수능, 모의고사 연도별 문제모음

단원 : 수1-지수로그

반: 번호: 이름:

기본유형

1. $2 \le n \le 100$인 자연수 n에 대하여 $(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}$이 어떤 자연수의 n 제곱근이 되도록 하는 n의 개수를 구하시오.

[4점][2013학년도 수능 나26]

2. 양의 실수 x에 대하여 $f(x)$가 다음과 같다.

$$f(x) = \log x$$

세 실수 $f(3)$, $f(3^t+3)$, $f(12)$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 실수 t의 값은?

[3점][2015년 3월 나13]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

3. $30 \le a \le 40$, $150 \le b \le 294$일 때, $\sqrt{a} + \sqrt[3]{b}$의 값이 자연수가 되도록 하는 두 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

[3점][2015년 3월 나24]

4. $\log_2(-x^2+ax+4)$의 값이 자연수가 되도록 하는 실수 x의 개수가 6일 때, 모든 자연수 a의 값의 곱을 구하시오.

[4점][2015년 3월 나29]

5. 16의 네제곱근 중 실수인 것을 a, -27의 세제곱근 중 실수인 것을 b라 할 때, $a-b$의 최댓값은?

[3점][2016년 4월 나09]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. 1이 아닌 두 양수 a, b에 대하여 $\frac{\log_a b}{2a} = \frac{18\log_b a}{b} = \frac{3}{4}$이 성립할 때, ab의 값을 구하시오.

[3점][2016년 10월 나25]

7. 모든 실수 x에 대하여 $\log_a(x^2+2ax+5a)$가 정의되기 위한 모든 정수 a의 값의 합은?

[3점][2017년 4월 나13]

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

8. 두 자연수 a, b에 대하여 $\sqrt{\dfrac{2^a\times 5^b}{2}}$ 이 자연수, $\sqrt[3]{\dfrac{3^b}{2^{a+1}}}$ 이 유리수 일 때, $a+b$의 최솟값은?

[4점][2017년 4월 나17]

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

9. x에 대한 이차방정식 $x^2-\sqrt[3]{81}x+a=0$의 두 근이 $\sqrt[3]{3}$과 b일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

[4점][2018년 3월 나14]

① 6 ② $3\sqrt[3]{9}$ ③ $6\sqrt[3]{3}$
④ 12 ⑤ $6\sqrt[3]{9}$

10. 두 실수 a, b에 대하여

$$2^a+2^b=2,\ 2^{-a}+2^{-b}=\frac{9}{4}$$

일 때, 2^{a+b}의 값은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[3점][2018년 3월 나25]

11. 2 이상의 세 실수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sqrt[3]{a}$는 ab의 네제곱근이다.
(나) $\log_a bc+\log_b ac=4$

$a=\left(\dfrac{b}{c}\right)^k$이 되도록 하는 실수 k의 값은?

[4점][2018년 4월 나19]

① 6 ② $\dfrac{13}{2}$ ③ 7 ④ $\dfrac{15}{2}$ ⑤ 8

12. 2 이상의 자연수 n에 대하여 $\left(\sqrt{3^n}\right)^{\frac{1}{2}}$과 $\sqrt[n]{3^{100}}$이 모두 자연수가 되도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오.

[4점][2018년 4월 나27]

13. 2의 세 제곱근 중 실수인 것을 a, 9의 네 제곱근 중 양의 실수인 것을 b라 하자. $\sqrt[10]{(ab^2)^n}$ 이 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은?

[4점][2018년 전북10월 나14]

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

14. 1이 아닌 두 양수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, $\log ab$의 값은?

[4점][2018년 전북10월 나15]

(가) $\log_a 10b = 6$
(나) $\dfrac{7\log b}{2\log\sqrt{a}+\log b}=3$

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

15. 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 실근이 α, β일 때, $2^{\frac{1}{\alpha^3-1}}\times 2^{\frac{1}{\beta^3-1}}$ 의 값은?

[4점][2018년 대구11월 나16]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

16. 2 이상의 자연수 n에 대하여 $5\log_n 2$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 n의 값의 합은?

[4점][2019학년도 수능 나15]

① 34 ② 38 ③ 42 ④ 46 ⑤ 50

17. $m\le 135$, $n\le 9$인 두 자연수 m, n에 대하여 $\sqrt[3]{2m}\times\sqrt{n^3}$의 값이 자연수일 때, $m+n$의 최댓값은?

[3점][2019년 10월 나08]

① 97 ② 102 ③ 107 ④ 112 ⑤ 117

18. 1이 아닌 세 양수 a, b, c와 1이 아닌 두 자연수 m, n이 다음 조건을 만족시킨다. 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는?

[4점][2020년 4월 나18]

(가) $\sqrt[3]{a}$는 b의 m제곱근이다.
(나) $\sqrt{b}$는 c의 n제곱근이다.
(다) c는 a^{12}의 네제곱근이다.

① 4 ② 7 ③ 10 ④ 13 ⑤ 16

19. 2 이상의 자연수 n에 대하여 $(n-5)$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $\sum_{n=2}^{10} f(n)$의 값은?

[4점][2020년 4월 가14]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

20. 두 양수 a, b에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(2, \log_4 a)$, $(3, \log_2 b)$를 지나는 직선이 원점을 지날 때, $\log_a b$의 값은? (단, $a \neq 1$)

[3점][2020년 6월 가06]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

21. 자연수 n이 $2 \le n \le 11$일 때, $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합은?

[3점][2020년 6월 가12]

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

22. 1보다 큰 세 실수 a, b, c가

$$\log_a b = \frac{\log_b c}{2} = \frac{\log_c a}{4}$$

를 만족시킬 때, $\log_a b + \log_b c + \log_c a$의 값은?

[3점][2020년 9월 가11]

① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$ ④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

활용문제

23. 자연수 n에 대하여 $n(n-4)$의 세제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하고, $n(n-4)$의 네제곱근 중 실수인 것의 개수를 $g(n)$이라 하자. $f(n) > g(n)$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은?

[4점][2019년 3월 나15]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

24. 자연수 n의 양의 약수의 개수를 $f(n)$이라 하고, 36의 모든 양의 약수를 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_9$라 하자.

$\sum_{k=1}^{9} \left\{(-1)^{f(a_k)} \times \log a_k\right\}$의 값은?

[4점][2020학년도 수능 나17]

① $\log 2 + \log 3$ ② $2\log 2 + \log 3$
③ $\log 2 + 2\log 3$ ④ $2\log 2 + 2\log 3$
⑤ $3\log 2 + 2\log 3$

25. $\angle \mathrm{A}=90^{\circ}$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=2\log_2 x$, $\overline{\mathrm{AC}}=\log_4 \dfrac{16}{x}$인 삼각형 ABC의 넓이를 $S(x)$라 하자. $S(x)$가 $x=a$에서 최댓값 M을 가질 때, $a+M$의 값은? (단, $1<x<16$)

[4점][2020년 9월 나17]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

26. $\log_4 2n^2-\dfrac{1}{2}\log_2 \sqrt{n}$의 값이 40이하의 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 개수를 구하시오.

[4점][2021학년도 수능 가27]

27. 모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$$3x^2-2(\log_2 n)x+\log_2 n>0$$

이 성립하도록 하는 자연수 n의 개수를 구하시오.

[3점][2021년 3월 17]

28. 2 이상의 두 자연수 a, n에 대하여 $(\sqrt[n]{a})^3$의 값이 자연수가 되도록 하는 n의 최댓값을 $f(a)$라 하자. $f(4)+f(27)$의 값은?

[4점][2021년 7월 09]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

29. $n\geq 2$인 자연수 n에 대하여 $2n^2-9n$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$의 값을 구하시오.

[3점][2022년 7월 공통19]

30. 함수 $f(x)=-(x-2)^2+k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2일 때, 상수 k의 값은?

[4점][2022년 9월 공통11]

$\sqrt{3}^{\,f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -9이다.

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

31. 자연수 $m\,(m \geq 2)$에 대하여 m^{12}의 n제곱근 중에서 정수가 존재하도록 하는 2 이상의 자연수 n의 개수를 $f(m)$이라 할 때, $\sum_{m=2}^{9} f(m)$의 값은?

[4점][2023학년도 수능 공통13]

① 37 ② 42 ③ 47 ④ 52 ⑤ 57

함수

32. 함수 $y=\log_3\left(\frac{x}{9}-1\right)$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시킨 것이라 할 때, $10(m+n)$의 값을 구하시오.

[3점][2012년 3월 나24]

33. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=x^2-6x+3,\ g(x)=a^x\ (a>0,\ a \neq 1)$$

이라 하자. $1 \leq x \leq 4$에서 함수 $(g \circ f)(x)$의 최댓값은 27, 최솟값은 m이다. m의 값은?

[4점][2013년 3월 나18]

① $\frac{1}{27}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ 3 ⑤ $3\sqrt{3}$

34. 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}-64$에 대하여 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=k$가 제1사분면에서 만나도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오. (단, 좌표축은 어느 사분면에도 속하지 않는다.)

[4점][2013년 3월 나29]

35. 정의역이 $\{x|\,4 \leq x \leq 9\}$인 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+a)$의 최댓값이 -3일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

[3점][2013년 4월 나24]

36. 함수 $f(x)=2^{x-2}$의 역함수의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동시키면 함수 $y=g(x)$의 그래프가 된다. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=1$과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 중점의 좌표가 $(8, 1)$이다. 이때, 실수 a의 값은?

[3점][2013년 4월 가09나19]

① -8 ② -7 ③ -6 ④ -5 ⑤ -4

37. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < 4$일 때, $f(x)=\begin{cases} 3^x & (0 \le x < 2) \\ 3^{-(x-4)} & (2 \le x < 4) \end{cases}$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이다.

닫힌 구간 $[0, 40]$에서 방정식 $f(x)-5=0$의 모든 실근의 합을 구하시오.

[4점][2013년 10월 나29]

38. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1 \le x < 1$에서 $f(x)=\lvert 2x \rvert$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다.

자연수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=\log_{2n}x$의 그래프가 만나는 점의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{7} a_n$의 값을 구하시오.

[4점][2014년 4월 나29]

39. 두 곡선 $y=2^x$, $y=-4^{x-2}$이 y축과 평행한 한 직선과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{OA}=\overline{OB}$일 때, 삼각형 AOB의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

[4점][2016년 7월 가15]

① 64 ② 68 ③ 72 ④ 76 ⑤ 80

40. 닫힌 구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)=\left(\frac{3}{a}\right)^x$의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 양수 a의 값의 곱은?

[3점][2018년 3월 가11]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

41. 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=-\log_2(8-x)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2$가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱은? (단, $0<k<8$)

[4점][2018년 6월 가14]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

42. 점 A(4, 0)을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 B라 하고, 점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x+1}+1$과 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

[4점][2018년 7월 가15]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

43. 함수 $f(x)=-2^{4-3x}+k$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않도록 하는 자연수 k의 최댓값은?

[3점][2018년 9월 가07]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

44. 함수 $y=2^x+2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프가 함수 $y=\log_2 8x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, 상수 m의 값은?

[3점][2019학년도 수능 가05]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

45. 닫힌 구간 $[2, 3]$에서 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-a}$의 최댓값은 27, 최솟값은 m이다. $a\times m$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

[3점][2019년 3월 가25]

46. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)=3^{x-1}+k$의 역함수의 그래프를 x축의 방향으로 k^2만큼 평행이동시킨 곡선을 $y=g(x)$라 하자. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 점근선의 교점이 직선 $y=\frac{1}{3}x$ 위에 있을 때, k의 값은?

[3점][2019년 7월 가11]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

47. 곡선 $y=\log_{\sqrt{2}}(x-a)$와 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 만나는 점 중 한 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=(\sqrt{2})^x+a$와 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 6일 때, 상수 a의 값은? (단, $0<a<4$이고, O는 원점이다.)

[4점][2019년 10월 가14]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

48. 지수함수 $y=a^x$ $(a>1)$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$이 만나는 점을 A라 하자. 점 B(4, 0)에 대하여 직선 OA와 직선 AB가 서로 수직이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은? (단, O는 원점이다.)

[4점][2020학년도 수능 가15]

① $3^{\frac{1}{3}}$ ② $3^{\frac{2}{3}}$ ③ 3 ④ $3^{\frac{4}{3}}$ ⑤ $3^{\frac{5}{3}}$

49. 두 함수

$f(x)=2^x$, $g(x)=2^{x-2}$

에 대하여 두 양수 a, b $(a<b)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은?

[4점][2020년 4월 나20]

(가) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $y=a$, $y=b$로 둘러싸인 부분의 넓이가 6이다.

(나) $g^{-1}(b)-f^{-1}(a)=\log_2 6$

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

50. $\frac{1}{4}<a<1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a} x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=-1$이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{4a} x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[3점][2021학년도 수능 가13나18]

<보 기>

ㄱ. 선분 AB를 1:4로 외분하는 점의 좌표는 (0, 1)이다.

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 $a=\frac{1}{2}$이다.

ㄷ. $\overline{AB}<\overline{CD}$이면 $\frac{1}{2}<a<1$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

51. 두 함수 $f(x)=2^x+1$, $g(x)=2^{x+1}$의 그래프가 점 P에서 만난다. 서로 다른 두 실수 a, b에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ g(b))$의 중점이 P일 때, 선분 AB의 길이는?

[3점][2020년 7월 가13]

① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 4 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

52. $n\geq 2$인 자연수 n에 대하여 두 곡선

$$y=\log_n x,\ y=-\log_n(x+3)+1$$

이 만나는 점의 x좌표가 1보다 크고 2보다 작도록 하는 모든 n의 값의 합은?

[4점][2021년 6월 10]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

53. 곡선 $y=6^{-x}$ 위의 두 점 $A(a,\ 6^{-a})$, $B(a+1,\ 6^{-a-1})$에 대하여 선분 AB는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선이다. 6^{-a}의 값은?

[3점][2021년 10월 06]

① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{7}{5}$ ③ $\frac{8}{5}$ ④ $\frac{9}{5}$ ⑤ 2

54. 두 상수 a, b $(1<a<b)$에 대하여 좌표평면 위의
두 점 $(a,\ \log_2 a)$, $(b,\ \log_2 b)$를 지나는 직선의 y절편과
두 점 $(a,\ \log_4 a)$, $(b,\ \log_4 b)$를 지나는 직선의 y절편이 같다.
함수 $f(x)=a^{bx}+b^{ax}$에 대하여 $f(1)=40$일 때, $f(2)$의 값은?

[4점][2022학년도 수능 13]

① 760 ② 800 ③ 840 ④ 880 ⑤ 920

55. $a>1$인 실수 a에 대하여 두 곡선

$$y=-\log_2(-x),\ y=\log_2(x+2a)$$

가 만나는 두 점을 A, B라 하자. 선분 AB의 중점이
직선 $4x+3y+5=0$ 위에 있을 때, 선분 AB의 길이는?

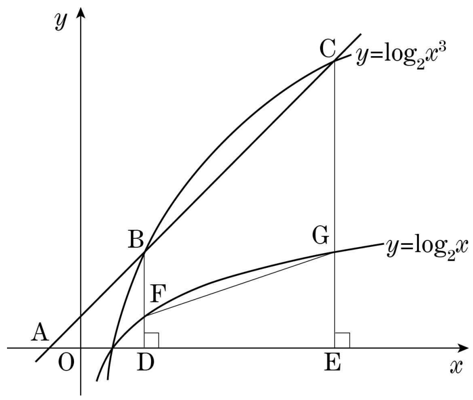
[4점][2022년 10월 공통10]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

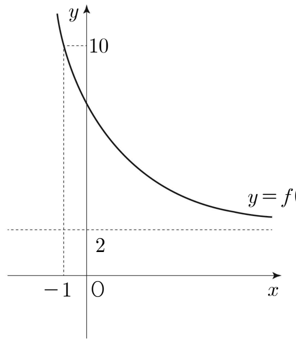
그래프

56. 그림과 같이 x축 위의 한 점 A를 지나는 직선이 곡선 $y=\log_2 x^3$과 서로 다른 두 점 B, C에서 만나고 있다. 두 점 B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하고, 두 선분 BD, CE가 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 각각 F, G라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=1:2$이고, 삼각형 ADB의 넓이가 $\frac{9}{2}$일 때, 사각형 BFGC의 넓이를 구하시오. (단, 점 A의 x좌표는 0보다 작다.)

[4점][2012년 3월 가나29]



57. 점근선의 방정식이 $y=2$인 지수함수 $y=2^{2x+a}+b$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

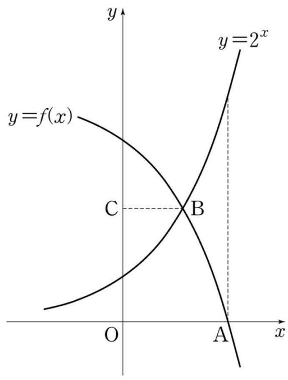


함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-1, 10)$을 지날 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

[3점][2012년 4월 가나11]

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

58. 곡선 $y=-2^x$을 y축의 방향으로 m만큼 평행이동시킨 곡선을 $y=f(x)$라 하자. 곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점을 A라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, $m>2$이다.)



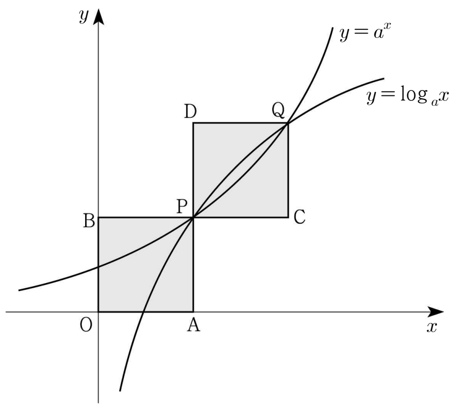
곡선 $y=2^x$이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 B, 점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 C라 하자. $\overline{OA}=2\overline{BC}$일 때, m의 값은?

[3점][2012년 5월 가08]

① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$ ④ 8 ⑤ $8\sqrt{2}$

59. 그림과 같이 지수함수 $y=a^x$과 로그함수 $y=\log_a x$가 두 점 P, Q에서 만날 때, 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하자.
점 Q를 지나고 x축과 평행한 직선이 직선 AP와 만나는 점을 D, 점 Q를 지나고 y축과 평행한 직선이 직선 BP와 만나는 점을 C라 할 때, 두 사각형 OAPB와 PCQD는 합동이다. a의 값은? (단, O는 원점이다.)

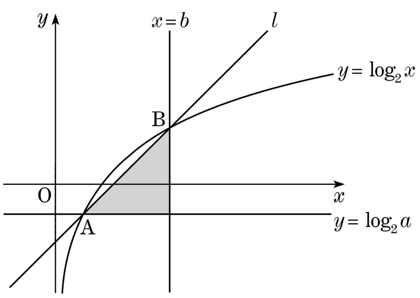
[4점][2012년 10월 가나16]



① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ⑤ 2

60. 그림과 같이 기울기가 1인 직선 l이 곡선 $y=\log_2 x$와 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(a, \log_2 a)$, $\mathrm{B}(b, \log_2 b)$에서 만난다. 직선 l과 두 직선 $x=b$, $y=\log_2 a$로 둘러싸인 부분의 넓이가 2일 때, $a+b$의 값은? (단, $0<a<b$이다.)

[4점][2013년 3월 나14]



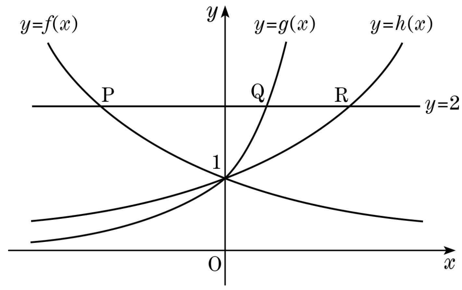
① 2 ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

61. 세 지수함수

$$f(x)=a^{-x},\ g(x)=b^x,\ h(x)=a^x\ (1<a<b)$$

에 대하여 직선 $y=2$가 세 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$와 만나는 점을 각각 P, Q, R라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{QR}}=2:1$이고 $h(2)=2$일 때, $g(4)$의 값은?

[3점][2014년 3월 나10]



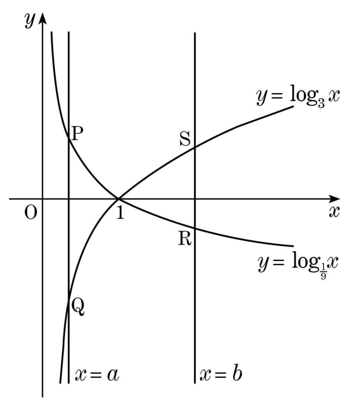
① 16 ② $16\sqrt{2}$ ③ 32 ④ $32\sqrt{2}$ ⑤ 64

62. 좌표평면에서 직선 $x=a\,(0<a<1)$가 두 곡선 $y=\log_{\frac{1}{9}} x$, $y=\log_3 x$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 직선 $x=b\,(b>1)$가 두 곡선 $y=\log_{\frac{1}{9}} x$, $y=\log_3 x$와 만나는 점을 각각 R, S라 하자. 네 점 P, Q, R, S는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{SR}}=2:1$
>
> (나) 선분 PR의 중점의 x좌표는 $\frac{9}{8}$이다.

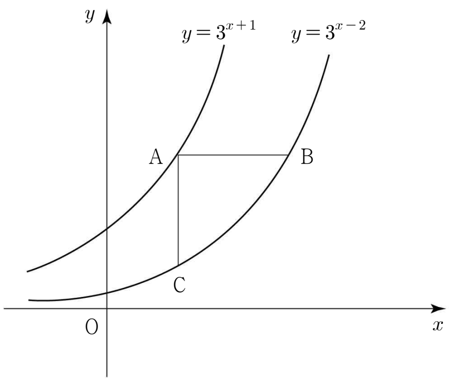
두 상수 a, b에 대하여 $40(b-a)$의 값을 구하시오.

[4점][2014년 3월 나28]



63. 그림과 같이 함수 $y=3^{x+1}$의 그래프 위의 한 점 A와 함수 $y=3^{x-2}$의 그래프 위의 두 점 B, C에 대하여 선분 AB는 x축에 평행하고 선분 AC는 y축에 평행하다. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$가 될 때, 점 A의 y좌표는? (단, 점 A는 제1사분면 위에 있다.)

[3점][2014년 7월 나08]



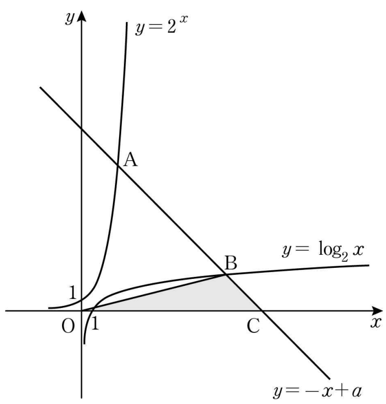
① $\frac{81}{26}$ ② $\frac{44}{13}$ ③ $\frac{95}{26}$ ④ $\frac{101}{26}$ ⑤ $\frac{54}{13}$

64. 그림과 같이 직선 $y=-x+a$가 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, x축과 만나는 점을 C라 할 때, 점 A, B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=3:1$
(나) 삼각형 OBC의 넓이는 40이다.

점 A의 좌표를 A$(p,\ q)$라 할 때, $p+q$의 값은? (단, O는 원점이고, a는 상수이다.)

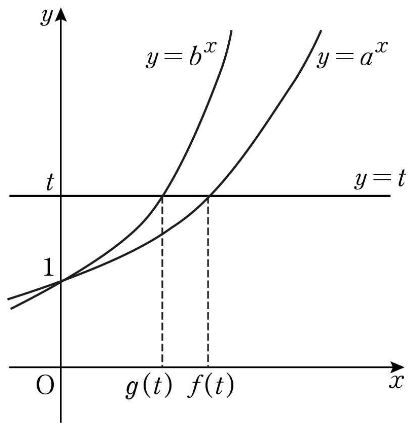
[4점][2015년 3월 나18]



① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

65. 그림과 같이 두 곡선 $y=a^x$, $y=b^x\ (1<a<b)$가 직선 $y=t\ (t>1)$과 만나는 점의 x좌표를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 할 때, $2f(a)=3g(a)$가 성립한다. $f(c)=g(27)$을 만족시키는 실수 c의 값은?

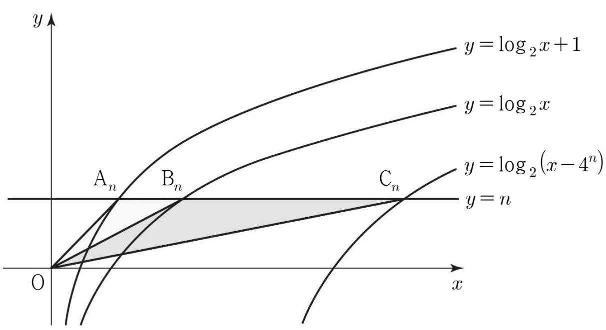
[4점][2015년 3월 가16나19]



① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

66. 자연수 n에 대하여 그림과 같이 세 곡선 $y=\log_2 x+1$, $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-4^n)$이 직선 $y=n$과 만나는 세 점을 각각 A_n, B_n, C_n이라 하자. 두 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n$, $\mathrm{B}_n\mathrm{OC}_n$의 넓이를 각각 S_n, T_n이라 할 때, $\dfrac{T_n}{S_n}=64$를 만족시키는 n의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

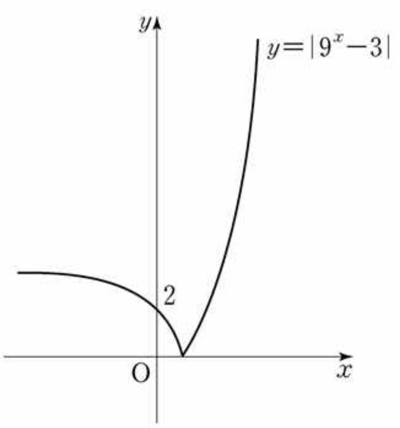
[4점][2015년 4월 나27]



67. 좌표평면 위의 두 곡선 $y=|9^x-3|$ 과 $y=2^{x+k}$이 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$라 할 때, $x_1<0$, $0<x_2<2$를 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은?

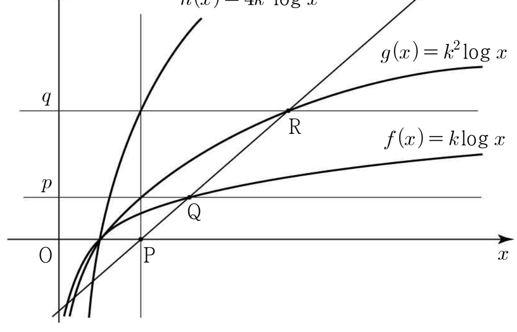
[4점][2015년 6월 가18]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12



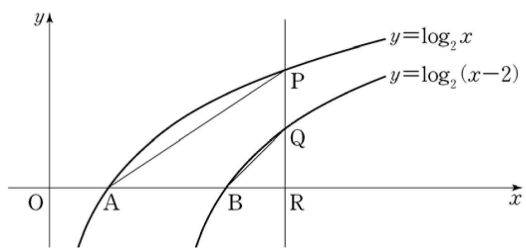
68. 그림과 같이 세 로그함수 $f(x)=k\log x$, $g(x)=k^2\log x$, $h(x)=4k^2\log x$의 그래프가 있다. 점 $\mathrm{P}(2,0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 두 곡선 $y=g(x)$, $y=h(x)$와 만나는 점의 y좌표를 각각 p, q라 하자. 직선 $y=p$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점을 $\mathrm{Q}(a,p)$, 직선 $y=q$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점을 $\mathrm{R}(b,q)$라 하자. 세 점 P, Q, R가 한 직선 위에 있을 때, 두 실수 a, b의 곱 ab의 값을 구하시오. (단, $k>1$)

[4점][2015년 7월 나28]



69. 그림과 같이 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-2)$의 그래프가 x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 직선 $x=k$ $(k>0)$이 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-2)$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, x축과 만나는 점을 R라 하자. 점 Q가 선분 PR의 중점일 때, 사각형 ABQP의 넓이는?

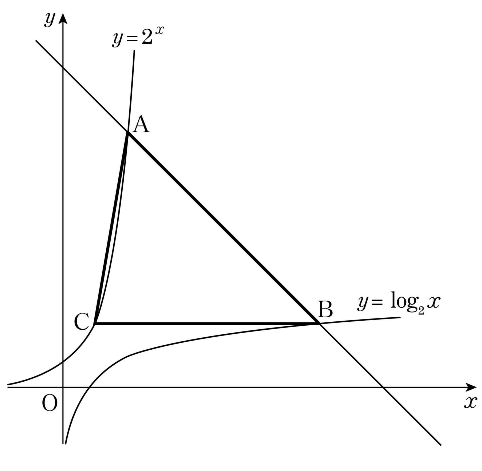
[3점][2015년 9월 나12]



① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

70. 그림과 같이 기울기가 -1인 직선이 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$와 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 C라 하자. 선분 AB의 길이가 $12\sqrt{2}$, 삼각형 ABC의 넓이가 84이다. 점 A의 x좌표를 a라 할 때, $a-\log_2 a$의 값은?

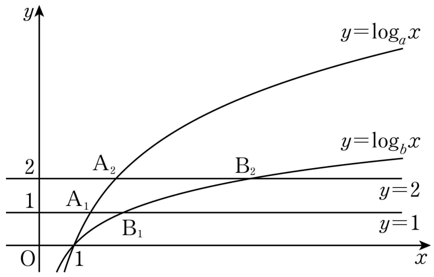
[4점][2015년 10월 나17]



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

71. 그림과 같이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_b x\ (1<a<b)$와 직선 $y=1$이 만나는 점을 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{B_1}$이라 하고, 직선 $y=2$가 만나는 점을 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_2}$라 하자. 선분 $\mathrm{A_1B_1}$의 중점의 좌표는 $(2,1)$이고 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}=1$일 때, $\overline{\mathrm{A_2B_2}}$의 값은?

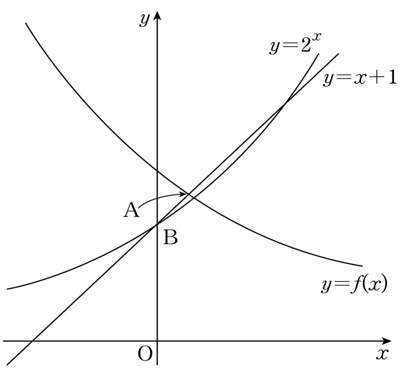
[3점][2017년 3월 가11]



① 4 ② $3\sqrt{2}$ ③ 5 ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 6

72. 그림과 같이 곡선 $y=2^x$을 y축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼 평행이동한 곡선을 $y=f(x)$라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x+1$이 만나는 점 A와 점 B$(0,1)$ 사이의 거리를 k라 할 때, $\frac{1}{k^2}$의 값을 구하시오.

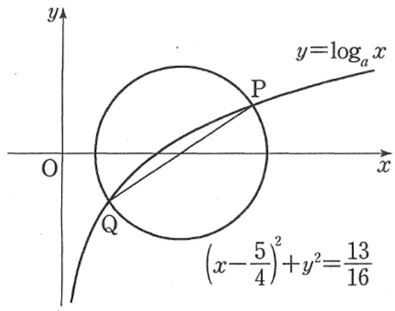
[4점][2017년 3월 가27]



73. $a>1$인 실수 a에 대하여 곡선 $y=\log_a x$와 원 $C:\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+y^2=\frac{13}{16}$의 두 교점을 P, Q라 하자. 선분 PQ가 원 C의 지름일 때, a의 값은?

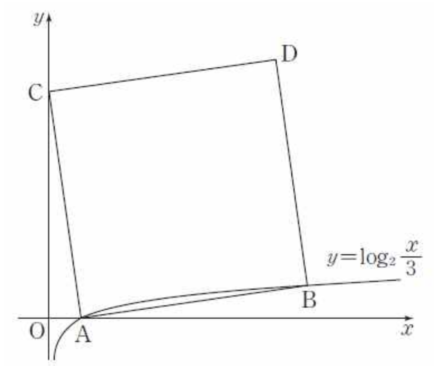
[4점][2017년 9월 가16]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5



74. 그림과 같이 곡선 $y=\log_2\frac{x}{3}$가 x축과 만나는 점을 A라 하자. 곡선 $y=\log_2\frac{x}{3}$ 위의 제1사분면에 있는 점 B와 y축 위의 점 C에 대하여 사각형 $ABDC$가 정사각형일 때, 점 D의 y좌표는?

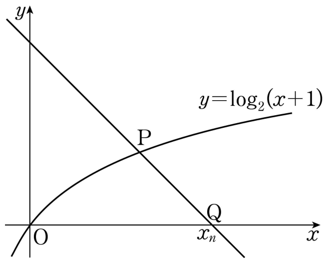
[4점][2017년 전북10월 가14]



① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

75. 그림과 같이 제1사분면에 있는 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 자연수 n에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2}n$이 되도록 하는 점 Q의 x좌표를 x_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{5} x_k$의 값은?

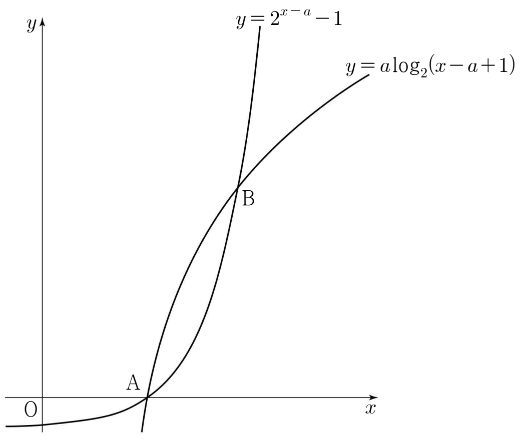
[4점][2018년 3월 가16]



① 72 ② 84 ③ 96 ④ 108 ⑤ 120

76. 그림과 같이 $a>1$인 실수 a에 대하여
두 곡선 $y=a\log_2(x-a+1)$과 $y=2^{x-a}-1$이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 점 A가 x축 위에 있고 삼각형 OAB의 넓이가 $\frac{7}{2}a$일 때, 선분 AB의 중점은 M(p, q)이다.
$p+q$의 값은? (단, O는 원점이다.)

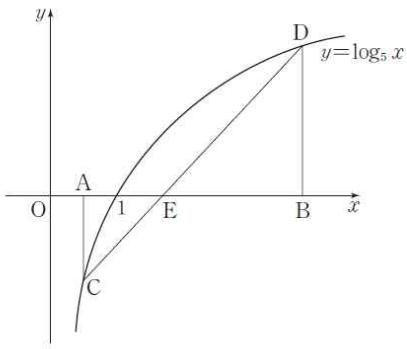
[4점][2018년 4월 가14]



① $\frac{13}{2}$ ② 7 ③ $\frac{15}{2}$ ④ 8 ⑤ $\frac{17}{2}$

77. 그림과 같이 두 점 $A(a,0)$, $B(b,0)$을 각각 지나고 x축에 수직인 두 직선이 곡선 $y=\log_5 x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하고, 선분 CD와 x축이 만나는 점을 E라 하자.
삼각형 ACE의 넓이를 S_1, 삼각형 BDE의 넓이를 S_2라 하자.
$S_1 : S_2 = 4 : 9$일 때, $\log_a b$의 값은? (단, $0<a<1<b$)

[3점][2018년 전북5월 가11]



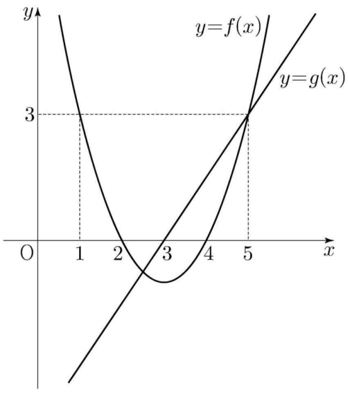
① $-\frac{9}{4}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{4}{9}$

78. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은?

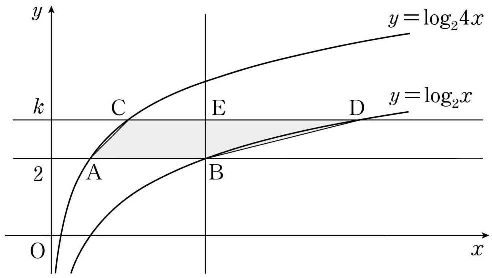
[4점][2019학년도 수능 가14]



① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

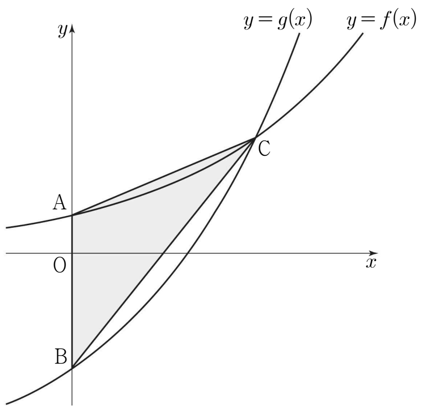
79. 그림과 같이 직선 $y=2$가 두 곡선 $y=\log_2 4x$, $y=\log_2 x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=k\,(k>2)$가 두 곡선 $y=\log_2 4x$, $y=\log_2 x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 점 B를 지나고 y축과 평행한 직선이 직선 CD와 만나는 점을 E라 하면 점 E는 선분 CD를 $1:2$로 내분한다. 사각형 ABDC의 넓이를 S라 할 때, $12S$의 값을 구하시오.

[4점][2019년 3월 가27]



80. 그림과 같이 두 함수 $f(x)=\dfrac{2^x}{3}$, $g(x)=2^x-2$의 그래프가 y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고,
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

[3점][2019년 4월 가11]



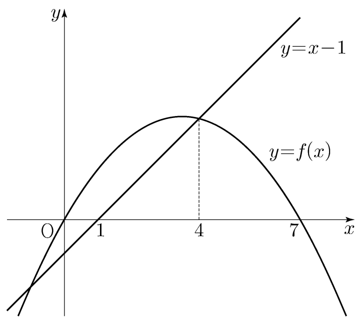
① $\dfrac{1}{3}\log_2 3$　② $\dfrac{2}{3}\log_2 3$　③ $\log_2 3$
④ $\dfrac{4}{3}\log_2 3$　⑤ $\dfrac{5}{3}\log_2 3$

81. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x-1$이 그림과 같을 때, 부등식

$$\log_3 f(x)+\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\le 0$$

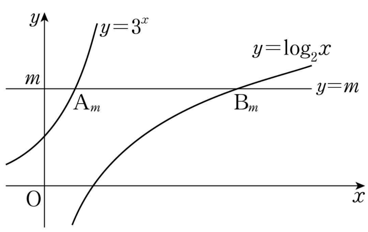
을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오.
(단, $f(0)=f(7)=0$, $f(4)=3$)

[3점][2019년 6월 가24]



82. 그림과 같이 자연수 m에 대하여 두 함수 $y=3^x$, $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=m$이 만나는 점을 각각 A_m, B_m이라 하자. 선분 $\mathrm{A}_m\mathrm{B}_m$의 길이 중 자연수인 것을 작은 수부터 크기순으로 나열하여 a_1, a_2, a_3, $\cdots$이라 할 때, a_3의 값은?

[4점][2020년 3월 나16]

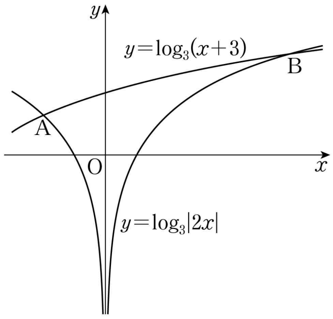


① 502　② 504　③ 506　④ 508　⑤ 510

83. 함수 $y=\log_3|2x|$의 그래프와 함수 $y=\log_3(x+3)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 직선 AB와 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.)

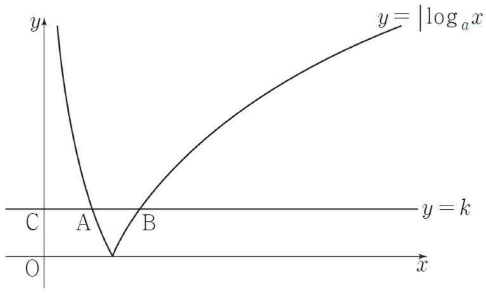
[4점][2020년 3월 가14]

① $\frac{13}{2}$ ② 7 ③ $\frac{15}{2}$ ④ 8 ⑤ $\frac{17}{2}$



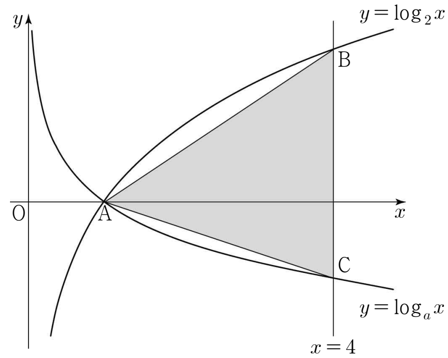
84. 그림과 같이 1보다 큰 실수 a에 대하여 곡선 $y=|\log_a x|$가 직선 $y=k(k>0)$과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=k$가 y축과 만나는 점을 C라 하자.
$\overline{OC}=\overline{CA}=\overline{AB}$일 때, 곡선 $y=|\log_a x|$와 직선 $y=2\sqrt{2}$가 만나는 두 점 사이의 거리는 d이다. $20d$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.)

[4점][2020년 4월 가28]



85. 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_a x\,(0<a<1)$이 x축 위의 점 A에서 만난다. 직선 $x=4$가 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 B, 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{9}{2}$일 때, 상수 a의 값은?

[3점][2020년 7월 나10]



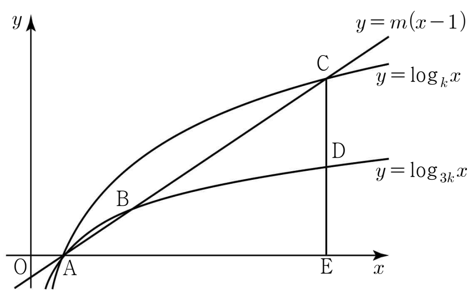
① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{3}{16}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{5}{16}$

86. $k>1$인 실수 k에 대하여 두 곡선 $y=\log_{3k}x$, $y=\log_k x$가 만나는 점을 A라 하자. 양수 m에 대하여 직선 $y=m(x-1)$이 두 곡선 $y=\log_{3k}x$, $y=\log_k x$와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_{3k}x$, x축과 만나는 점을 각각 D, E라 할 때, 세 삼각형 ADB, AED, BDC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 BDC의 넓이는 삼각형 ADB의 넓이의 3배이다. (나) 삼각형 BDC의 넓이는 삼각형 AED의 넓이의 $\frac{3}{4}$배이다.

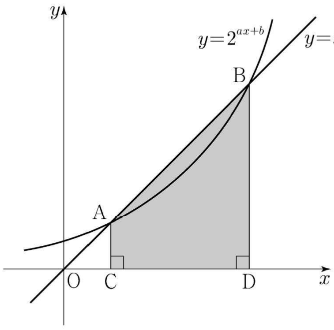
$\frac{k}{m}$의 값을 구하시오.

[4점][2020년 7월 가27]



87. 곡선 $y=2^{ax+b}$와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AB}=6\sqrt{2}$이고 사각형 ACDB의 넓이가 30일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

[3점][2020년 9월 가13나15]

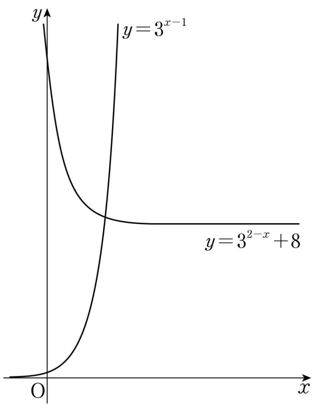


① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

88. 실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 곡선 $y=3^{2-x}+8$과 만나는 점을 A, x축과 만나는 점을 B라 하자. 직선 $x=t+1$이 x축과 만나는 점을 C, 곡선 $y=3^{x-1}$과 만나는 점을 D라 하자. 사각형 ABCD가 직사각형일 때, 이 사각형의 넓이는?

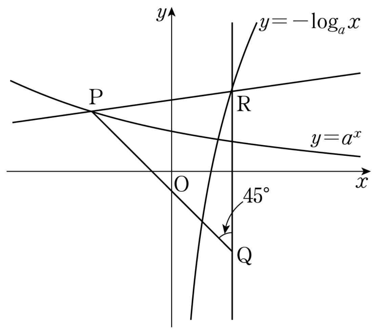
[3점][2020년 10월 나13]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13



89. 그림과 같이 좌표평면에서 곡선 $y=a^x\,(0<a<1)$ 위의 점 P가 제2사분면에 있다. 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점 Q와 곡선 $y=-\log_a x$ 위의 점 R에 대하여 $\angle PQR=45°$이다. $\overline{PR}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$이고 직선 PR의 기울기가 $\frac{1}{7}$일 때, 상수 a의 값은?

[4점][2020년 10월 가15]



① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

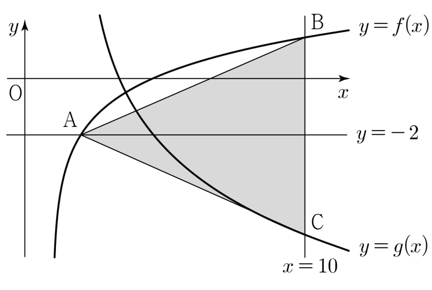
90. $a>1$인 실수 a에 대하여 두 함수

$$f(x)=\frac{1}{2}\log_a(x-1)-2,\ \ g(x)=\log_{\frac{1}{a}}(x-2)+1$$

이 있다. 직선 $y=-2$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점을 A라 하고, 직선 $x=10$과 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ACB의 넓이가 28일 때, a^{10}의 값은?

[4점][2021년 7월 11]

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

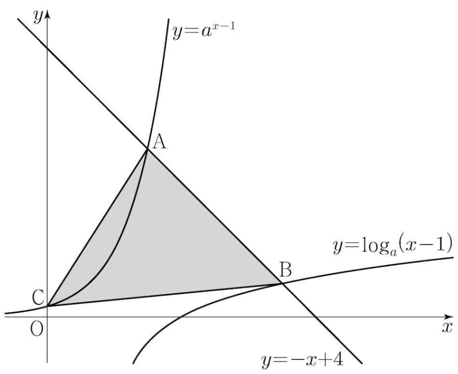


91. $a>1$인 실수 a에 대하여 $y=-x+4$가 두 곡선

$$y=a^{x-1},\ y=\log_a(x-1)$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오.

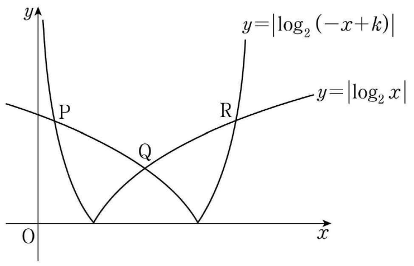
[4점][2021년 9월 21]



92. 2 보다 큰 상수 k에 대하여
두 곡선 $y=|\log_2(-x+k)|$, $y=|\log_2 x|$가 만나는 세 점 P, Q, R의 x 좌표를 각각 x_1, x_2, x_3이라 하자. $x_3-x_1=2\sqrt{3}$일 때, x_1+x_3의 값은? (단, $x_1<x_2<x_3$)

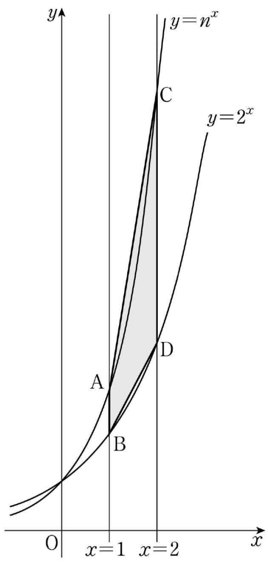
[3점][2021년 10월 08]

① $\frac{7}{2}$　② $\frac{15}{4}$　③ 4　④ $\frac{17}{4}$　⑤ $\frac{9}{2}$



93. 그림과 같이 3 이상의 자연수 n에 대하여 두 곡선 $y=n^x$, $y=2^x$이 직선 $x=1$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 두 곡선 $y=n^x$, $y=2^x$이 직선 $x=2$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 사다리꼴 ABDC의 넓이가 18 이하가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

[3점][2021년 10월 18]



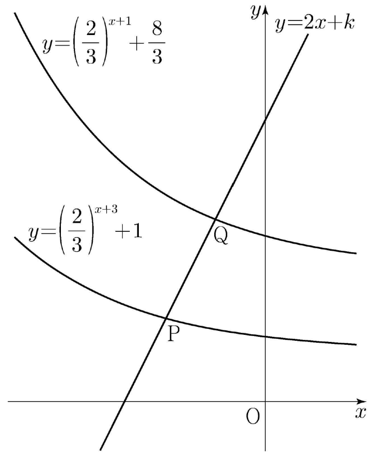
94. 직선 $y=2x+k$가 두 함수

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1,\ y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값은?

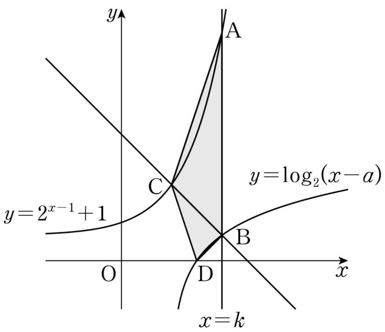
[4점][2022학년도 수능 09]

① $\frac{31}{6}$　② $\frac{16}{3}$　③ $\frac{11}{2}$　④ $\frac{17}{3}$　⑤ $\frac{35}{6}$



95. 그림과 같이 두 상수 a, k에 대하여 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=2^{x-1}+1$, $y=\log_2(x-a)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x-1}+1$과 만나는 점을 C라 하자.
$\overline{\mathrm{AB}}=8$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{2}$일 때, 곡선 $y=\log_2(x-a)$가 x축과 만나는 점 D에 대하여 사각형 ACDB의 넓이는? (단, $0<a<k$)

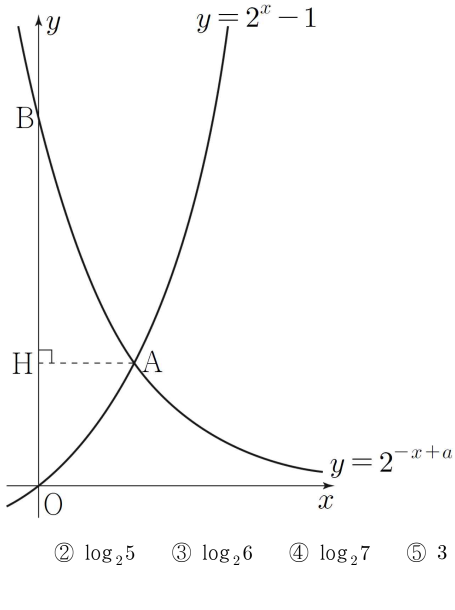
[4점][2022년 3월 공통11]



① 14 ② 13 ③ 12 ④ 11 ⑤ 10

96. 그림과 같이 두 곡선 $y=2^{-x+a}$, $y=2^x-1$이 만나는 점을 A, 곡선 $y=2^{-x+a}$이 y축과 만나는 점을 B라 하자.
점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{\mathrm{OB}}=3\times\overline{\mathrm{OH}}$이다. 상수 a의 값은? (단, O는 원점이다.)

[4점][2022년 4월 공통09]

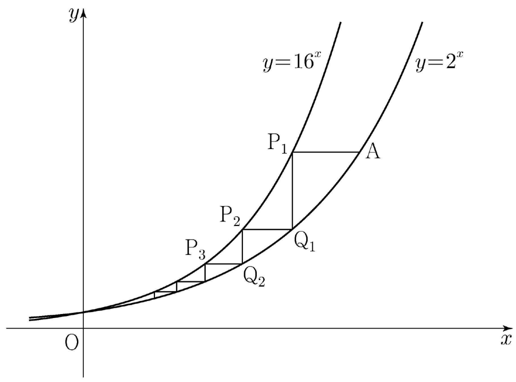


① 2 ② $\log_2 5$ ③ $\log_2 6$ ④ $\log_2 7$ ⑤ 3

97. 두 곡선 $y=16^x$, $y=2^x$과 한 점 A$(64,\ 2^{64})$이 있다. 점 A를 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_1이라 하고, 점 P_1을 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_1이라 하자.
점 Q_1을 지나며 x축과 평행한 직선이 $y=16^x$과 만나는 점을 P_2라 하고, 점 P_2를 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하고 점 Q_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $x_n<\dfrac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이 되도록 하는 자연수 k의 개수는?

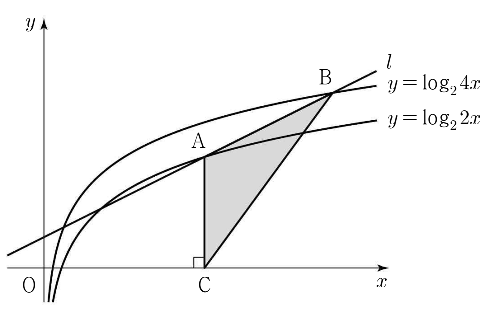
[4점][2022년 6월 공통13]

① 48 ② 51 ③ 54 ④ 57 ⑤ 60



98. 기울기가 $\dfrac{1}{2}$인 직선 l이 곡선 $y=\log_2 2x$와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 만나는 두 점 중 x좌표가 큰 점을 A라 하고, 직선 l이 곡선 $y=\log_2 4x$와 만나는 두 점 중 x좌표가 큰 점을 B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{5}$일 때, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발 C에 대하여 삼각형 ACB의 넓이는?

[4점][2022년 7월 공통11]



① 5 ② $\dfrac{21}{4}$ ③ $\dfrac{11}{2}$ ④ $\dfrac{23}{4}$ ⑤ 6

[해설] 수1-지수로그

1) 16

$\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(3^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{6}}$ 이때,

$3^{\frac{5}{6}} = (3^5)^{\frac{1}{6}} = (3^{10})^{\frac{1}{12}} = (3^{15})^{\frac{1}{18}} = \cdots = (3^{80})^{\frac{1}{96}}$ 이므로

$\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}$ 은 3^5의 6제곱근, 3^{10}의 12제곱근, 3^{15}의 18제곱근, $\cdots$, 3^{80}의 96제곱근과 같다.

따라서 구하는 n은 6, 12, 18, $\cdots$, 96이므로 16개이다.

[다른 풀이]

$N = \left(\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^n = 3^{\frac{5}{6}n}$

여기서 N이 자연수이려면 $\frac{5}{6}n$은 0 이상의 정수이어야 한다.

$\therefore\ n = 6k\ (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 16)$

따라서 16개이다.

2) ④

[출제의도] 등차수열과 로그의 성질을 이해하여 미지수의 값을 구한다.

$\log 3$, $\log(3^t + 3)$, $\log 12$ 는 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\log(3^t + 3) = \dfrac{\log 12 + \log 3}{2} = \dfrac{\log 36}{2} = \log\sqrt{36}$

$3^t + 3 = \sqrt{36} = 6$, $3^t = 3$

따라서 $t = 1$

3) 252

[출제의도] 거듭제곱근의 성질을 이해하여 주어진 조건을 만족시키는 자연수를 구한다.

$\sqrt{a} + \sqrt[3]{b}$ 이 자연수가 되기 위해서는 a는 어떤 자연수의 제곱 꼴이고 b는 세제곱 꼴이다.

$5^2 < 30 \le a \le 40 < 7^2$ 이므로 $a = 6^2$

또, $5^3 < 150 = 5^2 \times 6 < 6^3$ 이고

$6^3 < 294 = 7^2 \times 6 < 7^3$

이므로 $5 < \sqrt[3]{b} < 7$, $b = 6^3$

따라서 $a + b = 36 + 216 = 252$

4) 30

[출제의도] 로그의 정의와 이차함수의 성질을 활용하여 자연수의 개수 구하는 문제를 해결한다.

$f(x) = -x^2 + ax + 4$ 라 하면

로그의 진수 조건에 의해 $f(x) > 0$

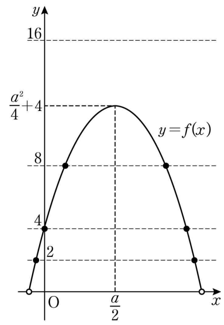
$$f(x) = -x^2 + ax + 4$$
$$= -\left(x^2 - ax + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\right) + 4$$
$$= -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} + 4$$

$\log_2(-x^2 + ax + 4)$ 의 값이 자연수가 되는 실수 x의 개수가 6 이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같이 $y = 2^1$, $y = 2^2$, $y = 2^3$ 과 각각 2개의 점에서 만나고 $y = 2^n\ (n \ge 4)$와는 만나지 않는다.

즉, $2^3 < \dfrac{a^2}{4} + 4 < 2^4$

$16 < a^2 < 48$ 이고, a가 자연수이므로 $a = 5$, 6

따라서 $5 \times 6 = 30$



5) ⑤

[출제의도] 거듭제곱근 이해하기

16의 네제곱근을 x라 하면

$x^4 = 16$이므로 $x^4 - 16 = (x-2)(x+2)(x^2+4) = 0$

$x = \pm 2$ 또는 $x = \pm 2i$

$\therefore\ a = 2$ 또는 $a = -2$

-27의 세제곱근을 x라 하면

$x^3 = -27$이므로 $x^3 + 27 = (x+3)(x^2 - 3x + 9) = 0$

$x = -3$ 또는 $x = \dfrac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ b = -3$

그러므로

$a - b = 2 - (-3) = 5$ 또는 $a - b = -2 - (-3) = 1$

따라서 $a - b$의 최댓값은 5

6) 16

[출제의도] 로그의 성질을 이해하여 조건을 만족하는 값을 구한다.

i) $\dfrac{\log_a b}{2a} = \dfrac{3}{4}$ 이므로 $\log_a b = \dfrac{3a}{2}$

ii) $\dfrac{18\log_b a}{b} = \dfrac{3}{4}$ 이므로 $\log_b a = \dfrac{b}{24}$

$\log_a b \times \log_b a = \dfrac{3a}{2} \times \dfrac{b}{24} = 1$

따라서 $ab = 16$

7) ①

[출제의도] 로그의 정의 이해하기

a가 밑이므로 $a > 0$, $a \ne 1$ ……㉠

진수 $x^2 + 2ax + 5a$는 모든 실수 x에 대하여

$x^2 + 2ax + 5a > 0$이므로

판별식 $D = 4a^2 - 20a = 4a(a-5) < 0$

$0 < a < 5$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $0 < a < 5$, $a \ne 1$

따라서 정수 a는 2, 3, 4이고 합은 9

8) ①

[출제의도] 지수법칙을 활용하여 추론하기

(i) $\sqrt{\dfrac{2^a \times 5^b}{2}} = 2^{\frac{a-1}{2}} \times 5^{\frac{b}{2}}$ 이 자연수이므로

$a - 1 = 2m$, $a = 2m + 1$(m은 음이 아닌 정수)

$a = 1,\ 3,\ 5,\ \cdots$

$b = 2n$(n은 자연수)

$b = 2,\ 4,\ 6,\ \cdots$

(ii) $\sqrt[3]{\dfrac{3^b}{2^{a+1}}} = \dfrac{3^{\frac{b}{3}}}{2^{\frac{a+1}{3}}}$ 이 유리수이므로

$a+1=3k$, $a=3k-1$(k는 자연수)

$a=2,\ 5,\ 8,\ \cdots$

$b=3l$(l은 자연수)

$b=3,\ 6,\ 9,\ \cdots$

(i), (ii)에 의하여

a의 최솟값은 5, b의 최솟값은 6

따라서 $a+b$의 최솟값은 11

9) ④

[출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계와 지수법칙을 이용하여 문제를 해결한다.

x에 대한 이차방정식 $x^2-\sqrt[3]{81}x+a=0$의 두 근이 $\sqrt[3]{3}$과 b이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sqrt[3]{3}+b=\sqrt[3]{81}$, $\sqrt[3]{3}b=a$

그러므로

$b=\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3^4}-\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}$

$a=\sqrt[3]{3}b=\sqrt[3]{3}\times 2\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3^2}$

따라서

$ab=2\sqrt[3]{3^2}\times 2\sqrt[3]{3}=4\sqrt[3]{3^3}=4\times 3=12$

10) 17

[출제의도] 지수법칙을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

$2^{-a}+2^{-b}=\dfrac{1}{2^a}+\dfrac{1}{2^b}=\dfrac{2^a+2^b}{2^{a+b}}=\dfrac{9}{4}$ ...... ㉠

그런데 $2^a+2^b=2$이므로 이 값을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{2}{2^{a+b}}=\dfrac{9}{4}$

$2^{a+b}=2\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{8}{9}$

따라서 $p=9$, $q=8$, $p+q=17$

11) ①

[출제의도] 로그의 성질을 활용하여 문제해결하기

(가)에서 $\sqrt[4]{a}$는 ab의 네제곱근이므로 $a^{\frac{4}{3}}=ab$, $b=a^{\frac{1}{3}}$

(나)에서

$\log_a bc+\log_b ac=\log_a a^{\frac{1}{3}}c+\log_{a^{\frac{1}{3}}} ac$

$=\dfrac{1}{3}\log_a a+\log_a c+3(\log_a a+\log_a c)$

$=\dfrac{10}{3}+4\log_a c=4$

$\log_a c=\dfrac{1}{6}$, $c=a^{\frac{1}{6}}$

따라서 $a=\left(\dfrac{b}{c}\right)^k=\left(\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}}\right)^k=\left(a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}\right)^k=a^{\frac{k}{6}}$이므로

$k=6$

12) 124

[출제의도] 지수법칙을 활용하여 문제해결하기

$\left(\sqrt{3^n}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(3^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{n}{4}}$, $\sqrt[n]{3^{100}}=3^{\frac{100}{n}}$

$3^{\frac{n}{4}}$, $3^{\frac{100}{n}}$이 모두 자연수가 되도록 하는

$n(n\geq 2)$은 4의 배수이고 100의 양의 약수이다.

따라서 구하는 모든 n의 값의 합은

$4+20+100=124$

13) ⑤

[출제의도] 이해능력-지수와 로그

$a=\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$, $b=\sqrt[4]{9}=3^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[10]{(ab^2)^n}=a^{\frac{n}{10}}b^{\frac{n}{5}}=\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{n}{10}}\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{n}{5}}=2^{\frac{n}{30}}3^{\frac{n}{10}}$이 자연수가 되기 위해서는 $\dfrac{n}{30}$, $\dfrac{n}{10}$이 모두 자연수이어야 하므로 $n=30k$(k는 자연수)이어야 한다.

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 30이다.

14) ①

[출제의도] 이해능력-지수와 로그

$\log a=x$, $\log b=y$라 하면

$\log_a 10b=\dfrac{\log 10b}{\log a}=\dfrac{1+y}{x}=6$에서

$6x-y=1$ ⋯ ㉠

$\dfrac{7\log b}{2\log\sqrt{a}+\log b}=\dfrac{7y}{x+y}=3$ 에서

$3x-4y=0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\dfrac{4}{21}$, $y=\dfrac{1}{7}$

따라서 $\log ab=\log a+\log b=x+y=\dfrac{1}{3}$

15) ②

[출제의도] 지수법칙 이해하기

이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 실근 α, β에 대하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$이다.

$\alpha^3\beta^3=(\alpha\beta)^3=1$, $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=18$

$\dfrac{1}{\alpha^3-1}+\dfrac{1}{\beta^3-1}=\dfrac{\alpha^3+\beta^3-2}{\alpha^3\beta^3-(\alpha^3+\beta^3)+1}=\dfrac{18-2}{1-18+1}=-1$

$\therefore 2^{\frac{1}{\alpha^3-1}}\times 2^{\frac{1}{\beta^3-1}}=2^{\frac{1}{\alpha^3-1}+\frac{1}{\beta^3-1}}=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$

16) ①

[출제의도] 주어진 로그에 관한 식을 만족시키는 모든 자연수의 값의 합을 구할 수 있는가?

$5\log_n 2$의 값이 자연수가 되려면

$\log_n 2=1$ 또는 $\log_n 2=\dfrac{1}{5}$ 이어야 한다.

$\log_n 2=1$ 에서 $n=2$

$\log_n 2=\dfrac{1}{5}$ 에서 $n=2^5=32$

따라서 구하는 모든 n의 값의 합은

$2+32=34$

17) ⑤

[출제의도] 거듭제곱근의 정의를 이해하고 문제를 해결한다.

$\sqrt[3]{2m}=(2m)^{\frac{1}{3}}$이 자연수이므로 $m=2^2\times k^3$(k는 자연수)꼴이다. 135 이하의 자연수 중 m이 될 수 있는 값은 $2^2\times 1^3$, $2^2\times 2^3$,

$2^2\times 3^3$ 뿐이다.

또, $\sqrt{n^3}=n^{\frac{3}{2}}$ 이 자연수이므로 $n=l^2$ (l은 자연수)꼴이다. 9 이하의 자연수 중 n이 될 수 있는 값은 1^2, 2^2, 3^2 뿐이다.

따라서 $m+n$의 최댓값은 $108+9=117$

18) ①

조건 (가)에서 $(\sqrt[3]{a})^m=a^{\frac{m}{3}}=b$

조건 (나)에서 $(\sqrt{b})^n=b^{\frac{n}{2}}=c$

조건 (다)에서 $c^4=a^{12}$

$c^4=\left(b^{\frac{n}{2}}\right)^4=\left(a^{\frac{m}{3}}\right)^{2n}=a^{\frac{2mn}{3}}=a^{12}$

$\frac{2mn}{3}=12,\ mn=18$

조건을 만족시키는 순서쌍 $(m,\ n)$은

$(2,\ 9),\ (3,\ 6),\ (6,\ 3),\ (9,\ 2)$이므로

모든 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 4이다.

19) ③

$2\le n\le 4$일 때, $n-5<0$이므로

$f(2)=0,\ f(3)=1,\ f(4)=0$

$n=5$일 때, $n-5=0$이므로 $f(5)=1$

$6\le n\le 10$일 때, $n-5>0$이므로

$f(6)=2,\ f(7)=1,\ f(8)=2,\ f(9)=1,\ f(10)=2$

따라서

$$\sum_{n=2}^{10}f(n)=0+1+0+1+2+1+2+1+2=10$$

20) ③

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 로그값을 구할 수 있는가?

두 점 $(2,\log_4 a)$, $(3,\log_2 b)$를 지나는 직선이 원점을 지나므로 원점과 각각 두 점을 잇는 직선의 기울기는 서로 같아야 한다. 즉,

$\frac{\log_4 a}{2}=\frac{\log_2 b}{3}$ 에서 $\frac{1}{4}\log_2 a=\frac{1}{3}\log_2 b$ 이므로

$\therefore\ \log_2 a=\frac{4}{3}\log_2 b$

따라서,

$$\therefore \log_a b=\frac{\log_2 b}{\log_2 a}=\frac{\log_2 b}{\frac{4}{3}\log_2 b}=\frac{3}{4}$$

21) ①

[출제의도] 거듭제곱근의 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 n의 값을 구할 수 있는가?

$-n^2+9n-18=-(n-3)(n-6)$

이므로 $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하기 위해서는

(i) $-n^2+9n-18<0$ 일 때,

즉, $2\le n<3$ 또는 $6<n\le 11$ 이고 n이 홀수이어야 하므로 n은 7, 9, 11 이다.

(ii) $-n^2+9n-18>0$ 일 때,

즉, $3<n<6$ 이고 n이 짝수이어야 하므로 n은 4이다.

(i),(ii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합은

$\therefore\ 4+7+9+11=31$

22) ①

$a>1,\ b>1,\ c>1$이므로

$\log_a b>0,\ \log_b c>0,\ \log_c a>0$

양수 t에 대하여

$\log_a b=\frac{\log_b c}{2}=\frac{\log_c a}{4}=t$ 로 놓으면

$\log_a b=t,\ \log_b c=2t,\ \log_c a=4t$

이때 $\log_a b\times\log_b c\times\log_c a=1$이므로 $t\times 2t\times 4t=1$에서

$t=\frac{1}{2}$

따라서

$\log_a b+\log_b c+\log_c a=t+2t+4t=7t=7\times\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

23) ③

[출제의도] 거듭제곱근의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 값을 구한다.

자연수 n의 값과 상관없이 $n(n-4)$의 세제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이므로 $f(n)=1$

$n(n-4)$의 네제곱근 중 실수인 것의 개수는

(i) $n(n-4)>0$일 때, 2

(ii) $n(n-4)=0$일 때, 1

(iii) $n(n-4)<0$일 때, 0

$f(n)>g(n)$에서 $g(n)=0$이어야 하므로 $n(n-4)<0$

즉, $0<n<4$이므로 자연수 n의 값은 1, 2, 3이다.

따라서 모든 n의 값의 합은 $1+2+3=6$이다.

24) ①

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

36의 양의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 이고,

$f(1),\ f(4),\ f(9),\ f(36)$은 홀수,

$f(2),\ f(3),\ f(6),\ f(12),\ f(18)$은 짝수이다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{9}\left\{(-1)^{f(a_k)}\times\log_{a_k}\right\}$$

$=-\log1+\log2+\log3-\log4+\log6-\log9+\log12+\log18-\log36$

$=\log\frac{2\times3\times6\times12\times18}{1\times4\times9\times36}$

$=\log6$

$=\log2+\log3$

25) ①

삼각형 ABC에서 $\angle\mathrm{A}=90^\circ$ 이므로

$$S(x)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\times2\log_2 x\times\log_4\frac{16}{x}$$

$$=\log_2 x\times\left(2-\frac{1}{2}\log_2 x\right)=-\frac{1}{2}(\log_2 x)^2+2\log_2 x$$

$$=-\frac{1}{2}(\log_2 x-2)^2+2$$

$S(x)$는 $\log_2 x=2$, 즉 $x=4$일 때 최댓값 2를 가진다.

따라서 $a=4,\ M=2$이므로

$a+M=4+2=6$

26) 13

$\log_4 2n^2-\frac{1}{2}\log_2\sqrt{n}=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\log_2 n\le 40$

$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\log_2 n=\log_2\sqrt{2}\,n^{\frac{3}{4}}=m$ (m은 40이하의 자연수)

$\sqrt{2}\,n^{\frac{3}{4}}=2^m$

$n^{\frac{3}{4}}=2^{m-\frac{1}{2}}$

$n=2^{\frac{4}{3}\left(m-\frac{1}{2}\right)}=2^{\frac{4m}{3}-\frac{2}{3}}$

에서 m이 3으로 나누어 2가 남는 자연수이면 n도 자연수가 된다.

40이하의 자연수 중 조건을 만족하는 m은

$2,5,8,\cdots,38$의 13개

27) 6

[출제의도] 로그의 진수에 미지수가 포함된 부등식을 해결한다.

이차방정식 $3x^2-2(\log_2 n)x+\log_2 n=0$ 의 판별식을

D 라 할 때, 모든 실수 x 에 대하여 주어진 이차부등식이 성립하기 위해서는

$\frac{D}{4}=(\log_2 n)^2-3\times\log_2 n<0$,

$(\log_2 n-3)\log_2 n<0$, $0<\log_2 n<3$, $1<n<8$

n 은 자연수이므로 $n=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$

따라서 조건을 만족하는 자연수 n 의 개수는 6

28) ③

[출제의도] 거듭제곱근과 지수법칙 이해하기

$(\sqrt[n]{a})^3=a^{\frac{3}{n}}$

(ⅰ) $a=4$일 때 $4^{\frac{3}{n}}=2^{\frac{6}{n}}$

$n(n\geq 2)$가 6의 양의 약수이어야 하므로

$n=2,\ 3,\ 6$

그러므로 $f(4)=6$

(ⅱ) $a=27$일 때 $27^{\frac{3}{n}}=3^{\frac{9}{n}}$

$n(n\geq 2)$가 9의 양의 약수이어야 하므로

$n=3,\ 9$

그러므로 $f(27)=9$

따라서 $f(4)+f(27)=6+9=15$

29) 4

[출제의도] 거듭제곱근 이해하기

$n=3$ 일 때 $f(3)=1$

$n=4$ 일 때 $2n^2-9n<0$ 이므로 $f(4)=0$

$n=5$ 일 때 $f(5)=1$

$n=6$ 일 때 $2n^2-9n>0$ 이므로 $f(6)=2$

따라서

$f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=1+0+1+2=4$

30) ②

$\sqrt{3}^{f(n)}$의 네 제곱근은 $\pm\sqrt{3}^{\frac{f(n)}{4}}$

$-\sqrt{3}^{\frac{f(n)}{4}}\times\sqrt{3}^{\frac{f(n)}{4}}=-3^{\frac{f(n)}{4}}=-3^2$에서 $f(n)=8$

$-(n-2)^2+k=8$, $(n-2)^2=k-8$

$k=8$일 때, $n=2$

$k=9$일 때, $n=1$ 또는 3

$k=12$일 때, $n=0$ 또는 4, 자연수 n값은 더 이상 2개가 될 수 없음을 알 수 있다.

그러므로 $\therefore\ k=9$

31) ③

[출제의도] 거듭제곱근의 뜻을 이해하고 있는가?

m^{12}의 n제곱근은 x에 대한 방정식

$x^n=m^{12}$ $\cdots\cdots$ ㉠

의 근이다.

이때, m의 값에 따라 ㉠의 방정식이 정수근을 갖도록 하는 2 이상의 자연수 n의 개수를 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) $m=2$일 때, ㉠의 방정식은 $x^n=2^{12}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은 2, 3, 4, 6, 12

$f(2)=5$

(ⅱ) $m=3$일 때, ㉠의 방정식은 $x^n=3^{12}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은 2, 3, 4, 6, 12

$f(3)=5$

(ⅲ) $m=4$일 때, ㉠의 방정식은 $x^n=4^{12}$

즉, $x^n=2^{24}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 이므로

$f(4)=7$

(ⅳ) $m=5$일 때, ㉠의 방정식은 $x^n=5^{12}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은 2, 3, 4, 6, 12

$f(5)=5$

(ⅴ) $m=6$일 때, ㉠의 방정식은 $x^n=6^{12}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은 2, 3, 4, 6, 12

$f(6)=5$

(ⅵ) $m=7$일 때, ㉠의 방정식은 $x^n=7^{12}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은 2, 3, 4, 6, 12

$f(7)=5$

(ⅶ) $m=8$일 때, ㉠의 방정식은 $x^n=8^{12}$

즉, $x^n=2^{36}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 이므로

$f(8)=8$

(ⅷ) $m=9$일 때, ㉠의 방정식은 $x^n=9^{12}$

즉, $x^n=3^{24}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 이므로

$f(9)=7$

따라서,

$\sum_{m=2}^{9}f(m)=f(2)+f(3)+\cdots+f(9)$

$=5+5+7+5+5+5+8+7$

$=5\times5+7\times2+8$

$=47$

32) 70

$y=\log_3\left(\frac{x}{9}-1\right)=\log_3\frac{x-9}{9}=\log_3(x-9)-\log_3 9$

$=\log_3(x-9)-2$

이므로 함수 $y=\log_3\left(\frac{x}{9}-1\right)$의 그래프는

함수 $y=\log_3 x$ 의 그래프를 x축의 방향으로 9만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동시킨 것이다.

따라서 $m=9$, $n=-2$

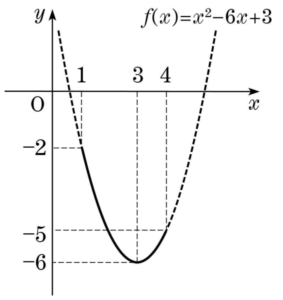
$\therefore\ 10(m+n)=70$

33) ④

[출제의도] 이차함수와 지수함수의 합성함수의 최대·최소를 이해한다.

$f(x)=x^2-6x+3=(x-3)^2-6$ 이므로

$1\leq x\leq 4$ 에서 $-6\leq f(x)\leq -2$ 이다.



ⅰ) $0 < a < 1$ 일 때

$g(x) = a^x$ 는 감소함수이므로

$(g \circ f)(x)$ 는 $f(x) = -6$ 일 때 최댓값을 갖고,

$f(x) = -2$ 일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 $a^{-6} = 27$ 이므로

$a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ m = a^{-2} = 3$

ⅱ) $a > 1$ 일 때

$g(x) = a^x$ 는 증가함수이므로

$(g \circ f)(x)$ 는 $f(x) = -2$ 일 때 최댓값을 갖고,

$f(x) = -6$ 일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 $a^{-2} = 27$ 이므로

$a = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$

그런데 $a > 1$ 을 만족시키지 않으므로 이 경우는 불가능하다.

ⅰ), ⅱ)에서 $(g \circ f)(x)$ 의 최솟값은 3이다.

34) 31

[출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 주어진 문제를 해결한다.

함수 $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-5} - 64$의 그래프는

함수 $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼,

y축의 방향으로 -64만큼 평행이동시킨 것이다.

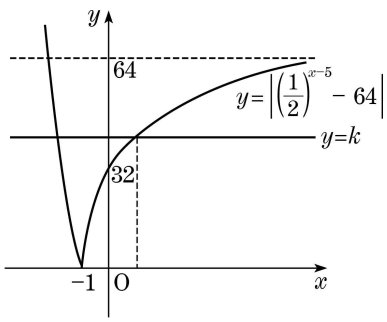
따라서 이 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표는

$f(0) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5} - 64 = 2^5 - 64 = -32$

점근선의 방정식은 $y = -64$이므로

$$y = |f(x)| = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-5} - 64 & (x < -1) \\ -\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-5} + 64 & (x \geq -1) \end{cases}$$

의 그래프는 그림과 같다.



이때, 곡선 $y = |f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y = k$가 제1사분면에서 만나기 위해서는 $32 < k < 64$ 이어야 한다.

따라서 구하는 자연수 k의 개수는

$64 - 32 - 1 = 31$

35) 23

[출제의도] 로그함수의 그래프의 성질 이해하기

함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+a)$는 밑이 $\dfrac{1}{3}$이므로

x가 증가할 때 y가 감소한다.

$\therefore\ x = 4$일 때 최댓값 -3을 갖는다.

$-3 = \log_{\frac{1}{3}}(4+a)$, $4 + a = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3} = 27$

따라서 $a = 23$

36) ④

[출제의도] 지수함수의 그래프의 대칭이동과 평행이동을 활용하여 문제해결하기

함수 $y = 2^{x-2}$의 역함수는 $y = \log_2 x + 2$이고,

함수 $y = \log_2 x + 2$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼,

y축의 방향으로 a만큼 평행이동시키면

함수 $y = \log_2(x+2) + a + 2$의 그래프가 된다.

두 함수 $f(x) = 2^{x-2}$, $g(x) = \log_2(x+2) + a + 2$의 그래프가 직선 $y = 1$과 만나는 점은

각각 $\mathrm{A}(2, 1)$, $\mathrm{B}(2^{-a-1} - 2, 1)$이다.

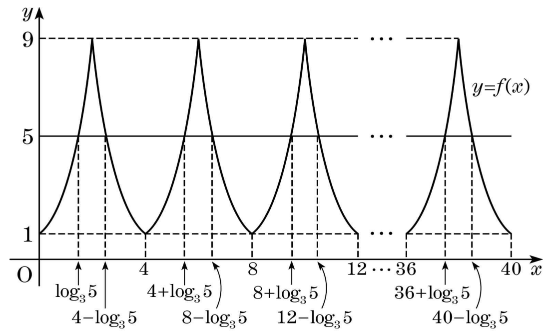
선분 AB의 중점의 좌표가 $(8, 1)$이므로

$\dfrac{2 + 2^{-a-1} - 2}{2} = 8$, $2^{-a-1} = 16 = 2^4$, $-a - 1 = 4$

따라서 $a = -5$

37) 400

[출제의도] 함수의 그래프를 이용하여 주어진 방정식의 해의 합을 구한다.



(ⅰ) $0 \leq x < 2$일 때 $f(x) = 5$에서

$3^x = 5$ $\therefore\ x = \log_3 5$

(ⅱ) $2 \leq x < 4$일 때 $f(x) = 5$에서

$3^{-x+4} = 5$, $-x + 4 = \log_3 5$ $\therefore\ x = 4 - \log_3 5$

함수 $y = f(x)$는 주기가 4인 주기함수이므로 닫힌 구간 $[0, 40]$에서 $f(x) = 5$인 x값들을 차례대로 구하면 다음과 같다.

$\log_3 5$, $4 - \log_3 5$, $4 + \log_3 5$, $8 - \log_3 5$, $8 + \log_3 5$, $12 - \log_3 5$, $12 + \log_3 5$, $\cdots$, $40 - \log_3 5$

따라서 이들을 모두 더하면

$\{\log_3 5 + (4 - \log_3 5)\} + \{(4 + \log_3 5) + (8 - \log_3 5)\}$

$+ \cdots + \{(36 + \log_3 5) + (40 - \log_3 5)\}$

$= 4 + 12 + 20 + \cdots + 76$

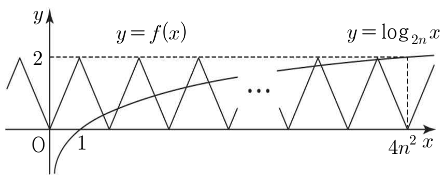
$= \dfrac{10 \times (4 + 76)}{2}$

$= 400$

38) 553

[출제의도] 여러 가지 수열을 활용하여 문제해결하기

그림과 같이 곡선 $y=\log_{2n}x$는 점 $(4n^2, 2)$를 지난다.



그러므로 자연수 k에 대하여 닫힌 구간 $[k, k+1]$에서 곡선 $y=\log_{2n}x$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수는 1이다. (단, $1 \le k \le 4n^2-1$)

$\therefore\ a_n=4n^2-1$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{7} a_n=\sum_{n=1}^{7}(4n^2-1)=4\times\frac{7\times8\times15}{6}-7=553$

39) ①

[출제의도] 지수함수를 활용하여 문제해결하기

y축과 평행한 한 직선을 $x=k$(k는 실수)라 하고, 직선 $x=k$와 x축이 만나는 점을 C라 하자.

삼각형 AOB는 $\overline{OA}=\overline{OB}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{AC}=\overline{BC}$

$2^k=4^{k-2}$

$2^k=2^{2k-4}$

$k=2k-4,\ k=4$

$\overline{OC}=4,\ \overline{AB}=32$

따라서 삼각형 AOB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OC}=64$

40) ②

[출제의도] 닫힌 구간에서 지수함수의 최댓값을 구한다.

$f(x)=\left(\frac{3}{a}\right)^x$ 에서

(ⅰ) $\frac{3}{a}>1$, 즉 $0<a<3$일 때,

함수 $f(x)$는 증가함수이므로 $x=2$에서 최댓값을 갖는다.

$f(2)=\left(\frac{3}{a}\right)^2=4$에서 $a^2=\frac{9}{4}$

$a=\pm\frac{3}{2}$

$0<a<3$이므로 $a=\frac{3}{2}$

(ⅱ) $\frac{3}{a}=1$, 즉 $a=3$일 때,

$f(x)=1$이므로 함수 $f(x)$의 최댓값이 4가 아니다.

(ⅲ) $0<\frac{3}{a}<1$, 즉 $a>3$일 때,

함수 $f(x)$는 감소함수이므로 $x=-1$에서 최댓값을 갖는다.

$f(-1)=\left(\frac{3}{a}\right)^{-1}=\frac{a}{3}=4$ 에서

$a=12$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 모든 양수 a의 값의 곱은

$\frac{3}{2}\times12=18$

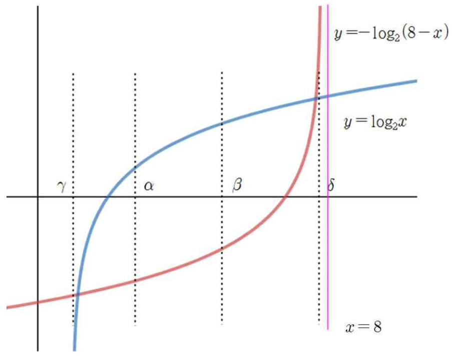
41) ②

$\left|\log_2 x-(-\log_2(8-x)\right|=2$

ⅰ) $\log_2 x > -\log_2(8-x)$ $\left(x>\frac{1}{8-x}\right.$ 일 때$\left.\right)$

$\log_2 k-(-\log_2(8-k))=2$

$k(8-k)=2^2$



$k^2-8k+4=0$의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha\beta=4$

ⅱ) $\log_2 x < -\log_2(8-x)$ $\left(x<\frac{1}{8-x}\right.$ 일 때$\left.\right)$

$-\log_2(8-k)-\log_2 x=2$

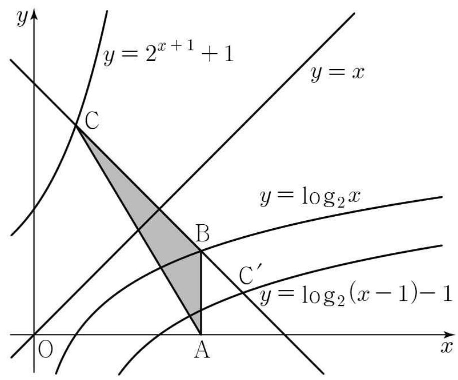
$k(8-k)=2^{-2}$

$k^2-8k+\frac{1}{4}=0$ 의 두 근을 γ, δ 라 하면 $\gamma\delta=\frac{1}{4}$이다.

$\therefore\ \alpha\times\beta\times\gamma\times\delta=1$

42) ①

[출제의도] 지수함수와 로그함수 이해하기



점 A$(4,\ 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점은 B$(4,\ 2)$이다.

점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x+1}+1$과 만나는 점을 C$(a,\ b)$라 하자. 점 C를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점 C′$(b,\ a)$는 곡선 $y=\log_2(x-1)-1$ 위에 있다.

점 C′을 x축 방향으로 -1만큼, y축 방향으로 1만큼 평행이동시킨 점 $(b-1,\ a+1)$은 B이다.

$a+1=2,\ b-1=4$이므로

$a=1,\ b=5$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\times3=3$

43) ④

$f(x)$는 증가함수 이므로 $f(x)$가 제 2사분면을 지나지 않으려면 $f(0)\le0$ 이어야 한다.

$f(0)=-2^4+k\le 0$
$k\le 16$
k의 최댓값은 16

44) ③

[출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 이해하고 있는가?

함수 $y=2^x+2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는 $y=2^{x-m}+2$ ⋯ ㉠
함수 $y=\log_2 8x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는 $y=\log_2 8(x-2)$ ⋯ ㉡
㉡을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 함수는
$x=\log_2 8(y-2)=3+\log_2(y-2)$ 에서
$y=2^{x-3}+2$ ⋯ ㉢
㉠과 ㉢이 일치해야하므로
$m=3$

45) 21

[출제의도] 지수함수의 그래프를 이해하여 미지수의 값을 구한다.

함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-a}$ 은 감소함수이므로
닫힌 구간 $[2, 3]$에서 $x=2$일 때 최댓값을 갖는다.
$f(2)=\left(\frac{1}{3}\right)^{4-a}=27$
$3^{a-4}=3^3$
$a=7$
$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-7}$
함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[2, 3]$에서 $x=3$일 때 최솟값을 가지므로
$m=f(3)\ =\left(\frac{1}{3}\right)^{6-7}\ =3$
따라서 $a\times m=7\times 3=21$

46) ③

[출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프 이해하기

$f^{-1}(x)=\log_3(x-k)+1$이므로
$g(x)=\log_3(x-k^2-k)+1$이다.
곡선 $y=f(x)$의 점근선은 $y=k$이고
곡선 $y=g(x)$의 점근선은 $x=k^2+k$이다.
두 점근선의 교점의 좌표는 $(k^2+k,\ k)$이고
직선 $y=\frac{1}{3}x$ 위에 있으므로 $k=\frac{1}{3}(k^2+k)$
따라서 $k>0$이므로 $k=2$

47) ④

[출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결한다.

두 곡선 $y=\log_{\sqrt{2}}(x-a)$와 $y=(\sqrt{2})^x+a$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 직선 AB는 직선 $y=x$에 수직이므로 두 점 A, B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 점 A의 좌표를 $A(2t,\ t)\ (t>0)$이라 하면 점 B의 좌표는 $B(t,\ 2t)$이므로 $\overline{AB}=\sqrt{2}t$이다.
선분 AB의 중점을 M이라 하면 $M\left(\frac{3}{2}t,\ \frac{3}{2}t\right)$
삼각형 OAB는 $\overline{OA}=\overline{OB}$인 이등변삼각형이므로
삼각형 OAB의 넓이는
$6=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OM}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}t\times\frac{3\sqrt{2}}{2}t=\frac{3}{2}t^2$
이므로 $t=2$
즉 $A(4,\ 2)$가 곡선 $y=\log_{\sqrt{2}}(x-a)$ 위의 점이므로
$2=\log_{\sqrt{2}}(4-a)$, $(\sqrt{2})^2=4-a$
따라서 구하는 상수 a의 값은 2이다.

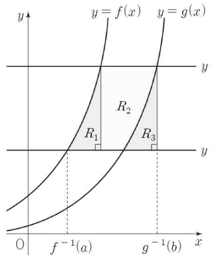
48) ②

[출제의도] 로그방정식의 해를 구한 후 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 할 수 있는가?

$a^x=\sqrt{3}$에서
$x=\log_a\sqrt{3}$이므로
점 A의 좌표는 $(\log_a\sqrt{3},\ \sqrt{3})$이다.
직선 OA의 기울기는 $\frac{\sqrt{3}}{\log_a\sqrt{3}}$
직선 AB의 기울기는 $\frac{\sqrt{3}}{\log_a\sqrt{3}-4}$
직선 OA와 직선 AB가 서로 수직이므로
$\frac{\sqrt{3}}{\log_a\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\log_a\sqrt{3}-4}=-1$
이어야 한다. 즉,
$(\log_a\sqrt{3})^2-4\log_a\sqrt{3}+3=0$에서
$\log_a\sqrt{3}=1$ 또는 $\log_a\sqrt{3}=3$
$a=\sqrt{3}$ 또는 $a^3=\sqrt{3}$
따라서 $a=3^{\frac{1}{2}}$ 또는 $a=3^{\frac{1}{6}}$이므로
모든 a의 값의 곱은
$3^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}=3^{\frac{2}{3}}$

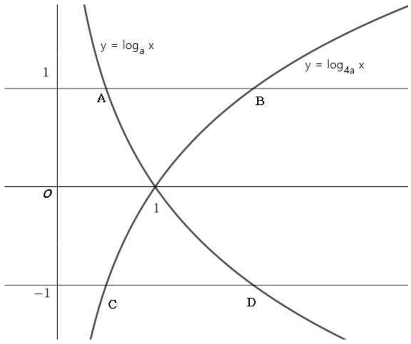
49) ①

두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=2^{x-2}$의 그래프는 다음과 같다.



세 영역 R_1, R_2, R_3의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자.
함수 $g(x)$의 그래프는 함수 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 $S_1=S_3$
조건 (가)에서
$S_1+S_2=S_3+S_2=2\times(b-a)=6$
$b-a=3$ ⋯⋯ ㉠
조건 (나)에서
$f^{-1}(a)=p$, $g^{-1}(b)=q$ (p, q는 실수)라 하면
$2^p=a$, $2^{q-2}=b$
$p=\log_2 a$, $q=\log_2 b+2=\log_2 4b$
$q-p=\log_2 4b-\log_2 a=\log_2\frac{4b}{a}=\log_2 6$
$3a=2b$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=9$
$\therefore\ a+b=15$

50) ③



ㄱ. $A(a,1)$, $B(4a,1)$이므로 선분 AB를 $1:4$로 외분하는 점의 좌표는 $(0,1)$이다. <참>

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 점 A와 C, 점 B와 D는 x축에 대하여 대칭이고 x좌표가 각각 같다. 즉

$C\left(\frac{1}{4a}, -1\right)=(a,-1)$

이다. $4a^2=1$이고 $\frac{1}{4}<a<1$이므로 $a=\frac{1}{2}$ <참>

ㄷ. $A(a,1)$, $B(4a,1)$, $C\left(\frac{1}{4a}, -1\right)$, $D\left(\frac{1}{a}, -1\right)$

$\overline{AB}=3a$, $\overline{CD}=\frac{3}{4a}$

$\overline{AB}<\overline{CD}$이면 $3a<\frac{3}{4a}$에서 $4a^2<1$이고, $\frac{1}{4}<a<1$이므로

$\frac{1}{4}<a<\frac{1}{2}$ <거짓>

51) ①

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 P에서 만나므로

$2^x+1=2^{x+1}$에서 $2^x=1$

$x=0$이므로 교점 P의 좌표는 $P(0,\ 2)$

서로 다른 두 점 A, B의 중점이 P이므로

점 $A(a,\ 2^a+1)$, $B(b,\ 2^{b+1})$에서

$\frac{a+b}{2}=0$, $\frac{2^a+1+2^{b+1}}{2}=2$

$\frac{2^a+1+2^{-a+1}}{2}=2$

$4^a-3\times2^a+2=0$

$(2^a-1)(2^a-2)=0$

$2^a=1$ 또는 $2^a=2$

$a=0$ 또는 $a=1$

$a=0$이면 $b=0$이므로 모순이다.

그러므로 $a=1$, $b=-1$

$A(1,\ 3)$, $B(-1,\ 1)$

따라서 $\overline{AB}=2\sqrt{2}$

52) ②

[출제의도] 로그함수의 그래프가 만나는 점이 조건을 만족하도록 하는 n의 값을 구할 수 있는가?

진수 조건에서 $x>0$

$-\log_n(x+3)+1=\log_n\frac{n}{n+3}$이므로

$\log_n x=\log_n\frac{n}{x+3}$에서

$x=\frac{n}{x+3}$

$x^2+3x-n=0$

$f(x)=x^2+3x-n$이라 하면

$f(1)<0$, $f(2)>0$이어야 한다.

$f(1)=4-n<0$에서 $n>4$

$f(2)=10-n>0$에서 $n<10$

따라서 $4<n<10$이므로

n의 값은 5, 6, 7, 8, 9이고, 그 합은

$5+6+7+8+9=35$

53) ①

[출제의도] 지수에 미지수를 포함한 방정식을 푼다.

정사각형의 한 변의 길이가 1이므로

$6^{-a}-6^{-a-1}=1$, $6^{-a}-\frac{6^{-a}}{6}=1$, $\left(1-\frac{1}{6}\right)\times6^{-a}=1$

따라서 $6^{-a}=\frac{6}{5}$

54) ②

[출제의도] 로그의 정의와 성질을 활용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

두 점 $(a,\ \log_2 a)$, $(b,\ \log_2 b)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}(x-a)+\log_2 a$

그러므로 이 직선의 y절편은

$x=0$을 대입하면 y절편은

$-\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}+\log_2 a$ …… ㉠

두 점 $(a,\ \log_4 a)$, $(b,\ \log_4 b)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{\log_4 b-\log_4 a}{b-a}(x-a)+\log_4 a$

그러므로 이 직선의 y절편은

$-\frac{a(\log_4 b-\log_4 a)}{b-a}+\log_4 a$

$=-\frac{1}{2}\times\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}+\frac{1}{2}\log_2 a$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 같으므로

$-\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}+\log_2 a$

$=-\frac{1}{2}\times\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}+\frac{1}{2}\log_2 a$

이 식을 정리하면

$\frac{1}{2}\times\log_2 a=\frac{1}{2}\times\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}$

$\log_2 a=\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}$

$(b-a)\log_2 a=a\log_2\frac{b}{a}$

$\log_2 a^{b-a}=\log_2\left(\frac{b}{a}\right)^a$

$a^{b-a}=\frac{b^a}{a^a}$

$a^b=b^a$ …… ㉢

한편, $f(x)=a^{bx}+b^{ax}$이고

$f(1)=40$이므로 $a^b+b^a=40$

㉢을 대입하면

$a^b+a^b=40$

$a^b=20$

따라서 $b^a=20$이므로

$f(2)=a^{2b}+b^{2a}$

$=(a^b)^2+(b^a)^2$

$=20^2+20^2$

$=800$

55) ⑤

[출제의도] 로그함수를 활용하여 문제를 해결한다.

두 점 A, B의 좌표를 각각 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 하자.

$-\log_2(-x)=\log_2(x+2a)$에서

$\log_2(x+2a)+\log_2(-x)=0$

$\log_2\{-x(x+2a)\}=0$

$-x(x+2a)=1$

$x^2+2ax+1=0$ …… ㉠

이차방정식 ㉠의 두 실근이 x_1, y_1이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$x_1+x_2=-2a$, $x_1x_2=1$이다.

이때

$y_1+y_2=-\log_2(-x_1)-\log_2(-x_2)$

$=-\log_2 x_1x_2$

$=-\log_2 1=0$

이므로 선분 AB의 중점의 좌표는 $(-a,\ 0)$이다.

선분 AB의 중점이 직선 $4x+3y+5=0$ 위에 있으므로

$-4a+5=0$에서 $a=\dfrac{5}{4}$

$a=\dfrac{5}{4}$를 ㉠에 대입하면

$x^2+\dfrac{5}{2}x+1=0$, $2x^2+5x+2=0$

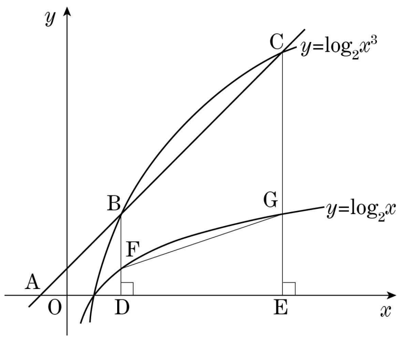
$(x+2)(2x+1)=0$

$x=-2$ 또는 $x=-\dfrac{1}{2}$

따라서 두 교점의 좌표는 $(-2,\ -1)$, $\left(-\dfrac{1}{2},\ 1\right)$이고

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+2^2}=\dfrac{5}{2}$

56) 24



$\log_2 x^3-\log_2 x=3\log_2 x-\log_2 x=2\log_2 x$

이므로 두 점 F, G는 두 선분 BD, CE를 각각 2 : 1로 내분하는 점이다.

$\therefore\ \square\mathrm{BFGC}=\dfrac{2}{3}\times\square\mathrm{BDEC}=\dfrac{2}{3}(8\times\triangle\mathrm{ADB})=\dfrac{16}{3}\times\dfrac{9}{2}=24$

57) ②

지수함수 $y=2^{2x+a}+b$의 그래프에서 점근선의 방정식이 $y=2$이므로 $b=2$이다.

$y=f(x)$의 그래프는 지수함수 $y=2^{2x+a}+2$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 함수 $y=2^{-2x+a}+2$의 그래프이다.

함수 $y=2^{-2x+a}+2$의 그래프가 점 $(-1,10)$을 지나므로 $a=1$이다.

따라서 $a+b=3$

58) ②

$f(x)=-2^x+m$ 의 x 절편 $A(\log_2 m,\ 0)$,

$y=f(x)$ 의 y 절편 $m-1$ 과 $y=2^x$ 의 y 절편 1 의 중점 C의

y 좌표가 $\dfrac{m}{2}$ 이므로 $y=2^x$ 에서 $B\left(\log_2\dfrac{m}{2},\ \dfrac{m}{2}\right)$

$\overline{OA}=2\overline{BC}$ 에서 $m^2=4m$ $(m>2)$

$\therefore\ m=4$

59) ①

[출제의도] 지수함수와 로그함수의 성질을 이용하여 도형과 관련된 문제를 해결한다.

두 사각형이 합동이고 두 점 P, Q가 직선 $y=x$ 위의 점이므로

$\mathrm{P}(k,\ k)$, $\mathrm{Q}(2k,\ 2k)$이다.

따라서 $a^k=k$, $a^{2k}=2k$이므로 $2k=a^{2k}=(a^k)^2=k^2$에서 $k=2$이다.

$a^2=2\ \therefore\ a=\sqrt{2}$

60) ⑤

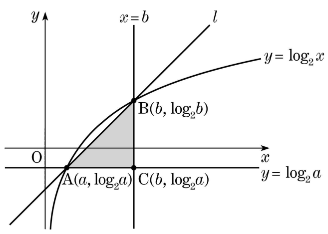
[출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 삼각형의 넓이에 대한 문제를 해결한다.

두 점 $\mathrm{A}(a,\log_2 a)$, $\mathrm{B}(b,\log_2 b)$가 기울기가 1인 직선 위에 있으므로

$\dfrac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}=1$이다.

즉, $\log_2 b-\log_2 a=b-a$ … ㉠

직선 l과 두 직선 $x=b$, $y=\log_2 a$로 둘러싸인 부분은 밑변의 길이가 $b-a$이고, 높이는 $\log_2 b-\log_2 a$인 직각삼각형이다.



$\dfrac{1}{2}(b-a)(\log_2 b-\log_2 a)=2$ … ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\dfrac{1}{2}(b-a)\times(b-a)=2$

$(b-a)^2=4$, 즉, $b-a=2$ ($\because\ a<b$) … ㉢

또, $\log_2 b-\log_2 a=2$에서 $\log_2\dfrac{b}{a}=2$이므로

$b=4a$ … ㉣

㉢, ㉣에서 $a=\dfrac{2}{3}$, $b=\dfrac{8}{3}$

$\therefore\ a+b=\dfrac{10}{3}$

61) ⑤

[출제의도] 지수함수의 성질을 이해하여 문제를 해결한다.

곡선 $y=f(x)$와 $y=h(x)$는 y축 대칭이므로

$h(2)=f(-2)$에서 점 R의 x좌표는 2, 점 P의 x좌표는 -2이다. 점 Q의 x좌표를 α라 하면

$\overline{PQ}:\overline{QR}=2:1$ 에서 $\overline{PQ}=2\overline{QR}$ 이므로

$\alpha+2=2(2-\alpha)$

$\therefore\ \alpha=\frac{2}{3}$

$g(\alpha)=2$ 에서 $b^{\frac{2}{3}}=2$

$\therefore\ b=2^{\frac{3}{2}}$

$g(4)=b^4=\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^4=2^6=64$

[다른 풀이]

세 점 P, Q, R의 y좌표는 모두 2이므로 세 점 P, Q, R의 x좌표는 각각 $-\log_a 2$, $\log_b 2$, $\log_a 2$이다.

$\overline{PQ}:\overline{QR}=2:1$에서 $\overline{PQ}=2\overline{QR}$ 이므로

$\log_b 2-(-\log_a 2)=2(\log_a 2-\log_b 2)$

양변을 밑이 2인 로그로 변환하면

$\frac{1}{\log_2 a}=\frac{3}{\log_2 b}$

$\log_2 b=3\log_2 a=\log_2 a^3$

$\therefore\ b=a^3$

$h(2)=2$ 에서 $a^2=2$

$\therefore\ a=\sqrt{2}$ ($\because\ a>1$)

$\therefore\ b=a^3=(\sqrt{2})^3=2\sqrt{2}$

따라서 $g(x)=(2\sqrt{2})^x$이다.

$\therefore\ g(4)=(2\sqrt{2})^4=\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^4=2^6=64$

62) 70

[출제의도] 로그함수의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

$\overline{PQ}=\log_{\frac{1}{9}}a-\log_3 a=-\frac{3}{2}\log_3 a$

$\overline{SR}=\log_3 b-\log_{\frac{1}{9}}b=\frac{3}{2}\log_3 b$

$\overline{PQ}:\overline{SR}=2:1$ 에서 $\overline{PQ}=2\overline{SR}$ 이므로

$-\frac{3}{2}\log_3 a=2\times\frac{3}{2}\log_3 b$

$\log_3 a+2\log_3 b=0$

$\therefore\ ab^2=1\ \cdots$ ㉠

선분 PR의 중점의 x좌표가 $\frac{9}{8}$ 이므로

$\frac{a+b}{2}=\frac{9}{8}\ \cdots$ ㉡

㉡에서 $a=\frac{9}{4}-b$를 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{9}{4}-b\right)b^2=1$

$4b^3-9b^2+4=0$

$(b-2)(4b^2-b-2)=0$

$b=2$ 또는 $b=\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}$

$b>1$ 이므로 $b=2$

따라서 $a=\frac{1}{4}$, $b=2$이므로

$40(b-a)=70$

63) ①

[출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 수학내적 문제해결하기

함수 $y=3^{x+1}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 함수 $y=3^{x-2}$ 의 그래프이다.

$\overline{AB}=3$ 이고 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 이므로 $\overline{AC}=3$

점 A의 좌표를 $(a,\ 3^{a+1})$이라 하면

점 C의 좌표는 $(a,\ 3^{a-2})$이므로

$\overline{AC}=3^{a+1}-3^{a-2}=3\cdot 3^a-\frac{1}{9}\cdot 3^a=\frac{26}{9}\cdot 3^a=3$

따라서 점 A의 y좌표 $3^{a+1}=\frac{81}{26}$

64) ③

[출제의도] 비례식의 성질과 로그함수의 성질을 활용하여 좌표 구하는 문제를 해결한다.

직선이 y축과 만나는 점을 D라 하면

두 곡선 $y=2^x$과 $y=\log_2 x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 $C(a,\ 0)$이라 하면 점 $D(0,\ a)$이고, $\overline{BC}=\overline{AD}$

조건에 의해 $\overline{AB}:\overline{BC}=3:1$에서

$\triangle OBC=\frac{1}{5}\triangle OCD=\frac{1}{10}a^2=40$ 이므로 $a=20$

점 A는 직선 $y=-x+a$ 위의 점이다.

따라서 $p+q=a=20$

[다른 풀이]

두 곡선 $y=2^x$과 $y=\log_2 x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 A와 점 B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 점 $A(p,\ q)$이므로 점 $B(q,\ p)$이고, 점 $C(a,\ 0)$이다.

조건에 의해 $\overline{AB}:\overline{BC}=3:1$

점 B는 선분 AC를 $3:1$로 내분하는 점이므로

$q=\frac{3a+p}{4}$, $p=\frac{q}{4}$ 에서 $a=5p$, $q=4p$

또, 삼각형 OBC의 넓이가 40이므로

$\frac{1}{2}ap=\frac{5}{2}p^2=40$

$p^2=16$에서 $p=4$이므로 $a=20$

($p<0$인 경우에는 문제의 조건을 만족시킬 수 없다.)

점 A는 직선 $y=-x+a$ 위의 점이다.

따라서 $p+q=a=20$

65) ②

[출제의도] 지수함수의 성질과 비례관계를 활용하여 미지수의 값 구하는 문제를 해결한다.

$a^{f(t)}=t$ 이므로 $f(t)=\log_a t$

$b^{g(t)}=t$ 이므로 $g(t)=\log_b t$

$2f(a)=3g(a)$ 이므로 $2\log_a a=3\log_b a$ 에서

$\log_b a=\frac{2}{3}$ 즉, $\log_a b=\frac{3}{2}$

$f(c)=g(27)=\log_b 27=\frac{\log_a 27}{\log_a b}=\frac{2}{3}\log_a 27=\log_a 27^{\frac{2}{3}}=\log_a 9$

따라서 $c=9$

66) 5

[출제의도] 로그함수를 활용하여 문제해결하기

점 A_n은 곡선 $y=\log_2 x+1$과 직선 $y=n$이 만나는 점이므로

$\log_2 x+1=n$

$x=2^{n-1}\ \therefore\ A_n(2^{n-1},\ n)$

점 B_n은 곡선 $y=\log_2 x$와 직선 $y=n$이 만나는

점이므로 $\log_2 x=n$

$x=2^n$ ∴ $\mathrm{B}_n(2^n, n)$

점 C_n은 곡선 $y=\log_2(x-4^n)$과 직선 $y=n$이 만나는 점이므로

$\log_2(x-4^n)=n$

$x=2^n+4^n$ ∴ $\mathrm{C}_n(2^n+4^n, n)$

$S_n=\frac{1}{2}\times n\times\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}$, $T_n=\frac{1}{2}\times n\times\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}$

∴ $\frac{T_n}{S_n}=\frac{\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}}{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}}=\frac{2^n+4^n-2^n}{2^n-2^{n-1}}=\frac{4^n}{(2-1)\times 2^{n-1}}=2^{n+1}=64$

따라서 $n=5$

67) ②

$f(x)=|9^x-3|$ 라 하고 $g(x)=2^{x+k}$라 하면

$x<0$에서 근을 갖기 위해서 $f(0)<g(0)$이어야 하므로

$2<2^k$이고,

$0<x<2$에서 근을 갖기 위해서 $f(2)>g(2)$이어야 하므로

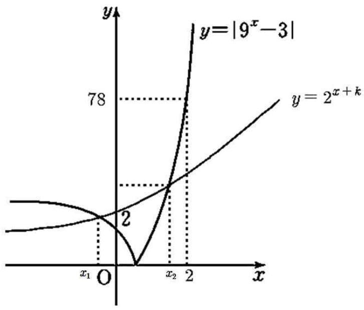
$78>2^{2+k}$이다.

따라서

$\therefore 2<2^k<\frac{78}{4}=\frac{39}{2}=19.5$

만족하는 k는 2, 3, 4이다.

∴ 모든 자연수의 합은 9이다.



68) 88

[출제의도] 로그함수를 활용하여 문제해결하기

직선 $x=2$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점의 y좌표가 p이므로

$p=k^2\log 2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 Q의 y좌표가 p이므로

$k^2\log 2=k\log a$를 정리하면 $a=2^k$

직선 $x=2$와 곡선 $y=h(x)$의 만나는 점의 y좌표가 q이므로

$q=4k^2\log 2$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 R의 y좌표가 q이므로

$4k^2\log 2=k^2\log b$를 정리하면 $b=2^4$

세 점 $\mathrm{P}(2, 0)$, $\mathrm{Q}(2^k, k^2\log 2)$, $\mathrm{R}(2^4, 4k^2\log 2)$가 한 직선 위에 있으므로

$\frac{k^2\log 2}{2^k-2}=\frac{4k^2\log 2}{14}$를 정리하면 $2^k=\frac{11}{2}$

$a=\frac{11}{2}$, $b=16$

따라서 $ab=88$

69) ③

$\mathrm{A}(1, 0)$, $\mathrm{B}(3, 0)$, $\mathrm{P}(k, \log_2 k)$, $\mathrm{Q}(k, \log_2(k-2))$로부터

점 Q가 선분 PR의 중점이므로

$2\times\log_2(k-2)=\log_2 k \Leftrightarrow (k-2)^2=k$

∴ $k=4$ $(\because k>3)$

$\square\mathrm{ABQP}=\triangle\mathrm{ARP}-\triangle\mathrm{BRQ}=\frac{1}{2}\times 3\times 2-\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{5}{2}$

70) ②

[출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 활용하여 x좌표를 추론한다.

$\mathrm{A}(a,\ 2^a)$, $\mathrm{B}(2^a,\ a)$이고 $\mathrm{C}(\log_2 a,\ a)$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=12\sqrt{2}$, $2(2^a-a)^2=288$, $2^a-a=12$ ⋯ ㉠

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{AH}}=2^a-a=12$이므로 $\overline{\mathrm{BC}}=14$이다.

그러므로 $2^a-\log_2 a=14$ ⋯ ㉡

㉡-㉠으로부터 $a-\log_2 a=2$

71) ①

[출제의도] 로그함수의 그래프의 성질을 이해하여 선분의 길이를 구한다.

$y=\log_a x$, $y=\log_b x$와 직선 $y=1$이 만나는 두 점의 x좌표를 각각 구하면

$\log_a x=1$에서 $x=a$, $\log_b x=1$에서 $x=b$

두 점 A_1, B_1의 좌표는 각각 $(a, 1)$, $(b, 1)$

$y=\log_a x$, $y=\log_b x$와 직선 $y=2$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 구하면

$\log_a x=2$에서 $x=a^2$, $\log_b x=2$에서 $x=b^2$

두 점 A_2, B_2의 좌표는 각각 $(a^2, 2)$, $(b^2, 2)$

$\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}=1=b-a$

선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$의 중점의 좌표가 $(2, 1)$이므로

$\frac{a+b}{2}=2$, $a+b=4$

따라서 $\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2}=b^2-a^2=(b-a)(b+a)=1\times 4=4$

72) 8

[출제의도] 지수함수 그래프의 성질을 활용하여 두 점 사이의 거리를 구하는 문제를 해결한다.

곡선 $y=2^x$을 y축에 대하여 대칭이동한 곡선은 $y=2^{-x}$이고 곡선 $y=2^{-x}$은 직선 $y=x+1$과 점 $(0, 1)$에서 만난다.

곡선 $y=2^{-x}$을 x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼,

y축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼 평행이동한 곡선 $y=f(x)$는 곡선

$y=2^{-x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}$과 일치한다. 직선 $y=x+1$은 x축의 방향으로

$\frac{1}{4}$만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼 평행이동하여도 직선 $y=x+1$이 된다.

그러므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x+1$이 만나는 점A는

$y=2^{-x}$과 직선 $y=x+1$이 만나는 점인 $(0, 1)$ 이 x축의 방향으로

$\frac{1}{4}$만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼 평행이동한 점 $\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$이다.

따라서 $k=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{4}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로 $\frac{1}{k^2}=8$

[다른 풀이]

곡선 $y=2^x$을 y축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼,

y축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼 평행이동한 곡선은 $y=f(x)$이므로

$f(x)=2^{-x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}$이다.

그러므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x+1$이 만나는 점의 x좌표는

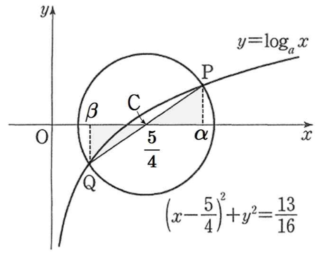
$x+1=2^{-x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}$

$2^{-x+\frac{1}{4}}=x+\frac{3}{4}$에서 $x=\frac{1}{4}$

즉, 점 A 의 좌표는 $\left(\frac{1}{4},\ \frac{5}{4}\right)$이다.

따라서 $k=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{4}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로 $\frac{1}{k^2}=8$

73) ③



원의 중심을 $C\left(\frac{5}{4},\ 0\right)$라 하면 $\overline{CP}=\overline{CQ}=\frac{\sqrt{13}}{4}$ 이다.

P 와 Q 의 x 좌표를 각각 α, β 라 하자.

위의 그림에서 빗금친 두 삼각형이 합동임을 이용하면

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{5}{4}$ $\cdots$ ㉠

$\log_a\alpha+\log_a\beta=0$ 즉, $\alpha\beta=1$ $\cdots$ ㉡

이다.

㉠과 ㉡을 연립하면 $\alpha=2$ 임을 알 수 있다.

한편 원의 반지름 길이에 의하여 $\overline{CP}=\frac{\sqrt{13}}{4}$ 이고 피타고라스 정리를 이용하여 P 의 좌표를 구하면 $P\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$이다.

점 P 는 $y=\log_a x$ 위의 점이므로 대입하면

$\frac{1}{2}=\log_a 2$ 즉, $a=4$ 이다.

74) ⑤

[출제의도] 지수함수와 로그함수

점 A는 곡선 $y=\log_2\frac{x}{3}$가 x축과 만나는 점이므로

$\log_2\frac{x}{3}=0$, $x=3$에서 $A(3,0)$

곡선 $y=\log_2\frac{x}{3}$ 위의 점 B의 좌표를

$B\left(a,\ \log_x\frac{a}{3}\right)$라 하고, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH}=a-3$, $\overline{BH}=\log_2\frac{a}{3}$

$\overline{AC}=\overline{AB}$, $\angle COA=\angle AHB=\frac{\pi}{2}$, $\angle CAO=\angle ABH$ 이므로

삼각형 ACO와 삼각형 BAH는 합동이다.

$\overline{BH}=\overline{OA}$ 이므로 $\log_2\frac{x}{3}=3$, $\frac{a}{3}=8$

따라서 $a=24$

$\overline{AH}=\overline{OC}$ 이므로 $\overline{OC}=24-3=21$

점 D의 y좌표를 b라 하면

선분 AD의 중점과 선분 BC의 중점이 같으므로

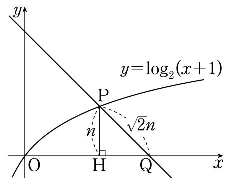
$\frac{0+b}{2}=\frac{3+21}{2}$

즉, $b=24$

따라서 점 D의 y좌표는 24이다.

75) ①

[출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 수열의 합을 구한다.



점 P의 좌표를 $(a,\ b)$ (단, a, b는 양수)라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

이때 두 점 P, Q를 지나는 직선의 기울기가 -1이므로 삼각형 PHQ는 $\overline{PH}=\overline{HQ}$인 직각이등변삼각형이다.

이때 $\overline{PQ}=\sqrt{2}n$이므로

$\overline{PH}=n$, 즉 $b=n$이다.

점 $P(a,\ n)$이 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 점이므로

$n=\log_2(a+1)$

$a=2^n-1$

이때 $\overline{OQ}=\overline{OH}+\overline{HQ}$, $\overline{HQ}=n$이므로

$x_n=a+n$

$=2^n-1+n$

따라서

$\sum_{k=1}^{5}x_k=\sum_{k=1}^{5}(2^k-1+k)$

$=\sum_{k=1}^{5}2^k-\sum_{k=1}^{5}1+\sum_{k=1}^{5}k$

$=\frac{2\times(2^5-1)}{2-1}-5\times1+\frac{5\times6}{2}$

$=62-5+15$

$=72$

[다른 풀이]

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$ (단, a, b는 양수)라 하자.

점 Q의 좌표가 $(x_n,\ 0)$이고 직선 PQ의 기울기가 -1이므로

$\frac{0-b}{x_n-a}=-1$에서 $x_n-a=b$

$x_n=a+b$

$\overline{PQ}=\sqrt{(x_n-a)^2+(0-b)^2}$

$=\sqrt{b^2+b^2}$

$=\sqrt{2}b$

$\overline{PQ}=\sqrt{2}n$에서 $b=n$이다.

점 $P(a,\ n)$이 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 점이므로

$n=\log_2(a+1)$에서

$a=2^n-1$

$x_n=a+b$

$=2^n-1+n$

따라서

$\sum_{k=1}^{5}x_k=\sum_{k=1}^{5}(2^k-1+k)$

$=\sum_{k=1}^{5}2^k-\sum_{k=1}^{5}1+\sum_{k=1}^{5}k$

$= \frac{2\times(2^5-1)}{2-1} - 5\times1 + \frac{5\times6}{2}$
$= 62-5+15$
$= 72$

76) ⑤

[출제의도] 로그함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

곡선 $y=a\log_2(x-a+1)$이 x축과 만나므로
$a\log_2(x-a+1)=0$에서 $x=a$
곡선 $y=2^{x-a}-1$이 x축과 만나므로
$2^{x-a}-1=0$에서 $x=a$
$\therefore$ A$(a, 0)$
점 B의 y좌표를 $k(k>0)$라 하면 삼각형 OAB의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{\text{OA}}\times k = \frac{1}{2}\times a\times k = \frac{7}{2}a$이므로 $k=7$
$2^{x-a}-1=7$이므로 $x=a+3$
$\therefore$ B$(a+3, 7)$
점 B는 곡선 $y=a\log_2(x-a+1)$ 위의 점이므로
$a\log_2(a+3-a+1)=7$에서 $a=\frac{7}{2}$
$\therefore$ A$\left(\frac{7}{2}, 0\right)$, B$\left(\frac{13}{2}, 7\right)$
선분 AB의 중점 M의 좌표는 $\left(5, \frac{7}{2}\right)$이므로
$p=5,\ q=\frac{7}{2}$
따라서 $p+q=\frac{17}{2}$

77) ②

[출제의도] 이해능력-지수함수와 로그함수

두 삼각형 ACE, BDE는 닮음이고
$S_1 : S_2 = 4 : 9$이므로 닮음비는
$\overline{AC} : \overline{BD} = 2 : 3$, $3\overline{AC}=2\overline{BD}$
$\overline{AC}=-\log_5 a$, $\overline{BD}=\log_5 b$이므로
$-3\log_5 a = 2\log_5 b$
$3\log_5 a + 2\log_5 b = \log_5 a^3b^2 = 0$
$a^3b^2=1$에서 $b^2=\frac{1}{a^3}=a^{-3}$이므로
$b=a^{-\frac{3}{2}}$
따라서 $\log_a b = \log_a a^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}$

78) ④

[출제의도] 그래프를 이용하여 지수부등식의 해를 구할 수 있는가?

$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \ge \left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \ge \left(\frac{1}{2}\right)^{3g(x)}$
$f(x)g(x) \le 3g(x)$
$\{f(x)-3\}g(x) \le 0$
(i) $f(x)-3\ge0$, $g(x)\le0$인 경우: $x\le1$
(ii) $f(x)-3\le0$, $g(x)\ge0$인 경우: $3\le x\le5$
따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수는 1, 3, 4, 5 이므로 구하는 합은
$1+3+4+5=13$

79) 54

[출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 주어진 사각형의 넓이를 구한다.

점 A의 x좌표를 a라 하면 점 A$(a, 2)$는 곡선 $y=\log_2 4x$ 위의 점이므로 $2=\log_2 4a$
$a=1$
따라서 점 A의 좌표는 $(1, 2)$
점 B의 x좌표를 b라 하면 점 B$(b, 2)$는 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점이므로
$2=\log_2 b$
$b=4$
따라서 점 B의 좌표는 $(4, 2)$
점 C의 x좌표를 c라 하면 점 C(c, k)는 곡선 $y=\log_2 4x$ 위의 점이므로 $k=\log_2 4c$
$c=2^{k-2}$
따라서 점 C의 좌표는 $(2^{k-2}, k)$
점 D의 x좌표를 d라 하면 점 D(d, k)는 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점이므로 $k=\log_2 d$
$d=2^k$
따라서 점 D의 좌표는 $(2^k, k)$
점 E의 x좌표는 점 B의 x좌표와 같으므로 4이고, 점 E가 선분 CD를 $1:2$로 내분하므로
$4=\frac{1\times2^k+2\times2^{k-2}}{1+2}=\frac{2\times2^{k-1}+2^{k-1}}{3}=\frac{3\times2^{k-1}}{3}=2^{k-1}$
$2^2=2^{k-1}$
$k-1=2$
$k=3$
따라서 C$(2, 3)$, D$(8, 3)$, E$(4, 3)$이므로
$\overline{\text{AB}}=3$, $\overline{\text{CD}}=6$, $\overline{\text{BE}}=1$
사각형 ABDC의 넓이 S는
$S=\frac{1}{2}\times(\overline{\text{AB}}+\overline{\text{CD}})\times\overline{\text{BE}}=\frac{1}{2}\times(3+6)\times1=\frac{9}{2}$
따라서 $12S=54$

80) ②

[출제의도] 지수함수를 활용하여 문제해결하기

두 함수 $f(x)=\frac{2^x}{3}$, $g(x)=2^x-2$의 그래프가 y축과 만나는 점은 각각
A$\left(0, \frac{1}{3}\right)$, B$(0, -1)$
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점은
$\frac{2^x}{3}=2^x-2$, $x=\log_2 3$
$\therefore$ C$(\log_2 3, 1)$
점 C에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{\text{CH}}=\log_2 3$
따라서 삼각형 ABC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{\text{AB}}\times\overline{\text{CH}}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\log_2 3=\frac{2}{3}\log_2 3$

81) 15

[출제의도] 그래프를 이용하여 로그가 포함된 부등식의 해를 구할 수 있는가?

$\log_3 f(x)+\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\le0$에서
$\log_3 f(x)-\log_3(x-1)\le0$
$\log_3 f(x)\le\log_3(x-1)$
따라서 $f(x)\le x-1$, $f(x)>0$, $x-1>0$ ⋯ ㉠이므로

㉠을 만족시키는 자연수 x는 4, 5, 6이고 그 합은
$4+5+6=15$

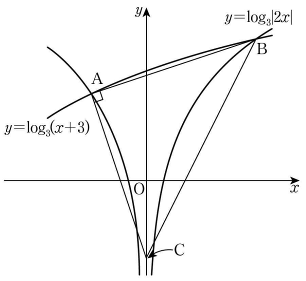
82) ⑤

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 선분의 길이 구하는 문제를 해결한다.

$m=3^x$에서 $x=\log_3 m$이므로 $\mathrm{A}_m(\log_3 m,\ m)$
$m=\log_2 x$에서 $x=2^m$이므로 $\mathrm{B}_m(2^m,\ m)$
그러므로 $\overline{\mathrm{A}_m\mathrm{B}_m}=2^m-\log_3 m$
$\overline{\mathrm{A}_m\mathrm{B}_m}$이 자연수이기 위해서는 m과 2^m이 자연수이므로 $\log_3 m$이 음이 아닌 정수이다.
그러므로 $m=3^k$ (단, k는 음이 아닌 정수이다.)
$m=3^0$일 때, $a_1=2^1-\log_3 1=2$
$m=3^1$일 때, $a_2=2^3-\log_3 3=7$
$m=3^2$일 때, $a_3=2^9-\log_3 9=510$
따라서 $a_3=510$
[보충 설명]
위의 풀이에서 $\overline{\mathrm{A}_m\mathrm{B}_m}$이 자연수이기 위해서는 $m=3^k$꼴임을 알 수 있다. 이제 m의 값이 3^{n-1}에서 3^n으로 증가하면 $2^m-\log_3 m$의 값도 증가함을 보이자.
모든 자연수 n에 대하여
$\left(2^{3^n}-n\right)-\left\{2^{3^{n-1}}-(n-1)\right\}=2^{3^n}-2^{3^{n-1}}-1$
$=2^{3^{n-1}}(2^3-1)-1=7\times 2^{3^{n-1}}-1$
$3^{n-1}\ge 1$이므로 $2^{3^{n-1}}\ge 2$이다.
그러므로 $7\times 2^{3^{n-1}}-1>0$
따라서 $2^{3^{n-1}}-(n-1)<2^{3^n}-n$이 성립한다.

83) ⑤

[출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결한다.



$x<0$일 때의 교점 A의 x좌표는 방정식
$\log_3(-2x)=\log_3(x+3)$의 근이므로
$-2x=x+3,\ 3x=-3,\ x=-1$
따라서 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}\left(-1,\ \log_3 2\right)$
$x>0$일 때의 교점 B의 x좌표는 방정식
$\log_3 2x=\log_3(x+3)$의 근이므로
$2x=x+3,\ x=3$
따라서 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}\left(3,\ \log_3 6\right)$이다.
두 점 $\mathrm{A}\left(-1,\ \log_3 2\right)$, $\mathrm{B}\left(3,\ \log_3 6\right)$에 대하여
직선 AB의 기울기는

$$\frac{\log_3 6-\log_3 2}{3-(-1)}=\frac{\log_3\frac{6}{2}}{4}=\frac{1}{4}$$ 이므로

점 A를 지나고 직선 AB와 수직인 직선의 방정식은
$y-\log_3 2=-4(x+1)$
$y=-4x-4+\log_3 2$ …… ㉠

직선 ㉠이 y축과 만나는 점 C의 좌표는
$\mathrm{C}\left(0,\ -4+\log_3 2\right)$이다. 이때
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{4^2+(\log_3 6-\log_3 2)^2}=\sqrt{17}$
$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(-1)^2+4^2}=\sqrt{17}$
직각삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면
$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{17}\times\sqrt{17}=\frac{17}{2}$

84) 75

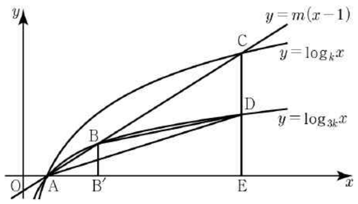
$\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{AB}}$이므로 점 A의 좌표는 $(k,\ k)$이고
점 B의 좌표는 $(2k,\ k)$이다.
점 A는 곡선 $y=-\log_a x$ 위의 점이므로
$k=-\log_a k$ …… ㉠
점 B는 곡선 $y=\log_a x$ 위의 점이므로
$k=\log_a 2k$ …… ㉡
㉠과 ㉡을 연립하면 $\log_a 2k^2=0$에서
$2k^2=1$이므로 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$
곡선 $y=\left|\log_a x\right|$와 직선 $y=2\sqrt{2}$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta\,(\alpha<\beta)$라 하면
$-\log_a\alpha=2\sqrt{2}$에서 $\alpha=a^{-2\sqrt{2}}$
$\log_a\beta=2\sqrt{2}$에서 $\beta=a^{2\sqrt{2}}$
㉡에서 $a^k=2k$이므로 $a=\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}=2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$
$d=\beta-\alpha$
$=a^{2\sqrt{2}}-a^{-2\sqrt{2}}$
$=\left(2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^{2\sqrt{2}}-\left(2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^{-2\sqrt{2}}$
$=2^2-2^{-2}=\frac{15}{4}$
따라서 $20d=20\times\frac{15}{4}=75$

85) ④

$\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(4,\ 2)$, $\mathrm{C}(4,\ \log_a 4)$
삼각형 ABC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times(4-1)\times(2-\log_a 4)=\frac{9}{2}$
$\log_a 4=-1$
따라서 $a=\frac{1}{4}$

86) 12

조건 (가)에 의하여 삼각형 ADB의 넓이를 S라 하면 삼각형 BDC의 넓이는 $3S$이다.
$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=1:3$에서 $\overline{\mathrm{BC}}=3\overline{\mathrm{AB}}$이고 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 B'이라 하면 $\overline{\mathrm{B'E}}=3\overline{\mathrm{AB'}}$이다.
$\overline{\mathrm{AB'}}=a$라 하면 $\overline{\mathrm{B'E}}=3a$이므로
$\mathrm{B}(a+1,\ \log_{3k}(a+1))$, $\mathrm{C}(4a+1,\ \log_k(4a+1))$,
$\mathrm{D}(4a+1,\ \log_{3k}(4a+1))$ 이다.



조건 (나)에 의하여 삼각형 AED의 넓이는 $4S$이고 삼각형 AEC의 넓이는 $8S$이므로 D는 선분 CE의 중점이다.

$\log_k(4a+1)=2\log_{3k}(4a+1)$

$\dfrac{\log_k(4a+1)}{\log_k k}=\dfrac{2\log_k(4a+1)}{\log_k 3k}$

$\log_k 3k=2$에서 $k^2=3k$이므로 $k=3$

세 점 A, B, C가 직선 $y=m(x-1)$ 위에 있으므로

$m=\dfrac{\log_9(a+1)-0}{(a+1)-1}=\dfrac{\log_3(4a+1)-0}{(4a+1)-1}$에서

$2\log_3(a+1)=\log_3(4a+1)$

$(a+1)^2=4a+1$

$a^2-2a=0$

$a>0$이므로 $a=2$

$m=\dfrac{\log_9 3}{2}=\dfrac{1}{4}$

따라서 $\dfrac{k}{m}=12$

87) ④

두 점 A, B가 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$A(p,\ p)$, $B(q,\ q)$ $(p<q)$로 놓으면

$\overline{AB}=6\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{(q-p)^2+(q-p)^2}=6\sqrt{2}$

$q-p=6$ … ㉠

또, 사각형 ACDB의 넓이가 30이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{CD}\times(\overline{AC}+\overline{DB})=30$

$\dfrac{1}{2}\times(q-p)\times(p+q)=30$

$\dfrac{1}{2}\times 6\times(p+q)=30$

$p+q=10$ … ㉡

㉠과 ㉡을 연립하면 $p=2,\ q=8$

두 점 A, B가 곡선 $y=2^{ax+b}$ 위에 있으므로

$2^{2a+b}=2$ … ㉢

$2^{8a+b}=8$ … ㉣

㉣을 ㉢으로 변끼리 나누면

$2^{6a}=4,\ 2^{6a}=2^2,\ 6a=2,\ a=\dfrac{1}{3}$

이 값을 ㉢에 대입하면

$2^{\frac{2}{3}+b}=2,\ \dfrac{2}{3}+b=1,\ b=\dfrac{1}{3}$

따라서 $a+b=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

88) ①

[출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결한다.

점 A의 좌표는 $(t,\ 3^{2-t}+8)$, 점 B의 좌표는 $(t,\ 0)$, 점 C의 좌표는 $(t+1,\ 0)$, 점 D의 좌표는 $(t+1,\ 3^t)$

사각형 ABCD가 직사각형이므로 점 A의 y좌표와 점 D의 y좌표가 같아야 한다.

즉, $3^{2-t}+8=3^t$

$(3^t)^2-8\times 3^t-9=0,\ (3^t+1)(3^t-9)=0$

그런데 $3^t>0$이므로 $3^t=9$에서 $t=2$

그러므로 직사각형 ABCD의 가로의 길이는 1이고 세로의 길이는 $3^2=9$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는 9

89) ⑤

[출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결한다.

점 P의 좌표를 $P(t,\ a^t)$ $(t<0)$이라 하면 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점 Q의 좌표는 $(a^t,\ t)$이다. $\angle PQR=45°$이고 직선 PQ의 기울기가 -1이므로 두 점 Q, R의 x좌표는 같다.

즉 점 R의 좌표는 $(a^t,\ -t)$이다.

직선 PR의 기울기는 $\dfrac{1}{7}$이므로 $\dfrac{a^t+t}{t-a^t}=\dfrac{1}{7}$에서

$a^t=-\dfrac{3}{4}t$ ...... ㉠

$\overline{PR}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$이므로 $\sqrt{(t-a^t)^2+(a^t+t)^2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

$a^{2t}+t^2=\dfrac{25}{4}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $t^2=4$이고 $t<0$이므로 $t=-2$

㉠에 대입하면 $\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{3}{2}$이고 $a>0$이므로 $a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

90) ④

[출제의도] 로그함수의 그래프의 성질을 활용하여 문제해결하기

직선 $y=-2$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점이 A이므로

$-2=\dfrac{1}{2}\log_a(x-1)-2$에서 $x=2$

$A(2,\ -2)$

$B\left(10,\ \dfrac{1}{2}\log_a 9-2\right)$, $C(10,\ -\log_a 8+1)$이고,

점 A와 직선 $x=10$ 사이의 거리는 8이므로

삼각형 ACB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 8\times\left\{\left(\dfrac{1}{2}\log_a 9-2\right)-(-\log_a 8+1)\right\}$

$=4\times(\log_a 24-3)=28$

$\log_a 24=10$

따라서 $a^{10}=24$

91) 192

[출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프의 성질을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

곡선 $y=a^{x-1}$은 곡선 $y=a^x$을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y=\log_a(x-1)$은 곡선 $y=\log_a x$를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$은 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이다.

즉, 두 직선 $y=-x+4$, $y=x-1$의 교점을 M이라 하면 점 M의 좌표는 $M\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$이고, 점 M은 선분 AB의 중점이므로

$\overline{AM}=\sqrt{2}$이다.

점 A의 좌표는 $(k,\ -k+4)$라 하면

$\left(k-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(-k+\dfrac{5}{2}\right)^2=2$ 에서

$k=\frac{3}{2}$

즉, $A\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$이므로

$\frac{5}{2}=a^{\frac{3}{2}-1}$

$a^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$

$a=\frac{25}{4}$

이때 점 C의 좌표는 $\left(0,\ \frac{1}{a}\right)$, 즉 $\left(0,\ \frac{4}{25}\right)$이고,

점 C에서 직선 $y=-x+4$에 내린 수선의 발을 H라 하면

선분 CH의 길이는 점 C와 직선 $y=-x+4$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{\left|0+\frac{4}{25}-4\right|}{\sqrt{2}}=\frac{48\sqrt{2}}{25}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CH}}$$
$$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{48\sqrt{2}}{25}$$
$$=\frac{96}{25}$$

이므로

$$50\times S=50\times\frac{96}{25}=192$$

92) ③

[출제의도] 로그함수를 활용하여 문제를 해결한다.

점 P는 두 곡선 $y=\log_2(-x+k)$, $y=-\log_2 x$의 교점이므로

$\log_2(-x_1+k)=-\log_2 x_1$, $-x_1+k=\frac{1}{x_1}$

즉, $x_1^2-kx_1+1=0$ …… ㉠

점 R는 두 곡선 $y=-\log_2(-x+k)$, $y=\log_2 x$의 교점이므로

$-\log_2(-x_3+k)=\log_2 x_3$, $\frac{1}{-x_3+k}=x_3$

즉, $x_3^2-kx_3+1=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해 x_1, x_3은 이차방정식 $x^2-kx+1=0$의 서로 다른 두 실근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에서 $x_1x_3=1$

그러므로 $x_3-x_1=2\sqrt{3}$ 에서

$(x_1+x_3)^2=(x_3-x_1)^2+4x_1x_3=(2\sqrt{3})^2+4\times1=16$

따라서 $x_1+x_3=4$

93) 18

[출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결한다.

$A(1,\ n)$, $B(1,\ 2)$, $C(2,\ n^2)$, $D(2,\ 4)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=n-2$, $\overline{\mathrm{CD}}=n^2-4$

사다리꼴 ABDC의 넓이는 18 이하이므로

$\frac{1}{2}\times(n-2+n^2-4)\times1=\frac{1}{2}(n^2+n-6)\le18$,

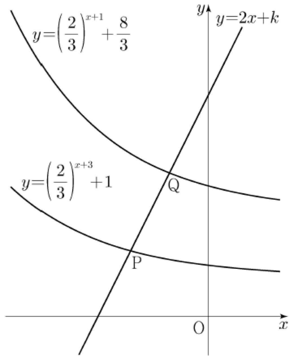
$-7\le n\le6$

그러므로 3 이상의 자연수 n의 값은 3, 4, 5, 6

따라서 조건을 만족시키는 n의 값의 합은 18

94) ④

[출제의도] 지수방정식의 해를 구할 수 있는가?



두 점 P, Q의 x좌표를 각각

p, $q(p<q)$라 하면

두 점 P, Q는 직선 $y=2x+k$ 위의 점이므로

$P(p,\ 2p+k)$, $Q(q,\ 2q+k)$

로 놓을 수 있다.

이때, $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$, 즉 $\overline{\mathrm{PQ}}^2=5$이므로

$(q-p)^2+(2a-2p)^2=5$

$(q-p)^2=1$

$q-p>0$이므로

$q-p=1$

즉, $q=p+1$

한편, 점 P는 함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1$의 그래프 위의 점이므로

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+1=2p+k$ …… ㉠

점 Q는 함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$의 그래프 위의 점이므로

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}+\frac{8}{3}=2p+k+2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}+\frac{8}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+3$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}=1$

$p+2=0$, 즉 $p=-2$

$p=-2$를 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2+3}+1=2\times(-2)+k$

따라서 $k=\frac{17}{3}$

95) ⑤

[출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 이해하여 사각형의 넓이를 구한다.

점 A 의 좌표는 $(k,\ 2^{k-1}+1)$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=8$이므로 점 B 의 좌표는 $(k,\ 2^{k-1}-7)$이다.

직선 BC 의 기울기가 -1이고 $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{2}$이므로 두 점 B, C 의 x좌표의 차와 y좌표의 차는 모두 2 이다.

따라서 점 C 의 좌표는 $(k-2,\ 2^{k-1}-5)$이다.

한편 점 C 는 곡선 $y=2^{x-1}+1$ 위의 점이므로

$2^{k-3}+1=2^{k-1}-5$

$\frac{1}{2}\times2^k-\frac{1}{8}\times2^k=6$, $2^k=16$

$k=4$

즉, $A(4,\ 9)$, $B(4,\ 1)$, $C(2,\ 3)$이다.

점 B 가 곡선 $y=\log_2(x-a)$ 위의 점이므로

$1=\log_2(4-a)$, $4-a=2$, $a=2$

점 D의 x좌표는 $x-2=1$에서 3

사각형 ACDB의 넓이는 두 삼각형 ACB, CDB의 넓이의 합이고

$\overline{BC}\perp\overline{BD}$이므로

$\frac{1}{2}\times 8\times 2+\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=10$

96) ③

[출제의도] 지수함수를 그래프를 활용하여 문제해결하기

점 B의 좌표가 $B(0,\ 2^a)$이므로 $\overline{OB}=2^a$

$\overline{OB}=3\times\overline{OH}$에서 $\overline{OH}=\frac{2^a}{3}$

점 A의 x좌표를 k라 하면 $A\left(k,\ \frac{2^a}{3}\right)$

점 A는 곡선 $y=2^{-x+a}$ 위의 점이므로

$2^{-k+a}=\frac{2^a}{3}$에서 $2^{-k}=\frac{1}{3}$, $2^k=3$

또한 점 A는 곡선 $y=2^x-1$ 위의 점이므로

$\frac{2^a}{3}=2^k-1=3-1=2$에서 $2^a=6$

따라서 $a=\log_2 6$

97) ①

[출제의도] 등비수열의 일반항을 구하고 이를 이용하여 간단한 지수방정식을 풀 수 있는가?

점 A의 x좌표는 64이고 점 Q_1의 x좌표는 x_1이다.

이때 두 점 A와 P_1의 y좌표가 같으므로

$2^{64}=16^{x_1}$에서

$2^{64}=2^{4x_1}$

$4x_1=64$에서

$x_1=16$

같은 방법으로 모든 자연수 n에 대하여 두 점 P_n, Q_n의 x좌표는

x_n으로 서로 같고, 두 점 Q_n, P_{n+1}의 y좌표는 같으므로

$2^{x_n}=16^{x_{n+1}}$

즉,

$2^{x_n}=2^{4x_{n+1}}$

이므로

$x_{n+1}=\frac{1}{4}x_n$

따라서 수열 $\{x_n\}$은 첫째항이 16, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$x_n=16\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=2^4\times 2^{-2n+2}=2^{6-2n}$

한편,

$x_n<\frac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이므로

$x_5\geq\frac{1}{k}$이고 $x_6<\frac{1}{k}$

이어야 한다.

$x_5\geq\frac{1}{k}$에서 $2^{-4}\geq\frac{1}{k}$,

즉 $\frac{1}{16}\geq\frac{1}{k}$에서 $k\geq 16$ …… ㉠

$x_6<\frac{1}{k}$에서 $2^{-6}<\frac{1}{k}$,

즉 $\frac{1}{64}<\frac{1}{k}$에서 $k<64$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $16\leq k<64$이므로 자연수 k의 개수는 $64-16=48$이다.

98) ⑤

[출제의도] 로그함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

두 점 A, B의 좌표를 각각 $A(a,\ \log_2 2a)$, $B(b,\ \log_2 4b)$ $(a<b)$라 하자.

직선 AB의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{\log_2 4b-\log_2 2a}{b-a}=\frac{1}{2}$에서

$\log_2 4b-\log_2 2a=\frac{1}{2}(b-a)$

$\overline{AB}=\sqrt{(b-a)^2+(\log_2 4b-\log_2 2a)^2}=\sqrt{(b-a)^2+\frac{1}{4}(b-a)^2}$

$=\frac{\sqrt{5}}{2}\times(b-a)=2\sqrt{5}$

$b-a=4$ … ㉠

$\log_2 4b-\log_2 2a=\log_2\frac{2b}{a}=2$, $b=2a$ … ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면 $a=4$, $b=8$

A(4, 3), B(8, 5), C(4, 0)

따라서 삼각형 ACB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 3\times 4=6$