

단원 : 수2-함수의 극한과 연속

반: 번호: 이름:

<함수의 극한>

미정계수

1. 최고차항의 계수가 양수인 다항함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{x^4} = 4 \\ \text{(나)} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^2}{x - 1} = 3 \end{aligned}$$

$f(10)$ 의 값을 구하시오.

[3점][2012년 3월 가24]

2. 다음 두 조건을 모두 만족시키는 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(2)$ 의 값을 구하시오.

[3점][2012년 7월 나27]

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 5}{f(x)} = \frac{1}{2} \\ \text{(나)} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 3 \end{aligned}$$

3. 다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^2}{x} = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x - 1)f(x)} = 1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값은?

[3점][2013년 3월 가08]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

4. 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값을 구하시오.

[3점][2013년 4월 나25]

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 0 \\ \text{(나)} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 1 \\ \text{(다)} \quad & \text{방정식 } f(x) = 2x \text{의 한 근이 } 2 \text{이다.} \end{aligned}$$

5. 함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = 5$$

일 때, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\{f(x)\}^2 - 9}$ 의 값은?

[3점][2013년 6월 나09]

- ① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{21}$ ③ $\frac{1}{24}$ ④ $\frac{1}{27}$ ⑤ $\frac{1}{30}$

6. 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오.

[4점][2015년 9월 나28]

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{3x} = 2 \\ \text{(나)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -7 \end{aligned}$$

7. 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 2$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$$

$f(2)$ 의 값은?

[3점][2017년 9월 나12]

- ① 11 ② 14 ③ 17 ④ 20 ⑤ 23

8. 함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow 1} (x+1)f(x) = 1$ 을 만족시킬 때,

$\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 1)f(x) = a$ 이다. $20a$ 의 값을 구하시오.

[3점][2018학년도 수능 나25]

9. 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$ 의 값은?

[4점][2018년 4월 나17]

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{f(x)}{x^2} + 1 \right\} = 0$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3}{x^2} = -1$$

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

10. 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(10)$ 의 값을 구하시오.

[3점][2018년 전북5월 나25]

$$(가) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = 1$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = -1$$

11. 다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2 + 1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{f(x)} = 1$$

을 만족시킬 때, $f(5)$ 의 값을 구하시오.

[3점][2018년 전북10월 나25]

12. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} + \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(2x)}{x-2} = 14$$

를 만족시킬 때, $f(5)$ 의 값은?

[4점][2018년 대구11월 나17]

- ① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

13. 함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 16$ 을 만족시킬 때,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2+1)f(x-2)}{x^2-4} = a \text{ 의 값을 구하시오.}$$

[3점][2018년 대구11월 나25]

14. 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = a, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = -6$$

(나) 방정식 $f(x) = 0$ 의 세 실근의 합은 7이다.

상수 a 의 값을 구하시오.

[3점][2019년 5월 나25]

15. 다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1, \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = 2$$

를 만족시킨다. $f(1) \leq 12$ 일 때, $f(2)$ 의 최댓값은?

[4점][2019년 9월 나16]

- ① 27 ② 30 ③ 33 ④ 36 ⑤ 39

16. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)-x}{x-5} = 8 \text{ 일 때, } f(7) \text{의 값을 구하시오.}$$

[3점][2019년 10월 나24]

17. 다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 3, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2-x-2} = 6$$

을 만족시킬 때, $f(0)$ 의 값은?

[4점][2020년 4월 나14]

- ① -24 ② -21 ③ -18 ④ -15 ⑤ -12

18. 두 함수 $f(x), g(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{2f(x) - 3g(x)\} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4f(x)+g(x)}{3f(x)-g(x)}$ 의 값은?

[4점][2021년 4월 09]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

19. 삼차함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$$

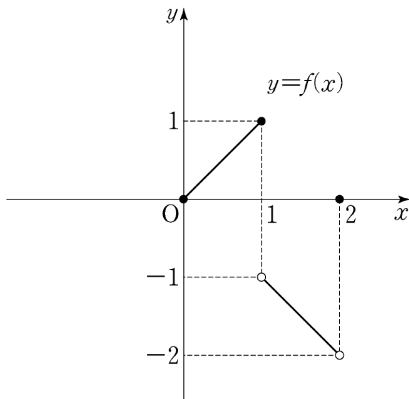
을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값은?

[3점][2021년 9월 08]

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

그래프

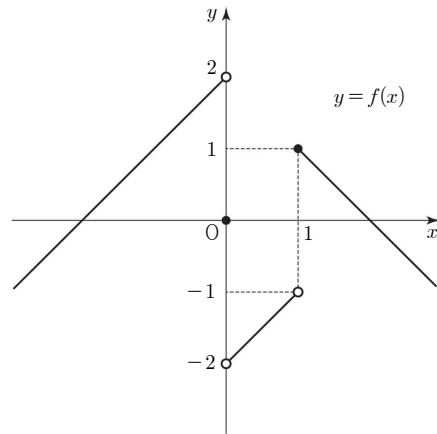
20. 정의역이 $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$ 인 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 구간 $[0, 2]$ 에서 그림과 같고, 정의역에 속하는 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 이다. $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$ 의 값은?



[4점][2013년 9월 나15]

- ① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

21. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.

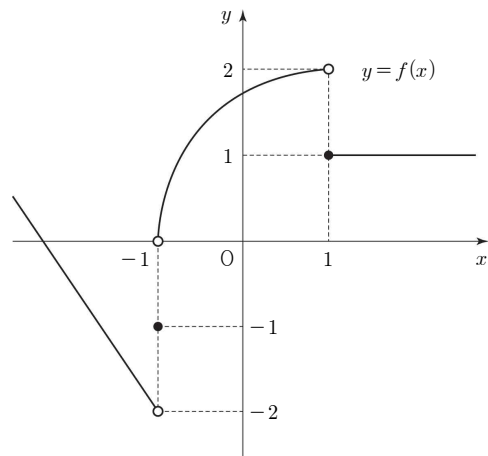


$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)f(1-x)$ 의 값은?

[3점][2014년 4월 나12]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

22. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.

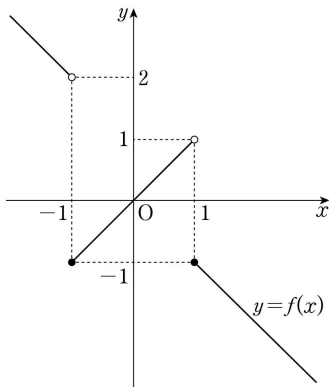


$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = a$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow a+} f(x+3)$ 의 값은?

[3점][2015년 4월 나11]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

23. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.

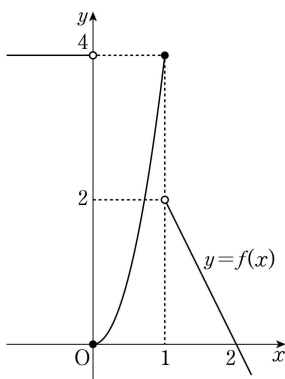


$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x-1) + \lim_{x \rightarrow 1+} f(f(x))$ 의 값은?

[3점][2020년 3월 가08]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

24. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.

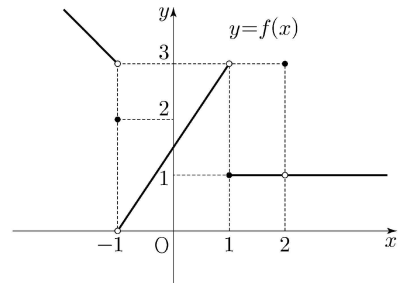


$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)}{x-1}$ 의 값은?

[3점][2020년 10월 나08]

- ① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

25. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값은?

[3점][2022학년도 수능 04]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

수식활용

26. 이차함수 $f(x)$ 와 다항함수 $g(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow \infty} \{2f(x) - 3g(x)\} = 2$ 를

만족시킬 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8f(x) - 3g(x)}{3g(x)}$ 의 값은?

[3점][2012년 4월 나13]

- ① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

27. 다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{x^2} = -11, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = -9$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} x f\left(\frac{1}{x}\right)$ 의 값을 구하시오.

[4점][2014년 6월 나29]

28. 다항함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^2}{x} = 2$ 를 만족시킬 때,

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) \text{의 값은?}$$

[3점][2014년 10월 나10]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

29. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (x-a)}{f(x) + (x-a)} = \frac{3}{5}$$

을 만족시킨다. 방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $|\alpha - \beta|$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.)

[4점][2017학년도 수능 나18]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

30. 삼차함수 $f(x) = x^3 + x^2 + ax + b$ 와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(0)$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

[4점][2017년 대구8월 나19]

$$(가) \quad g(-1) = 0$$

$$(나) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4}{3}$$

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

31. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| \left\{ f\left(\frac{1}{x}\right) - f\left(-\frac{1}{x}\right) \right\} = a, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = 3$$

을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.)

[4점][2017년 10월 나17]

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

32. 함수

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & (|x| < 2) \\ 0 & (|x| = 2) \\ -|x| + 4 & (|x| > 2) \end{cases}$$

에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = 2$ 를 만족시키는 상수 a 의 값은?

[3점][2017년 전북10월 나08]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

33. 다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(1)$ 의 최댓값은?

[4점][2019년 6월 나20]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 4x^3 + 3x^2}{x^{n+1} + 1} = 6, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 4 \text{ 인 자연수 } n \text{이 존재한다.}$$

- ① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

34. 상수항과 계수가 모두 정수인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 최댓값은?

[4점][2020학년도 수능 나14]

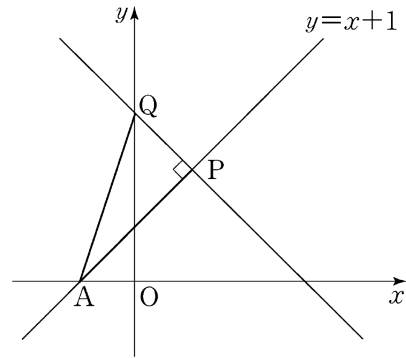
(가) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)g(x)}{x^3} = 2$

(나) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2} = -4$

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

도형활용

35. 그림과 같이 직선 $y = x + 1$ 위에 두 점 $A(-1, 0)$ 과 $P(t, t+1)$ 이 있다. 점 P 를 지나고 직선 $y = x + 1$ 에 수직인 직선이 y 축과 만나는 점을 Q 라 할 때, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2}$ 의 값은?

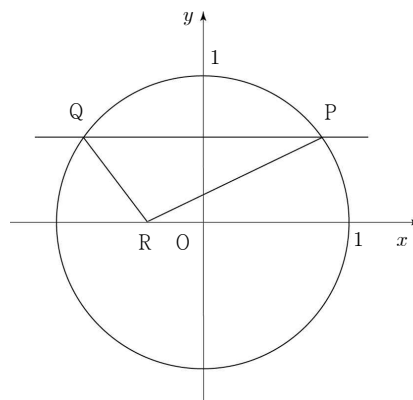


[3점][2012학년도 수능 나12]

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

36. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위를 움직이는 제1사분면 위의 점 $P(\alpha, \beta)$ 를 지나고 x 축과 평행한 직선을 그어 원과 만나는 다른 점을 Q , x 축 위의 한 점을 R 라 하자. 삼각형 PQR 의 넓이를 $S(\alpha)$ 라 할 때, $\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{S(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha}}$ 의 값은?

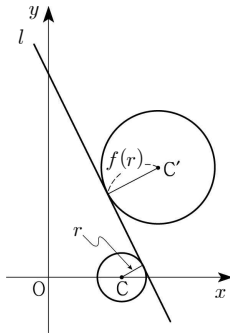
[4점][2012년 7월 나20]



- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

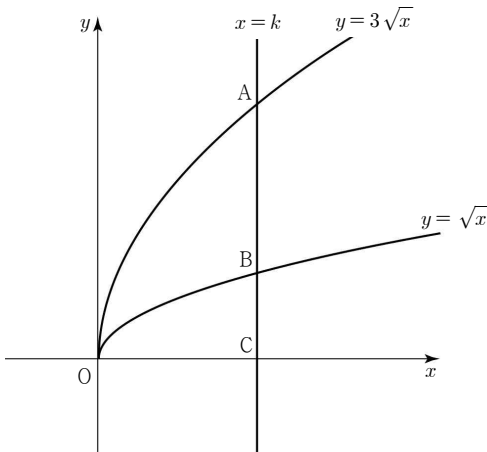
37. 그림과 같이 중심이 $C(2, 0)$ 이고 반지름의 길이가 r ($r < \sqrt{5}$)인 원 C 가 있다. 기울기가 -2 이고 원 C 에 접하는 직선을 l 이라 하자. 직선 l 에 접하고 중심이 $C'(3, 3)$ 인 원 C' 의 반지름을 $f(r)$ 라 할 때, $\lim_{r \rightarrow 0+} f(r)$ 의 값은?

[4점][2012년 10월 나20]



- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

38. 그림과 같이 두 함수 $y = 3\sqrt{x}$, $y = \sqrt{x}$ 의 그래프와 직선 $x = k$ 가 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $x = k$ 가 x 축과 만나는 점을 C라 하자.
- $\lim_{k \rightarrow 0+} \frac{\overline{OA} - \overline{AC}}{\overline{OB} - \overline{BC}}$ 의 값은? (단, $k > 0$ 이고, O는 원점이다.)

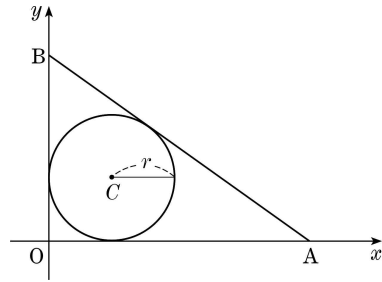


[3점][2013년 4월 나13]

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

39. 그림과 같이 두 점 $A(a, 0)$, $B(0, 3)$ 에 대하여 삼각형 OAB에 내접하는 원 C 가 있다. 원 C 의 반지름의 길이를 r 라 할 때, $\lim_{a \rightarrow 0+} \frac{r}{a}$ 의 값은? (단, O는 원점이다.)

[4점][2013년 10월 나18]



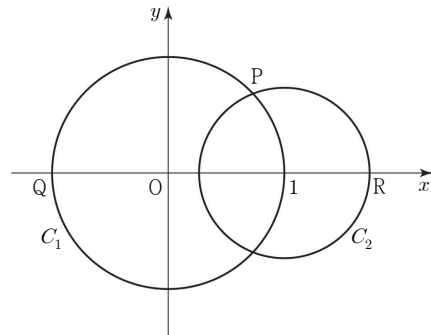
- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

40. 그림과 같이 좌표평면 위의 두 원

$$C_1 : x^2 + y^2 = 1$$

$$C_2 : (x-1)^2 + y^2 = r^2 \quad (0 < r < \sqrt{2})$$

이 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자.



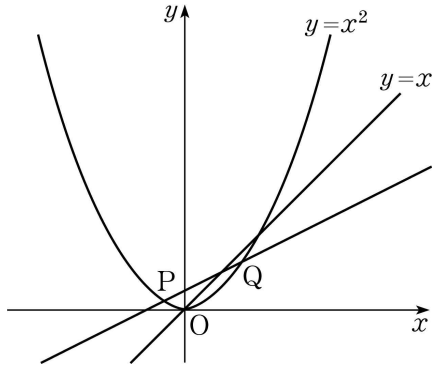
점 P의 x 좌표를 $f(r)$ 라 할 때, $\lim_{r \rightarrow \sqrt{2}-} \frac{f(r)}{4-r^4}$ 의 값은?

[4점][2014년 4월 나14]

- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 2 ⑤ 4

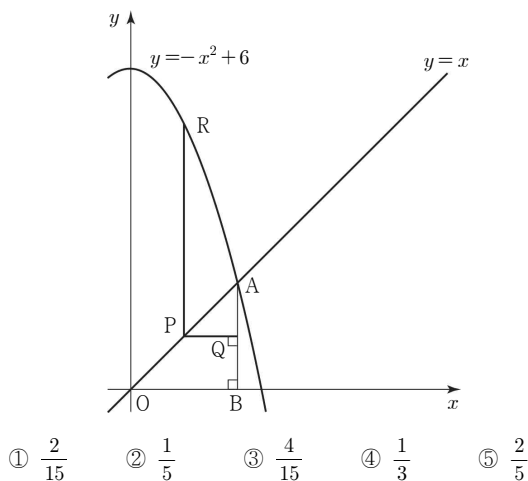
41. 곡선 $y = x^2$ 위에 두 점 $P(a, a^2)$, $Q(a+1, a^2+2a+1)$ 이 있다. 직선 PQ와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표를 $f(a)$ 라 할 때, $100 \lim_{a \rightarrow 0} f(a)$ 의 값을 구하시오.

[4점][2014년 10월 나29]



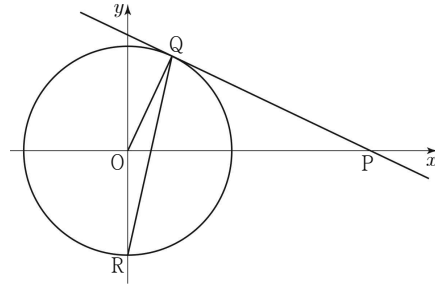
42. 그림과 같이 곡선 $y = -x^2 + 6$ 과 직선 $y = x$ 가 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하고, 점 A에서 x 축에 내린 수선의 발을 B라 하자. 직선 $y = x$ 위의 점 $P(a, a)$ 에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 Q라 하고, 점 P를 지나고 y 축에 평행한 직선이 곡선 $y = -x^2 + 6$ 과 만나는 점을 R라 할 때, $\lim_{a \rightarrow 2-} \frac{PQ}{PR}$ 의 값은?
(단, $0 < a < 2$)

[4점][2015년 4월 나18]



43. 1보다 큰 실수 t 에 대하여 그림과 같이 점 $P\left(t + \frac{1}{t}, 0\right)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = \frac{1}{2t^2}$ 에 접선을 그었을 때, 원과 접선이 제1사분면에서 만나는 점을 Q, 원 위의 점 $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}t}\right)$ 을 R라 하자. 삼각형 ORQ의 넓이를 $S(t)$ 라 할 때, $\lim_{t \rightarrow \infty} \{t^4 \times S(t)\}$ 의 값은?

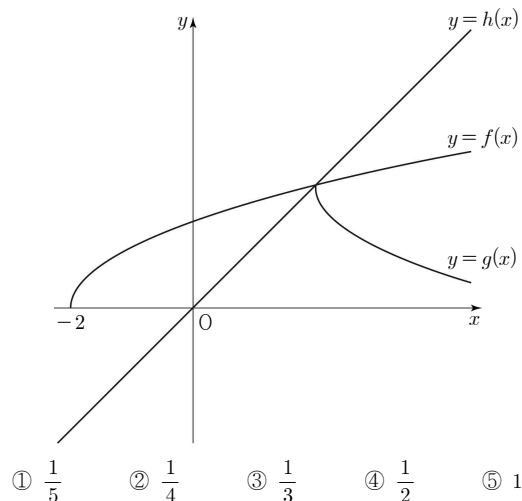
[4점][2015년 4월 가14]



- ① $\frac{\sqrt{2}}{8}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ 1

44. 세 함수 $f(x) = \sqrt{x+2}$, $g(x) = -\sqrt{x-2}+2$, $h(x) = x$ 의 그래프가 그림과 같다. 함수 $y = h(x)$ 의 그래프 위의 점 $P(a, a)$ 를 지나고 x 축에 평행한 직선이 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 만나는 점을 A, 함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 만나는 점을 B라 하자. 점 B를 지나고 y 축에 평행한 직선이 함수 $y = h(x)$ 의 그래프와 만나는 점을 C라 할 때, $\lim_{a \rightarrow 2-} \frac{BC}{AB}$ 의 값은? (단, $0 < a < 2$)

[4점][2016년 4월 나14]

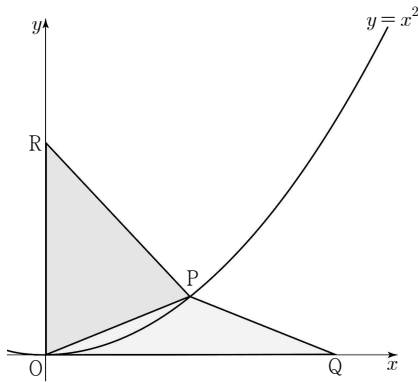


45. 그림과 같이 곡선 $y = x^2$ 위의 점 $P(t, t^2) (t > 0)$ 에 대하여 x 축 위의 점 Q , y 축 위의 점 R 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 삼각형 POQ 는 $\overline{PO} = \overline{PQ}$ 인 이등변삼각형이다.
 (나) 삼각형 PRO 는 $\overline{RO} = \overline{RP}$ 인 이등변삼각형이다.

삼각형 POQ 와 삼각형 PRO 의 넓이를 각각 $S(t)$, $T(t)$ 라 할 때,
 $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{T(t) - S(t)}{t}$ 의 값은? (단, 0은 원점이다.)

[4점][2017년 4월 나21]

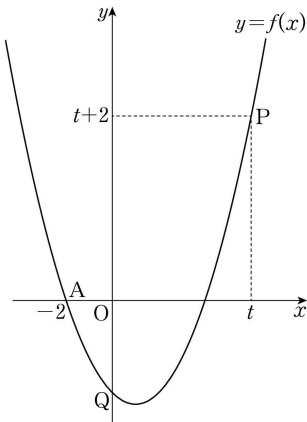


- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

46. 최고차항의 계수가 1이고 두 점 $A(-2, 0)$, $P(t, t+2)$ 를 지나 는 이차함수 $f(x)$ 가 있다. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 y 축과 만나는 점을 Q 라 할 때, $\lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \times \overline{AP} - \overline{AQ})$ 의 값을 구하시오.

(단, $t \neq -2$)

[4점][2020년 3월 나26]

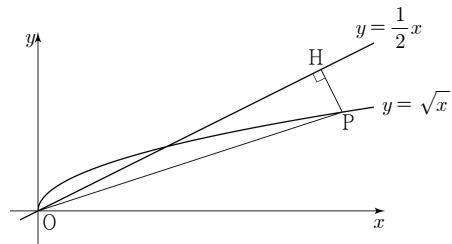


47. 곡선 $y = \sqrt{x}$ 위의 점 $P(t, \sqrt{t}) (t > 4)$ 에서 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 에

내린 수선의 발을 H 라 하자. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{OH}^2}{\overline{OP}^2}$ 의 값은?

(단, 0은 원점이다.)

[3점][2020년 7월 나13]



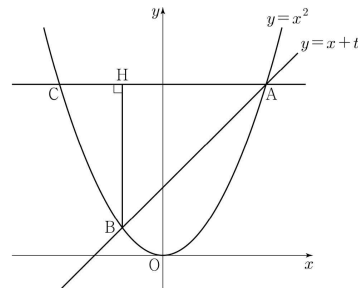
- ① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{11}{15}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{13}{15}$

48. 실수 $t (t > 0)$ 에 대하여 직선 $y = x + t$ 와 곡선 $y = x^2$ 이 만나는 두 점을 A, B 라 하자. 점 A 를 지나고 x 축에 평행한 직선이 곡선 $y = x^2$ 과 만나는 점 중 A 가 아닌 점을 C , 점 B 에서 선분 AC 에 내린 수선의 발을 H 라 하자.

$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\overline{AH} - \overline{CH}}{t}$ 의 값은? (단, 점 A 의 x 좌표는 양수이다.)

[4점][2022년 9월 공통12]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



<함수의 연속>

기본유형

49. 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2)=f(x)$ 를 만족시키고,

$$f(x) = \begin{cases} ax+1 & (-1 \leq x < 0) \\ 3x^2+2ax+b & (0 \leq x < 1) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 두 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값은?

[3점][2012년 5월 나11]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

50. 함수 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-2} & (x \neq 2) \\ 1 & (x = 2) \end{cases}$ 와 이차함수 $g(x)$ 가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $g(0)=8$

(나) 함수 $f(x)g(x)$ 는 모든 실수에서 연속이다.

이때 $g(6)$ 의 값을 구하시오.

[4점][2013년 7월 나28]

51. 함수

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x \leq 0) \\ -\frac{1}{2}x+7 & (x > 0) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)f(x-a)$ 가 $x=a$ 에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a 의 값의 합을 구하시오.

[4점][2014학년도 수능 나28]

52. 두 함수

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & (x \leq a) \\ x^2-x & (x > a) \end{cases}, \quad g(x) = x - (2a+7)$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a 의 값의 곱을 구하시오.

[4점][2016학년도 수능 나27]

53. 두 함수

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+a & (x \leq 2) \\ x^2-4 & (x > 2) \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x-4 & (x \leq 2) \\ \frac{1}{x-2} & (x > 2) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이 되도록 하는 상수 a 의 값은?

[4점][2016년 10월 나14]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

54. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가

$$(x-1)f(x) = x^2 + 3x + a$$

를 만족시킬 때, $a+f(1)$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.)

[4점][2016년 경남10월 나17]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

55. 이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $\frac{x}{f(x)}$ 는 $x=1, x=2$ 에서 불연속이다.

(나) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 4$

$f(4)$ 의 값을 구하시오.

[4점][2018년 6월 나28]

56. 함수

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & (x \leq a) \\ x^2-4 & (x > a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $|f(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a 의 값의 합은?

[4점][2018년 10월 나15]

- ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

57. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq 1) \\ \frac{f(x)}{x-1} & (x > 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $f(5)$ 의 값은?

[4점][2018년 경남10월 나17]

- ① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

58. 두 함수

$$f(x) = \begin{cases} -2x+3 & (x < 0) \\ -2x+2 & (x \geq 0) \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x & (x < a) \\ 2x-1 & (x \geq a) \end{cases}$$

가 있다. 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a 의 값은?

[4점][2019년 6월 나15]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

59. 두 함수

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & (x < 1) \\ \frac{1}{2x+1} & (x \geq 1) \end{cases},$$

$$g(x) = 2x^3 + ax + b$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $b-a$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

[3점][2020년 3월 가12]

- ① 10 ② 9 ③ 8 ④ 7 ⑤ 6

60. 함수

$$f(x) = \begin{cases} -3x+a & (x \leq 1) \\ \frac{x+b}{\sqrt{x+3}-2} & (x > 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.

[4점][2021학년도 수능 나26]

61. 함수

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + b}{x - 3} & (x < 3) \\ \frac{2x + 1}{x - 2} & (x \geq 3) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a - b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

[3점][2021년 3월 06]

- ① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

62. 함수

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + a}{x - 2} & (x < 2) \\ -x^2 + b & (x \geq 2) \end{cases}$$

가 $x = 2$ 에서 연속일 때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

[3점][2021년 4월 08]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

63. 함수

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 6 & (x < a) \\ 2x - a & (x \geq a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$ 이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a 의 값의 합은?

[3점][2021년 6월 08]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

64. 두 양수 a, b 에 대하여 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} x + a & (x < -1) \\ x & (-1 < x < 3) \\ bx - 2 & (x \geq 3) \end{cases}$$

이다. 함수 $|f(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a + b$ 의 값은?

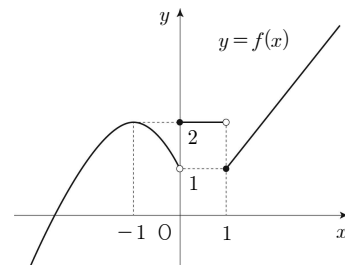
[3점][2022년 6월 공통06]

- ① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

그래프

65. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 일부가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4점][2012년 4월 나09]



<보 기>

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow -1+} f(-x) = f(1)$

ㄷ. 함수 $f(x)f(x+1)$ 은 $x = 0$ 에서 연속이다.

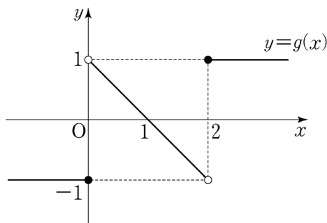
- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

66. 최고차항의 계수가 1 인 이차함수 $f(x)$ 와 함수

$$g(x) = \begin{cases} -1 & (x \leq 0) \\ -x+1 & (0 < x < 2) \\ 1 & (x \geq 2) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이다.
 $f(5)$ 의 값은?

[3점][2012년 6월 가06]



- ① 15 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

67. 실수 t 에 대하여 열린 구간 $(t-1, t+1)$ 에서 함수

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 0) \\ 2 & (x = 0) \end{cases}$$

의 불연속인 점의 개수를 $g(t)$ 라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서
 있는 대로 고른 것은?

[4점][2013년 4월 나21]

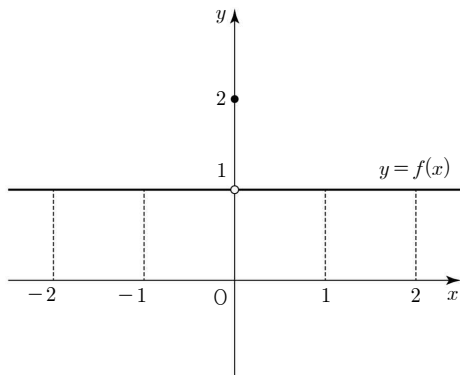
<보 기>

ㄱ. $g(0) = 1$

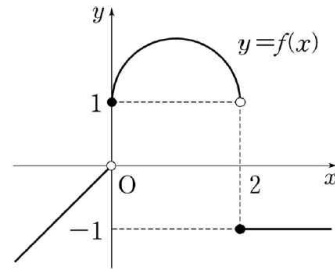
ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 1-} g(x) + \lim_{x \rightarrow -1+} g(x) = 2$

ㄷ. 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



68. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다



보기에서 옳은 것을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1$

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = -1$

ㄷ. 함수 $|f(x)|$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.

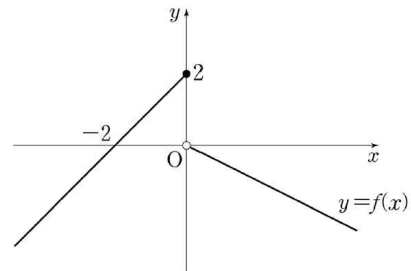
[3점][2013년 6월 나11]

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

69. 함수

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & (x \leq 0) \\ -\frac{1}{2}x & (x > 0) \end{cases}$$

그래프가 그림과 같다.



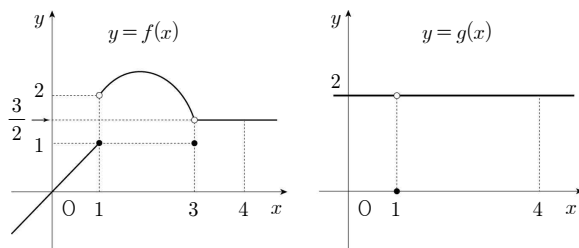
함수 $g(x) = f(x)\{f(x)+k\}$ 가 $x=0$ 에서 연속이 되도록 하는 상
 수 k 의 값은?

[3점][2013년 6월 나13]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

70. 그림은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프이다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[3점][2013년 7월 나08]



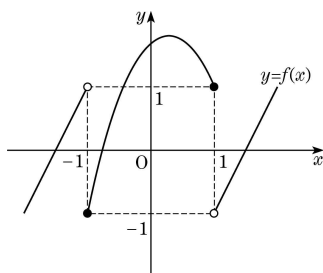
ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) = 2$

ㄴ. 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=3$ 에서 연속이다.

ㄷ. 닫힌 구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $f(x)g(x)$ 의 불연속인 점은 오직 한 개 존재한다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

71. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2013년 10월 나16]

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$

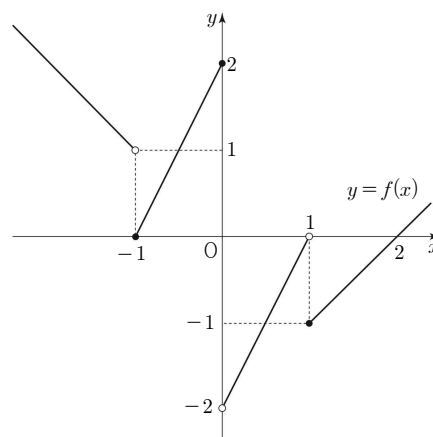
ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 1} f(-x)$ 는 존재한다.

ㄷ. 함수 $f(x)f(-x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

72. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[3점][2015년 4월 가12]



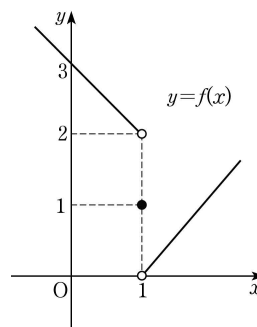
ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \{f(x) + f(-x)\} = 0$

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(f(x)) = 1$

ㄷ. 함수 $\{f(x-1)\}^2$ 은 $x=1$ 에서 연속이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

73. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



일차함수 $g(x)$ 에 대하여 $g(0) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 이고, $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(-1)$ 의 값은?

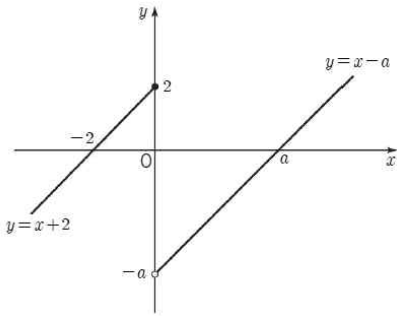
[4점][2014년 10월 나14]

- ① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

74. 양수 a 에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & (x \leq 0) \\ x-a & (x > 0) \end{cases}$$

의 그래프가 그림과 같다.

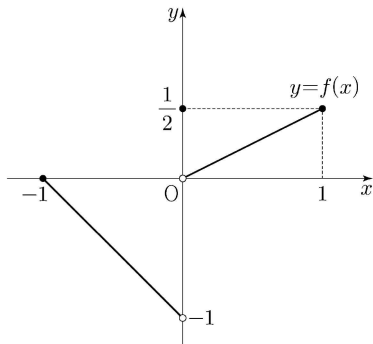


함수 $f(x)\{f(x-b)+2\}$ 가 모든 실수 x 에서 연속이 되도록 하는 두 양수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은?

[4점][2017년 대구8월 나16]

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

75. 닫힌 구간 $[-1, 1]$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



닫힌 구간 $[-1, 1]$ 에서 두 함수 $g(x), h(x)$ 가

$$g(x) = f(x) + |f(x)|, \quad h(x) = f(x) + f(-x)$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2018년 9월 나18]

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

ㄴ. 함수 $|h(x)|$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $g(x)|h(x)|$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

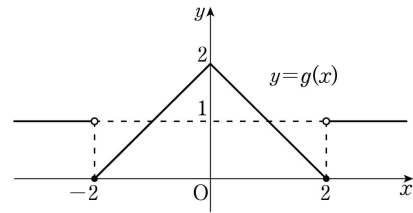
76. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 와 함수

$$g(x) = \begin{cases} -|x|+2 & (|x| \leq 2) \\ 1 & (|x| > 2) \end{cases}$$

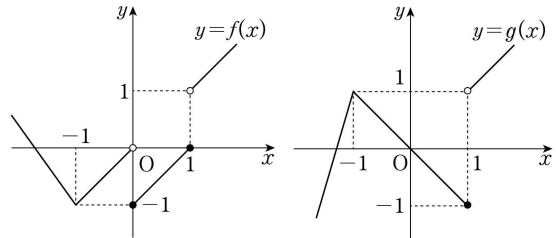
에 대하여 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이다. 함수 $y=f(x-a)g(x)$ 의 그래프가 한 점에서만 불연속이 되도록 하는 모든 실수 a 의 값의 곱은?

[4점][2019년 10월 나14]

- ① -16 ② -12 ③ -8 ④ -4 ⑤ -1



77. 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[3점][2020년 3월 나12]

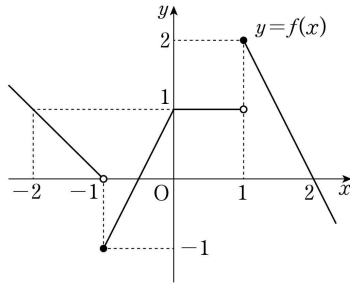
$$\neg. \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) = -1$$

$$\neg. f(1)g(1) = 0$$

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

78. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$ 에 대하여
함수 $h(x)=f(x)g(x)$ 가 구간 $(-2, 2)$ 에서 연속일 때, $g(5)$ 의 값을 구하시오.

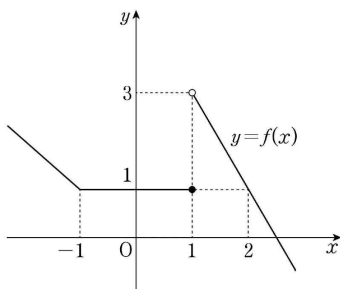
[3점][2020년 10월 나24]

79. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.

함수 $(x^2+ax+b)f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속일 때, $a+b$ 의 값은?
(단, a, b 는 실수이다.)

[3점][2021년 10월 05]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2



활용문제

80. 함수 $f(x)=\begin{cases} x & (|x| \geq 1) \\ -x & (|x| < 1) \end{cases}$ 에 대하여,

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4점][2012년 6월 나19]

<보 기>

- ㄱ. 함수 $f(x)$ 가 불연속인 점은 2개다.
ㄴ. 함수 $(x-1)f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $\{f(x)\}^2$ 은 실수 전체의 집합에서 연속이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

81. 함수 $f(x)$ 가

$$f(x)=\begin{cases} a & (x \leq 1) \\ -x+2 & (x > 1) \end{cases}$$

일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
(단, a 는 상수이다.)

[3점][2012년 9월 나13]

<보 기>

- ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 1$
ㄴ. $a=0$ 이면 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $y=(x-1)f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

82. 다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = k$$

를 만족시키고, 함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & (x \leq 2) \\ 2-x & (x > 2) \end{cases}$$

이다. 함수 $h(x) = f(x)g(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이 되도록 하는 상수 k 의 값은?

[4점][2014년 7월 나18]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

83. 함수

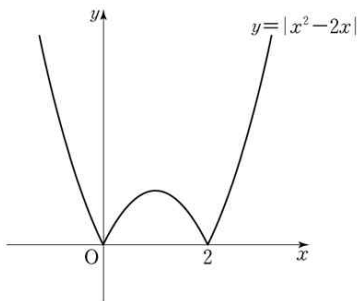
$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & (|x| \leq 2) \\ -2x+3 & (|x| > 2) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(-x)\{f(x)+k\}$ 가 $x=2$ 에서 연속이 되도록 하는 상수 k 의 값을 구하시오.

[4점][2015년 4월 나29]

84. 실수 t 에 대하여 직선 $y=t$ 가 곡선 $y=|x^2-2x|$ 와 만나는 점의 개수를 $f(t)$ 라 하자. 최고항수의 계수가 1인 이차함수 $g(t)$ 에 대하여 함수 $f(t)g(t)$ 가 모든 실수 t 에서 연속일 때, $f(3)+g(3)$ 의 값을 구하시오.

[4점][2015년 6월 나29]



85. -1이 아닌 실수 a 에 대하여 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & (x \leq 0) \\ 2x+a & (x > 0) \end{cases}$$

일 때, 함수 $g(x) = f(x)f(x-1)$ 이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 a 의 값은?

[4점][2015년 7월 나19]

- ① $-\frac{7}{2}$ ② -3 ③ $-\frac{5}{2}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{3}{2}$

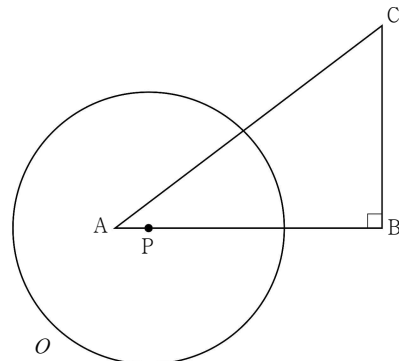
86. 원 $x^2+y^2=t^2$ 과 직선 $y=1$ 이 만나는 점의 개수를 $f(t)$ 라 하자. 함수 $(x+k)f(x)$ 가 구간 $(0, \infty)$ 에서 연속일 때, $f(1)+k$ 의 값은? (단, k 는 상수이다.)

[3점][2015년 10월 나12]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

87. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=3$, $\angle B=90^\circ$ 인 삼각형 ABC의 변 AB 위를 움직이는 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 O가 있다. $\overline{AP}=x(0 < x < 4)$ 라 할 때, 원 O가 삼각형 ABC와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $f(x)$ 라 하자. 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 불연속이 되는 모든 실수 a 의 값의 합은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2017년 4월 나29]



88. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에 대하여

$$x < 0 \text{ 일 때, } f(x) + g(x) = x^2 + 4$$

$$x > 0 \text{ 일 때, } f(x) - g(x) = x^2 + 2x + 8$$

이다. 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이고

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) - \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 6 \text{ 일 때, } f(0) \text{의 값은?}$$

[4점][2017년 9월 나17]

- ① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

89. 실수 m 에 대하여 직선 $y=mx$ 와 함수

$$f(x) = 2x + 3 + |x - 1|$$

의 그래프의 교점의 개수를 $g(m)$ 이라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $h(5)$ 의 값을 구하시오.

[4점][2021년 3월 20]

90. 다항함수 $f(x)$ 는 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2 - 3x - 5} = 2$ 을 만족시키고,

함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3} & (x \neq 3) \\ 1 & (x = 3) \end{cases}$$

이다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $f(1)$ 의 값은?

[4점][2021년 7월 12]

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

91. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\{f(x)\}^3 - \{f(x)\}^2 - x^2 f(x) + x^2 = 0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 1이고 최솟값이 0일 때, $f\left(-\frac{4}{3}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은?

[4점][2022학년도 수능 12]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

92. 두 정수 a, b 에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $0 \leq x < 4$ 에서 $f(x) = ax^2 + bx - 24$ 이다.
 (나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+4) = f(x)$ 이다.

$1 < x < 10$ 일 때, 방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 5이다. $a+b$ 의 값은?

[4점][2022년 10월 공통11]

- ① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

[해설] 수2-함수의 극한과 연속

1) 208

조건 (가)에서 $f(x)$ 는 이차함수임을 알 수 있다. $f(x) = ax^2 + bx + c$ 로 놓으면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(ax^2 + bx + c)^2}{x^4} = a^2 = 4$$

 $\therefore a = 2$ ($\because a > 0$)

조건 (나)에서

$$f(x) - x^2 = (2x^2 + bx + c) - x^2 = x^2 + bx + c = (x-1)(x-c)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-c)}{x-1} = 1 - c = 3$$

 $\therefore c = -2, b = 1$ 따라서 $f(x) = 2x^2 + x - 2$ 이므로 $f(10) = 208$

2) 5

조건(가), (나)에 의하여 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이고, $f(1) = 0$ 이므로

$$f(x) = 2(x-1)(x+a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(x+a)}{x-1} = 2(1+a) = 3$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = (x-1)(2x+1)$$

$$\therefore f(2) = 5$$

3) ⑤

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^2}{x} = 3 \text{ 이므로}$$

 $f(x) - x^2$ 은 일차항의 계수가 3인 일차식이다.

$$f(x) - x^2 = 3x + a \text{에서}$$

$$f(x) = x^2 + 3x + a$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x-1)f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{f(x)} = 1 \text{ 이므로}$$

$$\frac{2}{f(1)} = 1 \text{ 즉, } f(1) = 2 \text{이다.}$$

$$f(1) = 1 + 3 + a = 2 \text{에서 } a = -2$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^2 + 3x - 2 \text{이므로}$$

$$f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 2 = 8$$

4) 14

(가), (나)에서 함수 $f(x)$ 는 $x-1$ 을 인수로 갖는 일차함수 또는 이차함수이므로

$$f(x) = (ax+b)(x-1) \text{이라 하면}$$

$$\text{(나)에서 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(ax+b)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (ax+b) = 1$$

$$a+b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$\text{(다)에서 } f(2) = 4 \text{이므로 } 2a+b=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{에서 } a=3, b=-2$$

$$\therefore f(x) = (3x-2)(x-1)$$

$$\text{따라서 } f(3) = 14$$

5) ⑤

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = 5 \text{ 이므로 } \frac{0}{0} \text{ 꼴의 극한이 되어야 한다.}$$

$$\text{그러므로 } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 \text{이다.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\{f(x)\}^2 - 9} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\{f(x)-3\}\{f(x)+3\}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{1}{f(x)-3} \times \frac{1}{f(x)+3} \right\} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{30} \end{aligned}$$

6) 13

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{3x} = 2 \text{로부터}$$

$$f(x) - x^3 = 6x + a \Leftrightarrow f(x) = x^3 + 6x + a \text{ (a는 상수)라 놓을 수 있다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -7 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 6x + a) = -7 \Leftrightarrow a = -7$$

$$\therefore f(x) = x^3 + 6x - 7$$

$$\therefore f(2) = 13$$

7) ②

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 2, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$$

따라서

$$f(x) = 2x^2 + 3x$$

$$\therefore f(2) = 8 + 6 = 14$$

8) 30

[출제의도] 함수의 극한의 성질을 이용하여 함수의 극한을 구할 수 있는가?

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x+1)f(x) = 1 \text{이므로}$$

$$g(x) = (x+1)f(x) \text{로 놓으면 } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$$

$$\text{따라서 } x \neq -1 \text{일 때, } f(x) = \frac{g(x)}{x+1} \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 1)f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ (2x^2 + 1) \times \frac{g(x)}{x+1} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 1}{x+1} \times \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

$$= \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$$

$$\text{그러므로 } 20a = 20 \times \frac{3}{2} = 30$$

9) ②

[출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$$\text{(가)에서 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = -1 \text{이므로}$$

 $f(x)$ 는 이차항의 계수가 -1 인 이차함수이다.

$$f(x) = -x^2 + ax + b \text{ (a, b는 상수)라 하면}$$

(나)에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-3}{x^2} = -1 \text{이고 } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)-3\} = 0, b = 3$$

그러므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + ax}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-1 + \frac{a}{x} \right) = -1$$

에서 $a = 0$ 이다.

$$\text{따라서 } f(x) = -x^2 + 3 \text{이므로 } f(1) = 2$$

10) 990

[출제의도] 이해능력-함수의 극한과 연속

$$f(1) = 0, f(-1) = 0 \text{이므로}$$

$f(x) = (x-1)(x+1)(ax+b)$ ($a \neq 0$, a, b 는 상수)로 놓을 수 있다.
(가)에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1)(ax+b)}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (ax+b) = a+b = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(나)에서

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2-1)(ax+b)}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} (ax+b) = -a+b = -1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=1, b=0$

따라서 $f(x) = x(x^2-1)$ 이므로 $f(10) = 990$

11) 20

[출제의도] 이해능력-함수의 극한과 연속

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2+1} = 1 \text{ 이므로 } f(x) \text{는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{f(x)} = 1 \text{ 에서 (분자)} \rightarrow 0 \text{ 이고 극한값이 0이 아니므로 (분모)} \rightarrow 0$$

이어야 한다.

따라서 $f(x) = (x-1)(x-k)$ (단, $k \neq 1$)로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x-k)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-k} = \frac{1}{1-k} = 1$$

이어야 하므로 $1-k=0$ 에서 $k=0$

따라서 $f(x) = x(x-1)$ 이므로

$$f(5) = 5 \times 4 = 20$$

12) ⑤

[출제의도] 함수극한의 성질을 이용하여 문제해결하기

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} + \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(2x)}{x-2} = 14 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} \text{와 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(2x)}{x-2} \text{가 각각 수렴해야 하고,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 2} f(2x) = 0$$

이어야 한다. 즉, $f(2) = 0, f(4) = 0$

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x) = (x-2)(x-4)(x+a)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-4)(x+a)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x-4)(x+a) = -2(2+a) = -4-2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x-2)(2x-4)(2x+a)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} 4(x-1)(2x+a) = 4(4+a) = 16+4a$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } (-4-2a) + (16+4a) = 14$$

$$12+2a=14, \quad a=1$$

$$\therefore f(x) = (x-2)(x-4)(x+1) \text{ 이므로 } f(5) = 18$$

13) 20

[출제의도] 함수 극한의 성질 이해하기

$x-2=t$ 라 두면 $x \rightarrow 2$ 일 때, $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{x-2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 16$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2+1)f(x-2)}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2+1)f(x-2)}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+1}{x+2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{x-2}$$

$$= \frac{5}{4} \times 16 = 20$$

$$\therefore a = 20$$

14) 9

[출제의도] 이해능력-함수의 극한과 연속

(가)에서 $f(1)=0, f(2)=0$ 이므로

$x=1, x=2$ 는 방정식 $f(x)=0$ 의 근이다.

따라서 (나)에서 나머지 한 근이 4이므로

$f(x) = k(x-1)(x-2)(x-4)$ (단, k 는 0이 아닌 상수)
로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{k(x-1)(x-2)(x-4)}{x-2} = -2k = -6$$

따라서 $k=3$ 이므로

$$f(x) = 3(x-1)(x-2)(x-4)$$

따라서

$$a = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x-2)(x-4)}{x-1}$$

$$= 3 \times (-1) \times (-3) = 9$$

15) ③

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1 \text{에서 다항함수 } f(x) \text{는 3차식이고 최고차항의 계수가}$$

1임을 알 수 있다.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = 2 \text{에서 다항함수 } f(x) \text{는 } f(-1)=0 \text{이고}$$

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 상수)라 하면 $x+1$ 로 나눈 몫

$x^2 + (a-1)x + (-a+b+1)$ 에 $x=-1$ 을 대입 한 값이 2임을 알 수 있다.

정리하면

$$f(-1)=0 \text{에서 } a-b+c=1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$x^2 + (a-1)x + (-a+b+1)$ 에 $x=-1$ 대입 한 값이 2 이므로

$$2a-b=1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$f(1) \leq 12 \text{이므로 } a+b+c \leq 11 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$ 식에서 $b=2a-1$, $\textcircled{1}$ 식에서 $c=1+b-a$ 를 $\textcircled{3}$ 식에 대입하면

$a+b+1+b-a \leq 11$ 이므로 $b \leq 5$ 그러므로 b 의 최댓값은 5,

$b=2a-1$ 이므로 $2a-1 \leq 5, a \leq 3$ 그러므로 a 의 최댓값은 3

$\textcircled{3}$ 식에서 a, b 의 최댓값이 3, 5이므로 c 의 값은 3이 된다.

그러므로 $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 3$ 이 된다.

$$\text{따라서 } f(2) = 33$$

16) 27

[출제의도] 극한의 성질을 이용하여 합숫값을 구한다.

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)-x}{x-5} = 8 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 5} (x-5) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \{f(x)-x\} = 0$$

$f(x)-x$ 도 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)-x = (x-5)(x+a)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)-x}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x+a) = 5+a = 8 \text{에서 } a=3$$

그러므로 $f(x) = (x-5)(x+3)+x$

$$\text{따라서 } f(7) = 2 \times 10 + 7 = 27$$

17) ①

$f(x)$ 가 다항함수이고 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 3$ 이므로

$$f(x) = 3x^2 + ax + b \quad (a, b \text{는 실수})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2 - x - 2} = 6 \text{이고 } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x - 2) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 0$$

$$f(2) = 12 + 2a + b = 0, \quad b = -2a - 12$$

$$f(x) = 3x^2 + ax + (-2a - 12)$$

$$= (x-2)(3x+6+a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x+6+a)}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{6+6+a}{3} = 6$$

$$a = 6, \quad b = -24$$

$$f(x) = 3x^2 + 6x - 24$$

$$f(0) = -24$$

18) ②

[출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$h(x) = 2f(x) - 3g(x) \text{라 하면 } f(x) = \frac{3g(x) + h(x)}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 1 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4f(x) + g(x)}{3f(x) - g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \left\{ \frac{3g(x) + h(x)}{2} \right\} + g(x)}{3 \left\{ \frac{3g(x) + h(x)}{2} \right\} - g(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14g(x) + 4h(x)}{7g(x) + 3h(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14 + 4 \times \frac{h(x)}{g(x)}}{7 + 3 \times \frac{h(x)}{g(x)}}$$

$$= 2$$

19) ②

[출제의도] 함수의 극한값을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{에서 } x \rightarrow 0 \text{이면 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고}$$

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{따라서 } f(0) = 0$$

$$\text{같은 방법으로 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1 \text{에서}$$

$$f(1) = 0$$

따라서 삼차함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = x(x-1)(ax+b) \quad (a, b \text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x-1)(ax+b) = -b$$

이므로

$$b = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x(ax+b) = a+b$$

이므로

$$a+b=1$$

따라서 $a=2$ 이므로

$$f(x) = x(x-1)(2x-1)$$

$$\text{따라서 } f(2) = 2 \times 1 \times 3 = 6$$

다른 풀이

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{에서 } x \rightarrow 0 \text{이면 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고}$$

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{따라서 } f(0) = 0$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0) = 1$$

$$\text{같은 방법으로 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1 \text{에서}$$

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 1$$

함수 $f(x)$ 는 삼차함수이고

$$f'(0) = f'(1) = 1 \text{이므로}$$

$$f'(x) = ax(x-1) + 1, \quad \text{즉}$$

$$f'(x) = ax^2 - ax + 1$$

이라 놓으면

$$f(x) = \frac{a}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2 + x + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

$$f(0) = 0 \text{에서 } C = 0$$

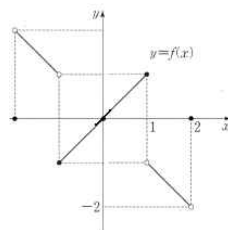
$$f(1) = 0 \text{에서 } \frac{a}{3} - \frac{a}{2} + 1 = 0$$

$$a = 6 \text{이므로 } f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$$

$$\therefore f(2) = 6$$

20) ①

문제의 주어진 그래프와 $f(-x) = -f(x)$ 은 기함수라는 의미이며 원점에 대하여 대칭인 모양의 그래프이므로 아래와 같다.



$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = -2$$

$$-1 + (-2) = -3$$

$$\therefore -3$$

21) ⑤

$$\text{함수 } y=f(x) \text{의 그래프에서 } \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 1$$

$$1-x=t \text{라 하면 } x \rightarrow 1+ \text{일 때, } t \rightarrow 0- \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(1-x) = \lim_{t \rightarrow 0-} f(t) = 2$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)f(1-x) = 1 \times 2 = 2$$

22) ④

[출제의도] 함수의 우극한과 좌극한 이해하기

함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = -2 \text{이므로 } a = -2$$

$$x+3=t \text{라 하면 } x \rightarrow -2+ \text{일 때, } t \rightarrow 1+ \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f(x+3) = \lim_{t \rightarrow 1+} f(t) = 1$$

23) ④

[출제의도] 함수의 극한의 성질을 이해하고 극한값을 구한다.

$x-1=t$ 라 하면 $x \rightarrow 0+$ 일 때, $t \rightarrow -1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x-1) = \lim_{t \rightarrow -1+} f(t) = -1$$

$f(x)=s$ 라 하면 $x \rightarrow 1+$ 일 때, $s \rightarrow -1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(f(x)) = \lim_{s \rightarrow -1-} f(s) = 2$$

따라서

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x-1) + \lim_{x \rightarrow 1+} f(f(x)) = (-1) + 2 = 1$$

24) ⑤

[출제의도] 함수의 그래프에서 좌극한과 우극한을 구한다.

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 4, \lim_{x \rightarrow 0-} (x-1) = -1 \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) - \frac{\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 0-} (x-1)}$$

$$= 2 - \left(\frac{4}{-1} \right) = 6$$

25) ④

[출제의도] 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$$x \rightarrow -1 \text{일 때 } f(x) \rightarrow 3 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 3$$

$$\text{또, } x \rightarrow 2 \text{일 때, } f(x) \rightarrow 1 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

따라서

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 + 1 = 4$$

26) ④

$2f(x) - 3g(x) = h(x)$ 라 하면,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 2 \text{이고 } 3g(x) = 2f(x) - h(x) \text{이다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8f(x) - 3g(x)}{3g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6f(x) + h(x)}{2f(x) - h(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{h(x)}{f(x)}}{2 - \frac{h(x)}{f(x)}} = 3$$

27) 10

$$f(x) \text{가 다항함수이고 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{x^2} = -11 \text{에서 } \frac{\infty}{\infty} \text{ 꼴이어야 하므로}$$

$$f(x) = x^3 - 11x^2 + ax + b \text{이고 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = -9 \text{에서 } \frac{0}{0} \text{ 꼴이어야 하므로}$$

$$f(1) = 0, f'(1) = -9 \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } f(1) = 1 - 11 + a + b = 0 \text{에서}$$

$$a + b = 10 \text{이고 } f'(x) = 3x^2 - 22x + a \text{이므로}$$

$$f'(1) = 3 - 22 + a = -9 \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } a = 10, b = 0 \text{이고 } f(x) = x^3 - 11x^2 + 10x \text{이다.}$$

$$t = \frac{1}{x} \text{이라하면 } x \rightarrow \infty \text{일 때 } t \rightarrow 0 \text{이고 다항함수이므로 모든 실수에서}$$

$$\text{미분가능하기 때문에 } \lim_{x \rightarrow \infty} x f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = f'(0) = 10$$

28) ①

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^2}{x} = 2 \text{이므로 } f(x) = x^2 + 2x + c$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{2}{x} + c$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0+} (1 + 2x + cx^2) = 1$$

[다른 풀이]

$$\frac{1}{x} = t \text{라 하면 } x \rightarrow 0 \text{일 때, } t \rightarrow \infty \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 + 2t + c}{t^2} = 1$$

29) ④

[출제의도] 함수의 극한의 성질을 이용하여 이차방정식의 두 근의 차를 구할 수 있는가?

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0 \text{이면}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (x-a)}{f(x) + (x-a)} = 1 \neq \frac{3}{5} \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = 0$$

따라서, $a = \alpha$ 라 하면

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta) \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (x-a)}{f(x) + (x-a)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{(x - \alpha)(x - \beta) - (x - \alpha)}{(x - \alpha)(x - \beta) + (x - \alpha)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{(x - \beta) - 1}{(x - \beta) + 1} = \frac{\alpha - \beta - 1}{\alpha - \beta + 1} = \frac{3}{5}$$

$$\text{즉, } 5(\alpha - \beta) - 5 = 3(\alpha - \beta) + 3$$

$$2(\alpha - \beta) = 8 \text{이므로}$$

$$|\alpha - \beta| = 4$$

30) ①

[출제의도] 함수의 극한 이해하기

(가)에서 $g(x) = (x+1)(x-\alpha)$ (단, α 는 상수)

$$(나)에서 \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$

$$(-1) + 1 - a + b = 0, a = b$$

$$f(x) = x^3 + x^2 + ax + a = (x+1)(x^2 + a)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 + a)}{(x+1)(x-\alpha)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 + a)}{(x-\alpha)} = 0$$

에서

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + a) = 0, 1 + a = 0, a = -1$$

$$f(x) = (x+1)(x^2 - 1) = (x+1)^2(x-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+1)^2(x-1)}{(x+1)(x-\alpha)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+1)(x-1)}{x-\alpha}$$

$$= \frac{8}{3-\alpha} = \frac{4}{3}$$

$$\text{에서 } \alpha = -3$$

$$\text{그러므로 } g(x) = (x+1)(x+3)$$

$$\therefore g(0) = 3$$

31) ④

[출제의도] 이차함수와 함수의 극한의 성질을 이용하여 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$$f(x) = x^2 + cx + d \text{ (단, } c \text{와 } d \text{는 상수이다.)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| \left\{ f\left(\frac{1}{x}\right) - f\left(-\frac{1}{x}\right) \right\} = a \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left\{ f\left(\frac{1}{x}\right) - f\left(-\frac{1}{x}\right) \right\} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) \left\{ f\left(\frac{1}{x}\right) - f\left(-\frac{1}{x}\right) \right\}$$

$\frac{1}{x} = t$ 로 치환하면

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t) - f(-t)}{t} = 2c, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{f(t) - f(-t)}{-t} = -2c$$

이므로 $c = 0$, $a = 0$ 이고 $f(x) = x^2 + d$

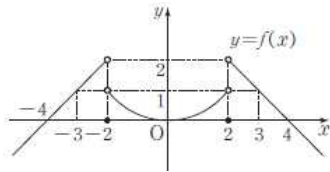
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} + d\right) = d = 3 \text{ 이므로 } f(x) = x^2 + 3$$

따라서 $f(2) = 2^2 + 3 = 7$

32) ①

[출제의도] 이해능력-함수의 극한과 연속

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 2$ 를 만족시키는 상수 a 의 값은 -2이다.

33) ③

[출제의도] 함수의 극한의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 다항함수를 찾을 수 있는가?

(i) $n = 1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 4x^3 + 3x^2}{x^2 + 1} = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 4 \text{ 를 만족시키려면}$$

$f(x) = 4x^3 + 3x^2 + ax$ (a 는 상수) 의 꼴이어야 한다.

이때,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (4x^2 + 3x + a) = a \text{ 이므로 } a = 4$$

즉, $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 4x$ 이므로

$$f(1) = 4 + 3 + 4 = 11$$

(ii) $n = 2$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 4x^3 + 3x^2}{x^3 + 1} = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 4 \text{ 를 만족시키려면}$$

$f(x) = 10x^3 + bx^2$ (b 는 상수) 의 꼴이어야 한다.

이때,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (10x + b) = b \text{ 이므로 } b = 4$$

즉, $f(x) = 10x^3 + 4x^2$ 이므로

$$f(1) = 10 + 4 = 14$$

(iii) $n \geq 3$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 4x^3 + 3x^2}{x^{n+1} + 1} = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 4 \text{ 를 만족시키려면}$$

$f(x) = 6x^{n+1} + cx^n$ (c 는 상수) 의 꼴이어야 한다.

이때,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} (6x + c) = c \text{ 이므로 } c = 4$$

즉, $f(x) = 6x^{n+1} + 4x^n$ 이므로

$$f(1) = 6 + 4 = 10$$

(i)~(iii)에 의하여 구하는 $f(1)$ 의 최댓값은 14

34) ③

[출제의도] 함수의 극한을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

조건 (가), (나)에 의하여

$$f(x)g(x) = x^2(2x + a) \quad (a \text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에 의하여 $a = -4$ 이므로

$$f(x)g(x) = 2x^2(x - 2)$$

이때 $f(2)$ 가 최대가 되는 $f(x)$ 는

$$f(x) = 2x^2$$

이므로 구하는 최댓값은

$$f(2) = 8$$

35) ③

직선 PQ의 방정식은 $y = -(x - t) + t + 1 = -x + 2t + 1$

$$\therefore Q(0, 2t + 1)$$

$$\therefore \overline{AP}^2 = (t + 1)^2 + (t + 1)^2 = 2t^2 + 4t + 2$$

$$\therefore \overline{AQ}^2 = (-1)^2 + (2t + 1)^2 = 4t^2 + 4t + 2$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4t^2 + 4t + 2}{2t^2 + 4t + 2} = 2$$

36) ②

$S(\alpha) = \alpha \sqrt{1 - \alpha^2}$ 이므로

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{\alpha \sqrt{1 - \alpha^2}}{\sqrt{1 - \alpha}} = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{\alpha \sqrt{(1 - \alpha)(1 + \alpha)}}{\sqrt{1 - \alpha}} = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \alpha \sqrt{1 + \alpha} = \sqrt{2}$$

37) ⑤

기울기가 -2인 직선 l 의 y 절편을 b 라 하면

직선 l 의 방정식은 $2x + y - b = 0$

점 $C(2, 0)$ 에서 직선 $l : 2x + y - b = 0$ 에 이르는 거리

$$r = \frac{|2 \cdot 2 - b|}{\sqrt{5}} = \frac{|4 - b|}{\sqrt{5}} \text{ 에서 } b = 4 \pm \sqrt{5}r \quad \text{㉠}$$

점 $C'(3, 3)$ 에서 직선 $l : 2x + y - b = 0$ 에 이르는 거리

$$f(r) = \frac{|9 - b|}{\sqrt{5}} \text{ 에 ㉠을 대입하여 극한을 취하면}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{|5 \pm \sqrt{5}r|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

38) ③

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{\overline{OA} - \overline{AC}}{\overline{OB} - \overline{BC}} = \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{k^2 + 9k} - 3\sqrt{k}}{\sqrt{k^2 + k} - \sqrt{k}}$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{k+9} - 3}{\sqrt{k+1} - 1} = \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{k(\sqrt{k+1} + 1)}{k(\sqrt{k+9} + 3)}$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{k+1} + 1}{\sqrt{k+9} + 3} = \frac{1}{3}$$

39) ⑤

삼각형 OAB의 넓이를 S , 원의 중심을 C 라 하면

$$\overline{AB} = \sqrt{a^2 + 9}, \quad S = \triangle COA + \triangle CBO + \triangle CAB \text{ 이므로}$$

$$S = \frac{3}{2}a = r \times \frac{a+3+\sqrt{a^2+9}}{2}$$

위의 식을 정리하면

$$\frac{r}{a} = \frac{3}{a+3+\sqrt{a^2+9}}$$

$$\therefore \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{r}{a} = \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{3}{a+3+\sqrt{a^2+9}} = \frac{3}{3+\sqrt{9}} = \frac{1}{2}$$

40) ①

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(x-1)^2 + y^2 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } x = \frac{1}{2}(2-r^2) \text{이므로}$$

$$f(r) = \frac{1}{2}(2-r^2)$$

$$\text{따라서 } \lim_{r \rightarrow \sqrt{2}-} \frac{f(r)}{4-r^4} = \lim_{r \rightarrow \sqrt{2}-} \frac{2-r^2}{2(4-r^4)} = \lim_{r \rightarrow \sqrt{2}-} \frac{1}{2(2+r^2)} = \frac{1}{8}$$

41) 50

직선 PQ의 방정식은

$$y = (2a+1)(x-a) + a^2 = (2a+1)x - (a^2+a)$$

직선 PQ와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는

$$x = (2a+1)x - (a^2+a) \text{이고 } a \neq 0 \text{일 때 } x = \frac{a^2+a}{2a}$$

$$f(a) = \frac{a^2+a}{2a} \text{이고 } \lim_{a \rightarrow 0} f(a) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^2+a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } 100 \lim_{a \rightarrow 0} f(a) = 50$$

42) ②

[출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

점 A는 곡선 $y = -x^2 + 6$ 과 직선 $y=x$ 가 만나는 점이므로

$$-x^2 + 6 = x$$

$$x = 2 \quad (\because x > 0)$$

$$\therefore A(2, 2)$$

$$\overline{PQ} = 2 - a$$

$$\overline{PR} = -a^2 + 6 - a$$

$$\therefore \lim_{a \rightarrow 2-} \frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}} = \lim_{a \rightarrow 2-} \frac{2-a}{-a^2-a+6}$$

$$= \lim_{a \rightarrow 2-} \frac{2-a}{(a+3)(2-a)} = \lim_{a \rightarrow 2-} \frac{1}{a+3} = \frac{1}{5}$$

43) ①

[출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

점 Q에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라고 하면직각삼각형의 닮음에서 $\overline{OQ}^2 = \overline{OH} \times \overline{OP}$ 이므로

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}t}\right)^2 = \overline{OH} \times \left(t + \frac{1}{t}\right) \quad \therefore \overline{OH} = \frac{1}{2t(t^2+1)}$$

$$\overline{OR} = \frac{1}{\sqrt{2}t}$$

$$S(t) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}t} \times \frac{1}{2t(t^2+1)} = \frac{\sqrt{2}}{8(t^4+t^2)}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{t^4 \times S(t)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}t^4}{8(t^4+t^2)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{8\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

44) ②

[출제의도] 함수의 극한 문제해결하기

점 $P(a, a)$ 를 지나고 x 축에 평행한 직선 $y=a$ 와 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 점은 각각 $A(a^2-2, a)$, $B(a^2-4a+6, a)$ 이다.

$$\therefore \overline{AB} = (a^2-4a+6) - (a^2-2) = -4a+8$$

점 B를 지나고 y 축에 평행한 직선 $x=a^2-4a+6$ 과 함수 $y=h(x)$ 의그래프가 만나는 점은 $C(a^2-4a+6, a^2-4a+6)$ 이다.

$$\therefore \overline{BC} = (a^2-4a+6) - a = a^2-5a+6$$

따라서

$$\lim_{a \rightarrow 2-} \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \lim_{a \rightarrow 2-} \frac{a^2-5a+6}{-4a+8}$$

$$= \lim_{a \rightarrow 2-} \frac{(a-2)(a-3)}{-4(a-2)} = \lim_{a \rightarrow 2-} \frac{a-3}{-4} = \frac{1}{4}$$

45) ②

[출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

삼각형 POQ가 이등변삼각형이므로 점 Q의 좌표는 $(2t, 0)$

삼각형 POQ의 넓이는

$$S(t) = \frac{1}{2} \times 2t \times t^2 = t^3$$

삼각형 PRO가 이등변삼각형이므로 선분 OP의 수직이등분선이 y 축과 만나는 점이 R이다.

선분 OP의 중점을 M이라 하면 $M\left(\frac{t}{2}, \frac{t^2}{2}\right)$ 이고

직선 MR의 기울기는 $-\frac{1}{t}$ 이므로

직선 MR의 방정식은

$$y - \frac{t^2}{2} = -\frac{1}{t}\left(x - \frac{t}{2}\right)$$

$$y = -\frac{1}{t}x + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\therefore R\left(0, \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

삼각형 PRO의 넓이는

$$T(t) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\right) \times t = \frac{1}{4}(t^3 + t)$$

따라서

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{T(t) - S(t)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{4}(t^3 + t) - t^3}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \left(-\frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}$$

46) 6

[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 함수의 극한값 구하는 문제를 해결한다.

최고차항의 계수가 1이고 두 점 $A(-2, 0)$, $P(t, t+2)$ 를 지나는이차함수 $f(x)$ 는 $f(x) = (x+2)(x-t+1)$ 그러므로 점 Q의 좌표는 $Q(0, 2-2t)$

$$\overline{AP} = \sqrt{\{t - (-2)\}^2 + \{t+2 - 0\}^2} = |t+2| \sqrt{2},$$

$$\overline{AQ} = \sqrt{\{0 - (-2)\}^2 + \{(2-2t) - 0\}^2} = 2\sqrt{t^2 - 2t + 2}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \times \overline{AP} - \overline{AQ}) = \lim_{t \rightarrow \infty} (2|t+2| - 2\sqrt{t^2 - 2t + 2})$$

$$= 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|t+2|^2 - (t^2 - 2t + 2)}{|t+2| + \sqrt{t^2 - 2t + 2}}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{6t+2}{|t+2| + \sqrt{t^2-2t+2}} \\
 &= 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{2}{t}}{\left|1 + \frac{2}{t}\right| + \sqrt{1 - \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}}} \\
 &= 2 \times \frac{6+0}{1+1} \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

47) ④

삼각형 PHO는 직각삼각형이므로 $\overline{OH}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{PH}^2$
 $P(t, \sqrt{t})$ 이므로 $\overline{OP}^2 = t^2 + t$
 선분 PH의 길이는 점 P와 직선 $x-2y=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\begin{aligned}
 \overline{PH} &= \frac{|t-2\sqrt{t}|}{\sqrt{5}} \\
 \overline{OH}^2 &= t^2 + t - \frac{(t-2\sqrt{t})^2}{5} = \frac{4t^2 + 4t\sqrt{t} + t}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{따라서 } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{OH}^2}{\overline{OP}^2} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4t^2 + 4t\sqrt{t} + t}{5(t^2 + t)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{4\sqrt{t}}{t} + \frac{1}{t}}{5 + \frac{5}{t}} = \frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

48) ②

점 $A(\alpha, \alpha^2)$ 이라 할 때,
 $x^2 = x+t, x^2-x-t=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면,
 $\overline{AH} = \alpha - \beta, y = x^2$ 은 y 축 대칭이므로
 $C(-\alpha, \alpha^2)$ 이므로 $\overline{CH} = \beta + \alpha$

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\overline{AH} - \overline{CH}}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\alpha - \beta - (\alpha + \beta)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{-2\beta}{t} \\
 x^2 - x - t = 0 \text{의 작은 실근을 구해보면,} \\
 \beta &= 1 - \sqrt{1+4t} \text{이므로} \\
 \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{-2+2\sqrt{1+4t}}{2t} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{1+4t}-1}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{4t}{t(\sqrt{1+4t}+1)} = 2
 \end{aligned}$$

49) ③

$f(x+2) = f(x)$ 에서 최소의 주기가 2이고, 실수 전체의 집합에서 연속이므로
 $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x), \lim_{x \rightarrow -0-} f(x) = f(0)$ 이다.
 $-a+1 = 3+2a+b, 1=b \quad \therefore a = -1$
 $\therefore a+b=0$

50) 32

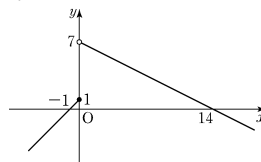
함수 $f(x)g(x)$ 가 모든 실수에서 연속이 되기 위해서는 $x=2$ 에서 연속이 되어야 하므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x) = f(2)g(2)$ 를 만족하여야 한다.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2g(x)}{x-2} = f(2)g(2) \text{이므로 } g(2) = 0 \\
 g(x) &= a(x-2)(x-\alpha) \text{라고 하면,} \\
 \lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} 2a(x-\alpha) = f(2)g(2) = 0 \\
 \therefore \alpha &= 2 \\
 g(x) &= a(x-2)^2 \text{이고 } g(0) = 8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore a &= 2 \\
 g(x) &= 2(x-2)^2 \\
 \therefore g(6) &= 2(6-2)^2 = 32
 \end{aligned}$$

51) 13

$y = f(x)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이고

함수 $f(x-a)$ 는 $x=a$ 에서 불연속이다.

i) $a=0$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)f(x-a) = \lim_{x \rightarrow 0+} (f(x))^2 = 49$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)f(x-a) = \lim_{x \rightarrow 0-} (f(x))^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)f(x-a) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)f(x-a) \text{이므로}$$

$a=0$ 일 때 함수 $f(x)f(x-a)$ 는 $x=a$ 에서 불연속이다.

ii) $a \neq 0$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)f(x-a) = 7f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x)f(x-a) = f(a)$$

$$f(a)f(0) = f(a)$$

따라서, 함수 $f(x)f(x-a)$ 가 $x=a$ 에서 연속이 되기 위해서는

$$7f(a) = f(a), f(a) = 0 \quad \therefore a = -1 \text{ 또는 } 14$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 13이다.

52) 21

[출제의도] 두 함수의 곱이 연속함수가 될 조건을 구할 수 있는가?

(i) 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속일 때

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} (x+3) = a+3$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} (x^2-x) = a^2-a$$

이므로

$$a^2-a = a+3, a^2-2a-3=0$$

$$(a-3)(a+1)=0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 3$$

(ii) 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 불연속일 때

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \{x - (2a+7)\} = a - (2a+7) = -a-7=0$$

$$\therefore a = -7$$

(i), (ii)에 의하여 모든 실수 a 의 값의 곱은

$$-1 \times 3 \times (-7) = 21$$

53) ②

[출제의도] 함수의 연속성의 성질을 이해하여 미정계수를 구한다.

함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이 되기 위해서는

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x) = f(2)g(2) \text{이어야 한다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} \{(-x^2+a) \times (x-4)\}$$

$$= (-4+a) \times (-2) = 8-2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} \left\{ (x^2-4) \times \frac{1}{x-2} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} (x+2) = 4$$

$$f(2)g(2) = (-4+a) \times (-2) = 8-2a$$

이므로 $8-2a=4$, $a=2$

54) ①

[출제의도] 함수의 연속에 대해 이해하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되기 위해서는 $x=1$ 에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이 성립해야 한다.

$$x \neq 1 \text{ 일 때, } f(x) = \frac{x^2 + 3x + a}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{가 존재하고 } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x + a) = 0, \quad 1+3+a=0$$

$$a = -4$$

$$x \neq 1 \text{ 일 때, } f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x-1}$$

따라서

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+4) = 5$$

$$\text{이므로 } a + f(1) = -4 + 5 = 1$$

55) 24

(가)에서 $\frac{x}{f(x)}$ 가 $x=1, x=2$ 에서 불연속이므로

$$f(1)=0, \quad f(2)=0$$

$$f(x) = k(x-1)(x-2) \text{ 라 하면,}$$

(나)에서 $f'(2)=4$ 이므로

$$f'(2) = k \times 1 = 4$$

$$\therefore k = 4$$

$$\therefore f(x) = 4(x-1)(x-2)$$

$$f(4) = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

56) ⑤

[출제의도] 함수가 연속이 되는 조건을 이용하여 문제를 해결한다.

함수 $|f(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=a$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow a+} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow a-} |f(x)| = |f(a)|$$

$$|a^2 - 4| = |a+2| \text{ 에서 } a^2 - 4 = \pm(a+2)$$

(i) $a^2 - 4 = a+2$ 일 때

$$a^2 - a - 6 = 0 \text{ 에서 } a = -2 \text{ 또는 } a = 3$$

(ii) $a^2 - 4 = -(a+2)$ 일 때

$$a^2 + a - 2 = 0 \text{ 에서 } a = -2 \text{ 또는 } a = 1$$

(i), (ii)에서 함수 $|f(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 a 의 값은 $-2, 1, 3$ 으로 그 합은 $(-2)+1+3=2$

57) ①

[출제의도] 함수의 연속을 이해하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

$g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=1$ 에서 연속이 된다. 따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1) = f(1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)}{x-1} \text{의 값이 존재하기 위해서는}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 0 \text{ 이 되어야 하므로 } f(1) = 0$$

따라서 $f(x) = (x-1)(x-a)$ 라 두면

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x-1)(x-a)}{x-1} = 1-a$$

$x=1$ 에서 연속이기 위해서는 $1-a=0$ 이 되어야 하므로 $a=1$

그러므로 $f(x) = (x-1)^2$ 이고

$$f(5) = 16$$

58) ④

[출제의도] 함수의 연속을 이해하고 있는가?

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서만 불연속이고, 함수 $g(x)$ 는 $x=a$ 에서만 불연속이므로 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=0, x=a$ 에서만 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

만일 $a < 0$ 이면

$$f(0)g(0) = 2 \times (-1) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)g(x) = 2 \times (-1) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x) = 3 \times (-1) = -3 \text{ 이므로}$$

함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=0$ 에서 불연속이다.

즉, $a \geq 0$ 이다.

이때, $x=a$ 에서 함수 $f(x)g(x)$ 의 연속성을 조사하면

$$f(a)g(a) = (-2a+2)(2a-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)g(x) = (-2a+2)(2a-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x)g(x) = (-2a+2) \times 2a$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이려면

$$(-2a+2)(2a-1) = (-2a+2) \times 2a \text{ 이어야 한다.}$$

따라서 $a=1$

59) ①

[출제의도] 함수의 연속에 대한 성질을 이해한다.

$h(x) = f(x)g(x)$ 라 하자.

$x \neq 1$ 일 때, 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 연속이므로 함수 $h(x)$ 도 연속이다. 그러므로 함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 함수 $h(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 1-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{2x^3 + ax + b}{x-1} \text{의 값이 존재하므로}$$

$$2+a+b=0, \text{ 즉 } b = -a-2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{2x^3 + ax - a - 2}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x-1)(2x^2 + 2x + a + 2)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} (2x^2 + 2x + a + 2) = a + 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2x^3 + ax - a - 2}{2x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x-1)(2x^2 + 2x + a + 2)}{2x+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} h(x) = h(1) \text{ 이므로}$$

$$a+6=0, \text{ 즉 } a=-6$$

$$b = -a-2 \text{ 에서 } b=4$$

$$\text{따라서 } b-a=10$$

60) 6

$$f(1) = -3+a = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x+b}{\sqrt{x+3}-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} = 4$$

따라서 $a=7$ 이고 $b=-1$ 이므로

$$a+b=6$$

61) ⑤

[출제의도] 함수의 연속에 대한 성질을 이해한다.

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=3$ 에서도 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = f(3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} \frac{x^2 + ax + b}{x - 3} \text{의 값이 존재하고, } x \rightarrow 3- \text{ 일 때}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 3-} (x^2 + ax + b) = 0 \text{ 이므로}$$

$$9 + 3a + b = 0, \quad b = -3a - 9$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{x^2 + ax - 3a - 9}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{(x-3)(x+3+a)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3-} (x+3+a) \\ &= 6+a \end{aligned}$$

$$\text{한편, } \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = f(3) = 7$$

$$\text{그러므로 } 6+a=7$$

$$\text{따라서 } a=1, \quad b=-12 \text{ 이므로 } a-b=13$$

62) ①

[출제의도] 함수의 연속을 활용하여 문제해결하기

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = b-4 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x^2 + 3x + a}{x - 2} = b-4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} (x-2) = 0 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow 2-} (x^2 + 3x + a) = 0$$

$$a+10=0 \text{ 에서 } a=-10$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(x-2)(x+5)}{x-2} = 7 \text{ 이므로}$$

$$b-4=7, \quad b=11$$

$$\text{따라서 } a+b=-10+11=1$$

63) ④

[출제의도] 함수의 연속의 성질을 이용하여 주어진 함수가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수의 값을 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 를 제외한 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$ 이 $x=a$ 에서 연속이면 함수 $\{f(x)\}^2$ 은 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $\{f(x)\}^2$ 이 $x=a$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow a+} \{f(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow a-} \{f(x)\}^2 = \{f(a)\}^2$$

이어야 한다.

이때,

$$\lim_{x \rightarrow a+} \{f(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow a+} (2x-a)^2 = a^2$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} \{f(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow a-} (-2x+6)^2 = (-2a+6)^2$$

$$\{f(a)\}^2 = (2a-a)^2 = a^2 \text{ 이므로}$$

$$a^2 = (-2a+6)^2 \text{ 에서}$$

$$3(a-2)(a-6) = 0$$

$$a=2 \text{ 또는 } a=6$$

따라서 모든 상수 a 의 값의 합은

$$2+6=8$$

64) ⑤

[출제의도] 함수의 연속의 정의를 이해하고 이를 이용하여 미정계수의 값을 구할 수 있는가?

함수 $|f(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$, $x=3$ 에서 연속이어야 한다.

(i) 함수 $|f(x)|$ 가 $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1-} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow -1+} |f(x)| = |f(-1)|$$

이어야 한다. 이때

$$\lim_{x \rightarrow -1-} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow -1-} |x+a| = |-1+a|,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow -1+} |x| = 1,$$

$$|f(-1)| = |-1| = 1$$

이므로

$$|-1+a|=1$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a=2$$

(ii) 함수 $|f(x)|$ 가 $x=3$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3-} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 3+} |f(x)| = |f(3)|$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 3-} |x| = 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 3+} |bx-2| = |3b-2|,$$

$$|f(3)| = |3b-2|$$

이므로

$$|3b-2|=3$$

$$b > 0 \text{ 이므로 } b = \frac{5}{3}$$

(i), (ii)에 의하여

$$a+b=2+\frac{5}{3}=\frac{11}{3}$$

65) ③

$$\neg. \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 2 \text{ (참)}$$

$$\neg. \lim_{x \rightarrow -1+} f(-x) = 2, \quad f(1) = 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(-x) \neq f(1) \text{ 이다. (거짓)}$$

$$\neg. f(0)f(1) = 2 \times 1 = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)f(x+1) = 1 \times 2 = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)f(x+1) = 2 \times 1 = 2 \text{ 에서}$$

$$f(0)f(1) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)f(x+1) \text{ 이므로}$$

함수 $f(x)f(x+1)$ 은 $x=0$ 에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 \neg , \neg

66) ①

(a) $x=0$ 에서 연속이어야 하므로

$$h(0) = f(0)g(0) = b \times (-1) = -b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)g(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = b \times 1 = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = b \times (-1) = -b$$

따라서, $b=-b$ 이므로 $b=0$

(b) $x=2$ 에서 연속이어야 하므로

$$h(2) = f(2)g(2) = (4+2a) \times 1 = 4+2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x)g(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) \lim_{x \rightarrow 2+} g(x) = (4+2a) \times 1 = 4+2a$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = (4+2a) \times (-1) = -4-2a\end{aligned}$$

따라서, $4+2a = -4-2a$ 이므로 $a = -2$

(a), (b)에 의하여 $f(x) = x^2 - 2x$ 이므로

$$f(5) = 15$$

67) ②

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 0) \\ 2 & (x = 0) \end{cases}, g(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq -1) \\ 1 & (-1 < t < 1) \\ 0 & (t \geq 1) \end{cases}$$

$$\neg. g(0) = 1 \text{ (참)}$$

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) + \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = 1 + 1 = 2 \text{ (참)}$$

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{f(x)} = 1, \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x)}{f(x)} \neq \frac{g(0)}{f(0)}$$

$$\therefore \text{함수 } \frac{g(x)}{f(x)} \text{ 는 } x=0 \text{ 에서 불연속이다. (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 \neg, \neg

68) ③

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \text{ 이므로 } \neg \text{ 은 참.}$$

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 \text{ 이므로 } \neg \text{ 은 거짓.}$$

$$\neg. |f(2)| = |-1| = 1 \text{ 이고}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} |f(x)| = |1| = 1, \lim_{x \rightarrow 2^+} |f(x)| = |-1| = 1$$

이므로 $|f(x)|$ 는 $x=0$ 에서 연속이다. 따라서 \neg 은 참.

그러므로 옳은 것은 \neg, \neg 이다.

69) ①

함수 $g(x) = f(x)\{f(x) + k\}$ 가 $x=0$ 에서 연속이 되기 위해

$$g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$$

$$g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = f(0)\{f(0) + k\} = 2 \times (2 + k)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)\{f(x) + k\} = 0 \times k$$

$$\therefore k = -2$$

70) ①

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 2 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) = 2 \text{ (참)}$$

$$\neg. f(3)g(3) = 1 \times 2 = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)g(x) = 3, \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)g(x) = 3 \text{ 에서 } \lim_{x \rightarrow 3} f(x)g(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)g(x) \neq f(3)g(3) \text{ (거짓)}$$

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)g(x) = 4$$

$$\neg \text{ 에 의하여 } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)g(x) \text{ 이므로}$$

함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=1$ 에서 극한값이 존재하지 않으므로 불연속이다.

\neg 에 의해 $x=3$ 에서도 불연속이므로 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=1$,

$x=3$ 에서 불연속이다. (거짓)

71) ③

$$\neg. \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 + (-1) = 0 \text{ (참)}$$

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 1^-} f(-x) = \lim_{t \rightarrow -1^+} f(t) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(-x) = \lim_{t \rightarrow -1^-} f(t) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(-x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(-x) \text{ 이므로 함수 } f(-x) \text{ 는}$$

$x=1$ 에서의 극한값이 존재하지 않는다. (거짓)

$$\neg. f(1)f(-1) = 1 \times (-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)f(-x) = 1 \times (-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)f(-x) = (-1) \times 1 = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x)f(-x) = -1$$

따라서 $f(1)f(-1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)f(-x)$ 이므로 함수

$f(x)f(-x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다. (참)

72) ③

[출제의도] 함수의 연속성 추론하기

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(-x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} \{f(x) + f(-x)\} = -2 + 2 = 0 \text{ (참)}$$

$$\neg. f(x) = t \text{ 라 하면 } x \rightarrow 1^+ \text{ 일 때 } t \rightarrow -1^+ \text{ 이고}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -1^+} f(t) = 0 \text{ (거짓)}$$

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 1^+} \{f(x-1)\}^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \{f(x)\}^2 = (-2)^2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \{f(x-1)\}^2 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \{f(x)\}^2 = 2^2 = 4$$

$$\{f(1-1)\}^2 = \{f(0)\}^2 = 2^2 = 4$$

$$\therefore \text{함수 } \{f(x-1)\}^2 \text{ 은 } x=1 \text{ 에서 연속이다. (참)}$$

따라서 옳은 것은 \neg, \neg

73) ③

$g(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) 라 하고 $h(x) = f(x)g(x)$ 라 하자.

$$g(0) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \text{ 이므로 } b = 2$$

$h(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = h(1) \text{ 이다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)(ax+2) = 2(a+2),$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)(ax+2) = 0,$$

$$h(1) = f(1)(a+2) = a+2 \text{ 이므로 } a+2 = 0$$

따라서 $a = -2$ 이고 $g(x) = -2x + 2$ 이므로 $g(-1) = 4$ 이다.

74) ①

[출제의도] 연속함수의 성질 이해하기

$$f(x-b) + 2 = \begin{cases} x-b+4 & (x \leq b) \\ x-b-a+2 & (x > b) \end{cases}$$

$g(x) = f(x)\{f(x-b) + 2\}$ 라 하면 함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x=0$, $x=b$ 에서 연속이면 된다.

i) $x=0$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)\{f(x-b) + 2\} = 2 \times (-b+4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)\{f(x-b) + 2\} = (-a) \times (-b+4)$$

$$g(0) = f(0)\{f(-b) + 2\} = 2 \times (-b+4) \text{ 에서}$$

$$2 \times (-b+4) = (-a) \times (-b+4)$$

$$(a+2)(-b+4) = 0, b=4 \text{ (} \because a > 0 \text{)}$$

ii) $x=b$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow b-} g(x) = \lim_{x \rightarrow b-} f(x) \{f(x-b)+2\} = (b-a) \times 4$$

$$\lim_{x \rightarrow b+} g(x) = \lim_{x \rightarrow b+} f(x) \{f(x-b)+2\} = (b-a) \times (-a+2)$$

$$g(b) = f(b) \{f(0)+2\} = (b-a) \times 4 \text{에서}$$

$$(b-a) \times 4 = (b-a) \times (-a+2)$$

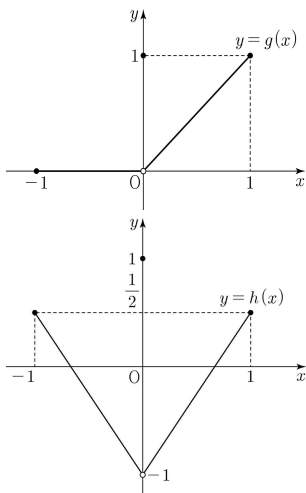
$$(b-a)(a+2) = 0, \quad b=a \quad (\because a > 0)$$

i), ii)에 의하여 $a=b=4$

$$\therefore a+b=8$$

75) ③

주어진 조건에 따라 $g(x)=f(x)+|f(x)|$, $h(x)=f(x)+f(-x)$ 의 그래프를 그리면 아래와 같다.



$$\neg. \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 \text{이다. (참)}$$

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 0-} |h(x)| = |-1| = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} |h(x)| = |-1| = 1, \quad |h(x)| = 1$$

이므로 함수 $|h(x)|$ 는 $x=0$ 에서 연속이다. (참)

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} |h(x)| = 1 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 0} g(x)|h(x)| = 0 \times 1 = 0$$

$$g(0)|h(0)| = 1 \times 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x)|h(x)| \neq g(0)|h(0)| \text{이므로 함수 } g(x)|h(x)| \text{는}$$

$x=0$ 에서 불연속이다. (거짓)

76) ①

[출제의도] 함수가 연속이 되는 조건을 이용하여 문제를 해결한다.

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 2+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 2-} g(x) = 0 \text{이고}$$

함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 0$$

$$\text{같은 방법으로 } f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = 0$$

$$\text{그러므로 } f(x) = (x+2)(x-2)$$

함수 $f(x-a)g(x) = (x-a+2)(x-a-2)g(x)$ 의 그래프가 한 점에서만 불연속이 되기 위해서는 $a-2=2$ 또는 $a+2=-2$ 이므로 $a=4$ 또는 $a=-4$

$$\text{따라서 구하는 값은 } 4 \times (-4) = -16$$

77) ⑤

[출제의도] 함수의 연속성을 이해하여 함수의 연속성을 판단한다.

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = -1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = 0 \times (-1) = 0 \text{ (거짓)}$$

$$\neg. f(1) = 0, \quad g(1) = -1 \text{이므로 } f(1)g(1) = 0 \times (-1) = 0 \text{ (참)}$$

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = 1 \times 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = 0 \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) \text{이므로}$$

극한값 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x)$ 는 존재하지 않는다.

그러므로 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 \neg, \neg

78) 24

[출제의도] 함수의 연속성을 이용하여 함수값을 구한다.

함수 $h(x)=f(x)g(x)$ 가 구간 $(-2, 2)$ 에서 연속이므로 함수 $h(x)$ 가 $x=-1$ 과 $x=1$ 에서 연속이다.

그러므로 이차함수 $g(x)$ 는 $g(-1)=0$, $g(1)=0$ 을 만족해야한다.

이차함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$g(x) = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$$

$$\text{따라서 } g(5) = 5^2 - 1 = 24$$

79) ②

[출제의도] 함수의 연속에 대한 성질을 이해한다.

함수 $(x^2+ax+b)f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} (x^2+ax+b)f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x^2+ax+b)f(x)$$

$$\text{그래프에서 } \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 3 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} (x^2+ax+b)f(x) = (1+a+b) \times 1 = 1+a+b,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} (x^2+ax+b)f(x) = (1+a+b) \times 3 = 3(1+a+b)$$

$$\text{에서 } 1+a+b = 3(1+a+b)$$

$$\text{따라서 } a+b = -1$$

80) ⑤

$$\neg. (\text{참}) \quad x = \pm 1 \text{에서 불연속}$$

$$\neg. (\text{참}) \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)f(x) = (1-1)f(1) = 0 \text{이므로}$$

$$x=1 \text{에서 연속}$$

$$\neg. (\text{참}) \quad y = \{f(x)\}^2 = x^2 \text{이므로 실수 전체에서 연속}$$

81) ③

$$\neg. x > 1 \text{에서 } f(x) = -x+2 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (-x+2) = 1 \text{ (참)}$$

$$\neg. x \leq 1 \text{에서 } f(x) = a \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} a = \lim_{x \rightarrow 1-} 0 = 0$$

$$\text{이므로 } \neg. \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 극한값이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다. (거짓)

$$\neg. \text{함수 } g(x) = (x-1)f(x) \text{에 대하여}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x-1)f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x-1)(-x+2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (x-1)f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} a(x-1) = 0$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$ 이고

$$g(1) = (1-1)f(1) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)$$

즉, 함수 $y = (x-1)f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

한편, $x > 1$, $x \leq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 는 다항함수이므로 연속함수의 성질에 의해 함수 $y = (x-1)f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

82) ②

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1 \text{ 이므로}$$

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차함수

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = k \text{ 이므로 } f(x) = (x-1)(x-a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1-a = k$$

$h(x) = f(x)g(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$h(2) = \lim_{x \rightarrow 2+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} h(x)$$

$$h(2) = f(2)g(2) = 3(2-a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x-1)(x-a)(2-x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (x-1)(x-a)(x+1) = 3(2-a)$$

따라서 $a=2$ 이므로 $k=-1$

83) 16

[출제의도] 함수의 연속 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 5, \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = -1$$

$-x=t$ 라 하면

$x \rightarrow 2-$ 일 때, $t \rightarrow -2+$

$x \rightarrow 2+$ 일 때, $t \rightarrow -2-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(-x) = \lim_{t \rightarrow -2+} f(t) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(-x) = \lim_{t \rightarrow -2-} f(t) = 7$$

함수 $f(-x)\{f(x)+k\}$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(-x)\{f(x)+k\} = 5(5+k),$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(-x)\{f(x)+k\} = 7(-1+k),$$

$$f(-2)\{f(2)+k\} = 5(5+k)$$

이므로 $x=2$ 에서 연속이 되기 위해서는

$$5(5+k) = 7(-1+k)$$

따라서 $k=16$

84) 8

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 2 & (t = 0) \\ 3 & (0 < t < 1) \\ 2 & (t > 1) \end{cases} \text{ 이므로}$$

$f(t)g(t)$ 가 모든 실수 t 에서 연속이기 위해서는

$$g(0) = g(1) = 0 \text{ 을 만족해야만 한다.}$$

$$\therefore g(t) = t(t-1)$$

$$\therefore f(3)+g(3) = 2+6 = 8$$

85) ④

[출제의도] 함수의 연속성을 활용하여 문제해결하기

$$f(x-1) = \begin{cases} -x & (x \leq 1) \\ 2x-2+a & (x > 1) \end{cases}$$

$$g(x) = f(x)f(x-1) = \begin{cases} (-x-1)(-x) & (x \leq 0) \\ (2x+a)(-x) & (0 < x \leq 1) \\ (2x+a)(2x-2+a) & (x > 1) \end{cases}$$

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되기 위하여 $x=0$, $x=1$ 에서도 연속이 되어야 한다.

(i) $x=0$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = g(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) \text{ 이므로}$$

함수 $g(x)$ 는 a 의 값에 관계없이 $x=0$ 에서 연속이다.

(ii) $x=1$ 일 때

함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이 되려면

$$\lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = g(1) = \lim_{x \rightarrow 1+} g(x)$$

$$-(a+2) = (a+2)a, (a+1)(a+2) = 0$$

$$a \neq -1 \text{ 이므로 } a = -2$$

86) ③

[출제의도] 함수의 연속의 성질을 이해하여 주어진 조건의 값을 구한다.

$$\text{함수 } f(t) = \begin{cases} 2 & (|t| > 1) \\ 1 & (|t| = 1) \\ 0 & (|t| < 1) \end{cases} \text{ 이고 함수 } (x+k)f(x) \text{가 구간}$$

$(0, \infty)$ 에서 연속이면 $x=1$ 에서 연속이다.

$$(1+k)f(1) = \lim_{x \rightarrow 1-} (x+k)f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x+k)f(x)$$

$$1+k = (1+k) \times 0 = (1+k) \times 2$$

$$\text{따라서 } k = -1 \text{ 이므로 } f(1)+k = 1-1 = 0$$

87) 19

[출제의도] 함수의 연속을 활용하여 문제해결하기

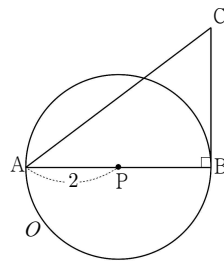
[그림1]과 같이 $x=2$ 일 때,

원 O 가 삼각형 ABC 와 만나는 서로 다른 점의 개수는 3이다.

$$\therefore f(2) = 3$$

$0 < x < 2$ 에서 원 O 가 삼각형 ABC 와 만나는 서로 다른 점의 개수는 2이다.

$$\therefore f(x) = 2(0 < x < 2)$$



[그림1]

[그림2]와 같이 원 O 가 선분 AC 에 접할 때, 접하는 점을 H 라 하면

삼각형 AHP 와 삼각형 ABC 는 닮음이므로

$$\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{AP} : \overline{HP}$$

$$5 : 3 = x : 2$$

$$x = \frac{10}{3}$$

$$x = \frac{10}{3} \text{ 일 때, } f\left(\frac{10}{3}\right) = 3$$

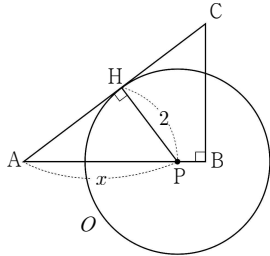
$2 < x < \frac{10}{3}$ 에서 원 O 가 삼각형 ABC 와 만나는 서로 다른 점의

개수는 4이다.

$$\therefore f(x) = 4 \left(2 < x < \frac{10}{3} \right)$$

$\frac{10}{3} < x < 4$ 에서 원 O 가 삼각형 ABC 와 만나는 서로 다른 점의 개수는 2이다.

$$\therefore f(x) = 2 \left(\frac{10}{3} < x < 4 \right)$$

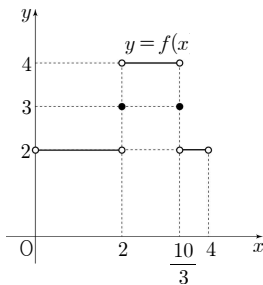


[그림2]

따라서

$$f(x) = \begin{cases} 2 & (0 < x < 2) \\ 3 & (x = 2) \\ 4 & (2 < x < \frac{10}{3}) \\ 3 & (x = \frac{10}{3}) \\ 2 & (\frac{10}{3} < x < 4) \end{cases}$$

함수 $y = f(x)$ 를 그래프로 나타내면 다음과 같다.



함수 $f(x)$ 가 $x = 2$, $x = \frac{10}{3}$ 에서 불연속이므로

모든 실수 a 의 값의 합은 $2 + \frac{10}{3} = \frac{16}{3}$ 이다.

$$\therefore p = 3, q = 16$$

$$\text{따라서 } p + q = 19$$

88) ⑤

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = \alpha \text{ 라 하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + g(x) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) - g(x) = 8$$

$$2\alpha + (\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) - \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)) = 12$$

$$2\alpha + 6 = 12, \alpha = 3$$

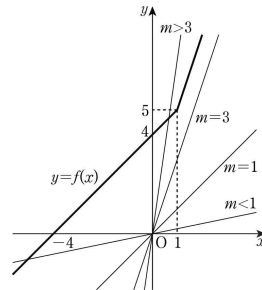
89) 8

[출제의도] 함수의 연속성을 이용하여 문제를 해결한다.

직선 $y = mx$ 는 실수 m 의 값에 관계없이 항상 원점을 지나므로

직선 $y = mx$ 와 함수

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & (x < 1) \\ 3x+2 & (x \geq 1) \end{cases} \text{의 그래프는 다음과 같다.}$$



그러므로 함수 $g(m)$ 은

$$g(m) = \begin{cases} 1 & (m < 1 \text{ 또는 } m > 3) \\ 0 & (1 \leq m \leq 3) \end{cases}$$

즉, 함수 $g(m)$ 은 $m = 1$ 과 $m = 3$ 에서 불연속이다.

그런데 함수 $g(x)h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x = 1$, $x = 3$ 에서도 연속이 되어야 한다.

(i) $x = 1$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)h(x) = 1 \times h(1) = h(1),$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)h(x) = 0 \times h(1) = 0$$

함수 $g(x)h(x)$ 는 $x = 1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x)h(x) \text{의 값이 존재한다.}$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)h(x) \text{에서 } h(1) = 0$$

(ii) $x = 3$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x)h(x) = 0 \times h(3) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x)h(x) = 1 \times h(3) = h(3)$$

함수 $g(x)h(x)$ 는 $x = 3$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x)h(x) \text{의 값이 존재한다.}$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x)h(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x)h(x) \text{에서 } h(3) = 0$$

(i), (ii)에서 $h(1) = h(3) = 0$ 이므로 최고차항의

계수가 1인 이차함수 $h(x)$ 는 $h(x) = (x-1)(x-3)$

$$\text{따라서 } h(5) = 4 \times 2 = 8$$

90) ①

[출제의도] 연속함수의 성질을 활용하여 문제해결하기

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2 - 3x - 5} = 2 \text{이므로}$$

$$f(x) = 2x^2 + ax + b$$

함수 $f(x)g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x = 3$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)g(x) = f(3)g(3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + ax + b}{x - 3} = 18 + 3a + b \text{에서}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 + ax + b) = 0 \text{이므로 } 18 + 3a + b = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + ax + b}{x - 3} = 0$$

$$b = -3a - 18 \text{이므로 } f(x) = (x-3)(2x+a+6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + ax + b}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(2x+a+6)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} (2x + a + 6) = 0$$

$$\text{이므로 } a = -12, b = 18$$

$$f(x) = 2x^2 - 12x + 18$$

$$\text{따라서 } f(1) = 8$$

91) ③

[출제의도] 함수의 연속의 성질을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

$$\{f(x)\}^3 - \{f(x)\}^2 - x^2 f(x) + x^2 = 0 \text{에서}$$

$$\{f(x) - x\} \{f(x) + x\} \{f(x) - 1\} = 0$$

이므로

$$f(x) = 1, f(x) = -x, f(x) = x$$

이때, $f(0) = 1$ 또는 $f(0) = 0$ 이다.

(i) $f(0) = 1$ 일 때,

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이고, 최댓값이 1이므로

$$f(x) = 1$$

이다. 이때, 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 0이 아니므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $f(0) = 0$ 일 때,

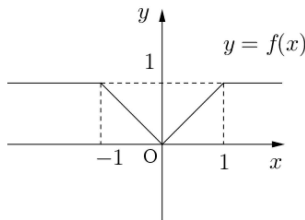
함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이고, 최댓값이 1이므로

$$f(x) = \begin{cases} |x| & (|x| \leq 1) \\ 1 & (|x| > 1) \end{cases}$$

이다.

(i), (ii)에서

$$f(x) = \begin{cases} |x| & (|x| \leq 1) \\ 1 & (|x| > 1) \end{cases}$$



따라서

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = 1, f(0) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

이므로

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

92) ④

[출제의도] 연속함수의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구한다.

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

조건 (가)와 (나)에서

$$f(4) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 16a + 4b - 24 \text{이고}$$

$$f(0) = f(4) \text{이므로 } -24 = 16a + 4b - 24 \text{에서}$$

$$b = -4a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$0 \leq x < 4 \text{에서 } f(x) = a(x-2)^2 - 4a - 24 \text{이므로}$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $x = 2$ 에 대하여 대칭이다.

모든 실수 x 에 대하여 $f(x+4) = f(x)$ 이므로

$1 < x < 2$ 일 때 방정식 $f(x) = 0$ 이 실근을 갖지 않으면

$1 < x < 10$ 일 때 방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4 이하이다.

$1 < x < 2$ 일 때 방정식 $f(x) = 0$ 이 실근을 1개 가지면

$1 < x < 10$ 일 때 방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 5이다.

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 연속이므로

$$f(1)f(2) = (-3a-24)(-4a-24) = 12(a+8)(a+6) < 0$$

$$-8 < a < -6 \text{이고 } a \text{는 정수이므로 } a = -7$$

①에 의하여 $b = 28$

$$\text{따라서 } a+b = -7+28 = 21$$