㉠의 우변의 함수

$y=x^2+(a+1)x+a+b+1$

의 그래프는 직선 $x=-\frac{a+1}{2}$에 대하여 대칭이다.

그러므로 $\alpha=-\frac{a+1}{2}$

한편, ㉠의 식에 $x=\alpha$를 대입하면

$f'(g(\alpha))=\alpha^2+(a+1)\alpha+a+b+1$

이때, $g(\alpha)=\frac{5}{2}$이므로 대입하면

$$f'\left(\frac{5}{2}\right)=\alpha^2+(a+1)\alpha+a+b+1$$

한편, $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$$\frac{75}{4}+5a+b=\alpha^2+(a+1)\alpha+a+b+1$$

즉,

$$\frac{75}{4}+5a=\alpha^2+(a+1)\alpha+a+1$$

이때, $\alpha=-\frac{a+1}{2}$를 대입하면

$$\frac{75}{4}+5a=\frac{(a+1)^2}{4}-\frac{(a+1)^2}{2}+a+1$$

$$\frac{75}{4}+5a=-\frac{(a+1)^2}{4}+a+1$$

$75+20a=-(a^2+2a+1)+(4a+4)$

$a^2+18a+72=0$

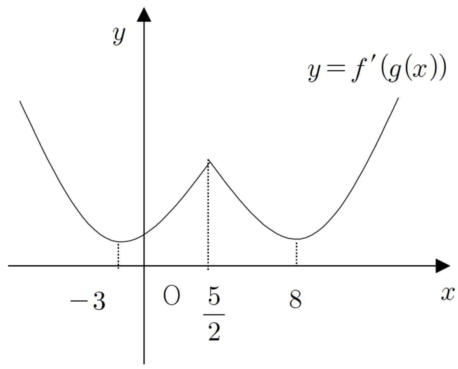
$(a+6)(a+12)=0$

$a=-6$ 또는 $a=-12$

한편, $a=-12$일 때,

$f'(x)=3x^2-24x+b$

이고 이 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 직선 $x=8$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f'(g(x))$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



즉, 함수 $y=f'(g(x))$의 그래프의 개형은 이차함수의 그래프의 개형이 아니다. 그러므로

$a=-6$이고 $\alpha=\frac{5}{2}$ 이어야 한다.

그러므로

$$f(x)=x^3-6x^2+bx-3 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$f'(x)=3x^2-12x+b$ …… ㉢

한편, ㉠에서 $f'(x)$와 $g(x)$가 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1}f'(g(x))=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$f'(g(1))=f'(1)$

이때, $g(1)=k$라 하면 ㉢으로부터

$3k^2-12k+b=-9+b$

$3k^2-12k+9=0$

$k^2-4k+3=0$

$(k-1)(k-3)=0$

$k=1$ 또는 $k=3$

즉, $g(1)=1$ 또는 $g(1)=3$

이때, $g(1)=1$은 $g(x)$가 최솟값 $\dfrac{5}{2}$를 갖는다는 것에 모순이다.

그러므로 $g(1)=3$

한편, 조건 (다)에서 $f(g(1))=6$이므로

$f(3)=6$

이때, ㉡에 대입하면

$27-54+3b=9$

$3b=36$

$b=12$

따라서, $f(x)=x^3-6x^2+12x-3$ 이므로

$f(4)=4^3-6\times4^2+12\times4-3=13$

44) 37

함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고,

$x<0$일 때, $f'(x)=6x+t$,

$x>0$일 때, $f'(x)=-6x+t$

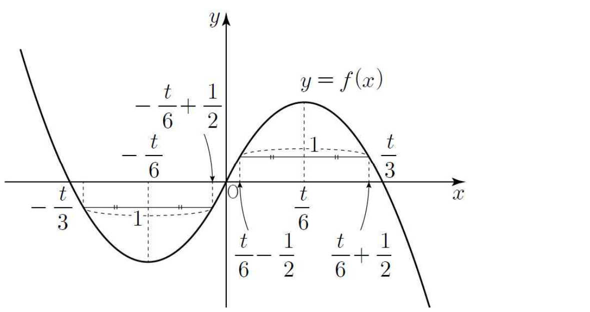
이므로 함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{t}{6}$에서 극소, $x=\dfrac{t}{6}$에서 극대이다.

$f(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-\dfrac{t}{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{t}{3}$

$f_1(x)=3x^2+tx$, $f_2(x)=-3x^2+tx$라 하자.

(i) $\dfrac{t}{3}\ge1$인 경우 (즉, $t\ge3$)



조건 (가)에서 닫힌구간 $[k-1,\ k]$의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하다.

함수 $f_1(x)$의 그래프는 직선 $x=-\dfrac{t}{6}$에 대하여 대칭이므로 방정식

$f_1(k-1)=f_1(k)$를 만족시키는 k의 값은 $k=-\dfrac{t}{6}+\dfrac{1}{2}$

함수 $f_2(x)$의 그래프는 직선 $x=\dfrac{t}{6}$에 대하여 대칭이므로 방정식

$f_2(k-1)=f_2(k)$를 만족시키는 k의 값은 $k=\dfrac{t}{6}+\dfrac{1}{2}$

함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{t}{6}$에서 극대이므로 조건 (가)를 만족시키는 k의 값의 범위는 $-\dfrac{t}{6}+\dfrac{1}{2}\le k\le\dfrac{t}{6}$ … ㉠

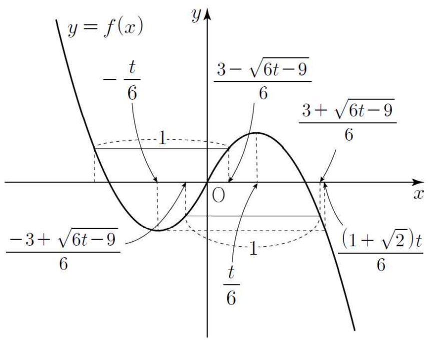
조건 (나)에서 닫힌구간 $[k,\ k+1]$의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하고 함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{t}{6}$에서 극소이므로 조건 (나)를 만족시키는 $k+1$의 값의 범위는

$k+1\le-\dfrac{t}{6}$ 또는 $k+1\ge\dfrac{t}{6}+\dfrac{1}{2}$

즉, $k\le-\dfrac{t}{6}-1$ 또는 $k\ge\dfrac{t}{6}-\dfrac{1}{2}$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $t\ge3$에서 조건 (가), (나)를 만족시키는 k의 값의 범위는 $\dfrac{t}{6}-\dfrac{1}{2}\le k\le\dfrac{t}{6}$이므로 $g(t)=\dfrac{t}{6}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{t-3}{6}$

(ii) $\dfrac{t}{3}<1$인 경우 (즉, $6-3\sqrt{2}\le t<3$)



$f_1\left(-\dfrac{t}{6}\right)=3\times\left(-\dfrac{t}{6}\right)^2+t\left(-\dfrac{t}{6}\right)=-\dfrac{t^2}{12}$이므로

$f_2(x)=-\dfrac{t^2}{12}$을 만족시키는 양수 x의 값은 x에 대한 방정식

$-3x^2+tx=-\dfrac{t^2}{12}$의 양이 실근인 $x=\dfrac{(1+\sqrt{2})t}{6}$

$t\ge6-3\sqrt{2}$이므로

$\dfrac{(1+\sqrt{2})t}{6}-\left(-\dfrac{t}{6}\right)=\dfrac{(2+\sqrt{2})t}{6}\ge\dfrac{(2+\sqrt{2})(6-3\sqrt{2})}{6}=1$

조건 (가)에서 닫힌구간 $[k-1,\ k]$의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하다.

$6-3\sqrt{2}\le t<3$에서 방정식 $f_1(k-1)=f_2(k)$를 만족시키는 k의 값은 k에 대한 방정식 $3(k-1)^2+t(k-1)=-3k^2+tk$의 실근인

$k=\dfrac{3-\sqrt{6t-9}}{6}$ 또는 $k=\dfrac{3+\sqrt{6t-9}}{6}$

함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{t}{6}$에서 극대이므로 조건 (가)를 만족시키는 k의 값의 범위는

$\dfrac{3-\sqrt{6t-9}}{6}\le k\le\dfrac{t}{6}$ … ㉢

조건(나)에서 닫힌구간 $[k,\ k+1]$의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하고 함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{t}{6}$에서 극소이므로 조건 (나)를 만족시키는 $k+1$의 값의 범위는

$k+1\le-\dfrac{t}{6}$ 또는 $k+1\ge\dfrac{3+\sqrt{6t-9}}{6}$

즉, $k\le-\dfrac{t}{6}-1$ 또는 $k\ge\dfrac{-3+\sqrt{6t-9}}{6}$ … ㉣

㉢, ㉣에 의하여 $6-3\sqrt{2}\le t<3$에서 조건 (가), (나)를 만족시키는 k의 값의 범위는

$\dfrac{3-\sqrt{6t-9}}{6}\le k\le\dfrac{t}{6}$이므로 $g(t)=\dfrac{3-\sqrt{6t-9}}{6}$

(i), (ii)에 의하여

$$g(t)=\begin{cases} \dfrac{3-\sqrt{6t-9}}{6} & (6-3\sqrt{2}\le t<3) \\ \dfrac{t-3}{6} & (t\ge 3) \end{cases}$$

따라서

$$3\int_2^4 \{6g(t)-3\}^2 dt$$

$$=3\int_2^3 \left\{6\times\frac{3-\sqrt{6t-9}}{6}-3\right\}^2 dt\ +3\int_3^4 \left\{6\times\left(\frac{t-3}{6}\right)-3\right\}^2 dt$$

$$=3\int_2^3 (6t-9)dt+3\int_3^4 (t-6)^2 dt$$

$$=18+19=37$$

45) 80

[출제의도] 함수의 연속성과 적분의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

$g(x)=\int_0^x (t-1)f(t)\,dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x)=(x-1)f(x)=\begin{cases} -3x^3+3x^2 & (x<1) \\ 2x^2-8x+6 & (x\ge 1) \end{cases}$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 적분하면

$$g(x)=\begin{cases} -\dfrac{3}{4}x^4+x^3+C_1 & (x<1) \\ \dfrac{2}{3}x^3-4x^2+6x+C_2 & (x\ge 1) \end{cases}\ (C_1,\ C_2\text{는 적분상수})$$

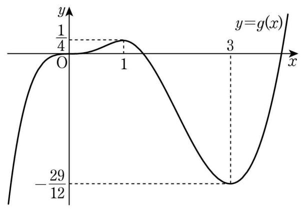
$g'(1)=0$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$g(0)=0$ 에서 $C_1=0$ 이고 $-\dfrac{3}{4}+1=\dfrac{2}{3}-4+6+C_2$

에서 $C_2=-\dfrac{29}{12}$

$$g(x)=\begin{cases} -\dfrac{3}{4}x^4+x^3 & (x<1) \\ \dfrac{2}{3}x^3-4x^2+6x-\dfrac{29}{12} & (x\ge 1) \end{cases}$$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



위의 그래프를 이용하여 함수 $h(t)$ 를 구하면

$$h(t)=\begin{cases} 1 & \left(t<-\dfrac{29}{12}\ \text{또는}\ t>\dfrac{1}{4}\right) \\ 2 & \left(t=-\dfrac{29}{12}\ \text{또는}\ t=\dfrac{1}{4}\right) \\ 3 & \left(-\dfrac{29}{12}<t<\dfrac{1}{4}\right) \end{cases}$$

이므로 $\left|\lim_{t\to a+}h(t)-\lim_{t\to a-}h(t)\right|=2$ 를 만족시키는 실수 a 의 값은 $\dfrac{1}{4}$ 과 $-\dfrac{29}{12}$ 뿐이다.

그러므로 $S=\left|\dfrac{1}{4}\right|+\left|-\dfrac{29}{12}\right|=\dfrac{8}{3}$

따라서 $30S=30\times\dfrac{8}{3}=80$

[참고] $g(x)=\int_0^x (t-1)f(t)\,dt$ 는 다음과 같이 구할 수도 있다.

(i) $x<1$일 때,

$$g(x)=\int_0^x (t-1)(-3t^2)dt=-\frac{3}{4}x^4+x^3$$

(ii) $x\ge 1$일 때,

$$g(x)=\int_0^1 (t-1)(-3t^2)dt+\int_1^x 2(t-1)(t-3)dt$$

$$=\frac{2}{3}x^3-4x^2+6x-\frac{29}{12}$$

46) 16

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수가 포함된 문제를 해결한다.

$g'(x)=(x^2-4)\{|f(x)|-a\}$ 에서 $x=-2,\ x=2$ 가 방정식 $g'(x)=0$ 의 근이지만 조건 (가)에서 함수 $g(x)$ 가 극값을 갖지 않아야 하므로 $x=-2$ 와 $x=2$ 의 좌우에서 $g'(x)$ 의 부호가 변하지 않아야 하고,

$\lim_{x\to\infty}\{|f(x)|-a\}=\lim_{x\to-\infty}\{|f(x)|-a\}=\infty$ 이므로 $g'(x),\ x^2-4,$ $|f(x)|-a$ 의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$+$	0	$+$
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$
$\|f(x)\|-a$	$+$	0	$-$	0	$+$

함수 $|f(x)|-a$ 는 연속함수이므로 사잇값의 정리에 의해
$|f(-2)|-a=0$, $|f(2)|-a=0$
두 실수 $m,\ n$ 에 대하여 일차함수 $f(x)=mx+n$ 이라 하면 $m\ne 0$ 이고, $|2m+n|=|-2m+n|=a$ 가 성립한다.

(i) $2m+n=-2m+n$ 인 경우
$m=0$ 이 되어 모순이다.

(ii) $2m+n=-(-2m+n)$ 인 경우
$n=0$ 이고 $|m|=\dfrac{a}{2}$ 이다.

(i), (ii)에서 $|f(x)|=|mx|=\dfrac{a}{2}|x|$

$$g(2)=\int_0^2 (t^2-4)\{|f(t)|-a\}dt$$

$$=\int_0^2 (t^2-4)\left(\frac{a}{2}|t|-a\right)dt$$

닫힌구간 $[0,\ 2]$ 에서 $|t|=t$ 이므로

$$g(2)=\frac{a}{2}\int_0^2 (t^2-4)(t-2)dt$$

$$=\frac{a}{2}\int_0^2 (t^3-2t^2-4t+8)dt=\frac{a}{2}\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{2}{3}t^3-2t^2+8t\right]_0^2$$

$$=\frac{a}{2}\times\left(4-\frac{16}{3}-8+16\right)=\frac{10}{3}a$$

조건 (나)에서 $g(2)=5$ 이므로 $\dfrac{10}{3}a=5,\ a=\dfrac{3}{2}$

$g(0)=\int_0^0 (t^2-4)\left(\dfrac{3}{4}|t|-\dfrac{3}{2}\right)dt=0$ 이고

닫힌구간 $[-4,\ 0]$ 에서 $|t|=-t$ 이므로

$$g(-4)=\int_0^{-4} (t^2-4)\left(\frac{3}{4}|t|-\frac{3}{2}\right)dt$$

$$=\frac{3}{4}\int_0^{-4} (t^2-4)(-t-2)dt=\frac{3}{4}\int_0^{-4} (-t^3-2t^2+4t+8)dt=-16$$

따라서 $g(0)-g(-4)=0-(-16)=16$

47) 251

[출제의도] 정적분을 이용하여 추론하기

$f(x)=3x+a$이므로

$$g(x)=\int_2^x (t+a)(3t+a)dt$$

$=\int_{2}^{x}(3t^2+4at+a^2)dt$

$=\left[t^3+2at^2+a^2t\right]_2^x$

$=x^3+2ax^2+a^2x-(2a^2+8a+8)$

$g(2)=0$이므로

$g(x)=(x-2)\{x^2+2(a+1)x+(a+2)^2\}$

$h(x)=(x-2)(3x+a)\{x^2+2(a+1)x+(a+2)^2\}$

조건 (가)에 의해 곡선 $y=h(x)$위의

어떤 점에서의 접선이 x축이므로

$h(k)=h'(k)=0$을 만족시키는 실수 k가 존재한다.

그러므로 다항식 $h(x)$는 $(x-k)^2$을 인수로 갖는다.

(i) $k=2$인 경우

다항식 $h(x)$가 $(x-2)^2$을 인수로 가지므로

다항식 $3x+a$가 $3(x-2)$이거나

다항식 $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2$이 $x-2$를

인수로 가진다.

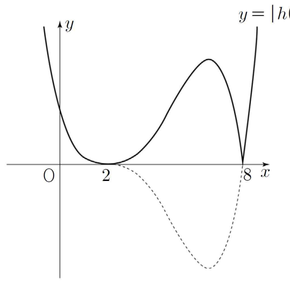
(a) $3x+a=3(x-2)$인 경우

$a=-6$이므로

$h(x)=(x-2)(3x-6)(x^2-10x+16)=3(x-2)^3(x-8)$

곡선 $y=|h(x)|$는 그림과 같으므로

함수 $h(x)$는 조건 (나)를 만족시킨다.



이 경우 $h(-1)=729$이다.

(b) 다항식 $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2$이 $x-2$를 인수로 갖는 경우

$4+4(a+1)+(a+2)^2$

$=a^2+8a+12$

$=(a+2)(a+6)=0$

에서 $a=-2$ 또는 $a=-6$

$a=-6$이면 (a)와 같다.

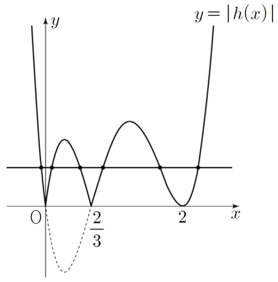
$a=-2$이면

$h(x)=(x-2)(3x-2)(x^2-2x)$

$=x(3x-2)(x-2)^2$

곡선 $y=|h(x)|$는 그림과 같으므로

함수 $h(x)$는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



(ii) $k=-\frac{a}{3}(a\neq-6)$인 경우

다항식 $h(x)$가 $\left(x+\frac{a}{3}\right)^2$을 인수로 가지므로

다항식 $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2$이 $x+\frac{a}{3}$를 인수로 가진다.

$\frac{1}{9}a^2-\frac{2}{3}a(a+1)+(a+2)^2$

$=\frac{4}{9}a^2+\frac{10}{3}a+4$

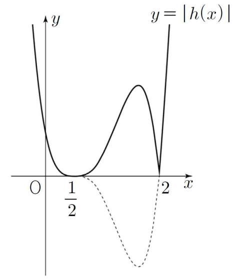
$=\frac{2}{9}(2a+3)(a+6)=0$

에서 $a=-\frac{3}{2}$이므로

$h(x)=(x-2)\left(3x-\frac{3}{2}\right)\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)$

$=3\left(x-\frac{1}{2}\right)^3(x-2)$

곡선 $y=|h(x)|$는 그림과 같으므로 함수 $h(x)$는 조건 (나)를 만족시킨다.



이 경우 $h(-1)=\frac{243}{8}$

(iii) $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2=(x-k)^2$인 경우

$x^2+2(a+1)x+(a+2)^2=x^2-2kx+k^2$

$a+1=-k,\ (a+2)^2=k^2$

$(a+1)^2=(-a-1)^2$에서 $a=-\frac{3}{2}$

$a=-\frac{3}{2}$이면 (ii)와 같다.

따라서 $h(-1)$의 최솟값은 $\frac{243}{8}$이므로

$p=8,\ q=243$에서 $p+q=251$

48) 4

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 이용하여 함수를 구하는 문제를 해결한다.

삼차함수 $g(x)$의 상수항이 0이므로 $g(x)$는 x를 인수로 갖는다.

…… ㉠

조건 (가)의 $x|g(x)|=\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)dt$에 $x=2a$를 대입하면

$2a|g(2a)|=0$

a가 양수이므로 $g(2a)=0$이고 $g(x)$는 $(x-2a)$를 인수로 갖는다.

…… ㉡

㉠, ㉡에서 $g(x)=x(x-2a)(x-b)$ (단, b는 실수)

함수 $(a-x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수

$\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)dt$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고,

$\frac{d}{dx}\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)dt=(a-x)f(x)$이다.

즉, 함수 $x|g(x)|$는 $x=2a$에서 미분가능하다.

$\lim_{x\to 2a+}\frac{x|g(x)|-2a|g(2a)|}{x-2a}$

$= \lim_{x \to 2a+} \dfrac{x|x(x-2a)(x-b)|}{x-2a}$

$= \lim_{x \to 2a+} x^2|x-b|$

$= 4a^2|2a-b|$

$\lim_{x \to 2a-} \dfrac{x|g(x)|-2a|g(2a)|}{x-2a}$

$= \lim_{x \to 2a-} \dfrac{x|x(x-2a)(x-b)|}{x-2a}$

$= \lim_{x \to 2a-} (-x^2|x-b|)$

$= -4a^2|2a-b|$

이므로 $4a^2|2a-b| = -4a^2|2a-b|$ 에서 $b=2a$ 이다.

따라서 $g(x) = x(x-2a)^2$

$\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)\,dt = \begin{cases} -x^2(x-2a)^2 & (x<0) \\ x^2(x-2a)^2 & (x \ge 0) \end{cases}$

이고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

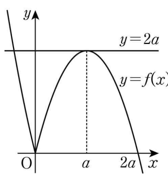
$(a-x)f(x) = \begin{cases} -4x(x-a)(x-2a) & (x<0) \\ 4x(x-a)(x-2a) & (x \ge 0) \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} 4x(x-2a) & (x<0) \\ -4x(x-2a) & (x \ge 0) \end{cases}$

방정식 $g(f(x))=0$ 에서

$f(x)=0$ 또는 $f(x)=2a$

방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근 0, $2a$ 를 가지므로 조건 (나)에 의해 방정식 $f(x)=2a$ 는 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=2a$ 의 교점의 개수가 2 이어야 하므로

$f(a) = -4a(a-2a) = 4a^2 = 2a$

$a = \dfrac{1}{2}$

$\int_{-2a}^{2a} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

$= \int_{-1}^{0}(4x^2-4x)\,dx + \int_{0}^{1}(-4x^2+4x)\,dx$

$= \left[\dfrac{4}{3}x^3 - 2x^2\right]_{-1}^{0} + \left[-\dfrac{4}{3}x^3 + 2x^2\right]_{0}^{1}$

$= 4$

49) 30

[출제의도] 정적분을 이용하여 추론하기

$g(x) = \int_{0}^{x}\{f'(t+a) \times f'(t-a)\}\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x) = f'(x+a) \times f'(x-a)$

$f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로

방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 0 또는 1 또는 2이다.

(i) 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 0 또는 1인 경우

모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \ge 0$이므로

$g'(x) = f'(x+a) \times f'(x-a) \ge 0$

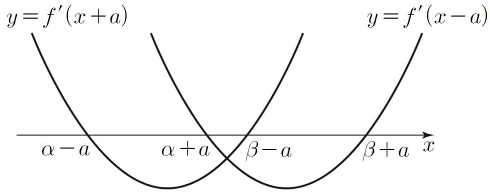
함수 $g(x)$가 극값을 갖지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우

$f'(x) = 3(x-\alpha)(x-\beta)\,(\alpha < \beta)$라 하자.

(a) $\alpha + a < \beta - a$일 때

두 함수 $y=f'(x+a)$, $y=f'(x-a)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

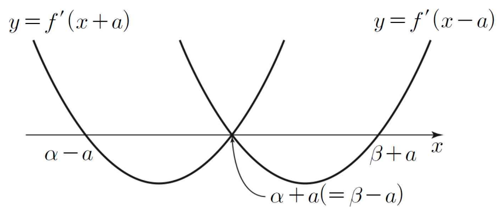
x	$\cdots$	$\alpha-a$	$\cdots$	$\alpha+a$	$\cdots$	$\beta-a$	$\cdots$	$\beta+a$	$\cdots$
$f'(x+a)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x-a)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $g(x)$는

$x=\alpha-a$, $x=\alpha+a$, $x=\beta-a$, $x=\beta+a$에서 극값을 가지므로 조건을 만족시키지 않는다.

(b) $\alpha + a = \beta - a$일 때

두 함수 $y=f'(x+a)$, $y=f'(x-a)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$\alpha-a$	$\cdots$	$\alpha+a$ $(=\beta-a)$	$\cdots$	$\beta+a$	$\cdots$
$f'(x+a)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x-a)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=\alpha-a$, $x=\beta+a$에서만 극값을 가지므로 조건에 의하여

$(\beta+a)-(\alpha-a) = \dfrac{13}{2} - \dfrac{1}{2} = 6$

$\beta - \alpha = 2a$이므로

$(\beta+a)-(\alpha-a) = (\beta-\alpha)+2a = 4a$

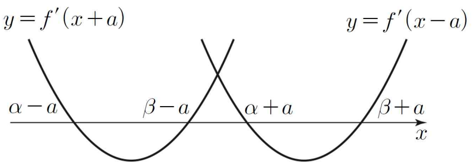
$4a=6$에서 $a=\dfrac{3}{2}$

그러므로 $\alpha-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$에서 $\alpha=2$이고,

$\beta+\dfrac{3}{2}=\dfrac{13}{2}$에서 $\beta=5$이다.

(c) $\beta-a<\alpha+a$일 때

두 함수 $y=f'(x+a)$, $y=f'(x-a)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$\alpha-a$	$\cdots$	$\beta-a$	$\cdots$	$\alpha+a$	$\cdots$	$\beta+a$	$\cdots$
$f'(x+a)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x-a)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $g(x)$는

$x=\alpha-a$, $x=\beta-a$, $x=\alpha+a$, $x=\beta+a$에서 극값을 가지므로

조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $f'(x)=3(x-2)(x-5)$

$f(x)=\displaystyle\int\left(3x^2-21x+30\right)dx$

$\quad=x^3-\dfrac{21}{2}x^2+30x+C$ (C는 적분상수)

$f(0)=-\dfrac{1}{2}$이므로 $f(x)=x^3-\dfrac{21}{2}x^2+30x-\dfrac{1}{2}$

따라서 $a\times f(1)=\dfrac{3}{2}\times\left(1-\dfrac{21}{2}+30-\dfrac{1}{2}\right)=30$

50) ①

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 활용하여 문제 해결하기

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

$g(0)=0$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to0-}g(x)=f(2)=0$

$f(x)=(x-2)(x-p)$ (p는 상수)라 하면

$f(x+2)=x(x+2-p)$

$\displaystyle\lim_{h\to0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=2-p$

함수 $xf(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\displaystyle\lim_{h\to0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{F(h)-F(0)}{h}=F'(0)=0$

$g'(0)=2-p=0$, $p=2$

$f(x)=(x-2)^2$

그러므로

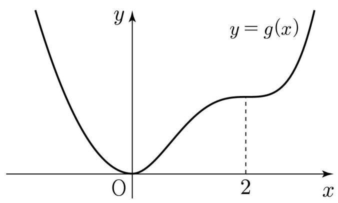
$$g(x)=\begin{cases} x^2 & (x<0) \\ \displaystyle\int_0^x t(t-2)^2dt & (x\ge0)\end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases} 2x & (x<0) \\ 0 & (x=0) \\ x(x-2)^2 & (x>0)\end{cases}$$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗		↗

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(i) $g(a)=0$인 경우

$h(x)=g(x)$이므로 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 0

(ii) $0<g(a)<g(2)$ 또는 $g(2)<g(a)$인 경우

방정식 $h(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\displaystyle\lim_{x\to\alpha-}\frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}\neq\lim_{x\to\alpha+}\frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}$

$\displaystyle\lim_{x\to\beta-}\frac{h(x)-h(\beta)}{x-\beta}\neq\lim_{x\to\beta+}\frac{h(x)-h(\beta)}{x-\beta}$

함수 $h(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 미분가능하지 않다.

함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 2

(iii) $g(a)=g(2)$인 경우

방정식 $h(x)=0$의 두 근을 $\gamma\,(\gamma<0)$, 2라 하면

$\displaystyle\lim_{x\to\gamma-}\frac{h(x)-h(\gamma)}{x-\gamma}\neq\lim_{x\to\gamma+}\frac{h(x)-h(\gamma)}{x-\gamma}$

함수 $h(x)$는 $x=\gamma$에서 미분가능하지 않다.

$0<x<2$일 때, $h(x)=g(2)-g(x)$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to2-}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=-g'(2)=0$

$x>2$일 때, $h(x)=g(x)-g(2)$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to2+}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=g'(2)=0$

함수 $h(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 1

$g(2)=\displaystyle\int_0^2 t(t-2)^2dt=\frac{4}{3}$이므로

$g(\gamma)=\gamma^2=\dfrac{4}{3}$, $\gamma=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은

$2\times\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)=-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

[참고] 함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.