

수능, 모의고사 연도별 문제모음

단원 : 수2-적분

반: 번호: 이름:

기본유형

1. 함수 $y = 4x^3 - 12x^2 + 8x$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

[4점][2012년 5월 나26]

2. 곡선 $y = f(x)$ 위의 임의의 점 $P(x, y)$ 에서의 접선의 기울기가 $3x^2 - 12$ 이고 함수 $f(x)$ 의 극솟값이 3일 때, 함수 $f(x)$ 의 극댓값을 구하시오.

[3점][2012년 7월 나24]

3. 함수 $f(x) = \int (x^2 + 2x) dx$ 일 때,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{h} \text{의 값은?}$$

[3점][2012년 7월 나05]

- ① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

4. $f(x) = 3x^2 + x + \int_0^2 f(t) dt$ 를 만족시키는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(2)$ 의 값을 구하시오.

[3점][2012년 7월 가25]

5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 4} \int_2^x (t^2 + 3t - 2) dt$ 의 값을 구하시오.

[3점][2012년 10월 나26]

6. 함수 $f(x) = x + 1$ 에 대하여

$$\int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 dx = k \left(\int_{-1}^1 f(x) dx \right)^2$$

일 때, 상수 k 의 값은?

[3점][2013학년도 수능 나11]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

7. 함수 $f(x)$ 가 $f(x) = x^2 - 2x + \int_0^1 t f(t) dt$ 를 만족시킬 때,

$f(3)$ 의 값은?

[3점][2013년 7월 나12]

- ① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{17}{6}$ ④ $\frac{19}{6}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

8. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\int_0^x f(t) dt = x^3 - 2x^2 - 2x \int_0^1 f(t) dt$$

일 때, $f(0) = a$ 라 하자. $60a$ 의 값을 구하시오.

[4점][2013년 9월 나28]

9. 모든 실수 x 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

$$\int_{12}^x f(t) dt = -x^3 + x^2 + \int_0^1 xf(t) dt$$

$\int_0^1 f(x) dx$ 의 값을 구하시오.

[3점][2014년 10월 나24]

10. 다항함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 $f'(x)=6x^2+4$ 이다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(0, 6)$ 을 지날 때, $f(1)$ 의 값을 구하시오.

[4점][2015학년도 수능 나26]

11. 곡선 $y=x^3-2x^2+k$ 와 직선 $y=k$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, k 는 상수이다.)

[3점][2015년 10월 나10]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

12. 함수 $f(x) = \int_0^x (3t^2 + 5) dt$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \text{의 값을 구하시오.}$$

[3점][2017년 7월 나25]

13. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여

$$xf(x) = \int_{-1}^x \{f(t) + 2t^2 + t\} dt$$

일 때, $f(3)$ 의 값은?

[4점][2017년 경남10월 나15]

- ① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

14. 함수 $f(x) = \int_2^x (t^2 - 3t + 2) dt$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{|f'(x)|}{x-1}$$

의 값은?

[3점][2017년 전북10월 나12]

- ① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

15. 함수 $f(x) = \int_0^x (-6t^2 + 6t) dt$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 와

x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

[4점][2017년 전북10월 나15]

- ① $\frac{21}{32}$ ② $\frac{23}{32}$ ③ $\frac{25}{32}$ ④ $\frac{27}{32}$ ⑤ $\frac{29}{32}$

16. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_a^x f(t)dt = \frac{1}{3}x^3 - 9$$

를 만족시킬 때, $f(a)$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 실수이다.)

[3점][2018년 10월 나25]

17. $\int_{-a}^a (5x^3 + 3x^2 + 4x + a)dx = (a+1)^2$ 을 만족시키는 모든 실수 a 의 값의 합은?

[3점][2018년 대구11월 나09]

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{5}$

18. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_1^x \left\{ \frac{d}{dt} f(t) \right\} dt = x^3 + ax^2 - 2$$

를 만족시킬 때, $f'(a)$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.)

[4점][2019학년도 수능 나14]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

19. $\int_1^4 (x + |x-3|) dx$ 의 값을 구하시오.

[3점][2019학년도 수능 나25]

20. 함수 $f(x) = x^2 - 2x$ 에 대하여 두 곡선 $y = f(x)$,
 $y = -f(x-1) - 1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는?

[4점][2019년 9월 나15]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

21. 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = x^3 - 4x \int_0^1 |f(t)| dt$$

를 만족시킨다. $f(1) > 0$ 일 때, $f(2)$ 의 값은?

[4점][2020년 3월 가16]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

22. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$3xf(x) = 9 \int_1^x f(t)dt + 2x$$

를 만족시킬 때, $f'(1)$ 의 값은?

[4점][2020년 4월 나16]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

23. 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + f(-x)}{x^2} = 3$$

$$(나) f(0) = -1$$

$\int_{-3}^3 f(x)dx$ 의 값은?

[4점][2020년 7월 나14]

- ① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

24. 함수 $f(x) = -x^2 - 4x + a$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt$$

가 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 증가하도록 하는 실수 a 의 최솟값을 구하시오.

[4점][2020년 9월 나28]

25. 다항함수 $f(x)$ 의 한 부정적분 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) f(x) = 2x + 2 \int_0^1 g(t)dt$$

$$(나) g(0) - \int_0^1 g(t)dt = \frac{2}{3}$$

$g(1)$ 의 값은?

[4점][2020년 10월 나16]

- ① -2 ② $-\frac{5}{3}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{2}{3}$

26. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $F(x)$ 의 도함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} -2x & (x < 0) \\ k(2x - x^2) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. $F(2) - F(-3) = 21$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하시오.

[3점][2021년 3월 18]

27. 두 양수 a, b ($a < b$)에 대하여 함수 $f(x)$ 를 $f(x) = (x-a)(x-b)$ 라 하자.

$$\int_0^a f(x)dx = \frac{11}{6}, \quad \int_0^b f(x)dx = -\frac{8}{3}$$

일 때, 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

[4점][2021년 4월 13]

- ① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

28. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$xf(x) = 2x^3 + ax^2 + 3a + \int_1^x f(t) dt$$

를 만족시킨다. $f(1) = \int_0^1 f(t) dt$ 일 때, $a + f(3)$ 의 값은?
(단, a 는 상수이다.)

[4점][2021년 9월 11]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

29. 다항함수 $f(x)$ 의 한 부정적분 $F(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$F(x) = (x+2)f(x) - x^3 + 12x$$

를 만족시킨다. $F(0) = 30$ 일 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오.

[3점][2022년 4월 공통18]

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가

$$\int_0^1 f'(x) dx = \int_0^2 f'(x) dx = 0$$

을 만족시킬 때, $f'(1)$ 의 값은?

[4점][2022년 7월 공통09]

- ① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

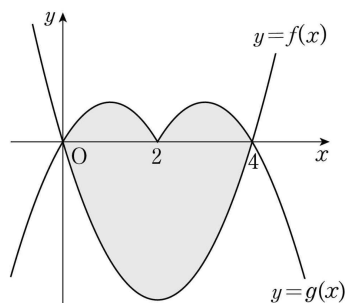
31. 두 함수

$$f(x) = x^2 - 4x, \quad g(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & (x < 2) \\ -x^2 + 6x - 8 & (x \geq 2) \end{cases}$$

의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는?

[3점][2022년 10월 공통07]

- ① $\frac{40}{3}$ ② 14 ③ $\frac{44}{3}$ ④ $\frac{46}{3}$ ⑤ 16



활용문제

32. 이차함수 $f(x)$ 는 $f(0) = -1$ 이고,

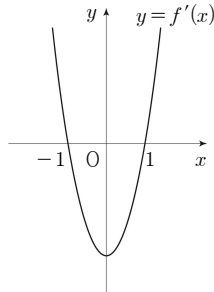
$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx$$

를 만족시킨다. $f(2)$ 의 값은?

[4점][2012학년도 수능 나19]

- ① 11 ② 10 ③ 9 ④ 8 ⑤ 7

33. 삼차함수 $y=f(x)$ 의 도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$f'(-1)=f'(1)=0$ 이고 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 4, 극솟값이 0일 때, $f(3)$ 의 값은?

[4점][2012년 4월 가13]

- ① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

34. 정수 a, b, c 에 대하여 함수 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+10$ 이 다음 두 조건을 모두 만족시킨다.

- (가) 모든 실수 α 에 대하여 $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x)dx$
(나) $-6 < f'(1) < -2$

이때, 함수 $y=f(x)$ 의 극솟값은?

[4점][2012년 7월 나19]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

35. 실수 전체에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 가 $f(x)=f(x+4)$ 를 만족하고

$$f(x) = \begin{cases} -4x+2 & (0 \leq x < 2) \\ x^2-2x+a & (2 \leq x \leq 4) \end{cases}$$

일 때, $\int_9^{11} f(x)dx$ 의 값은?

[3점][2012년 7월 나10]

- ① -8 ② $-\frac{26}{3}$ ③ $-\frac{28}{3}$ ④ -10 ⑤ $-\frac{32}{3}$

36. 다항함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x f(t)dt - f(x)}{x^2 - 1} = 2$ 를 만족할 때, $f'(1)$ 의 값은?

[4점][2012년 7월 나13]

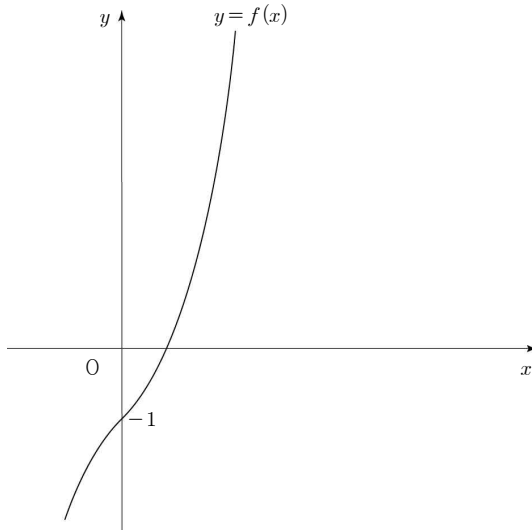
- ① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

37. 함수 $f(x) = \int \left\{ \frac{d}{dx} (x^2 - 6x) \right\} dx$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값이 8일 때, $f(1)$ 의 값을 구하시오.

[4점][2012년 7월 나25]

38. 함수 $f(x) = x^3 + x - 1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $\int_1^9 g(x)dx$ 의 값은?

[4점][2012년 7월 나21]



- ① $\frac{47}{4}$ ② $\frac{49}{4}$ ③ $\frac{51}{4}$ ④ $\frac{53}{4}$ ⑤ $\frac{55}{4}$

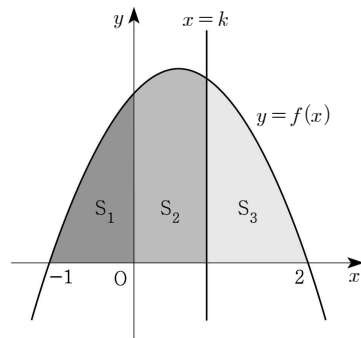
39. 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 가
 $g(x) = \int \{x^2 + f(x)\}dx$, $f(x)g(x) = -2x^4 + 8x^3$
 을 만족시킬 때, $g(1)$ 의 값은?

[4점][2012년 9월 나18]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

40. 함수 $f(x) = -x^2 + x + 2$ 에 대하여 그림과 같이 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분을 y 축과 직선 $x = k$ ($0 < k < 2$)로 나눈 세 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3 이라 하자. S_1, S_2, S_3 이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, S_2 의 값은?

[4점][2012년 10월 나19]



- ① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

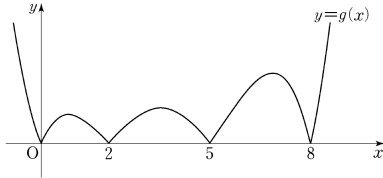
41. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 가 $f(3) = 0$ 이고,
 $\int_0^{2013} f(x)dx = \int_3^{2013} f(x)dx$ 를 만족시킨다. 곡선 $y = f(x)$ 와 x
 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 S 일 때, $30S$ 의 값을 구하시오.

[4점][2013학년도 수능 나28]

42. 삼차함수 $f(x)$ 는 $f(0) > 0$ 을 만족시킨다. 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \left| \int_0^x f(t) dt \right|$$

라 할 때, 함수 $g(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2013학년도 수능 가19]

[보 기]

ㄱ. 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 3개의 실근을 갖는다.

ㄴ. $f'(0) < 0$

ㄷ. $\int_m^{m+2} f(x) dx > 0$ 을 만족시키는 자연수 m 의 개수는 3이다.

- ① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

43. 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$

(나) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 $(2, 0)$ 을 지난다.

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

[4점][2013년 7월 나17]

- ① $\frac{56}{3}$ ② $\frac{58}{3}$ ③ 20 ④ $\frac{62}{3}$ ⑤ $\frac{64}{3}$

44. 양수 a, b 에 대하여 함수 $f(x) = \int_0^x (t-a)(t-b)dt$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$ 의 값은?

[4점][2014년 7월 나19]

(가) 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{1}{2}$ 에서 극값을 갖는다.

(나) $f(a) - f(b) = \frac{1}{6}$

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

45. 연속함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-x) = f(x)$

(나) $f(x+2) = f(x)$

(다) $\int_{-1}^1 (2x+3)f(x) dx = 15$

$\int_{-6}^{10} f(x) dx$ 의 값을 구하시오.

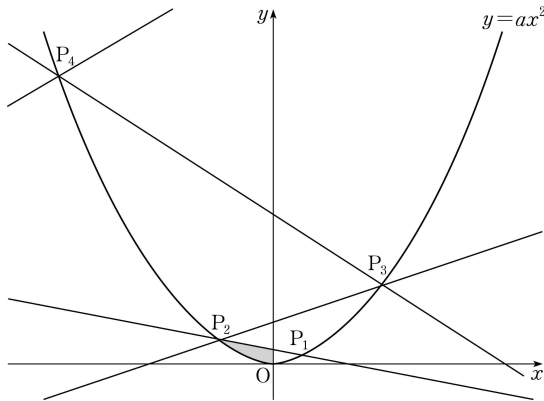
[4점][2014년 7월 나29]

46. 자연수 n 에 대하여 곡선 $y = ax^2 (a > 0)$ 위의 점 P_n 을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 P_1 의 좌표는 (x_1, ax_1^2) 이다.

(나) 점 P_{n+1} 은 점 $P_n(x_n, ax_n^2)$ 을 지나는 직선

$y = -ax_nx + 2ax_n^2$ 과 곡선 $y = ax^2$ 이 만나는 점 중에서 점 P_n 이 아닌 점이다.



점 P_1 의 좌표가 $(1, \frac{1}{3})$ 일 때, 곡선 $y = ax^2$ 과 직선 P_1P_2 로 둘러싸인 부분 중에서 제2사분면에 있는 부분의 넓이는?

[4점][2014년 10월 나16]

- ① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{10}{9}$ ③ $\frac{8}{9}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{4}{9}$

47. 모든 실수 x 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

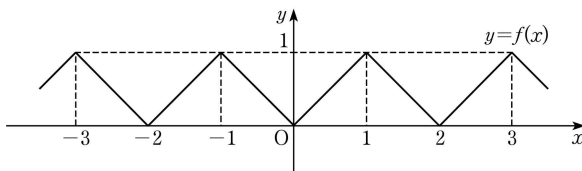
(가) $f(x+2) = f(x)$

(나) $f(x) = |x| \quad (-1 \leq x < 1)$

함수 $g(x) = \int_{-2}^x f(t)dt$ 라 할 때,

실수 a 에 대하여 $g(a+4) - g(a)$ 의 값은?

[4점][2014년 10월 나19]



- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

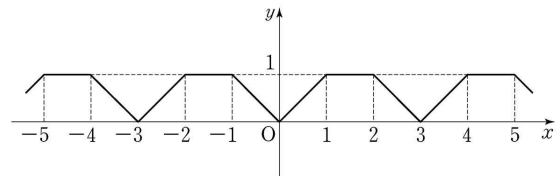
48. 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+3) = f(x)$ 를 만족시키고,

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (1 \leq x < 2) \\ -x+3 & (2 \leq x < 3) \end{cases}$$

이다. $\int_{-a}^a f(x)dx = 13$ 일 때, 상수 a 의 값은?

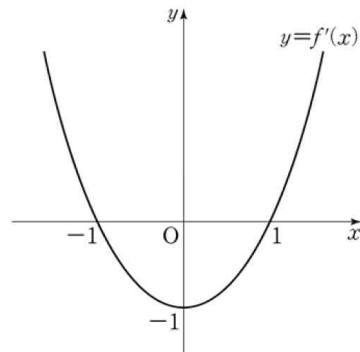
[4점][2015학년도 수능 나20]

- ① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18



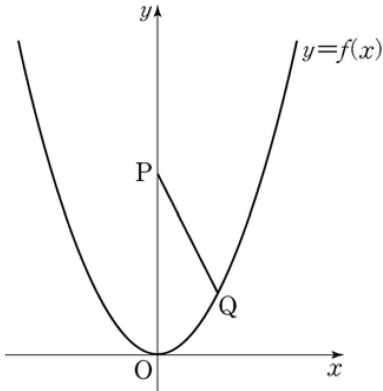
49. 함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 $f'(x) = x^2 - 1$ 이고, $f(0) = 0$ 일 때, 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

[4점][2015년 9월 나14]



- ① $\frac{9}{8}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{11}{8}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{13}{8}$

50. 자연수 n 에 대하여 좌표가 $(0, 2n+1)$ 인 점을 P라 하고, 함수 $f(x)=nx^2$ 의 그래프 위의 점 중 y좌표가 1이고 제1사분면에 있는 점을 Q라 하자.



$n=1$ 일 때, 선분 PQ와 곡선 $y=f(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

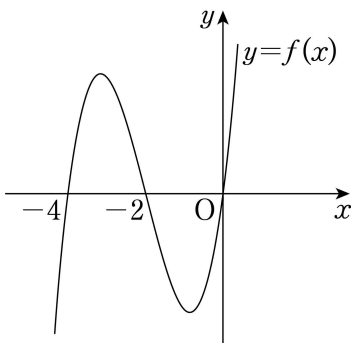
[3점][2016학년도 수능 나13]

- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{19}{12}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

51. 함수 $f(x)=x(x+2)(x+4)$ 에 대하여, 함수

$g(x)=\int_2^x f(t)dt$ 는 $x=\alpha$ 에서 극댓값을 갖는다. $g(\alpha)$ 의 값은?

[4점][2015년 10월 나14]



- ① -28 ② -29 ③ -30 ④ -31 ⑤ -32

52. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_1^x f(t)dt = xf(x) - 3x^4 + 2x^2$$

을 만족시킬 때, $f(0)$ 의 값은?

[4점][2015년 7월 나15]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

53. 이차함수 $f(x)$ 가 $f(0)=0$ 이고 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \int_0^2 |f(x)|dx = -\int_0^2 f(x)dx = 4$$

$$(나) \int_2^3 |f(x)|dx = \int_2^3 f(x)dx$$

$f(5)$ 의 값을 구하시오.

[4점][2016학년도 수능 나29]

54. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(-x) = -f(x), \quad g(-x) = g(x)$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$ 에 대하여

$$\int_{-3}^3 (x+5)h'(x)dx = 10$$

일 때, $h(3)$ 의 값은?

[4점][2016학년도 수능 나20]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

55. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 가

$$f(x) = \int x g(x) dx, \quad \frac{d}{dx} \{f(x) - g(x)\} = 4x^3 + 2x$$

를 만족시킬 때, $g(1)$ 의 값은?

[4점][2016년 7월 나20]

- ① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

56. 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2 & (x < 0) \\ -x^2+2x+2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

라 하자.

양의 실수 a 에 대하여 $\int_{-a}^a f(x) dx$ 의 최댓값은?

[4점][2017년 10월 나16]

- ① 5 ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{17}{3}$ ④ 6 ⑤ $\frac{19}{3}$

57. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad f'\left(\frac{11}{3}\right) < 0$$

(나) 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값 35를 갖는다.

(다) 방정식 $f(x)=f(4)$ 는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$f(0)$ 의 값은?

[4점][2017년 10월 나20]

- ① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

58. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad f(2)=f(5)$$

(나) 방정식 $f(x)-p=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되게 하는 실수 p 의 최댓값은 $f(2)$ 이다.

$$\int_0^2 f(x) dx \text{의 값은?}$$

[4점][2018년 7월 나17]

- ① 25 ② 28 ③ 31 ④ 34 ⑤ 37

59. 실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(x-3) + 4$ 이다.

(나) $\int_0^6 f(x) dx = 0$

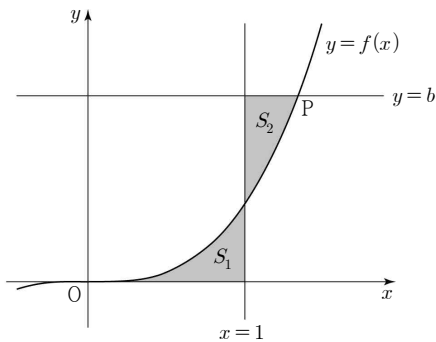
함수 $f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=6$, $x=9$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는?

[4점][2019학년도 수능 나17]

- ① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

60. 함수 $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ 의 그래프 위의 점 $P(a, b)$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 , 곡선 $y=f(x)$ 와 두 직선 $x=1$, $y=b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하자. $S_1 = S_2$ 일 때, $30a$ 의 값을 구하시오. (단, $a > 1$)

[4점][2019년 7월 나27]



61. 두 함수

$$f(x) = \frac{1}{3}x(4-x), \quad g(x) = |x-1| - 1$$

의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 할 때, $4S$ 의 값을 구하시오.

[4점][2020학년도 수능 나26]

62. 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_1^x f(t) dt = \frac{x-1}{2} \{f(x) + f(1)\} \text{이다.}$$

(나) $\int_0^2 f(x) dx = 5 \int_{-1}^1 xf(x) dx$

$f(0) = 1$ 일 때, $f(4)$ 의 값을 구하시오.

[4점][2020학년도 수능 나28]

63. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt + f(x)$$

라 할 때, 함수 $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 0을 갖는다.
 (나) 함수 $g(x)$ 의 도함수 $y=g'(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

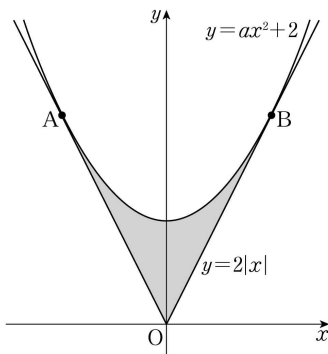
$f(2)$ 의 값은?

[4점][2020년 3월 나20]

- ① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

64. 그림과 같이 두 함수 $y=ax^2+2$ 와 $y=2|x|$ 의 그래프가 두 점 A, B에서 각각 접한다. 두 함수 $y=ax^2+2$ 와 $y=2|x|$ 의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, a 는 상수이다.)

[3점][2020년 3월 가10]



- ① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{17}{6}$

65. 첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 있다. 자연수 n 에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n 을 다음 규칙에 따라 정한다.

- (가) 점 P_1 의 좌표는 (1, 1)이다.
 (나) 점 P_n 의 x 좌표는 a_n 이다.
 (다) 직선 P_nP_{n+1} 의 기울기는 $\frac{1}{2}a_{n+1}$ 이다.

$x \geq 1$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 모든 자연수 n 에 대하여 닫힌구간 $[a_n, a_{n+1}]$ 에서 선분 P_nP_{n+1} 과 일치할 때,

$\int_1^{11} f(x)dx$ 의 값은?

[4점][2020년 7월 나19]

- ① 140 ② 145 ③ 150 ④ 155 ⑤ 160

66. 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$, $f(x+3)=f(x)$ 이고

$\int_{-1}^2 \{f(x)+x^2-1\}^2 dx$ 의 값이 최소가 되도록 하는 연속함수

$f(x)$ 에 대하여 $\int_{-1}^{26} f(x)dx$ 의 값을 구하시오.

[4점][2020년 7월 나28]

67. 실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(x) \geq g(x)$
 (나) $f(x) + g(x) = x^2 + 3x$
 (다) $f(x)g(x) = (x^2 + 1)(3x - 1)$

$\int_0^2 f(x) dx$ 의 값은?

[4점][2020년 9월 나20]

- ① $\frac{23}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{29}{6}$ ④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$

68. 최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt - xf(x)$$

라 하자. 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \leq g(3)$ 이고 함수 $g(x)$ 는 오직 1개의 극값만 가진다. $\int_0^1 g'(x) dx$ 의 값은?

[4점][2020년 10월 나20]

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

69. 실수 $a(a > 1)$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x-a)$$

라 하자. 함수

$$g(x) = x^2 \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t^2 f(t) dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a 의 최댓값은?

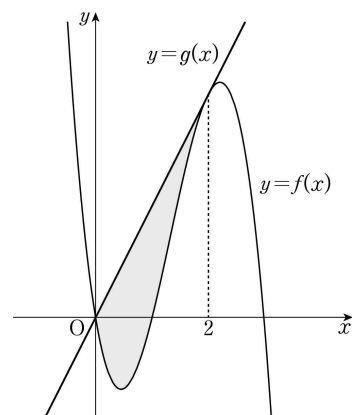
[4점][2021학년도 수능 나20]

- ① $\frac{9\sqrt{2}}{8}$ ② $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

70. 최고차항의 계수가 -3 인 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선 $y=g(x)$ 가 곡선 $y=f(x)$ 와 원점에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는?

[4점][2021년 3월 09]

- ① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ 4 ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$



71. 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 가

$$f(0)=0, f(1)=1, \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{6}$$

을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^2 g(x)dx$ 의 값은?

[4점][2021년 6월 11]

$$(가) \ g(x) = \begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1 < x < 0) \\ f(x) & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

(나) 모든 실수 x 에 대하여 $g(x+2)=g(x)$ 이다.

- ① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

72. 실수 a 와 함수 $f(x)=x^3-12x^2+45x+3$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \int_a^x \{f(x)-f(t)\} \times \{f(t)\}^4 dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a 의 값의 합을 구하시오.

[4점][2021년 6월 20]

73. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 에 대하여 방정식 $f'(x)=0$ 의 서로 다른 세 실근 $\alpha, 0, \beta (\alpha < 0 < \beta)$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 방정식 $f(x)=9$ 는 서로 다른 세 실근을 갖는다.
(나) $f(\alpha) = -16$

함수 $g(x) = |f'(x)| - f'(x)$ 에 대하여 $\int_0^{10} g(x)dx$ 의 값은?

[4점][2021년 7월 15]

- ① 48 ② 50 ③ 52 ④ 54 ⑤ 56

74. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=f'(2)=0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 와 양수 p 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} f(x)-f(0) & (x \leq 0) \\ f(x+p)-f(p) & (x > 0) \end{cases}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2021년 9월 14]

- | 보기 | —
ㄱ. $p=1$ 일 때, $g'(1)=0$ 이다.
ㄴ. $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p 의 개수는 1이다.
ㄷ. $p \geq 2$ 일 때, $\int_{-1}^1 g(x)dx \geq 0$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

75. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 $f(0)=0$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여 $f(1-x)=-f(1+x)$ 를 만족시킨다. 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=-6x^2$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 할 때, $4S$ 의 값을 구하시오.

[4점][2021년 10월 20]

76. 최고차항의 계수가 4이고 $f(0)=f'(0)=0$ 을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} \int_0^x f(t) dt + 5 & (x < c) \\ \left| \int_0^x f(t) dt - \frac{13}{3} \right| & (x \geq c) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 c 의 개수가 1일 때, $g(1)$ 의 최댓값은?

[4점][2021년 10월 15]

- ① 2 ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ 4 ⑤ $\frac{14}{3}$

77. 곡선 $y=x^2-5x$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=k$ 가 이등분할 때, 상수 k 의 값은?

[3점][2022학년도 수능 08]

- ① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

78. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $f(x)=x$ 이다.
 (나) 어떤 상수 a, b 에 대하여 구간 $[0, \infty)$ 에서 $f(x+1)-xf(x)=ax+b$ 이다.

$60 \times \int_1^2 f(x) dx$ 의 값을 구하시오.

[4점][2022학년도 수능 20]

79. 다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_1^x (x-t)f(t) dt = 3$$

을 만족시킬 때, $\int_1^2 (4x+1)f(x)dx$ 의 값은?

[4점][2022년 4월 공통13]

- ① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

80. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$ 가

$$g(x) = \begin{cases} -\int_0^x f(t) dt & (x < 0) \\ \int_0^x f(t) dt & (x \geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2022년 6월 공통14]

- 보기
- ㄱ. $f(0)=0$
 ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 극댓값을 갖는다.
 ㄷ. $2 < f(1) < 4$ 일 때, 방정식 $f(x)=x$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

81. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여

함수 $g(x) = \int_x^{x+1} |f(t)| dt$ 는 $x=1$ 과 $x=4$ 에서 극소이다.

$f(0)$ 의 값을 구하시오.

[4점][2022년 6월 공통20]

82. 최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = x^2 \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t^2 f(t) dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(x)$ 는 극값을 갖지 않는다.
 (나) 방정식 $g'(x)=0$ 의 모든 실근은 0, 3이다.

$\int_0^3 |f(x)| dx$ 의 값을 구하시오.

[4점][2022년 7월 공통20]

83. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(t)$ 를

$$g(t) = \int_t^{t+1} f(x)dx - \int_0^1 |f(x)|dx$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2022년 9월 공통14]

— <보 기> —

ㄱ. $g(0)=0$ 이면 $g(-1)<0$ 이다.

ㄴ. $g(-1)>0$ 이면 $f(k)=0$ 을 만족시키는 $k<-1$ 인 실수 k 가 존재한다.

ㄷ. $g(-1)>1$ 이면 $g(0)<-1$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

84. 상수 $k(k<0)$ 에 대하여 두 함수

$$f(x)=x^3+x^2-x, \quad g(x)=4|x|+k$$

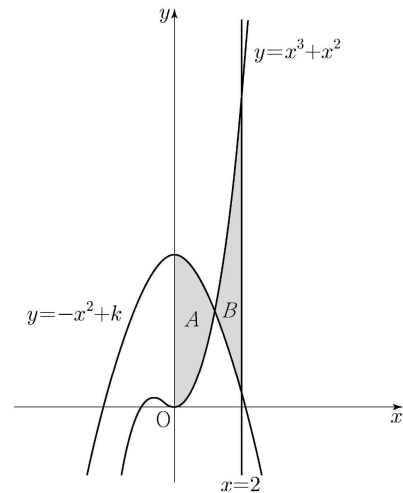
의 그래프가 만나는 점의 개수가 2일 때, 두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 하자. $30 \times S$ 의 값을 구하시오.

[4점][2022년 9월 공통20]

85. 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$ 와 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A , 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$ 와 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 B 라 하자. $A=B$ 일 때, 상수 k 의 값은? (단, $4 < k < 5$)

[4점][2023학년도 수능 공통10]

- ① $\frac{25}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{29}{6}$



86. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 실수 t 에 대하여 x 에 대한 방정식

$$\int_t^x f(s)ds = 0$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$ 라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2022년 10월 공통14]

— | 보 기 | —

ㄱ. $f(x)=x^2(x-1)$ 일 때, $g(1)=1$ 이다.

ㄴ. 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이면 $g(a)=3$ 인 실수 a 가 존재한다.

ㄷ. $\lim_{t \rightarrow b} g(t) + g(b) = 6$ 을 만족시키는 실수 b 의 값이 0과 3 뿐이면 $f(4)=12$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

87. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$n-1 \leq x < n \text{ 일 때, } |f(x)| = |6(x-n+1)(x-n)| \text{ 이다.}$$

(단, n 은 자연수이다.)

열린구간 $(0, 4)$ 에서 정의된 함수

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt - \int_x^4 f(t) dt$$

가 $x=2$ 에서 최솟값 0을 가질 때, $\int_{\frac{1}{2}}^4 f(x) dx$ 의 값은?

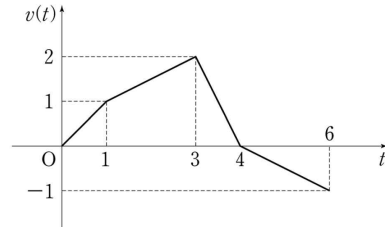
[4점][2023학년도 수능 공통12]

- ① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

속도, 거리

88. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시간 t ($0 \leq t \leq 6$)에서의 속도 $v(t)$ 의 그래프가 그림과 같다. 점 P 가 시간 $t=0$ 에서 시간 $t=6$ 까지 움직인 거리는?

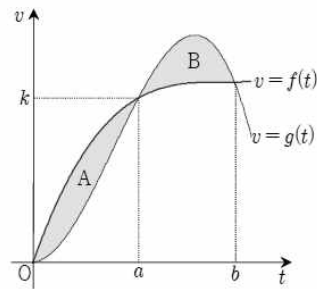
[3점][2012년 5월 나10]



- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{11}{2}$

89. 원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q 의 시간 t 에서의 속도 v 가 각각 $f(t), g(t)$ 이다. 그림과 같이 두 곡선 $v=f(t), v=g(t)$ 로 둘러싸인 두 부분 A, B의 넓이가 각각 S_1, S_2 일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4점][2011년 대전10월 나17]



<보 기>

ㄱ. $S_1 = S_2$ 이면 두 점 P, Q 는 $t=b$ 일 때 만난다.

ㄴ. $S_1 > S_2$ 이면 $\int_0^b f(t) dt > \int_0^b g(t) dt$

ㄷ. $S_1 < S_2$ 이면 $\int_0^c \{f(t) - g(t)\} dt = 0$ 을 만족시키는 c 가 열린구간 (a, b) 에 존재한다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

90. 원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시간 t ($0 \leq t \leq 8$)에서의 속도가 각각 $2t^2 - 8t$, $t^3 - 10t^2 + 24t$ 이다. 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값을 구하시오.

[4점][2013년 10월 나28]

91. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 t ($t \geq 0$)에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = -2t + 4$$

이다. $t=0$ 부터 $t=4$ 까지 점 P가 움직인 거리는?

[3점][2017학년도 수능 나12]

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

92. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 t ($t > 0$)에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = 4 - at$$

이다. $t=2$ 에서 점 P의 운동방향이 바뀌었을 때, $t=0$ 부터 $t=6$ 까지 점 P가 움직인 거리는? (단, a 는 상수이다)

[3점][2017년 대구8월 나12]

- ① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

93. 원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시간 t ($t \geq 0$)에서의 속도가 각각 $3t^2 + 6t - 6$, $10t - 6$ 이다. 두 점 P, Q가 출발 후 $t=a$ 에서 다시 만날 때, 상수 a 의 값은?

[4점][2018년 7월 나14]

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

94. 시간 $t=0$ 일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시간 t ($t \geq 0$)에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = 3t^2 + t, \quad v_2(t) = 2t^2 + 3t$$

이다. 출발한 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리를 a 라 할 때, $9a$ 의 값을 구하시오.

[4점][2018년 9월 나28]

95. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 t ($t \geq 0$)에서의 위치 x 가

$$x = t^4 + at^3 \quad (a \text{는 상수})$$

이다. $t=2$ 에서 점 P의 속도가 0일 때, $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P가 움직인 거리는?

[3점][2018년 10월 나12]

- ① $\frac{16}{3}$ ② $\frac{20}{3}$ ③ 8 ④ $\frac{28}{3}$ ⑤ $\frac{32}{3}$

96. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시간 t ($t \geq 0$)에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = -3t^2 + 3t + 6$$

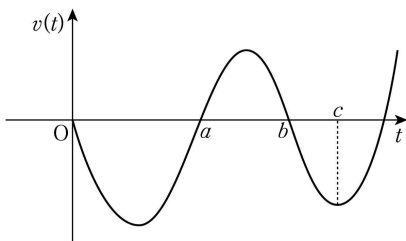
이다. 점 P 가 출발한 후 운동 방향이 바뀌는 시각까지 움직인 거리를 구하시오.

[4점][2018년 경남10월 나26]

97. 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시간 t 에서의 속도 $v(t)$ 가 $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$ 이다. 점 P 가 $t=0$ 일 때 원점을 출발하여 처음으로 운동 방향을 바꾼 순간의 위치를 A 라 하자. 점 P 가 A 에서 방향을 바꾼 순간부터 다시 A 로 돌아올 때까지 움직인 거리를 구하시오.

[4점][2020년 3월 나27]

98. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시간 t ($t \geq 0$)에서의 속도 $v(t)$ 의 그래프가 그림과 같다.



점 P 가 출발한 후 처음으로 운동 방향을 바꿀 때의 위치는 -8 이고 점 P 의 시간 $t=c$ 에서의 위치는 -6 이다.

$\int_0^b v(t)dt = \int_b^c v(t)dt$ 일 때, 점 P 가 $t=a$ 부터 $t=b$ 까지 움직인 거리는?

[4점][2020년 3월 가15]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

99. 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시간 t ($t \geq 0$)에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = -4t + 5$$

이다. 시간 $t=3$ 에서 점 P 의 위치가 11일 때, 시간 $t=0$ 에서 점 P 의 위치는?

[4점][2020년 6월 나15]

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

100. 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시간 t ($t \geq 0$)에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = t^2 - at \quad (a > 0)$$

이다. 점 P 가 시간 $t=0$ 일 때부터 움직이는 방향이 바뀔 때까지 움직인 거리가 $\frac{9}{2}$ 이다. 상수 a 의 값은?

[3점][2020년 9월 나13]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

101. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = 2t - 6$$

이다. 점 P가 시간 $t=3$ 에서 $t=k(k > 3)$ 까지 움직인 거리가 25일 때, 상수 k 의 값은?

[4점][2021학년도 수능 나14]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

102. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = 4t - 10$$

이다. 점 P의 시간 $t=1$ 에서의 위치와 점 P의 시간 $t=k(k > 1)$ 에서의 위치가 서로 같을 때, 상수 k 의 값은?

[4점][2021년 4월 10]

- ① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

103. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = 3t^2 - 4t + k$$

이다. 시간 $t=0$ 에서 점 P의 위치는 0이고, 시간 $t=1$ 에서 점 P의 위치는 -3 이다. 시간 $t=1$ 에서 $t=3$ 까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, k 는 상수이다.)

[3점][2021년 6월 19]

104. 시간 $t=0$ 일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = 3t^2 - 6t$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2021년 7월 14]

| 보기 |

- ㄱ. 시간 $t=2$ 에서 점 P의 움직이는 방향이 바뀐다.
 ㄴ. 점 P가 출발한 후 움직이는 방향이 바뀔 때 점 P의 위치는 -4 이다.
 ㄷ. 점 P가 시간 $t=0$ 일 때부터 가속도가 12가 될 때까지 움직인 거리는 8이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

105. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 $t(t > 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = -4t^3 + 12t^2$$

이다. 시간 $t=k$ 에서 점 P의 가속도가 12일 때, 시간 $t=3k$ 에서 $t=4k$ 까지 점 P가 움직인 거리는? (단, k 는 상수이다.)

[4점][2021년 9월 09]

- ① 23 ② 25 ③ 27 ④ 29 ⑤ 31

106. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치 $x(t)$ 가 두 상수 a, b 에 대하여

$$x(t) = t(t-1)(at+b) \quad (a \neq 0)$$

이다. 점 P의 시각 t 에서의 속도 $v(t)$ 가 $\int_0^1 |v(t)| dt = 2$ 를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2022학년도 수능 14]

$$\neg. \int_0^1 v(t) dt = 0$$

ㄴ. $|x(t_1)| > 1$ 인 t_1 이 열린구간 $(0, 1)$ 에 존재한다.

ㄷ. $0 \leq t \leq 1$ 인 모든 t 에 대하여 $|x(t)| < 1$ 이면 $x(t_2) = 0$ 인 t_2 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 존재한다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

107. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 속도 $v(t)$ 가 $v(t) = 12 - 4t$ 일 때, 시각 $t=0$ 에서 $t=4$ 까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

[3점][2021년 10월 17]

108. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = 3t^2 + at$$

이다. 시각 $t=0$ 에서의 점 P의 위치와 시각 $t=6$ 에서의 점 P의 위치가 서로 같을 때, 점 P가 시각 $t=0$ 에서 $t=6$ 까지 움직인 거리는? (단, a 는 상수이다.)

[4점][2022년 3월 공통09]

- ① 64 ② 66 ③ 68 ④ 70 ⑤ 72

109. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = 3(t-2)(t-a) \quad (a > 2 \text{인 상수})$$

이다. 점 P의 시각 $t=0$ 에서의 위치는 0이고, $t > 0$ 에서 점 P의 위치가 0이 되는 순간은 한 번뿐이다. $v(8)$ 의 값은?

[4점][2022년 4월 공통10]

- ① 27 ② 36 ③ 45 ④ 54 ⑤ 63

110. 시각 $t=0$ 일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = 2 - t, \quad v_2(t) = 3t$$

이다. 출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는?

[4점][2022년 6월 공통11]

- ① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

111. 수직선 위의 점 A(6)과 시각 $t=0$ 일 때 원점을 출발하여 이 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 점 P의 속도 $v(t)$ 를

$$v(t) = 3t^2 + at \quad (a > 0)$$

이라 하자. 시각 $t=2$ 에서 점 P와 점 A사이의 거리가 10일 때, 상수 a 의 값은?

[4점][2022년 9월 공통10]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

112. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = 4t^3 - 48t$$

이다. 시각 $t=k(k > 0)$ 에서 점 P의 가속도가 0일 때, 시각 $t=0$ 에서 $t=k$ 까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.
(단, k 는 상수이다.)

[3점][2022년 10월 공통19]

113. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 와 가속도 $a(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \leq t \leq 2$ 일 때, $v(t) = 2t^3 - 8t$ 이다.

(나) $t \geq 2$ 일 때, $a(t) = 6t + 4$ 이다.

시각 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

[4점][2023학년도 수능 공통20]

[해설] 수2-적분

1) 2

삼차함수 $y=4x(x-1)(x-2)$ 가 $[0, 1]$ 에서 x 축의 위쪽,
 $[1, 2]$ 에서 x 축 아래쪽에 둘러싸인 부분이 존재한다. 따라서

$$\int_0^1 (4x^3 - 12x^2 + 8x) dx - \int_1^2 (4x^3 - 12x^2 + 8x) dx = 2$$

2) 35

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$$

$$f(x) = x^3 - 12x + C$$

x	\cdots	-2	\cdots	2	\cdots
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	극대	\searrow	극소	\nearrow

$$\text{극댓값은 } f(2) = 8 - 24 + C = 3 \quad \therefore C = 19$$

$$\text{극댓값은 } f(-2) = 35$$

3) ②

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2) - \{f(2-h) - f(2)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(2-h) - f(2)\}}{-h} \times (-1) = 2f'(2) \end{aligned}$$

$$f'(x) = x^2 + 2x \text{ 이므로}$$

$$2f'(2) = 2(4+4) = 16$$

4) 4

[출제의도] 정적분의 성질 이해하기

$$\int_0^2 f(t) dt = a \text{ 라 하면, } f(x) = 3x^2 + x + a \text{ 이다.}$$

$$\int_0^2 (3t^2 + t + a) dt = a$$

$$\therefore a = -10$$

$$f(x) = 3x^2 + x - 10$$

$$\therefore f(2) = 4$$

5) 2

$$F(x) = \int_2^x (t^2 + 3t - 2) dt \text{ 라 하면 } F'(x) = x^2 + 3x - 2$$

$$(\text{준식}) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x) - F(2)}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} \cdot \frac{F(x) - F(2)}{x-2}$$

$$= \frac{1}{4} F'(2) = \frac{1}{4} (2^2 + 3 \cdot 2 - 2) = 2$$

6) ④

$$\int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 dx = \int_{-1}^1 (x+1)^2 dx$$

$$= \int_{-1}^1 (x^2 + 2x + 1) dx = 2 \int_0^1 (x^2 + 1) dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{3} x^3 + x \right]_0^1 = \frac{8}{3}$$

$$k \left(\int_{-1}^1 f(x) dx \right)^2 = k \left(\int_{-1}^1 (x+1) dx \right)^2$$

$$= k \left(2 \int_0^1 1 dx \right)^2 = 4k [x]_0^1 = 4k$$

$$\text{주어진 등식에서 } \frac{8}{3} = 4k \quad \therefore k = \frac{2}{3}$$

7) ①

$$\int_0^1 t f(t) dt = k \text{ 라 하면, } f(x) = x^2 - 2x + k$$

$$\int_0^1 t(t^2 - 2t + k) dt = k \text{ 를 계산하면}$$

$$k = -\frac{5}{6}$$

$$f(x) = x^2 - 2x - \frac{5}{6}$$

$$\therefore f(3) = \frac{13}{6}$$

8) 40

$$\int_0^1 f(t) dt = 1 - 2 - 2 \int_0^1 f(t) dt$$

$$\int_0^1 f(t) dt = -\frac{1}{3}$$

$$\int_0^x f(t) dt = x^3 - 2x^2 + \frac{2}{3}x$$

$$f(x) = 3x^2 - 4x + \frac{2}{3}$$

$$\therefore 60a = 40$$

9) 132

정적분의 성질에 의해 $x = 12$ 를 대입하면

$$\int_{12}^{12} f(t) dt = 0 \text{ 이므로 } -12^3 + 12^2 + \int_0^1 12f(t) dt = 0$$

$$\text{따라서 } \int_0^1 f(x) dx = 132$$

[다른 풀이]

$$\int_{12}^x f(t) dt = -x^3 + x^2 + \int_0^1 x f(t) dt = -x^3 + x^2 + x \int_0^1 f(t) dt$$

$$\int_0^1 f(t) dt = c \text{ 라 하고 위 등식의 양변을 } x \text{ 에 관하여 미분하면}$$

$$f(x) = -3x^2 + 2x + c$$

$$\int_{12}^x f(t) dt = -x^3 + x^2 + \int_0^1 x f(t) dt \text{ 에 대입하면}$$

$$\int_{12}^x (-3t^2 + 2t + c) dt = [-t^3 + t^2 + c t]_{12}^x$$

$$= -x^3 + x^2 + cx - 12(-132 + c) = -x^3 + x^2 + cx$$

$$\text{즉, } -132 + c = 0$$

$$\text{따라서 } \int_0^1 f(x) dx = 132$$

10) 12

$$f'(x) = 6x^2 + 4 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = \int (6x^2 + 4) dx = 2x^3 + 4x + C$$

$$\text{이때, } f(0) = 6 \text{ 이므로 } C = 6$$

$$\therefore f(x) = 2x^3 + 4x + 6$$

$$\therefore f(1) = 2 + 4 + 6 = 12$$

11) ④

[출제의도] 적분의 성질을 이해하고 넓이를 구한다.

$$x^3 - 2x^2 + k = k \text{ 에서}$$

$$x^3 - 2x^2 = 0, x = 0 \text{ 또는 } 2$$

$$\text{따라서 } \int_0^2 |x^3 - 2x^2 + k - k| dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

12) 17

[출제의도] 적분과 미분의 관계 이해하기

$$f'(x) = 3x^2 + 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 17$$

13) ②

[출제의도] 미분과 적분사이의 관계를 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

$$xf(x) = \int_{-1}^x \{f(t) + 2t^2 + t\} dt \text{ 에서 } f(-1) = 0$$

주어진 식을 양변을 x 대하여 미분하면

$$f(x) + xf'(x) = f(x) + 2x^2 + x$$

$$f'(x) = 2x + 1$$

$$\text{따라서 } f(x) = \int f'(x) dx = x^2 + x + C \text{ (단, } C \text{ 는 적분상수)}$$

$$f(-1) = 0 \text{ 이므로 } C = 0$$

$$f(x) = x^2 + x \text{ 이므로 } f(3) = 12$$

14) ③

[출제의도] 이해능력-다항함수의 적분법

$$f'(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \text{ 이므로}$$

$$\frac{|f'(x)|}{x-1} = \frac{|(x-1)(x-2)|}{x-1}$$

$$1 < x < 2 \text{ 일 때 } (x-1)(x-2) < 0 \text{ 이므로}$$

$$\frac{|f'(x)|}{x-1} = \frac{|(x-1)(x-2)|}{x-1}$$

$$= \frac{-(x-1)(x-2)}{x-1} = -(x-2) = -x + 2$$

따라서

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{|f'(x)|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} (-x + 2) = 1$$

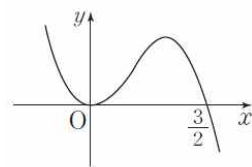
15) ④

[출제의도] 이해능력-다항함수의 적분법

$$f(x) = \int_0^x (-6t^2 + 6t) dt = [-2t^3 + 3t^2]_0^x$$

$$= -2x^3 + 3x^2 = x^2(-2x + 3)$$

$$\text{이므로 } f(x) = 0 \text{ 에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}$$

따라서 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^{\frac{3}{2}} |f(x)| dx = \int_0^{\frac{3}{2}} (-2x^3 + 3x^2) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^4 + x^3 \right]_0^{\frac{3}{2}} = -\frac{81}{32} + \frac{27}{8} = \frac{27}{32}$$

16) 9

[출제의도] 미분과 적분의 관계를 이해하여 함숫값을 구한다.

$$\int_a^x f(t) dt = \frac{1}{3}x^3 - 9 \text{ 에서 } x = a \text{ 를 대입하면}$$

$$0 = \frac{1}{3}a^3 - 9, a \text{ 는 실수이므로 } a = 3$$

$$\int_3^x f(t) dt = \frac{1}{3}x^3 - 9 \text{ 의 양변을 } x \text{ 에 대하여 미분하면}$$

$$f(x) = x^2 \text{ 이므로 } f(a) = f(3) = 9$$

17) ②

[출제의도] 정적분 이해하기

$$\int_{-a}^a (5x^3 + 3x^2 + 4x + a) dx$$

$$= 2 \int_0^a (3x^2 + a) dx = 2[x^3 + ax]_0^a = 2a^3 + 2a^2$$

$$2a^3 + 2a^2 = (a+1)^2 \text{ 에서 } 2a^3 + a^2 - 2a - 1 = 0$$

$$(2a+1)(a+1)(a-1) = 0$$

$$\text{따라서 } a = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } a = -1 \text{ 또는 } a = 1 \text{ 이므로}$$

$$\text{구하는 모든 상수 } a \text{ 의 값의 합은 } -\frac{1}{2}$$

18) ⑤

[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구하고, 미분계수를 구할 수 있는가?

주어진 식의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$0 = 1 + a - 2 \text{ 에서 } a = 1$$

$$\text{한편, } \frac{d}{dt} f(t) = f'(t) \text{ 이므로}$$

$$\int_1^x \left\{ \frac{d}{dt} f(t) \right\} dt = \int_1^x f'(t) dt = [f(t)]_1^x = f(x) - f(1)$$

$$\text{이때 } \int_1^x \left\{ \frac{d}{dt} f(t) \right\} dt = x^3 + x^2 - 2 \text{ 에서}$$

$$f(x) - f(1) = x^3 + x^2 - 2$$

$$\text{따라서 } f'(x) = 3x^2 + 2x \text{ 이므로}$$

$$f'(a) = f'(1) = 3 + 2 = 5$$

19) 10

[출제의도] 정적분의 값을 구할 수 있는가?

$$\int_1^4 (x + |x-3|) dx$$

$$= \int_1^3 (x + |x-3|) dx + \int_3^4 (x + |x-3|) dx$$

$$= \int_1^3 (x - (x-3)) dx + \int_3^4 (x + (x-3)) dx$$

$$= \int_1^3 3 dx + \int_3^4 (2x-3) dx$$

$$= [3x]_1^3 + [x^2 - 3x]_3^4$$

$$= (9-3) + \{(16-12) - (9-9)\}$$

$$= 10$$

20) ③

두 이차함수가 둘러싸인 부분의 넓이는 제 4 사분면에 존재한다.

그러므로

두 이차함수를 x 축으로 대칭이동하여 정적분으로 넓이를 구한다.

$$y = -f(x-1) - 1 = -(x-1)^2 + 2(x-1) = -x^2 + 4x - 4$$

$y = x^2 - 2x$ 와 교점은 $(2, 0)$, $(1, -1)$ 이다.

두 그래프를 x 축으로 대칭이동하여 정적분을 구하면

$$\begin{aligned} \int_1^2 (-x^2 + 2x) - (x^2 - 4x + 4) dx &= \int_1^2 (-2x^2 + 6x - 4) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 4x \right]_1^2 = -\frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

21) ②

[출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 함수의 미정계수를 구한다.

$$a = \int_0^1 |f(t)| dt \text{ 라 하면 } a > 0 \text{ 이고,}$$

$$f(x) = x^3 - 4ax$$

$$f(1) = 1 - 4a > 0 \text{ 에서 } a < \frac{1}{4}$$

따라서 $0 < a < \frac{1}{4}$ 이다.

$$f(x) = x(x^2 - 4a) = 0 \text{ 에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = \pm 2\sqrt{a}$$

$0 < x < 2\sqrt{a}$ 일 때 $f(x) < 0$ 이고 $x \geq 2\sqrt{a}$ 일 때 $f(x) \geq 0$ 이다.

$0 < a < \frac{1}{4}$ 에서 $2\sqrt{a} < 1$ 이므로

$$\begin{aligned} a &= \int_0^{2\sqrt{a}} \{-f(t)\} dt + \int_{2\sqrt{a}}^1 f(t) dt \\ &= \int_0^{2\sqrt{a}} (-t^3 + 4at) dt + \int_{2\sqrt{a}}^1 (t^3 - 4at) dt \\ &= \left[-\frac{1}{4}t^4 + 2at^2 \right]_0^{2\sqrt{a}} + \left[\frac{1}{4}t^4 - 2at^2 \right]_{2\sqrt{a}}^1 \\ &= 8a^2 - 2a + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$8a^2 - 3a + \frac{1}{4} = 0 \text{ 에서}$$

$$32a^2 - 12a + 1 = 0, (4a-1)(8a-1) = 0$$

$0 < a < \frac{1}{4}$ 이므로 $a = \frac{1}{8}$ 이고

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x$$

$$\text{이때 } f(2) = 2^3 - \frac{1}{2} \times 2 = 7$$

22) ⑤

$3xf(x) = 9 \int_1^x f(t) dt + 2x$ 의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$3f(1) = 0 + 2, f(1) = \frac{2}{3}$$

$3xf(x) = 9 \int_1^x f(t) dt + 2x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3\{f(x) + xf'(x)\} = 9f(x) + 2$$

$x = 1$ 대입하면

$$3\{f(1) + f'(1)\} = 9f(1) + 2$$

$$3f'(1) = 6f(1) + 2 = 6 \times \frac{2}{3} + 2 = 6$$

따라서 $f'(1) = 2$

23) ⑤

다항함수 $f(x)$ 에 대하여

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ 은 실수라 하면

$$f(-x) = a_n (-x)^n + a_{n-1} (-x)^{n-1} + \cdots + a_1 (-x) + a_0$$

이고 k 가 홀수인 경우 $\int_{-3}^3 x^k dx = 0$ 이므로

$$\int_{-3}^3 f(-x) dx = \int_{-3}^3 f(x) dx$$

조건 (가)에 의하여

$$f(x) + f(-x) = 3x^2 + ax + b \quad (a, b \text{ 는 상수})$$

이고 $f(x) + f(-x)$ 는 차수가 홀수인 항을 갖지 않으므로 $a = 0$

조건 (나)에 의하여 $f(0) + f(0) = -2 = b$

그러므로 $f(x) + f(-x) = 3x^2 - 2$

$$\int_{-3}^3 \{f(x) + f(-x)\} dx$$

$$= \int_{-3}^3 f(x) dx + \int_{-3}^3 f(-x) dx$$

$$= 2 \int_{-3}^3 f(x) dx$$

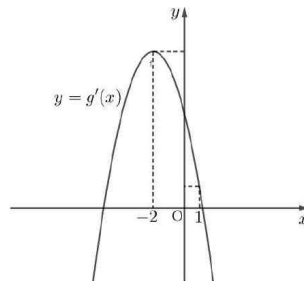
$$\text{따라서 } \int_{-3}^3 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-3}^3 \{f(x) + f(-x)\} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-3}^3 (3x^2 - 2) dx = 21$$

24) 5

$$f(x) = -x^2 - 4x + a, g(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ 에서}$$

$$g'(x) = f(x) = -x^2 - 4x + a = -(x+2)^2 + a + 4$$



함수 $g(x)$ 가 닫힌 구간 $[0, 1]$ 에서 증가해야 하므로

$$g'(1) = a - 5 \geq 0$$

즉, $a \geq 5$ 이어야 한다.

따라서 a 의 최솟값은 5이다.

25) ③

[출제의도] 부정적분과 정적분의 성질을 이용하여 함숫값을 구한다.

$$\int_0^1 g(t) dt = a \text{ 라 하면 (가)에서 } f(x) = 2x + 2a$$

$g(x)$ 는 $f(x)$ 의 한 부정적분이므로

$$g(x) = \int f(x) dx = x^2 + 2ax + C \quad (C \text{ 는 적분상수})$$

$$\text{(나)에서 } C - \int_0^1 (t^2 + 2at + C) dt = \frac{2}{3}$$

$$C - \left(\frac{1}{3} + a + C \right) = \frac{2}{3} \text{ 에서 } a = -1$$

$$\int_0^1 g(t) dt = a \text{ 에서 } \left[\frac{1}{3} t^3 - t^2 + Ct \right]_0^1 = -1$$

$$\text{즉, } C = -\frac{1}{3} \text{ 이므로 } g(x) = x^2 - 2x - \frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } g(1) = 1 - 2 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$$

26) 9

[출제의도] 부정적분의 성질을 활용하여 문제를 해결한다.

$F(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분이므로

$$F(x) = \begin{cases} -x^2 + C_1 & (x < 0) \\ k\left(x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) + C_2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

(단, C_1, C_2 는 적분상수)

그런데 $F(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로 $C_1 = C_2$

$$\text{즉, } F(x) = \begin{cases} -x^2 + C_1 & (x < 0) \\ k\left(x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) + C_1 & (x \geq 0) \end{cases}$$

그러므로 $F(2) - F(-3) = 21$ 에서

$$\left(\frac{4}{3}k + C_1\right) - (-9 + C_1) = 21$$

따라서 $k = 9$

[다른 풀이]

$F(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분이므로

$$F(2) - F(-3) = \left[F(x)\right]_{-3}^2 = \int_{-3}^2 f(x)dx$$

$$\int_{-3}^2 f(x)dx = \int_{-3}^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx$$

$$= \int_{-3}^0 (-2x)dx + \int_0^2 k(2x - x^2)dx = \left[-x^2\right]_{-3}^0 + k\left[x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2$$

$$= 9 + \frac{4}{3}k = 21$$

따라서 $k = 9$

27) ②

[출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

함수 $f(x) = (x-a)(x-b)$ 에 대하여

곡선 $y = f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_a^b |f(x)|dx = -\int_a^b f(x)dx$$

$$= -\left(\int_0^b f(x)dx - \int_0^a f(x)dx\right)$$

$$= -\left(-\frac{8}{3} - \frac{11}{6}\right)$$

$$= \frac{9}{2}$$

28) ④

[출제의도] 정적분과 미분과의 관계를 이용하여 함수값을 구할 수 있는가?

$$xf(x) = 2x^3 + ax^2 + 3a + \int_1^x f(t)dt \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) = 2 + a + 3a + 0$$

이므로

$$f(1) = 2 + 4a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$0 = 3a + \int_1^0 f(t)dt$$

즉,

$$0 = 3a - \int_0^1 f(t)dt$$

이므로

$$\int_0^1 f(t)dt = 3a \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$f(1) = \int_0^1 f(t)dt \text{이므로 } \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{에서}$$

$$2 + 4a = 3a$$

즉, $a = -2, f(1) = -6$

①의 양변을 미분하면

$$f(x) + xf'(x) = 6x^2 + 2ax + f(x)$$

이므로

$$f'(x) = 6x + 2a = 6x - 4$$

따라서

$$f(x) = \int f'(x)dx = 3x^2 - 4x + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

$$f(1) = 3 - 4 + C = -6 \text{에서}$$

$$C = -5$$

따라서

$$f(3) = 27 - 12 - 5 = 10$$

이므로

$$a + f(3) = -2 + 10 = 8$$

29) 9

[출제의도] 부정적분을 활용하여 문제해결하기

$F(x) = (x+2)f(x) - x^3 + 12x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + (x+2)f'(x) - 3x^2 + 12$$

$$(x+2)f'(x) = 3(x+2)(x-2)$$

$f(x)$ 는 다항함수이므로 $f'(x) = 3x - 6$

$$f(x) = \int (3x - 6)dx$$

$$= \frac{3}{2}x^2 - 6x + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

$$F(0) = 2f(0) = 30 \text{에서 } f(0) = 15 \text{이므로 } C = 15$$

$$\text{따라서 } f(2) = 6 - 12 + 15 = 9$$

30) ④

[출제의도] 정적분 이해하기

$$\int_0^1 f'(x)dx = \int_0^2 f'(x)dx = 0$$

$$f(1) - f(0) = f(2) - f(0) = 0$$

$$f(0) = f(1) = f(2) = k \quad (k \text{는 상수})$$

$$f(x) = x(x-1)(x-2) + k = x^3 - 3x^2 + 2x + k$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

$$\text{따라서 } f'(1) = -1$$

31) ①

[출제의도] 정적분을 활용하여 도형의 넓이를 구한다.

두 함수 $y = f(x), y = g(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 부분에서

$0 \leq x \leq 2$ 인 부분과 $2 \leq x \leq 4$ 인 부분의 넓이가 같으므로

구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_0^4 \{g(x) - f(x)\}dx$$

$$= 2 \int_0^2 (-2x^2 + 6x)dx$$

$$= 2 \left[-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^2 = \frac{40}{3}$$

32) ①

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx \text{이므로}$$

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx \text{이면}$$

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx = 0$$

따라서 $f(x) = ax^2 - 1$ 로 놓으면

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (ax^2 - 1)dx = \frac{a}{3} - 1 = 0 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore f(x) = 3x^2 - 1, f(2) = 12 - 1 = 11$$

33) ④

$$f'(x) = a(x+1)(x-1) (a > 0) \text{이므로}$$

$x = -1$ 에서 극댓값, $x = 1$ 에서 극솟값을 가진다.

$$f(x) = \int a(x+1)(x-1)dx$$

$$= \int a(x^2 - 1)dx = a\left(\frac{x^3}{3} - x\right) + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

$$f(-1) = a\left(-\frac{1}{3} + 1\right) + C = 4 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$f(1) = a\left(\frac{1}{3} - 1\right) + C = 0 \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에 의하여

$$a = 3, C = 2 \text{이므로 } f(x) = x^3 - 3x + 2 \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } f(3) = 20$$

34) ②

조건 (가)에 의해 $y = f(x)$ 의 그래프는 y 축 대칭이므로

$$f(x) = x^4 + bx^2 + 10$$

$$f'(x) = 4x^3 + 2bx, \quad f'(1) = 4 + 2b \text{ 이므로}$$

$$-6 < 4 + 2b < -2$$

$$-10 < 2b < -6$$

$$-5 < b < -3 \text{ 이므로 } b = -4$$

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 10$$

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$$

x	\cdots	$-\sqrt{2}$	\cdots	0	\cdots	$\sqrt{2}$	\cdots
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\searrow	극소	\nearrow	극대	\searrow	극소	\nearrow

$$\text{극솟값은 } f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 6$$

35) ②

$$f(x) = f(x+4) \text{이므로 } f(0) = f(4) \text{이다.}$$

$$2 = 16 - 8 + a$$

$$a = -6$$

$$\int_9^{11} f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx =$$

$$= \int_1^2 (-4x + 2)dx + \int_2^3 (x^2 - 2x - 6)dx$$

$$= -\frac{26}{3}$$

36) ①

극한값의 성질에 의하여

$$\int_1^1 f(t)dt - f(1) = 0 \text{이므로 } f(1) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x f(t)dt - f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x f(t)dt}{x^2 - 1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{f(1)}{2} - \frac{f'(1)}{2} = 2$$

$$\therefore f'(1) = -4$$

37) 12

$$f(x) = x^2 - 6x + C$$

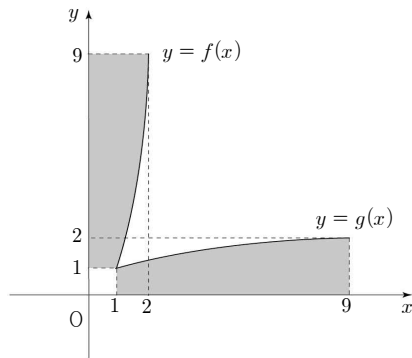
$$f(x) \text{의 최솟값은 } f(3) = -9 + C = 8$$

$$C = 17$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 17$$

$$\therefore f(1) = 12$$

38) ③



그림에서 어두운 두 부분의 넓이가 같으므로

$$\begin{aligned} \int_1^9 g(x)dx &= 18 - 1 - \int_1^2 f(x)dx = 18 - 1 - \int_1^2 (x^3 + x - 1)dx \\ &= 17 - \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x \right]_1^2 = 17 - \frac{17}{4} = \frac{51}{4} \end{aligned}$$

39) ②

함수 $f(x)$ 가 이차함수이므로

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0) \text{라 하자.}$$

$$g(x) = \int \{x^2 + f(x)\}dx$$

$$= \int \{x^2 + ax^2 + bx + c\}dx$$

$$= \int \{(1+a)x^2 + bx + c\}dx$$

$$= \frac{1}{3}(1+a)x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + C \cdots \text{㉠} \quad (C \text{는 적분상수})$$

$$\text{한편, } f(x)g(x) = (ax^2 + bx + c)g(x) = -2x^4 + 8x^3 \cdots \text{㉡}$$

이므로 $g(x)$ 는 이차함수이다.

$$\therefore a = -1$$

㉠, ㉡에서

$$(-x^2 + bx + c)\left(\frac{b}{2}x^2 + cx + C\right) = -2x^4 + 8x^3$$

$$-\frac{b}{2}x^4 + \left(\frac{b^2}{2} - c\right)x^3 + \left(-C + bc + \frac{bc}{2}\right)x^2$$

$$+ (bC + c^2)x + cC = -2x^4 + 8x^3 \text{ 에서}$$

$$-\frac{b}{2} = -2, \quad \frac{b^2}{2} - c = 8,$$

$$-C + bc + \frac{bc}{2} = 0, \quad cC = 0$$

$$\therefore b = 4, \quad c = 0, \quad C = 0$$

$$\therefore g(x) = 2x^2$$

$$\therefore g(1) = 2$$

40) ④

S_1, S_2, S_3 이 등차수열을 이루므로 $2S_2 = S_1 + S_3$ 이다.

$$3S_2 = S_1 + S_2 + S_3 = \int_{-1}^2 f(x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}$$

$$\therefore S_2 = \frac{3}{2}$$

41) 40

$f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1이고 $f(3)=0$ 인 이차함수이므로
 $f(x)=(x-3)(x-a)=x^2-(a+3)x+3a$ (a 는 상수)
 로 놓을 수 있다.

$$\int_0^{2013} f(x)dx = \int_3^{2013} f(x)dx \text{에서}$$

$$\int_0^3 f(x)dx = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \text{이므로}$$

$$\int_0^3 \{x^2 - (a+3)x + 3a\}dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{a+3}{2}x^2 + 3ax \right]_0^3$$

$$= 9 - \frac{9}{2}a - \frac{27}{2} + 9a = \frac{9}{2}a - \frac{9}{2} = 0$$

$$\therefore a=1$$

즉, $f(x)=x^2-4x+3$ 이므로

$$S = \left| \int_1^3 (x^2 - 4x + 3)dx \right| = \left| \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_1^3 \right|$$

$$= \left| (9 - 18 + 9) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 3 \right) \right| = \left| -\frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3}$$

$$\therefore 30S = 30 \times \frac{4}{3} = 40$$

[참고]

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ 일 때의 넓이 S 는

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

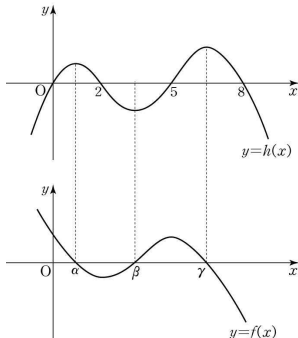
42) ⑤

$$F'(x)=f(x) \text{라 하면 } \int_0^x f(x)dx = F(x) - F(0)$$

$$F(x) - F(0) = h(x) \text{라 하자.}$$

$$f(0)>0 \text{이므로 } x=0 \text{의 가까운 오른쪽에서 } \int_0^x f(x)dx > 0$$

따라서 $y=h(x)$ 와 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. (참) 방정식 $f(x)=0$ 은 구간 $(0, 2)$, $(2, 5)$, $(5, 8)$ 에서 각각 실근을 갖는다.

ㄴ. (참) $x=0$ 에서 감소 상태에 있으므로 $f'(0)<0$

ㄷ. (참) $h(x)=kx(x-2)(x-5)(x-8)$ ($k<0$)이라 할 때

$$\int_m^{m+2} f(x)dx = h(m+2) - h(m) \text{이므로}$$

$$m=1 \text{일 때, } h(3) - h(1) = 58k < 0$$

$$m=2 \text{일 때, } h(4) - h(2) = 32k < 0$$

$$m=3 \text{일 때, } h(5) - h(3) = -30k > 0$$

$$m=4 \text{일 때, } h(6) - h(4) = -80k > 0$$

$$m=5 \text{일 때, } h(7) - h(5) = -70k > 0$$

$$m=6 \text{일 때, } h(8) - h(6) = 48k < 0$$

$$m=7 \text{일 때, } h(9) - h(7) = 322k < 0$$

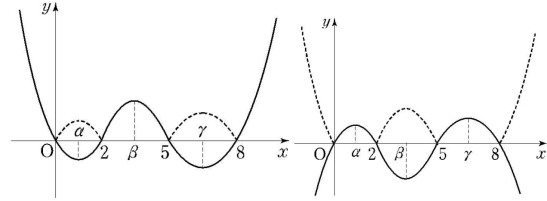
$$m \geq 8 \text{일 때, } h(m+2) - h(m) < 0$$

따라서 $\int_m^{m+2} f(x)dx > 0$ 을 만족시키는 자연수 m 은 3, 4, 5로써

3개이다.

ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

[다른 풀이]



[그림 1]

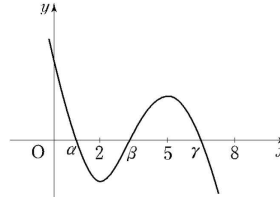
[그림 2]

$$h(x) = \int_0^x f(t)dt \text{라 하면}$$

$h(x)$ 는 사차함수이므로 위 두 그림중 하나이다.

$f(x)=h'(x)$ 이므로 두 그림 중 $f(0)=h'(0)>0$ 을 만족하는 경우는 위의 [그림 2]이다.

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. $y=h(x)$ 는 3개의 극점을 가지는 사차함수이므로
 $f(x)=h'(x)=0$ 은 서로 다른 3개의 실근을 갖는다.

ㄴ. $f'(0)<0$

$$\text{ㄷ. } \int_m^{m+2} f(x)dx = h(m+2) - h(m) \text{이다.}$$

$$h(2)=0=h(0) \quad \therefore h(2)-h(0)=0$$

$$h(3)<0<h(1) \quad \therefore h(3)-h(1)<0$$

$$h(4)<0=h(2) \quad \therefore h(4)-h(2)<0$$

$$h(5)=0>h(3) \quad \therefore h(5)-h(3)>0$$

$$h(6)>0>h(4) \quad \therefore h(6)-h(4)>0$$

$$h(7)>0=h(5) \quad \therefore h(7)-h(5)>0$$

$$h(8)=0<h(6) \quad \therefore h(8)-h(6)<0$$

$$h(9)<0<h(7) \quad \therefore h(9)-h(7)<0$$

$$m \geq 8 \text{이면 } h(m+2) < h(m) \text{이므로}$$

$$h(m+2) > h(m) \text{을 만족하는 자연수 } m \text{은}$$

$$m=3, 4, 5 \text{의 3개이다.}$$

43) ⑤

$$f'(x)=3x^2-4x-4 \text{이므로}$$

$$f(x)=x^3-2x^2-4x+C$$

$$f(2)=0 \text{ 이므로}$$

$$f(2)=-8+C=0 \quad \therefore C=8$$

$$f(x)=(x+2)(x-2)^2 \text{이므로}$$

구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^2 (x^3 - 2x^2 - 4x + 8)dx = \frac{64}{3}$$

44) ②

$$\text{함수 } f'(x)=(x-a)(x-b) \text{이고}$$

(가)에서 $f(x)$ 가 $x=\frac{1}{2}$ 에서 극값을 가지므로

$$a = \frac{1}{2} \text{ 또는 } b = \frac{1}{2}$$

$$f(a) - f(b)$$

$$= \int_0^a (t-a)(t-b)dt - \int_0^b (t-a)(t-b)dt$$

$$= \int_0^a (t-a)(t-b)dt + \int_b^0 (t-a)(t-b)dt$$

$$= \int_b^a (t-a)(t-b)dt = -\frac{(a-b)^3}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\text{이므로 } b-a=1$$

$$b = \frac{1}{2} \text{ 이면 } a = -\frac{1}{2} \text{ 이므로 모순}$$

$$\text{따라서 } a = \frac{1}{2} \text{ 이고 } b = \frac{3}{2} \text{ 이므로 } a+b=2$$

45) 40

(가)에서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 y 축 대칭

$$(다)에서 \int_{-1}^1 (2x+3)f(x)dx = \int_{-1}^1 3f(x)dx = 15$$

$$\text{이므로 } \int_{-1}^1 f(x)dx = 5$$

$$(나)에 의해 \int_{-6}^{10} f(x)dx = 8 \int_{-1}^1 f(x)dx = 40$$

46) ②

점 $P_1(1, \frac{1}{3})$ 은 곡선 $y=ax^2$ 위의 점이므로 $a = \frac{1}{3}$ 직선 P_1P_2 의 방정식은

$$y = -\frac{1}{3} \times 1 \times x + 2 \times \frac{1}{3} \times 1^2, y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

점 P_2 의 x 좌표는 직선 P_1P_2 와 곡선 $y = \frac{1}{3}x^2$ 의

$$\text{교점이므로 } \frac{1}{3}x^2 = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

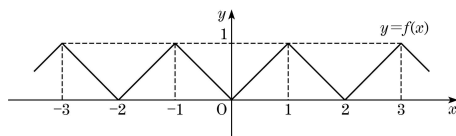
$$x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

점 P_2 의 x 좌표는 -2

구하는 부분의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^0 \left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x^2 \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}x^3 \right]_{-2}^0 \\ &= \frac{2}{3} + \frac{4}{3} - \frac{8}{9} = \frac{10}{9} \end{aligned}$$

47) ②

주어진 조건에 의하여 함수 $f(x)$ 는 주기가 2인 주기함수이므로

$$\begin{aligned} & g(a+4) - g(4) \\ &= \int_{-2}^{a+4} f(t)dt - \int_{-2}^a f(t)dt \\ &= \int_{-2}^{a+4} f(t)dt + \int_a^{-2} f(t)dt \end{aligned}$$

$$= \int_a^{a+4} f(t)dt = \int_0^4 f(t)dt = 2 \int_0^2 f(t)dt = 2$$

48) ①

$$\text{그림에서 } \int_0^3 f(x)dx = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2 \dots (\cap)$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx = 13$$

$$\therefore \int_0^a f(x)dx = \frac{13}{2} = 6 + \frac{1}{2} = 2 \times 3 + \frac{1}{2}$$

$$= 3 \int_0^3 f(x)dx + \frac{1}{2} \quad (\because (\cap))$$

$$= \int_0^{3 \times 3} f(x)dx + \int_9^{10} f(x)dx$$

$$= \int_0^{10} f(x)dx$$

$$(\because \text{함수 } f(x) \text{의 주기가 3이고, } \int_9^{10} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2})$$

$$\therefore a=10$$

49) ④

$$f'(x) = x^2 - 1 \text{로부터 } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + C$$

$$\text{그런데 } f(0) = 0 \text{이므로 } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$$

$$\frac{1}{3}x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$$

 $f(x)$ 가 기함수이므로 구하고자 하는 넓이는

$$\begin{aligned} & 2 \times \int_0^{\sqrt{3}} \left\{ -\left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \right\} dx = 2 \times \left[-\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= 2 \times \left\{ \left(-\frac{3}{4} + \frac{3}{2} \right) - (0-0) \right\} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

50) ③

[출제의도] 정적분을 이용하여 넓이를 구할 수 있는가?

 $n=1$ 일 때, $f(x)=x^2$ 이고 $P(0, 3), Q(1, 1)$ 이므로 구하고자 하는 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 + \int_0^1 (1-x^2)dx$$

$$= 1 + \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{3}$$

51) ⑤

[출제의도] 적분과 미분의 관계를 활용하여 주어진 문제를 해결한다.

 $g'(x)=f(x)=0$ 을 만족하는 x 를 구하면 $x(x+2)(x+4)=0$ 에서 $x=-4, -2, 0$ 이므로 $x=-2$ 에서 $g(x)$ 는 극댓값을 갖는다. $\therefore \alpha = -2$

$$g(\alpha) = \int_2^{-2} f(t)dt = \int_2^{-2} (t^3 + 6t^2 + 8t)dt$$

$$= -2 \int_0^2 6t^2 dt = -2 [2t^3]_0^2 = -32$$

52) ①

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수 이해하기

주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + x f'(x) - 12x^3 + 4x$$

$$x f'(x) = 12x^3 - 4x$$

$$f'(x) = 12x^2 - 4$$

$$f(x) = 4x^3 - 4x + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

$$x=1 \text{ 일 때, } \int_1^1 f(t)dt = 1 \cdot f(1) - 3 + 2 = 0$$

$$f(1) = 1 \text{ 이므로 } C = 1$$

$$\text{따라서 } f(0) = 1$$

53) 45

[출제의도] 정적분의 의미를 이해하여 함수값을 구할 수 있는가?

$$f(0) = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = ax^2 + bx \quad (a \neq 0) \text{ 라 하자.}$$

조건 (가)에 의하여

$$\int_0^2 |f(x)|dx = 4, \quad \int_0^2 f(x)dx = -4$$

이므로 구간 $[0, 2]$ 에서 $f(x) \leq 0$ 이다.

또한, 조건 (나)에 의하여

$$\int_2^3 |f(x)|dx = \int_2^3 f(x)dx$$

이므로 구간 $[2, 3]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이다.따라서 $f(2) = 0$ 이므로

$$f(2) = 4a + 2b = 0$$

$$\therefore b = -2a$$

$$\text{즉, } f(x) = ax^2 - 2ax \text{ 이므로}$$

$$\int_0^2 (ax^2 - 2ax)dx = \left[\frac{a}{3}x^3 - ax^2 \right]_0^2 = \frac{8}{3}a - 4a = -\frac{4}{3}a = -4$$

$$\therefore a = 3$$

$$\text{따라서 } f(x) = 3x^2 - 6x \text{ 이므로}$$

$$f(5) = 3 \times 5^2 - 6 \times 5 = 75 - 30 = 45$$

54) ①

[출제의도] 조건을 만족시키는 다항함수에 대하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

$$h(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)g(x) = -h(x)$$

이므로 다항함수 $h(x)$ 의 그래프는 원점에 대칭이고, $h(0) = 0$ 이다.

$$h(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + a_1x \text{ 로 놓으면}$$

$$h'(x) = (2n+1)a_{2n+1}x^{2n} + (2n-1)a_{2n-1}x^{2n-2} + \cdots + a_1$$

이므로 $h'(-x) = h'(x)$ 를 만족시킨다.

$$\int_{-3}^3 (xh'(x) + 5h'(x))dx = 2 \int_0^3 5h'(x)dx = 10 \left[h(x) \right]_0^3$$

$$= 10(h(3) - h(0))$$

$$10(h(3) - h(0)) = 10 \text{에서}$$

$$h(3) = h(0) + 1 = 0 + 1 = 1$$

55) ⑤

[출제의도] 부정적분 이해하기

$$f'(x) = xg(x), \quad f'(x) - g'(x) = 4x^3 + 2x \text{ 이므로}$$

$$xg(x) - g'(x) = 4x^3 + 2x$$

함수 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 4인이차함수이므로 $g(x) = 4x^2 + ax + b$

$$g'(x) = 8x + a \text{ 이므로}$$

$$x(4x^2 + ax + b) - (8x + a) = 4x^3 + 2x$$

$$4x^3 + ax^2 + (b-8)x - a = 4x^3 + 2x \text{ 에서}$$

$$a = 0, \quad b = 10 \text{ 이므로 } g(x) = 4x^2 + 10$$

$$\text{따라서 } g(1) = 14$$

56) ②

[출제의도] 다항함수의 미분법과 적분법을 이용하여 함수의 최댓값을 구하는 문제를 해결한다.

$$g(a) = \int_{-a}^a f(x)dx \text{ 라 하자.}$$

$$g(a) = \int_{-a}^0 (2x+2)dx + \int_0^a (-x^2+2x+2)dx$$

$$= -a^2 + 2a - \frac{1}{3}a^3 + a^2 + 2a$$

$$= -\frac{1}{3}a^3 + 4a$$

$$g'(a) = -a^2 + 4 = -(a+2)(a-2)$$

 $g(a)$ 의 증가와 감소를 나타낸 표는 다음과 같다.

a	(0)	\cdots	2	\cdots
$g'(a)$		+	0	-
$g(a)$		\nearrow	$\frac{16}{3}$	\searrow

$$g(a) \text{ 는 } a=2 \text{ 에서 최댓값 } \frac{16}{3}$$

57) ④

[출제의도] 다항함수의 미분법과 적분법을 이용하여 함수값을 구하는 문제를 해결한다.

삼차항의 계수가 1이고 방정식 $f(x) = f(4)$ 는 서로 다른 두 실근을 가지므로 두 가지 경우가 있다.(i) 함수 $y = f(x) - f(4)$ 의 그래프가 $x=2$ 에서 x 축에 접하고 $x=4$ 에서 만나는 경우

$$f(x) = (x-2)^2(x-4) + f(4)$$

$$f'(x) = 2(x-2)(x-4) + (x-2)^2 = (x-2)(3x-10) \text{ 이므로}$$

$$f'\left(\frac{11}{3}\right) > 0 \text{ 이고 조건 (가)를 만족시키지 않는다.}$$

(ii) 함수 $y = f(x) - f(4)$ 의 그래프가 $x=4$ 에서 x 축에 접하는 경우

$$f'(2) = 0, \quad f'(4) = 0 \text{ 이므로}$$

$$f'(x) = 3(x-2)(x-4), \quad f'\left(\frac{11}{3}\right) < 0$$

$$f(x) = \int 3(x-2)(x-4)dx$$

$$= x^3 - 9x^2 + 24x + C \quad (\text{단, } C \text{는 상수이다.})$$

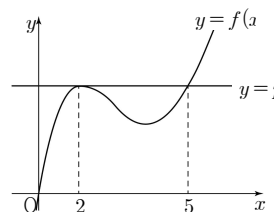
$$f(2) = C + 20 = 35 \text{ 이므로 } C = 15$$

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 15$$

$$\text{따라서 } f(0) = 15$$

58) ②

[출제의도] 함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

조건(가)와 조건(나)를 만족시키는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

$$f(x) - p = (x-2)^2(x-5)$$

$$f(0) = 0 \text{ 이므로 } p = 20$$

$$f(x) = (x-2)^2(x-5) + 20 = x^3 - 9x^2 + 24x$$

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (x^3 - 9x^2 + 24x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 12x^2 \right]_0^2 = 28$$

59) ④

[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있으며 이를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 넓이를 구할 수 있는가?

조건(가)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프가 일치해야한다.

또, 조건(나)에서 $\int_0^6 f(x)dx = 0$ 이므로

$$\int_0^6 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_3^6 f(x)dx$$

$$= \int_0^3 f(x)dx + \int_3^6 \{f(x-3) + 4\}dx$$

$$= \int_0^3 f(x)dx + \int_0^3 \{f(x) + 4\}dx$$

$$= 2 \int_0^3 f(x)dx + 12$$

에서 $2 \int_0^3 f(x)dx + 12 = 0$

$$\int_0^3 f(x)dx = -6$$

따라서 $\int_3^6 f(x)dx = 6$ 이므로

$$\int_6^9 f(x)dx = 12 + \int_3^6 f(x)dx = 12 + 6 = 18$$

60) 40

[출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

$$b = \frac{a^3}{2}, S_1 = S_2 \text{ 이므로}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2}x^3 dx = \int_1^a \left(\frac{a^3}{2} - \frac{1}{2}x^3 \right) dx$$

$$\left[\frac{1}{8}x^4 \right]_0^1 = \left[\frac{a^3}{2}x - \frac{1}{8}x^4 \right]_1^a$$

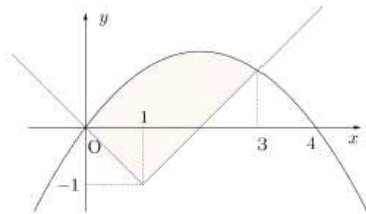
$$a^3(3a-4)=0, a>1 \text{ 이므로 } a=\frac{4}{3}$$

$$\text{따라서 } 30a = 30 \times \frac{4}{3} = 40$$

61) 14

[출제의도] 정적분을 이용하여 넓이를 구할 수 있는가?

두 함수 $f(x) = \frac{1}{3}x(4-x)$, $g(x) = |x-1|-1$ 의 그래프는 다음과 같다.



$x < 1$ 일 때, $g(x) = -x$ 이므로

$$\frac{1}{3}x(4-x) = -x \text{에서 } x=0$$

$x \geq 1$ 일 때, $g(x) = x-2$ 이므로

$$\frac{1}{3}x(4-x) = x-2 \text{에서}$$

$$4x - x^2 = 3x - 6,$$

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) = 0$$

$$x=3$$

따라서 구하는 넓이는

$$S = \int_0^1 \{f(x) - g(x)\}dx + \int_1^3 \{f(x) - g(x)\}dx$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3}x \right)dx + \int_1^3 \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2 \right)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{9}x^3 + \frac{7}{6}x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + 2x \right]_1^3$$

$$= \left(-\frac{1}{9} + \frac{7}{6} \right) + \left\{ \left(-3 + \frac{3}{2} + 6 \right) - \left(-\frac{1}{9} + \frac{1}{6} + 2 \right) \right\}$$

$$= \frac{7}{2}$$

이므로

$$4S = 14$$

62) 7

[출제의도] 정적분과 미분의 관계와 정적분의 성질을 이용하여 함수식을 구할 수 있는가?

조건 (가)에 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(1) + \frac{x-1}{2}f'(x)$$

즉,

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(x) \quad \cdots \textcircled{1}$$

①의 좌편인 $f(x)$ 의 최고차항을 ax^n (a 는 0이 아닌 상수, n 은 자연수)

라 하면 ①의 우변의 최고차항은

$$x \times anx^{n-1} = anx^n$$

이므로 $ax^n = anx^n$ 에서 $n=1$

이때 $f(0)=1$ 이므로 일차함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = ax + 1$$

로 놓을 수 있다.

이때

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (ax+1)dx = \left[\frac{a}{2}x^2 + x \right]_0^2 = 2a+2$$

이고,

$$\int_{-1}^1 xf(x)dx = \int_{-1}^1 (ax^2+x)dx = 2 \int_0^1 ax^2dx = 2 \left[\frac{a}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{2a}{3}$$

이므로 조건 (나)에서

$$2a+2 = 5 \times \frac{2a}{3}$$

$$a = \frac{3}{2}$$

따라서 $f(x) = \frac{3}{2}x + 1$ 이므로

$$f(4) = \frac{3}{2} \times 4 + 1 = 7$$

63) ②

[출제의도] 미분과 적분의 관계를 이용하여 함수값 구하는 문제를 해결한다.

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt + f(x) \text{에서}$$

$$g'(x) = f(x) + f'(x),$$

$$g(0) = \int_0^0 f(t) dt + f(0) = 0 + f(0),$$

$$g'(0) = f(0) + f'(0)$$

조건 (가)에 의해

$$g(0) = f(0) = 0$$

$$g'(0) = f(0) + f'(0) = 0 + f'(0) = 0 \text{ 이므로 } f'(0) = 0$$

그러므로 x^2 은 $f(x)$ 의 인수이다.

$f(x) = x^2(x-k)$ (단, k 는 상수)라 하면

$$g'(x) = x^3 - kx^2 + 3x^2 - 2kx = x^3 + (3-k)x^2 - 2kx$$

조건 (나)에 의해 모든 실수 x 에 대하여

$$g'(-x) = -g'(x) \text{가 성립한다.}$$

$$\text{즉, } -x^3 + (3-k)x^2 + 2kx = -x^3 - (3-k)x^2 + 2kx,$$

$$2(3-k)x^2 = 0 \text{에서 } k = 3$$

$$\text{그러므로 } f(x) = x^2(x-3)$$

$$\text{따라서 } f(2) = -4$$

[다른 풀이]

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{라고 놓으면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

조건 (가)에 의해 $f(0) = 0$ 이므로 $c = 0$,

$$f'(0) = 0 \text{이므로 } b = 0$$

$$\text{즉, } f(x) = x^3 + ax^2$$

$$g'(x) = f(x) + f'(x)$$

$$= x^3 + ax^2 + 3x^2 + 2ax$$

$$= x^3 + (a+3)x^2 + 2ax$$

조건 (나)에 의해 함수 $y = g'(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

x^2 의 계수는 0이다. 즉, $a = -3$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 - 3x^2 \text{에서 } f(2) = 8 - 12 = -4$$

64) ④

[출제의도] 정적분을 이용하여 넓이를 계산한다.

$x < 0$ 일 때, 점 A에서 두 함수 $y = ax^2 + 2$ 와 $y = -2x$ 의 그래프가 접하므로

$$ax^2 + 2 = -2x, \text{ 즉 } ax^2 + 2x + 2 = 0 \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 ①의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 - 2a = 0$$

$$a = \frac{1}{2} \text{이므로 점점 A의 } x \text{좌표는 } -2 \text{이다.}$$

점 B는 점 A와 y 축에 대하여 대칭이므로 점점 B의 x 좌표는 2이다.

주어진 두 함수의 그래프가 모두 y 축에 대하여 대칭이므로 구하는

넓이는

$$2 \times \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + 2 - 2x \right) dx$$

$$= 2 \times \left[\frac{1}{6}x^3 + 2x - x^2 \right]_0^2 = 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

65) ②

점 P_n 의 좌표를 (a_n, b_n) 이라 하자.

$$a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n-1$$

이고 선분 P_nP_{n+1} 과 직선 $x = a_n$, 직선 $x = a_{n+1}$ 및 x 축과 둘러싸인

도형의 넓이 S_n 은

$$S_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x) dx = \frac{1}{2} \times (a_{n+1} - a_n) \times (b_n + b_{n+1})$$

$$= b_n + b_{n+1}$$

$$a_1 = 1, a_6 = 11 \text{이므로}$$

$$\int_1^{11} f(x) dx = \int_{a_1}^{a_6} f(x) dx$$

$$= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$$

$$= (b_1 + b_2) + (b_2 + b_3) + (b_3 + b_4) + (b_4 + b_5) + (b_5 + b_6)$$

조건 (다)에 의하여 직선 P_nP_{n+1} 의 기울기는

$$\frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = \frac{1}{2} a_{n+1}, \quad b_{n+1} = b_n + a_{n+1}$$

$$b_1 = 1 = a_1$$

$$b_2 = b_1 + a_2 = a_1 + a_2 = 4$$

$$b_3 = b_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 9$$

$$b_4 = b_3 + a_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 16$$

$$b_5 = b_4 + a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 25$$

$$b_6 = b_5 + a_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 36$$

$$\text{따라서 } \int_1^{11} f(x) dx = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$$

$$= (1+4) + (4+9) + (9+16) + (16+25) + (25+36)$$

$$= 145$$

66) 12

모든 실수 x 에 대하여 $\{f(x) + x^2 - 1\}^2 \geq 0, f(x) \geq 0$ 이므로 정적분

$$\int_{-1}^2 \{f(x) + x^2 - 1\}^2 dx \text{의 값이 최소가 되기 위해서는}$$

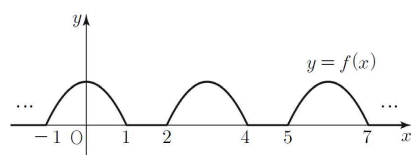
(i) $-1 \leq x \leq 1$ 에서

$$x^2 - 1 \leq 0 \text{이므로 } f(x) = -(x^2 - 1) = -x^2 + 1$$

(ii) $1 < x \leq 2$ 에서

$$x^2 - 1 > 0 \text{이므로 } f(x) = 0$$

$f(x+3) = f(x)$ 이고, (i), (ii)에 의하여 함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$$\int_{-1}^2 f(x) dx = \int_2^5 f(x) dx = \int_5^8 f(x) dx = \dots = \int_{23}^{26} f(x) dx$$

$$\text{따라서 } \int_{-1}^{26} f(x) dx = 9 \int_{-1}^2 f(x) dx = 9 \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx = 12$$

67) ③

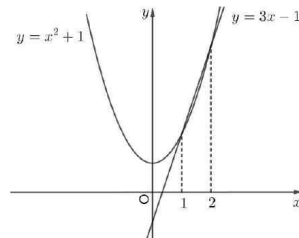
$$x^2 + 3x = (x^2 + 1) + (3x - 1)$$

이고 두 함수 $y = x^2 + 1, y = 3x - 1$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2 + 1 = 3x - 1, \quad x^2 - 3x + 2 = 0, \quad (x-1)(x-2) = 0$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

이므로 두 함수의 그래프는 그림과 같다.



$$\text{즉, } x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 2 \text{일 때 } x^2 + 1 \geq 3x - 1$$

$$1 < x < 2 \text{일 때 } x^2 + 1 < 3x - 1$$

이므로 조건 (가)를 만족시키는 함수 $f(x), g(x)$ 는 각각

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & (x \leq 1) \\ 3x - 1 & (1 < x < 2) \\ x^2 + 1 & (x \geq 2) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 3x - 1 & (x \leq 1) \\ x^2 + 1 & (1 < x < 2) \\ 3x - 1 & (x \geq 2) \end{cases}$$

따라서

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)dx &= \int_0^1 (x^2 + 1)dx + \int_1^2 (3x - 1)dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 + \left[\frac{3}{2}x^2 - x \right]_1^2 \\ &= \frac{4}{3} + \left(4 - \frac{1}{2} \right) = \frac{29}{6} \end{aligned}$$

68) ②

[출제의도] 정적분과 미분의 관계를 이용하여 정적분의 값을 구한다.

$$g'(x) = f(x) - \{f(x) + xf'(x)\} = -xf'(x)$$

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 4이므로 $f'(x)$ 는 이차항의 계수가 12인 이차함수이다.

그러므로 $g'(x) = -xf'(x)$ 에서 $g'(x)$ 는 최고차항의 계수가 -12인 삼차함수이다.

또, 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \leq g(3)$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $x=3$ 에서 최댓값을 가지고 함수 $g(x)$ 는 $x=3$ 에서 극값을 가진다. 즉, $g'(3) = 0$

그러므로 $f'(3) = 0$ 에서 $g'(x) = -12x(x-3)(x-a)$

삼차함수 $g(x)$ 가 오직 1개의 극값만 가지므로 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 극값을 가질 수 없다. 즉, $a=0$

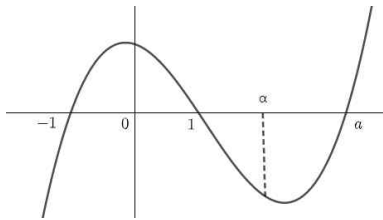
$$g'(x) = -12x^2(x-3) = -12x^3 + 36x^2$$

$$\text{따라서 } \int_0^1 g'(x)dx = \left[-3x^4 + 12x^3 \right]_0^1 = 9$$

69) ④

$$g'(x) = 2x \int_0^x f(t)dt + x^2 f(x) - x^3 f(x) = 2x \int_0^x f(t)dt$$

$g'(x) = 0$ 을 만족하는 x 의 값은 $x=0$ 또는 $\int_0^x f(t)dt = 0$ 을 만족하는 x 의 값이다.



위의 $f(x)$ 의 그래프로에서

$x < 0$ 일 때 $\int_0^x f(t)dt = 0$ 의 해가 존재하므로 $g(x)$ 는 $x < 0$ 일 때 값을

갖는다. $x=0$ 일 때 $\int_0^x f(t)dt = 0$ 이므로 $x=0$ 일 때 $g'(x) = 0$ 은

중근을 갖고 $g(x)$ 는 극값을 갖지 않는다.

따라서 함수 $g(x)$ 가 오직 하나의 극값을 가지려면

$x > 0$ 일 때 $g'(x) \geq 0$ 이어야 하고 $\int_0^x f(t)dt \geq 0$ 이어야 한다.

$\int_0^x f(t)dt \geq 0$ 는 $x > 0$ 일 때 $x=a$ 에서 최솟값을 갖는다.

$$\int_0^a f(t)dt = \int_0^a (t+1)(t-1)(t-a)dt$$

$$= \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{a}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + at \right]_0^a = -\frac{a^4}{12} + \frac{a^2}{2} \geq 0$$

$$a^2(a^2 - 6) \leq 0$$

$$a > 1 \text{이므로 } 1 < a \leq \sqrt{6}$$

따라서 a 의 최댓값은 $\sqrt{6}$

70) ③

[출제의도] 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.

구하고자 하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_0^2 |f(x) - g(x)| dx$$

$$= \int_0^2 \{g(x) - f(x)\} dx$$

$g(x) - f(x)$ 는 최고차항의 계수가 3이고

삼차방정식 $g(x) - f(x) = 0$ 은 한 실근 0과 중근 2를 가지므로

$$g(x) - f(x) = 3x(x-2)^2$$

$$\text{따라서 } S = \int_0^2 3x(x-2)^2 dx$$

$$= \int_0^2 (3x^3 - 12x^2 + 12x) dx$$

$$= \left[\frac{3}{4}x^4 - 4x^3 + 6x^2 \right]_0^2$$

$$= 12 - 32 + 24 = 4$$

71) ②

[출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

함수 $y = -f(x+1) + 1$ 의 그래프는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동시킨 후, x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 것이다.

$$f(0) = 0, f(1) = 1, \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{6}$$

이므로

조건 (가)에서

$$\int_{-1}^0 g(x)dx = \int_{-1}^0 \{-f(x+1) + 1\}dx = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{6}$$

$$\int_{-1}^1 g(x)dx = \int_{-1}^0 g(x)dx + \int_0^1 g(x)dx = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

조건 (나)에서

$g(x+2) = g(x)$ 이므로

$$\int_{-3}^2 g(x)dx = \int_{-3}^{-1} g(x)dx + \int_{-1}^1 g(x)dx + \int_1^2 g(x)dx$$

$$= 2 \int_{-1}^1 g(x)dx + \int_{-1}^0 g(x)dx = 2 \times 1 + \frac{5}{6} = \frac{17}{6}$$

72) 8

[출제의도] 정적분으로 나타내어진 함수가 극값을 하나만 갖도록 하는 상수 a 의 값을 구할 수 있는가?

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45 = 3(x-3)(x-5)$$

$$g(x) = \int_a^x \{f(x) - f(t)\} \times \{f(t)\}^4 dt$$

$$= f(x) \int_a^x \{f(t)\}^4 dt - \int_a^x \{f(t)\}^5 dt$$

$$g'(x) = f'(x) \int_a^x \{f(t)\}^4 dt + \{f(x)\}^5 - \{f(x)\}^5$$

$$= f'(x) \int_a^x \{f(t)\}^4 dt$$

$g'(x) = 0$ 에서

$$f'(x)=0 \text{ 또는 } x=a$$

(i) $a \neq 3, a \neq 5$ 일 때,

$$g'(x)=0 \text{ 에서}$$

$$x=3 \text{ 또는 } x=5 \text{ 또는 } x=a$$

함수 $g(x)$ 는 $x=3, x=5, x=a$ 에서 모두 극값을 갖는다.

(ii) $a=3$ 일 때

$$g'(x)=0 \text{ 에서 } x=3 \text{ 또는 } x=5$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	\cdots	3	\cdots	5	\cdots
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	\searrow		\searrow	극소	\nearrow

함수 $g(x)$ 는 $x=5$ 에서만 극값을 갖는다.

(iii) $a=5$ 일 때

$$g'(x)=0 \text{ 에서}$$

$$x=3 \text{ 또는 } x=5$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	\cdots	3	\cdots	5	\cdots
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	\searrow	극소	\nearrow		\nearrow

함수 $g(x)$ 는 $x=3$ 에서만 극값을 갖는다.

(i), (ii), (iii)에서

함수 $g(x)$ 가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a 의 값은 3 또는 5이다.

따라서 모든 a 의 값의 합은

$$3+5=8$$

73) ②

[출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

방정식 $f'(x)=0$ 의 서로 다른 세 실근 $\alpha, 0, \beta (\alpha < 0 < \beta)$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $\beta = -\alpha$

$$f'(x)=4x(x-\alpha)(x+\alpha)$$

$$f(x)=x^4-2\alpha^2x^2+C \text{ (단, } C \text{는 적분상수이다.)}$$

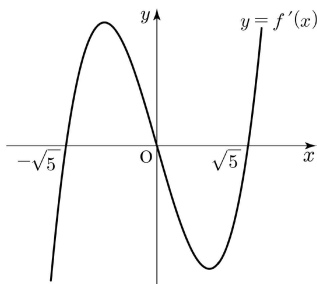
$f(-x)=f(x)$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이고, 조건 (가)에 의하여

$$f(0)=9, C=9$$

$$\text{조건 (나)에 의하여 } f(\alpha)=\alpha^4-2\alpha^4+9=-16$$

$$\alpha=-\sqrt{5}$$

함수 $f'(x)=4x(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.

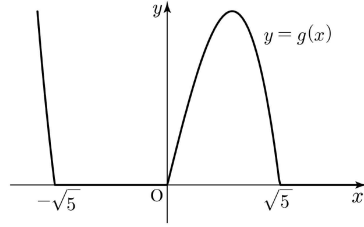


함수 $g(x)=|f'(x)|-f'(x)$ 이므로

함수

$$g(x)=\begin{cases} 0 & (f'(x) \geq 0) \\ -2f'(x) & (f'(x) < 0) \end{cases}$$

이고, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$$\begin{aligned} \int_0^{10} g(x) dx &= -2 \int_0^{\sqrt{5}} f'(x) dx \\ &= -2 \left[f(x) \right]_0^{\sqrt{5}} = -2 \{ f(\sqrt{5}) - f(0) \} \\ &= -2 \times (-16 - 9) = 50 \end{aligned}$$

74) ⑤

[출제의도] 다항함수의 미분과 정적분을 활용하여 주어진 명제의 참과 거짓을 판정할 수 있는가?

삼차함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1이고

$$f'(0)=f'(2)=0 \text{ 이므로}$$

$$f'(x)=3x(x-2)=3x^2-6x$$

이다.

따라서

$$f(x)=\int f'(x) dx = x^3-3x^2+C \text{ (} C \text{는 적분상수)}$$

따라서

$$f(x)-f(0)=x^3-3x^2$$

이고

$$f(x+p)-f(p)$$

$$=(x+p)^3-3x(x+p)^2+C-(p^3-2p^2+c)$$

$$=x^3+(3p-3)x^2+(3p^2-6p)x$$

이므로

$$g(x)=\begin{cases} x^2-3x^2 & (x \leq 0) \\ x^3+(3p-3)x^2+(3p^2-6p)x & (x > 0) \end{cases}$$

이다.

ㄱ. $p=1$ 이면

$$g(x)=\begin{cases} x^2-3x^2 & (x \leq 0) \\ x^3-3x & (x > 0) \end{cases}$$

이므로

$$g'(x)=\begin{cases} 2x-6x & (x \leq 0) \\ 3x^2-3 & (x > 0) \end{cases}$$

따라서 $g'(1)=3-3=0$ (참)

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = g(0) = 0 \text{ 이므로}$$

함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

이때

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (3x^2-6x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \{ 3x^2 + 2(3p-3)x + (3p^2-6p) \} = 3p^2-6p$$

이므로 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$$3p^2-6p=0$$

이어야 한다.

따라서 양수 p 의 값은 $p=2$ 뿐이므로 양수 p 의 개수는 1이다. (참)

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-1}^0 g(x) dx &= \int_{-1}^0 (x^3-3x^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 \right]_{-1}^0 \end{aligned}$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{4} + 1 \right) = -\frac{5}{4}$$

이고,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 g(x) dx \\ &= \int_0^1 \{x^3 + (3p-3)x^2 + (3p^2-6p)x\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + (p-1)x^3 + \frac{3p^2-6p}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} + (p-1) + \frac{3p^2-6p}{2} \\ &= \frac{3}{2}p^2 - 2p - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 g(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 g(x) dx + \int_0^1 g(x) dx \\ &= \left(-\frac{5}{4} \right) + \frac{3}{2}p^2 - 2p - \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{2}p^2 - 2p - 2 \\ &= \frac{1}{2}(3p+2)(p-2) \end{aligned}$$

따라서 $p \geq 2$ 일 때, $\int_{-1}^1 g(x) dx \geq 0$ 이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[다른풀이]

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고

$$f'(0) = f'(2) = 0$$

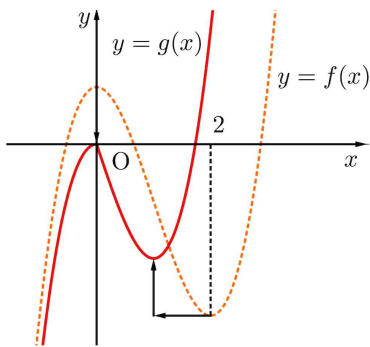
이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대이고

$x=2$ 에서 극소이다.

이때, 곡선 $y=f(x)-f(0)$ 은 곡선 $y=f(x)$ 를 y 축의 방향으로 $-f(0)$ 만큼 평행이동한 것이고,

곡선 $y=f(x+p)-f(p)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 를 x 축의 방향으로 $-p$ 만큼, y 축의 방향으로 $-f(p)$ 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 두 곡선 $y=f(x)-f(0)$, $y=f(x+p)-f(p)$ 는 모두 원점을 지나고 함수 $g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. $p=1$ 일 때, 곡선 $y=f(x+1)-f(1)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 $-f(1)$ 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $g'(1)=0$ 이다. (참)

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = g(0) = 0$ 이므로

함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

이때

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (3x^2 - 6x) = 0$$

이므로 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g'(x) = 0$$

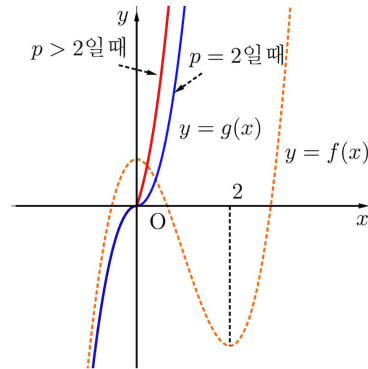
이어야 한다.

그런데 $f'(x)=0$ 인 양수 x 의 값은 2뿐이므로

양수 p 의 값은 2뿐이다.

따라서 양수 p 의 개수는 1이다. (참)

ㄷ. $p \geq 2$ 일 때 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$p=2$ 일 때,

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = 0$$

$p > 2$ 일 때, 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x+p)-f(p) \geq f(x+2)-f(2)$$

이므로

$$\int_{-1}^1 g(x) dx \geq 0$$

따라서 $p \geq 2$ 일 때 $\int_{-1}^1 g(x) dx \geq 0$ (참)

75) 2

[출제의도] 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

$f(1-x) = -f(1+x)$ 에 $x=0$, $x=1$ 을 각각 대입하면

$$f(1) = -f(1) \text{에서 } f(1) = 0,$$

$$f(0) = -f(2) \text{에서 } f(2) = 0$$

삼차함수 $f(x)$ 는 $f(0)=f(1)=f(2)=0$ 이고

최고차항의 계수가 1이므로 $f(x) = x(x-1)(x-2)$

방정식 $f(x) = -6x^2$ 에서 $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$ 이므로

$$x(x+1)(x+2) = 0,$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=-1 \text{ 또는 } x=-2$$

$$-2 \leq x \leq -1 \text{에서 } x^3 + 3x^2 + 2x \geq 0 \text{이고}$$

$$-1 \leq x \leq 0 \text{에서 } x^3 + 3x^2 + 2x \leq 0 \text{이므로}$$

$$S = \int_{-2}^0 |x^3 + 3x^2 + 2x| dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} (x^3 + 3x^2 + 2x) dx + \int_{-1}^0 \{-(x^3 + 3x^2 + 2x)\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + x^3 + x^2 \right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{1}{4}x^4 - x^3 - x^2 \right]_{-1}^0$$

$$= \frac{1}{2}$$

따라서 $4S = 2$

76) ⑤

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수가 포함된 문제를 해결한다.

최고차항의 계수가 4이고 $f(0) = 0$ 이므로

$$f(x) = 4x^3 + ax^2 + bx \quad (a, b \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$f'(x) = 12x^2 + 2ax + b$ 에서 $f'(0) = 0$ 이므로 $b = 0$

즉, $f(x) = 4x^3 + ax^2$ 에서 $\int_0^x f(t) dt = x^4 + \frac{a}{3}x^3$

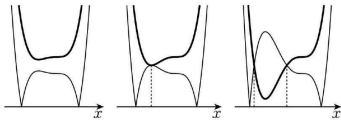
이므로

$$g(x) = \begin{cases} x^4 + \frac{a}{3}x^3 + 5 & (x < c) \\ \left| x^4 + \frac{a}{3}x^3 - \frac{13}{3} \right| & (x \geq c) \end{cases}$$

곡선 $y = x^4 + \frac{a}{3}x^3 - \frac{13}{3}$ 은 곡선 $y = x^4 + \frac{a}{3}x^3 + 5$ 를 y 축의 방향으로 $-\frac{28}{3}$ 만큼 평행이동한 것이다.

다음은 a 의 값에 따른 곡선 $y = x^4 + \frac{a}{3}x^3 + 5$ 와 곡선

$y = \left| x^4 + \frac{a}{3}x^3 - \frac{13}{3} \right|$ 의 개형 중 c 의 개수가 0, 1, 2 인 경우이다.



[c 의 개수가 0] [c 의 개수가 1] [c 의 개수가 2]

함수 $g(x)$ 가 연속이 되도록 하는 실수 c 의 개수가 1이기 위해서는 함수

$y = x^4 + \frac{a}{3}x^3 + 5$ (\rightarrow ㉠)의 극솟값과 함수 $y = -\left(x^4 + \frac{a}{3}x^3 - \frac{13}{3}\right)$

(\rightarrow ㉡)의 극댓값이 서로 같아야 한다.

㉠, ㉡의 함수의 도함수는 각각 $f(x)$, $-f(x)$ 이고

$f(x) = x^2(4x+a) = 0$ 에서

$x = 0$ 또는 $x = -\frac{a}{4}$ ($a \neq 0$)

㉠, ㉡의 함수는 각각 $x = -\frac{a}{4}$ 에서 극값을 갖고, $c = -\frac{a}{4}$ 이다.

$$\left(-\frac{a}{4}\right)^4 + \frac{a}{3}\left(-\frac{a}{4}\right)^3 + 5 = -\left\{\left(-\frac{a}{4}\right)^4 + \frac{a}{3}\left(-\frac{a}{4}\right)^3 - \frac{13}{3}\right\}$$

이를 정리하여 풀면 $\begin{cases} a = 4 \\ c = -1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a = -4 \\ c = 1 \end{cases}$

그러므로 $a = 4$ 일 때, $g(1) = \left|1 + \frac{4}{3} - \frac{13}{3}\right| = 2$,

$a = -4$ 일 때, $g(1) = \left|1 - \frac{4}{3} - \frac{13}{3}\right| = \frac{14}{3}$

따라서 $g(1)$ 의 최댓값은 $\frac{14}{3}$

77) ㉠

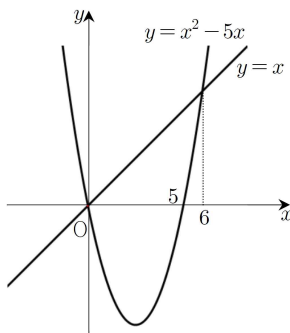
[출제의도] 정적분을 이용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

$x^2 - 5x = x$ 에서

$x^2 - 6x = 0$

$x = 0$ 또는 $x = 6$

곡선 $y = x^2 - 5x$ 와 직선 $y = x$ 가 만나는 점은 원점과 (6, 6)이다.



곡선 $y = x^2 - 5x$ 와 직선 $y = x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^6 \{x - (x^2 - 5x)\} dx$$

$$= \int_0^6 (6x - x^2) dx$$

$$= \left[3x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^6$$

$$= 36$$

따라서 직선 $x = k$ 가 넓이를 이등분하므로

$$18 = \int_0^k \{x - (x^2 - 5x)\} dx$$

$$= \int_0^k (6x - x^2) dx$$

$$= \left[3x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^k$$

$$= 3k^2 - \frac{1}{3}k^3$$

정리하면

$$k^3 - 9k^2 + 54 = 0$$

$$(k-3)(k^2 - 6k - 18) = 0$$

즉, $0 < k < 6$ 이므로

$$k = 3$$

78) 110

[출제의도] 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 에 대하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

$f(x+1) - xf(x) = ax + b$ 에 $x = 0$ 을 대입하면

$$f(1) = b$$

단한구간 $[0, 1]$ 에서 $f(x) = x$ 이므로 $b = 1$

또, $f(x+1) = xf(x) + ax + 1$ 이므로

$0 \leq x \leq 1$ 에서

$$f(x+1) = xf(x) + ax + 1 = x^2 + ax + 1$$

$x+1 = t$ 로 치환하면

$$f(t) = (t-1)^2 + a(t-1) + 1$$

$$= t^2 + (a-2)t + 2 - a \quad \dots\dots ㉠$$

$f'(t) = 2t + (a-2)$ 이고,

단한구간 $[0, 1]$ 에서 $f(x) = x$ 이고, 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서

미분가능한 함수이므로 $f'(1) = 1$ 이므로

$$a = 1$$

따라서 ㉠에서 $1 \leq x \leq 2$ 일 때

$$f(x) = x^2 - x + 1$$
이다.

$$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x^2 - x + 1) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right]_1^2$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{5}{6}$$

$$= \frac{11}{6}$$

$$\text{즉, } 60 \times \int_1^2 f(x) dx = 60 \times \frac{11}{6}$$

$$= 110$$

79) ㉤

[출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

$$G(x) = \int_1^x (x-t)f(t) dt \text{라 하자.}$$

함수 $G(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_1^x (x-t)f(t)dt = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{G(x)}{x-2} = 3 \text{에서}$$

$$G(2)=0, \quad G'(2)=3$$

$$G(x) = x \int_1^x f(t)dt - \int_1^x t f(t)dt \text{에서}$$

$$G'(x) = x \int_1^x f(t)dt + x f(x) - x f(x) = \int_1^x f(t)dt$$

$$G'(2) = \int_1^2 f(t)dt = 3$$

$$G(2) = 2 \int_1^2 f(t)dt - \int_1^2 t f(t)dt = 0 \text{에서}$$

$$\int_1^2 t f(t)dt = 2 \int_1^2 f(t)dt = 6$$

따라서

$$\int_1^2 (4x+1)f(x)dx = 4 \int_1^2 x f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$$

$$= 4 \times 6 + 3 = 27$$

80) ④

[출제의도] 함수의 그래프를 이해하고 명제의 참, 거짓을 판단할 수 있는가?

ㄱ. $x < 0$ 일 때 $g'(x) = -f(x)$

$x \geq 0$ 일 때 $g'(x) = f(x)$

그런데 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하고 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \{-f(x)\} = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$$

$$-f(0) = f(0), \quad 2f(0) = 0$$

$$f(0) = 0 \quad (\text{참})$$

ㄴ. $g(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$ 이고 함수 $g(x)$ 는 삼차함수이므로

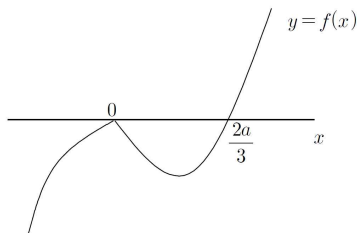
$g(x) = x^2(x-a)$ (단, a 는 상수)로 놓으면

$$g'(x) = 2x(x-a) + x^2 = x(3x-2a)$$

(i) $a > 0$ 일 때

$$f(x) = \begin{cases} -x(3x-2a) & (x < 0) \\ x(3x-2a) & (x \geq 0) \end{cases}$$

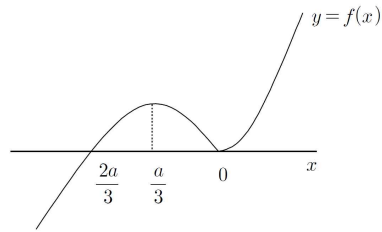
이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같고 $x=0$ 에서 극댓값을 갖는다.



(ii) $a < 0$ 일 때

$$f(x) = \begin{cases} -x(3x-2a) & (x < 0) \\ x(3x-2a) & (x \geq 0) \end{cases}$$

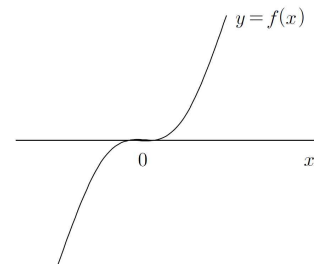
이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같고 $x=\frac{a}{3}$ 에서 극댓값을 갖는다.



(iii) $a=0$ 일 때

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 & (x < 0) \\ 3x^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 극댓값이 존재하지 않는다.



(거짓)

ㄷ. (i) ㄴ. (i)인 경우

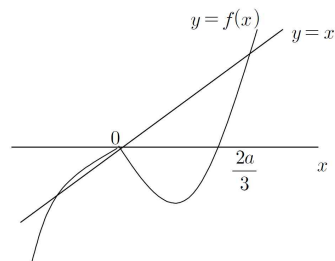
$$f(1) = 3-2a \text{이므로 } 2 < 3-2a < 4 \text{에서 } 0 < a < \frac{1}{2}$$

또한, $x < 0$ 일 때

$$f'(x) = -(3x-2a) - 3x = -6x+2a \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) = 2a$$

이때 $0 < 2a < 1$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 는 그림과 같이 세 점에서 만난다.



따라서 $2 < f(1) < 4$ 일 때, 방정식 $f(x)=x$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

(ii) ㄴ. (ii)인 경우

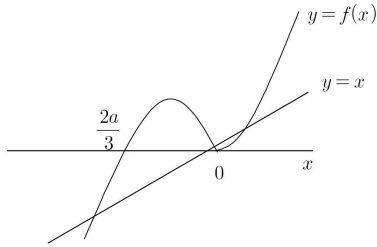
$$f(1) = 3-2a \text{이므로 } 2 < 3-2a < 4 \text{에서 } -\frac{1}{2} < a < 0$$

또한, $x > 0$ 일 때

$$f'(x) = (3x-2a) + 3x = 6x-2a \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = -2a$$

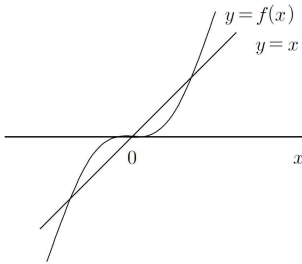
이때 $0 < -2a < 1$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 는 그림과 같이 세 점에서 만난다.



따라서 $2 < f(1) < 4$ 일 때, 방정식 $f(x)=x$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

(iii) ㄴ. (iii)인 경우

$f(1)=3$ 이고 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 는 그림과 같이 세 점에서 만난다.



따라서 $2 < f(1) < 4$ 일 때, 방정식 $f(x)=x$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

다른 풀이

ㄷ. (i) ㄴ. (i)인 경우

$$0 < a < \frac{1}{2} \text{ 이고}$$

$$\textcircled{1} \ x < 0 \text{ 일 때, } -x(3x-2a)=x \\ -3x+2a=1, \ x=\frac{2a-1}{3}$$

$$\textcircled{2} \ x \geq 0 \text{ 일 때, } x(3x-2a)=x \\ x(3x-2a-1)=0 \\ x=0 \text{ 또는 } x=\frac{2a+1}{3}$$

따라서 $2 < f(1) < 4$ 일 때,

방정식 $f(x)=x$ 은 서로 다른 실근 $\frac{2a-1}{3}$, 0 , $\frac{2a+1}{3}$ 을 갖는다.

81) 13

[출제의도] 정적분으로 나타낸 함수를 이해하고 극솟값을 가질 조건을 구할 수 있는가?

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이면

$$g(x) = \int_x^{x+1} |f(t)| dt = \int_x^{x+1} f(t) dt$$

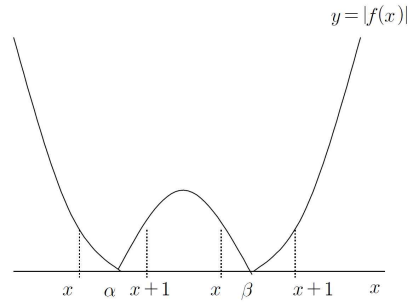
이므로 $g(x)$ 는 이차함수이고 이때 $g(x)$ 가 극소인 x 의 값은 1개뿐이다. 따라서 조건을 만족시키지 못한다.

$f(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)$ ($\alpha < \beta$)라 하면

함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 그림과 같고

$x=1$, $x=4$ 에서 함수 $g(x)$ 가 극소이므로

$g'(1)=0$, $g'(4)=0$ 이다.



(i) $x < \alpha < x+1$ 일 때

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_x^{x+1} |f(t)| dt \\ &= \int_x^\alpha f(t) dt + \int_\alpha^{x+1} \{-f(t)\} dt \\ &= -\int_x^\alpha f(t) dt - \int_\alpha^{x+1} f(t) dt \\ &= -\int_x^\alpha 2(t-\alpha)(t-\beta) dt - \int_\alpha^{x+1} 2(t-\alpha)(t-\beta) dt \\ &= -\int_x^\alpha 2(t-\alpha)(t-\beta) dt - \int_{\alpha-1}^x 2(t+1-\alpha)(t+1-\beta) dt \end{aligned}$$

이므로

$$g'(x) = -2(x-\alpha)(x-\beta) - 2(x+1-\alpha)(x+1-\beta)$$

$$g'(1) = -2(1-\alpha)(1-\beta) - 2(2-\alpha)(2-\beta)$$

$$= 6\alpha + 6\beta - 4\alpha\beta - 10 = 0$$

$$3\alpha + 3\beta - 2\alpha\beta - 5 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $x < \beta < x+1$ 일 때

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_x^{x+1} |f(t)| dt \\ &= \int_x^\beta \{-f(t)\} dt + \int_\beta^{x+1} f(t) dt \\ &= \int_\beta^x f(t) dt - \int_\beta^{x+1} f(t) dt \\ &= \int_\beta^x 2(t-\alpha)(t-\beta) dt + \int_\beta^{x+1} 2(t-\alpha)(t-\beta) dt \\ &= \int_\beta^x 2(t-\alpha)(t-\beta) dt - \int_{\beta-1}^x 2(t+1-\alpha)(t+1-\beta) dt \end{aligned}$$

이므로

$$g'(x) = 2(x-\alpha)(x-\beta) + 2(x+1-\alpha)(x+1-\beta)$$

$$g'(1) = 2(4-\alpha)(4-\beta) - 2(5-\alpha)(5-\beta)$$

$$= 82 - 18\alpha - 18\beta + 4\alpha\beta = 0$$

$$9\alpha + 9\beta - 2\alpha\beta - 41 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서

$$\alpha\beta = \frac{13}{2}$$

이므로

$$f(0) = 2\alpha\beta = 2 \times \frac{13}{2} = 13$$

82) 8

[출제의도] 정적분을 활용하여 문제 해결하기

$$g'(x) = 2x \int_0^x f(t) dt + x^2 f(x) - x^2 f(x) = 2x \int_0^x f(t) dt$$

$$h(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ 라 하면 } h(0) = 0$$

조건 (나)에 의하여

방정식 $h(x)=0$ 의 실근은 0과 3이므로

(i) $h(x)=ax^2(x-3)$ (a 는 상수)라 하면

$g'(x) = 2ax^3(x-3)$ 이고 함수 $g(x)$ 는 $x=0$, $x=3$ 에서 극값을 가지므로 모순

(ii) $h(x) = ax(x-3)^2$ (a 는 상수) 라 하면

$g'(x) = 2ax^2(x-3)^2$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 극값을 갖지 않는다.

$h'(x) = f(x) = a(3x^2 - 12x + 9) = 3a(x-1)(x-3)$

$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 3 이므로 $a=1$

$f(x) = 3(x-1)(x-3)$

따라서

$$\int_0^3 |f(x)| dx$$

$$= 3 \int_0^3 |(x-1)(x-3)| dx$$

$$= 3 \int_0^1 (x-1)(x-3) dx - 3 \int_1^3 (x-1)(x-3) dx$$

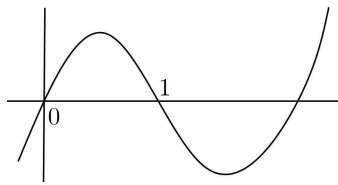
$$= 3 \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_0^1 - 3 \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_1^3$$

$$= 3 \left(\frac{1}{3} - 2 + 3 \right) - 3 \left(9 - 18 + 9 - \frac{1}{3} + 2 - 3 \right) = 8$$

83) ⑤

ㄱ. $g(0) = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 |f(x)| dx = 0$ 이므로

구간 $(0, 1)$ 에서 $f(x) > 0$ 이다.

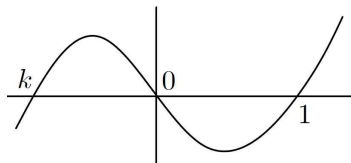


$g(-1) = \int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^1 |f(x)| dx$ 위의 그래프에서

$\int_{-1}^0 f(x) dx < 0$ 이므로 음수 빼기 양수는 음수 이므로

$g(-1) < 0$ (참)

ㄴ. $g(-1) > 0$ 이면 ㄱ의 결과에 반대이므로 구간 $(0, 1)$ 에서 $f(x) < 0$ 이다.



$$g(-1) = \int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^1 |f(x)| dx$$

$$= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx$$

$$= \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 x(x-1)(x-k) dx$$

$$= 2 \int_0^1 -(k+1)x^2 dx$$

$$= -2 \left[\frac{k+1}{3} x^3 \right]_0^1 = -\frac{2(k+1)}{3}$$

$\therefore g(-1) = -\frac{2(k+1)}{3} > 0$ 이므로 $k < -1$ 을 만족한다. (참)

ㄷ. $g(-1)$ 이 양수이면 ㄴ에서의 그래프와 같으므로

$$g(-1) = -\frac{2(k+1)}{3} > 1 \text{ 에서 } k < -\frac{5}{2}$$

$$g(0) = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 x(x-1)(x-k) dx$$

$$= 2 \int_0^1 \{x^3 - (k+1)x^2 + kx\} dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{k+1}{3}x^3 + \frac{k}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$= 2 \left(\frac{1}{4} - \frac{k+1}{3} + \frac{k}{2} \right) = 2 \times \frac{3-4k-4+6k}{12}$$

$$= \frac{2k-1}{6}$$

$k < -\frac{5}{2}$ 이므로

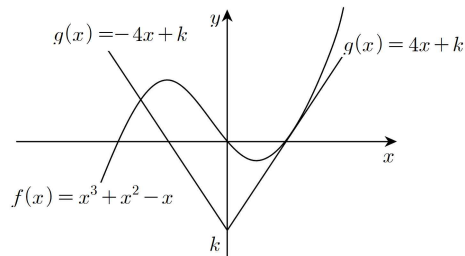
$$\frac{2k-1}{6} < \frac{2 \times \left(-\frac{5}{2}\right) - 1}{6} = -1 \text{ (참)}$$

84) 80

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (3x-1)(x+1)$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = \frac{1+3-9}{27} = -\frac{5}{27}$$

$$f(-1) = -1 + 1 + 1 = 1$$



얻어진 극점을 이용해서 그래프를 그려보면 위의 그림과 같다.

두 점에서 만나는 경우는 위의 그림과 같이 $g(x) = 4x + k$ 가

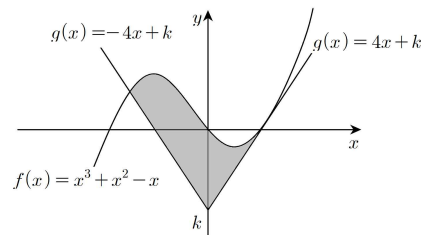
$f(x) = x^3 + x^2 - x$ 와 접할 때이다.

$$\text{접점을 } \alpha \text{ 라 할 때, } \begin{cases} 4\alpha + k = \alpha^3 + \alpha^2 - \alpha \\ 4 = 3\alpha^2 + 2\alpha - 1 \end{cases}$$

$$3\alpha^2 + 2\alpha - 5 = (3\alpha + 5)(\alpha - 1) = 0 \text{ 에서}$$

$$\alpha > 0 \text{ 이므로 } \alpha = 1$$

$$4 + k = 1 + 1 - 1, \therefore k = -3$$



위의 그림에서 음수인 교점은 $x^3 + x^2 - x = -4x - 3$ 의 실근이므로

$x^3 + x^2 + 3x + 3 = (x^2 + 3)(x + 1) = 0$ 에서 교점의 x 좌표는 $x = -1$

$$\int_{-1}^0 \{(x^3 + x^2 - x) - (-4x - 3)\} dx$$

$$= \int_{-1}^0 (x^3 + x^2 + 3x + 3) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x \right]_{-1}^0$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 3 \right) = \frac{-3 + 4 - 18 + 36}{12} = \frac{19}{12}$$

$$\int_0^1 \{(x^3 + x^2 - x) - (4x - 3)\} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 (x^3 + x^2 - 5x + 3) dx \\
 &= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 3 \\
 &= \frac{3+4-30+36}{12} = \frac{13}{12} \\
 \therefore \frac{13}{12} + \frac{19}{12} &= \frac{32}{12} = \frac{8}{3}, \\
 \therefore 30S &= 80
 \end{aligned}$$

85) ④

[출제의도] 정적분과 넓이의 관계를 이해하고 있는가?

 $A = B$ 이므로

$$\int_0^2 \{(x^3 + x^2) - (-x^2 + k)\} dx = 0$$

이어야 한다.

이때,

$$\int_0^2 \{(x^3 + x^2) - (-x^2 + k)\} dx = \int_0^2 (x^3 + 2x^2 - k) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - kx \right]_0^2 = 4 + \frac{16}{3} - 2k = \frac{28}{3} - 2k = 0$$

따라서,

$$2k = \frac{28}{3}$$

$$k = \frac{14}{3}$$

86) ②

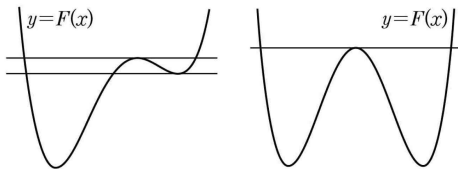
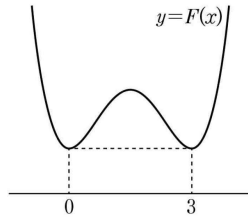
[출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 함수를 추론한다.

함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면 주어진 방정식은

$$\int_t^x f(s) ds = F(x) - F(t) = 0 \text{ 이므로}$$

 $F(x) = F(t)$ 이다.따라서 $g(t)$ 는 곡선 $y = F(x)$ 와 직선 $y = F(t)$ 의 서로 다른 교점의 개수와 같다.

$$\neg. F'(x) = f(x) = x^2(x-1)$$

함수 $F(x)$ 는 $x < 1$ 에서 감소, $x > 1$ 에서 증가하므로 $x = 1$ 에서 극소이면서 최소이다.따라서 곡선 $y = F(x)$ 와 직선 $y = F(1)$ 은 오직 한 점에서 만나므로 $g(1) = 1$ 이다. (참)ㄴ. 방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3일 때,함수 $F(x)$ 의 두 극솟값이 같은 경우와 두 극솟값이 다른 경우가 있다.각 경우 곡선 $y = F(x)$ 와 직선 $y = F(a)$ 가 서로 다른 세 점에서 만나는 실수 a 가 존재한다.따라서 $g(a) = 3$ 인 실수 a 가 존재한다. (참)ㄷ. 함수 $F(x)$ 가 극댓값을 갖지 않거나, 극댓값을 갖지만 두 극댓값의크기가 다른 경우에는 $\lim_{t \rightarrow b} g(t) + g(b) = 6$ 인 실수 b 가 존재하지않는다. 따라서 곡선 $y = F(x)$ 의 개형은 다음과 같고, $F(0) = F(3)$ 이다. $f(0) = F'(0) = 0$ 이고, $f(3) = F'(3) = 0$ 이므로

$$F(x) - F(0) = \frac{x^2(x-3)^2}{4} = \frac{x^4 - 6x^3 + 9x^2}{4}$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x \text{ 이므로}$$

$$f(4) = 64 - 72 + 18 = 10 \text{ (거짓)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

87) ②

[출제의도] 정적분과 넓이의 관계를 이용하여 함수를 구한 후, 정적분의 값을 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $n-1 \leq x \leq n$ 일 때,

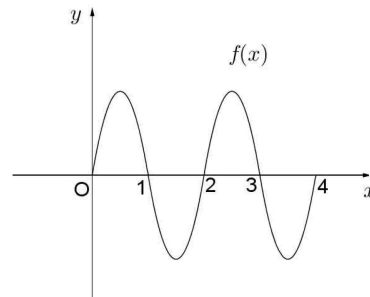
$$f(x) = 6(x-n+1)(x-n) \text{ 또는}$$

$$f(x) = -6(x-n+1)(x-n)$$

함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 최솟값 0를 가지므로

$$g(2) = \int_0^2 f(t) dt - \int_2^4 f(t) dt = 0$$

$$\int_0^2 f(t) dt = \int_2^4 f(t) dt$$

이때, 함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 최솟값을 가져야 하므로 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.

따라서

$$\int_{\frac{1}{2}}^4 f(x) dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx$$

$$= - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$$

$$= - \int_0^{\frac{1}{2}} \{-6x(x-1)\} dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (6x^2 - 6x) dx$$

$$= \left[2x^3 - 3x^2 \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= -\frac{1}{2}$$

88) ⑤

$$\text{움직인 거리는 } \frac{1}{2} + 3 + 1 + |-1| = \frac{11}{2}$$

$$[\text{참고}] t=6 \text{ 일 때, 점 } P \text{ 의 위치는 } \frac{1}{2} + 3 + 1 + (-1) = \frac{7}{2}$$

89) ⑤

[출제의도] 속도를 적분하면 이동거리가 됨을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $S_1 = S_2$ 이면 P, Q의 이동거리가 같으므로 $t=b$ 에서 만난다.ㄴ. $S_1 > S_2$ 이면 P의 이동거리가 Q의 이동거리보다 크므로

$$\int_0^b f(t)dt > \int_0^b g(t)dt \text{ 이다.}$$

ㄷ. $S_1 < S_2$ 이면 P가 Q보다 빨리 가다가 Q가 P를 추월하여 지나가므로 이동거리가 같은 지점이 반드시 생긴다. 그 때의 시간을

$$t=c \text{ 라 하면 } \int_0^c f(t)dt = \int_0^c g(t)dt \text{ 인 } c \text{ 가 열린구간 } (a, b) \text{ 안에 존재한다.}$$

90) 64

$$f(t) = 2t^2 - 8t, g(t) = t^3 - 10t^2 + 24t \text{ 라 하자.}$$

 x 초 후의 두 점 P, Q 사이의 거리는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\left| \int_0^x f(t)dt - \int_0^x g(t)dt \right| = \left| \int_0^x \{f(t) - g(t)\}dt \right|$$

$$h(x) = \int_0^x \{f(t) - g(t)\}dt \text{ 라 하자.}$$

$$h'(x) = f(x) - g(x)$$

$$= (2x^2 - 8x) - (x^3 - 10x^2 + 24x)$$

$$= -x^3 + 12x^2 - 32x$$

$$= -x(x-4)(x-8)$$

$$h'(x) = 0 \text{ 에서 } x = 0, 4, 8$$

 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	4	...	8
$h'(x)$	0	-	0	+	0
$h(x)$	0	\searrow	$h(4)$	\nearrow	$h(8)$

$$h(x) = \int_0^x \{(2t^2 - 8t) - (t^3 - 10t^2 + 24t)\}dt$$

$$= \int_0^x (-t^3 + 12t^2 - 32t)dt$$

$$= -\frac{1}{4}x^4 + 4x^3 - 16x^2$$

 $x=4$ 일 때

$$|h(x)| = \left[\frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2 \right]_0^4 = 64$$

 $x=8$ 일 때

$$|h(x)| = \left[\frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2 \right]_0^8 = 0$$

따라서 $|h(x)|$ 는 $x=4$ 에서 최댓값 64를 갖는다.

91) ①

[출제의도] 수직선 위를 움직이는 점의 움직인 거리를 구할 수 있는가?

$$\int_0^4 |-2t+4|dt$$

$$= \int_0^2 (-2t+4)dt + \int_2^4 (2t-4)dt$$

$$= [-t^2 + 4t]_0^2 + [t^2 - 4t]_2^4$$

$$= (-4+8) + \{(16-16) - (4-8)\}$$

$$= 4+4=8$$

92) ③

[출제의도] 정적분을 이용하여 문제해결하기

 $t=2$ 에서 점 P의 운동방향이 바뀌었으므로

$$v(2) = 4 - 2a = 0, a = 2$$

점 P가 시간 $t=0$ 부터 $t=6$ 까지 움직인 거리는

$$\int_0^6 |v(t)|dt = \int_0^2 (4-2t)dt + \int_2^6 (-4+2t)dt$$

$$= [4t - t^2]_0^2 + [-4t + t^2]_2^6 = 4 + 16 = 20$$

93) ③

[출제의도] 정적분을 활용하여 속도와 거리 이해하기

두 점 P, Q가 출발 후 $t=a$ ($a>0$)에서 다시 만나므로

$$\int_0^a (3t^2 + 6t - 6)dt = \int_0^a (10t - 6)dt$$

$$a^3 + 3a^2 - 6a = 5a^2 - 6a$$

$$a^3 - 2a^2 = a^2(a-2) = 0$$

따라서 $a=2$

94) 12

 $3t^2 + t = 2t^2 + 3t$ 에서 $t^2 - 2t = 0$ 이므로 $t=2$ 에서 두 점 P, Q의 속도가 같아진다. $t=2$ 일 때 두 점 P, Q의 위치를 구해보면

$$\int_0^2 v_1(t)dt = \int_0^2 (3t^2 + t)dt = \left[t^3 + \frac{1}{2}t^2 \right]_0^2 = 10$$

$$\int_0^2 v_2(t)dt = \int_0^2 (2t^2 + 3t)dt = \left[\frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 \right]_0^2 = \frac{34}{3}$$

이므로 두 점 P, Q 사이의 거리 a 는 $a = \left| 10 - \frac{34}{3} \right| = \frac{4}{3}$ 이다.따라서 $9a=12$ 이다.

95) ①

[출제의도] 정적분을 활용하여 점이 움직인 거리를 구한다.

$$\text{시각 } t \text{에서의 점 } P \text{의 속도 } v(t) \text{는 } v(t) = \frac{dx}{dt} = 4t^3 + 3at^2$$

$$v(2) = 32 + 12a = 0 \text{에서 } a = -\frac{8}{3} \text{ 이므로 } v(t) = 4t^3 - 8t^2$$

 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P가 움직인 거리를 s 라 하면

$$s = \int_0^2 |4t^3 - 8t^2|dt = \int_0^2 (8t^2 - 4t^3)dt = \left[\frac{8}{3}t^3 - t^4 \right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

96) 10

[출제의도] 속도와 움직인 거리를 이해하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

점 P의 운동방향이 바뀌는 시각에서의 속도는 0이므로

$$v(t) = -3t^2 + 3t + 6 = -3(t+1)(t-2) = 0$$

$$t \geq 0 \text{ 이므로 } t=2$$

 $0 \leq t \leq 2$ 일 때 $v(t) \geq 0$ 이므로점 P가 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 움직인 거리는

$$\int_0^2 v(t)dt = \int_0^2 (-t^3 + 3t + 6)dt$$

$$= \left[-t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 6t \right]_0^2 = -8 + 6 + 12 = 10$$

97) 8

[출제의도] 속도와 거리의 성질을 이용하여 거리 구하는 문제를 해결한다.

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 속도는 0이므로

$$v(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3) = 0, \quad t=1 \text{ 또는 } t=3$$

$$0 \leq t < 1 \text{에서 } v(t) > 0,$$

$$1 < t < 3 \text{에서 } v(t) < 0,$$

$$t > 3 \text{에서 } v(t) > 0$$

이므로 점 P는 $t=1$ 일 때 처음으로 운동 방향을 바꾸고 $t=3$ 일 때 다시 운동 방향을 바꾼다.그러므로 점 P가 A에서 방향을 바꾼 순간부터 다시 A로 돌아올 때까지 움직인 거리는 점 P가 $t=1$ 부터 $t=3$ 까지 이동한 거리의 2배이다.

따라서 구하는 값은

$$\begin{aligned} 2 \int_1^3 |v(t)| dt &= 2 \int_1^3 (-3t^2 + 12t - 9) dt \\ &= 2 \left[-t^3 + 6t^2 - 9t \right]_1^3 = 8 \end{aligned}$$

[다른 풀이]

점 P가 다시 A로 돌아올 때의 시각을 $t=a$ (단, $a>1$)라 하면

$$\int_1^a v(t) dt = 0 \text{이므로}$$

$$\int_1^a v(t) dt = \int_1^a (3t^2 - 12t + 9) dt$$

$$= \left[t^3 - 6t^2 + 9t \right]_1^a = a^3 - 6a^2 + 9a - 4$$

$$= (a-1)^2(a-4) = 0$$

그러므로 $t=4$ 일 때 점 P가 다시 A로 돌아온다. 따라서

$$\begin{aligned} \int_1^4 |v(t)| dt &= - \int_1^3 v(t) dt + \int_3^4 v(t) dt \\ &= - \int_1^3 (3t^2 - 12t + 9) dt + \int_3^4 (3t^2 - 12t + 9) dt \\ &= - \left[t^3 - 6t^2 + 9t \right]_1^3 + \left[t^3 - 6t^2 + 9t \right]_3^4 \\ &= 8 \end{aligned}$$

98) ③

[출제의도] 그래프를 이용하여 정적분과 거리의 관계를 추론한다.

$$\int_0^a |v(t)| dt = s_1, \quad \int_a^b |v(t)| dt = s_2, \quad \int_b^c |v(t)| dt = s_3 \text{이라 하자.}$$

점 P는 출발한 후 시각 $t=a$ 에서 처음으로 운동 방향을 바꾸므로

$$-8 = \int_0^a v(t) dt = -s_1 \text{에서 } s_1 = 8$$

점 P의 시각 $t=c$ 에서의 위치가 -6 이므로

$$-6 = \int_0^c v(t) dt = (-8) + s_2 - s_3$$

$$\text{에서 } s_2 - s_3 = 2 \dots\dots \text{㉠}$$

$$\int_0^b v(t) dt = \int_b^c v(t) dt \text{이므로}$$

$$-8 + s_2 = -s_3, \quad \text{즉 } s_2 + s_3 = 8 \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡을 연립하여 풀면 } s_2 = 5, \quad s_3 = 3$$

따라서 구하는 거리는 5이다.

99) ④

[출제의도] 수직선 위를 움직이는 점의 속도가 주어져 있을 때 위치를 구할 수 있는

가?

$$v(t) = -4t + 5 \text{이므로}$$

점 P의 시각 t 에서의 위치를 $x(t)$ 라 하면

$$x(t) = -2t^2 + 5t + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)}$$

$$\text{이때 } x(3) = 11 \text{이므로}$$

$$-2 \times 9 + 5 \times 3 + C = 11 \text{에서 } C = 14$$

$$\therefore x(0) = C = 14$$

100) ③

점 P가 움직이는 방향을 바꾸는 시각을 k ($k>0$)이라 하면

$$v(k) = k^2 - ak = 0 \text{에서 } k = a$$

따라서 점 P가 시각 $t=0$ 일 때부터 시각 $t=a$ 일 때까지 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^a |v(t)| dt &= \int_0^a (-t^2 + at) dt \\ &= \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{at^2}{2} \right]_0^a = -\frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{2} = \frac{a^3}{6} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \frac{a^3}{6} = \frac{9}{2} \text{에서 } a^3 = 27$$

$$\text{따라서 } a = 3$$

101) ③

 $t=3$ 에서 $t=k$ ($k>3$)까지 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_3^k |2t-6| dt &= \int_3^k (2t-6) dt = [t^2 - 6t]_3^k \\ &= k^2 - 6k + 9 = 25 \\ k^2 - 6k - 16 &= 0 \text{이므로 } k = 8 \end{aligned}$$

102) ③

[출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

점 P의 시각 $t=1$ 에서의 위치와점 P의 시각 $t=k$ ($k>1$)에서의 위치가 서로 같으므로시각 $t=1$ 에서 $t=k$ 까지 점 P의 위치의 변화량은 0이다.

$$\begin{aligned} \int_1^k v(t) dt &= \int_1^k (4t-10) dt \\ &= [2t^2 - 10t]_1^k \\ &= (2k^2 - 10k) - (2 - 10) \\ &= 2k^2 - 10k + 8 \\ &= 2(k-1)(k-4) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } k = 4$$

103) 6

[출제의도] 수직선 위를 움직이는 점의 속도를 이용하여 점의 위치의 변화량을 구할 수 있는가?

시각 t 에서 점 P의 위치를 $x(t)$ 라 하면 시각 $t=0$ 에서 점 P의 위치가 0이므로

$$v(t) = 3t^2 - 4t + k \text{에서}$$

$$x(t) = t^3 - 2t^2 + kt$$

$$\text{이때 } x(1) = -3 \text{에서}$$

$$-1 + k = -3, \quad k = -2$$

$$\text{따라서 } x(t) = t^3 - 2t^2 - 2t \text{이고,}$$

$$x(3) = 27 - 18 - 6 = 3 \text{이다.}$$

그러므로 시각 $t=1$ 에서 $t=3$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$x(3) - x(1) = 3 - (-3) = 6$$

104) ⑤

[출제의도] 정적분을 활용하여 추론하기

$$\neg. v(t) = 3t^2 - 6t = 3t(t-2)$$

$$t < 2 \text{ 일 때 } v(t) < 0$$

$$t = 2 \text{ 일 때 } v(2) = 0$$

$$t > 2 \text{ 일 때 } v(t) > 0$$

$$t = 2 \text{ 에서 점 P의 움직이는 방향이 바뀐다. (참)}$$

ㄴ. 시각 t 에서의 점 P의 위치를 $x(t)$ 라 하면

$$x(2) = 0 + \int_0^2 (3t^2 - 6t) dt = \left[t^3 - 3t^2 \right]_0^2 = -4 \quad (\text{참})$$

ㄷ. 시각 t 에서의 점 P의 가속도를 $a(t)$ 라 하면

$$a(t) = 6t - 6$$

$$6t - 6 = 12, \quad t = 3$$

$$t = 0 \text{ 에서 } t = 3 \text{ 까지 움직인 거리를 } s \text{ 라 하면}$$

$$s = \int_0^3 |3t^2 - 6t| dt$$

$$= - \int_0^2 (3t^2 - 6t) dt + \int_2^3 (3t^2 - 6t) dt$$

$$= 4 + \left[t^3 - 3t^2 \right]_2^3 = 8 \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

105) ③

[출제의도] 도함수를 활용하여 수직선 위를 움직이는 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

점 P의 시각 t ($t > 0$)에서의 가속도를 $a(t)$ 라 하면

$$v(t) = -4t^3 + 12t^2 \quad \text{이므로}$$

$$a(t) = v'(t) = -12t^2 + 24t$$

시각 $t = k$ 에서 점 P의 가속도가 12이므로

$$-12k^2 + 24k = 12$$

$$k^2 - 2k + 1 = 0$$

$$(k-1)^2 = 0$$

$$k = 1$$

한편, $v(t) = -4t^3 + 12t^2 = -4t^2(t-3)$ 이므로

$$3 \leq t \leq 4 \text{ 일 때 } v(t) \leq 0 \text{ 이다.}$$

따라서 $t = 3$ 에서 $t = 4$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_3^4 |v(t)| dt = \int_3^4 |-4t^3 + 12t^2| dt$$

$$= \int_3^4 (4t^3 - 12t^2) dt$$

$$= \left[t^4 - 4t^3 \right]_3^4$$

$$= 0 - (-27) = 27$$

106) ③

[출제의도] 수직선 위를 움직이는 점의 운동에 대하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0 \text{ 이므로}$$

점 P의 위치는 $t = 0$ 일 때 수직선의 원점이고, $t = 1$ 일 때도 수직선의 원점이다.

$$\text{또, } \int_0^1 |v(t)| dt = 2 \text{ 이므로}$$

점 P가 $t = 0$ 에서 $t = 1$ 까지 움직인 거리가 2이다.

ㄱ. 점 P의 $t = 0$ 에서 $t = 1$ 까지 위치의 변화량이 0이므로

$$\int_0^1 v(t) dt = 0 \quad (\text{참})$$

ㄴ. $|x(t_1)| > 1$ 이면

점 P와 원점 사이의 거리가 1보다 큰 시각 t_1 이 존재하므로

점 P가 $t = 0$ 에서 $t = 1$ 까지 움직인 거리가 2보다 크다. (거짓)

ㄷ. $0 \leq t \leq 1$ 인 모든 시각 t 에서

점 P와 원점 사이의 거리가 1보다 작고,

점 P가 $t = 0$ 에서 $t = 1$ 까지 움직인 거리가 2이므로

점 P는 $0 < t < 1$ 에서 적어도 한 번 원점을 지나간다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

107) 20

[출제의도] 정적분을 활용하여 점이 움직인 거리를 구한다.

$$0 \leq t \leq 3 \text{ 일 때 } v(t) \geq 0,$$

$$3 \leq t \leq 4 \text{ 일 때 } v(t) \leq 0 \text{ 이므로}$$

시각 $t = 0$ 에서 $t = 4$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^4 |v(t)| dt = \int_0^3 |v(t)| dt + \int_3^4 |v(t)| dt$$

$$= \int_0^3 (12 - 4t) dt + \int_3^4 (4t - 12) dt$$

$$= 18 + 2 = 20$$

108) ①

[출제의도] 속도와 위치의 변화량을 이해하여 점이 움직인 거리를 구한다.

시각 $t = 0$ 에서의 점 P의 위치와 시각 $t = 6$ 에서의 점 P의 위치가 서로 같으므로 시각 $t = 0$ 에서 $t = 6$ 까지 점 P의 위치의 변화량이 0이다. 점

P의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 속도 $v(t)$ 가 $v(t) = 3t^2 + at$ 이므로

$$\int_0^6 v(t) dt = \int_0^6 (3t^2 + at) dt$$

$$= \left[t^3 + \frac{a}{2} t^2 \right]_0^6$$

$$= 36 \left(6 + \frac{a}{2} \right) = 0$$

$$a = -12$$

$v(t) = 3t^2 - 12t$ 이므로 점 P가 시각 $t = 0$ 에서 $t = 6$ 까지 움직인 거리는

$$\int_0^6 |v(t)| dt = \int_0^6 |3t^2 - 12t| dt$$

$$= \int_0^4 (-3t^2 + 12t) dt + \int_4^6 (3t^2 - 12t) dt$$

$$= \left[-t^3 + 6t^2 \right]_0^4 + \left[t^3 - 6t^2 \right]_4^6$$

$$= 32 + 32 = 64$$

109) ②

[출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

점 P의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 위치를 $x(t)$ 라 하면

점 P의 시각 $t = 0$ 에서의 위치는 0이므로 $x(0) = 0$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t) dt$$

$$= \int_0^t 3(t-2)(t-a) dt$$

$$= \int_0^t \{3t^2 - 3(a+2)t + 6a\} dt$$

$$= t^3 - \frac{3}{2}(a+2)t^2 + 6at$$

점 P가 $0 < t < 2$, $t > a$ 에서 양의 방향으로,

$2 < t < a$ 에서 음의 방향으로 움직이고

$t > 0$ 에서 점 P의 위치가 0이 되는 순간이 한 번 뿐이므로 $x(a) = 0$

$$a^3 - \frac{3}{2}(a+2)a^2 + 6a^2 = 0 \text{ 에서 } a > 2 \text{ 이므로 } a = 6$$

$$\text{따라서 } v(8) = 3 \times 6 \times 2 = 36$$

110) ⑤

[출제의도] 수직선 위를 움직이는 점의 움직인 거리를 구할 수 있는가?

점 P의 시간 $t(t \geq 0)$ 에서의 위치를 $x_1(t)$ 라 하면

$$x_1(t) = \int_0^t (2-t) dt = \left[2t - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^t = 2t - \frac{1}{2}t^2$$

따라서 출발 후 점 P가 원점으로 돌아온 시각은

$$2t - \frac{1}{2}t^2 = 0, \quad t^2 - 4t = 0$$

$$t(t-4) = 0$$

$$t = 4$$

이므로

출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_0^4 |3t| dt = \int_0^4 3t dt = \left[\frac{3}{2}t^2 \right]_0^4 = 24$$

111) ④

시각 t 에서의 점 P의 위치를 $x(t)$ 라 하면

$$x(t) = t^3 + \frac{1}{2}at^2 + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

$$x(0) = 0 \text{이므로 } C = 0 \text{이다.}$$

$$|x(2) - 6| = 10$$

$$|(2a+8) - 6| = 10$$

$$\therefore a = 4 \text{ 또는 } a = -6$$

$$a > 0 \text{이므로 } a = 4 \text{이다.}$$

112) 80

[출제의도] 정적분을 활용하여 수직선 위의 점이 움직인 거리를 구한다.

점 P의 시간 t 에서의 가속도 $a(t)$ 는

$$a(t) = v'(t) = 12t^2 - 48$$

$$a(k) = 12(k^2 - 4) = 0 \text{에서 } k > 0 \text{이므로 } k = 2 \text{이다.}$$

$$0 \leq t \leq 2 \text{일 때, } v(t) \leq 0 \text{이므로}$$

시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2 |v(t)| dt = \int_0^2 (-4t^3 + 48t) dt$$

$$= \left[-t^4 + 24t^2 \right]_0^2 = -16 + 96 = 80$$

113) 17

[출제의도] 속도와 가속도를 이용하여 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

 $t \geq 2$ 일 때

$$v(t) = 3t^2 + 4t + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

이때 $v(2) = 0$ 이므로

$$12 + 8 + C = 0 \text{에서 } C = -20$$

즉, $0 \leq t \leq 3$ 에서

$$v(t) = \begin{cases} 2t^3 - 8t & (0 \leq t \leq 2) \\ 3t^2 + 4t - 20 & (2 \leq t \leq 3) \end{cases}$$

따라서 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v(t)| dt$$

$$= \int_0^2 |v(t)| dt + \int_2^3 |v(t)| dt$$

$$= -\int_0^2 v(t) dt + \int_2^3 v(t) dt$$

$$= -\int_0^2 (2t^3 - 8t) dt + \int_2^3 (3t^2 + 4t - 20) dt$$

$$= -\left[\frac{1}{2}t^4 - 4t^2 \right]_0^2 + \left[t^3 + 2t^2 - 20t \right]_2^3$$

$$= -(-8) + 9$$

$$= 17$$