

수능, 모의고사 연도별 문제모음

단원 : 수1-삼각함수

반: 번호: 이름:

수식활용

1. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$ 일 때, $\sum_{n=1}^{32} na_n^2$ 의 값을 구하시오.
[4점][2012년 4월 나28]

2. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 0$ 이고

$$a_{n+1} = (-1)^n a_n + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (n \geq 1)$$
 을 만족시킬 때, a_{50} 의 값은?
 [4점][2012년 5월 나18]

① -50 ② -25 ③ 0 ④ 25 ⑤ 50

3. 함수 $f(x) = a \sin x + 1$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자.
 $M - m = 6$ 일 때, 양수 a 의 값은?
 [3점][2016년 3월 가05]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

4. x 에 대한 방정식 $\left| \cos x + \frac{1}{4} \right| = k$ 가 서로 다른 3개의 실근을
 갖도록 하는 실수 k 의 값을 α 라 할 때, 40α 의 값을 구하시오.
 (단, $0 \leq x < 2\pi$)
 [4점][2016년 4월 가26]

5. $\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 일 때, $\tan \theta + \cot \theta$ 의 값은?
 [3점][2016년 7월 가06]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

6. $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식

$$2\sin^2 x + 3\cos x = 3$$
 의 모든 해의 합은?
 [3점][2016년 9월 가07]

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ 2π ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

7. 이차방정식 $5x^2+x-a=0$ 의 두 근을 $\sin\theta, \cos\theta$ 라 할 때, 상수 a 의 값은?

[3점][2016년 경남10월 가08]

- ① $\frac{12}{5}$ ② $\frac{13}{5}$ ③ $\frac{14}{5}$ ④ 3 ⑤ $\frac{16}{5}$

8. $0 < x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $\cos^2x - \sin x = 1$ 의 모든 실근의 합은 $\frac{q}{p}\pi$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)

[3점][2017학년도 수능 가25]

9. 함수 $y = a \sin \frac{\pi}{2b}x$ 의 최댓값은 2이고 주기는 2이다. 두 양수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값은?

[3점][2017년 3월 가06]

- ① 2 ② $\frac{17}{8}$ ③ $\frac{9}{4}$ ④ $\frac{19}{8}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

10. $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식

$$|\sin 2x| = \frac{1}{2}$$

의 모든 실근의 개수는?

[3점][2017년 4월 가09]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

11. $0 \leq x \leq \pi$ 일 때, 방정식 $(\sin x + \cos x)^2 = \sqrt{3} \sin x + 1$ 의 모든 실근의 합은?

[3점][2017년 7월 가11]

- ① $\frac{7}{6}\pi$ ② $\frac{4}{3}\pi$ ③ $\frac{3}{2}\pi$ ④ $\frac{5}{3}\pi$ ⑤ $\frac{11}{6}\pi$

12. $0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때, $2\cos^2x + \sin x = 1$ 의 서로 다른 모든 실근의 합은?

[3점][2017년 대구8월 가09]

- ① $\frac{5}{2}\pi$ ② 3π ③ $\frac{7}{2}\pi$ ④ 4π ⑤ $\frac{9}{2}\pi$

13. $0 \leq x \leq \pi$ 일 때, 방정식

$$1 + \sqrt{2} \sin 2x = 0$$

의 모든 해의 합은?

[3점][2017년 9월 가06]

- ① π ② $\frac{5\pi}{4}$ ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ $\frac{7\pi}{4}$ ⑤ 2π

14. $0 \leq x < \pi$ 일 때, 방정식

$$2 \sin 2x + \sqrt{3} = 0$$

의 모든 해의 합은 $\frac{q}{p}\pi$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)

[3점][2017년 경남10월 가24]

15. $0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때, 방정식

$$\cos^2 x = \sin^2 x - \sin x$$

의 모든 해의 합은?

[3점][2018학년도 수능 가07]

- ① 2π ② $\frac{5}{2}\pi$ ③ 3π ④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ 4π

16. 함수 $f(x) = \sin^2 x + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, $4M$ 의 값을 구하시오.

[3점][2018년 3월 가25]

17. $0 \leq x < 2\pi$ 에서 부등식 $2 \sin x + 1 < 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때, $\cos(\beta - \alpha)$ 의 값은?

[3점][2018년 4월 가09]

- ① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

18. 실수 k 에 대하여 함수

$$f(x) = \cos^2\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k$$

의 최댓값은 3, 최솟값은 m 이다. $k+m$ 의 값은?

[4점][2018년 9월 가14]

- ① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

19. 열린 구간 $(0, \pi)$ 에서 부등식

$$(2^x - 8)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) < 0$$

의 해가 $a < x < b$ 또는 $c < x < d$ 일 때, $(b-a) + (d-c)$ 의 값은?
(단, $b < c$)

[3점][2018년 10월 가12]

- ① $\pi - 3$ ② $\frac{7\pi}{6} - 3$ ③ $\frac{4\pi}{3} - 3$ ④ $3 - \frac{\pi}{3}$ ⑤ $3 - \frac{\pi}{6}$

20. $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 방정식 $6\sin x \cos x + 3\sin x = 2\cos x + 1$ 의 모든 실근의 합은?

[3점][2018년 대구11월 가07]

- ① 2π ② $\frac{5}{2}\pi$ ③ 3π ④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ 4π

21. $0 \leq \theta < 2\pi$ 일 때, x 에 대한 이차방정식

$$6x^2 + (4\cos\theta)x + \sin\theta = 0$$

이 실근을 갖지 않도록 하는 모든 θ 의 값의 범위는 $\alpha < \theta < \beta$ 이다. $3\alpha + \beta$ 의 값은?

[3점][2019학년도 수능 가11]

- ① $\frac{5}{6}\pi$ ② π ③ $\frac{7}{6}\pi$ ④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{3}{2}\pi$

22. 실수 a 에 대하여 $0 \leq x \leq 2$ 에서 x 에 대한 방정식

$$3\sin(2\pi x) - a = 0$$

의 실근의 개수를 $f(a)$ 라 하자. 집합 $A = \{f(a) \mid a \text{는 실수}\}$ 의 모든 원소의 합은?

[3점][2019년 5월 가10]

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

23. 두 함수

$$f(x) = \cos(ax) + 1, \quad g(x) = |\sin 3x|$$

의 주기가 서로 같을 때, 양수 a 의 값은?

[4점][2020년 4월 나15]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

24. $0 < x \leq 2\pi$ 일 때, 방정식 $\sin^2 x = \cos^2 x + \cos x$ 와

부등식 $\sin x > \cos x$ 를 동시에 만족시키는 모든 x 의 값의 합은?

[3점][2020년 4월 가09]

- ① $\frac{4}{3}\pi$ ② $\frac{5}{3}\pi$ ③ 2π ④ $\frac{7}{3}\pi$ ⑤ $\frac{8}{3}\pi$

25. $\pi < \theta < 2\pi$ 인 θ 에 대하여 $\frac{\sin\theta \cos\theta}{1-\cos\theta} + \frac{1-\cos\theta}{\tan\theta} = 1$ 일 때,
 $\cos\theta$ 의 값은?

[3점][2020년 4월 가12]

- ① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

26. $0 \leq \theta < 2\pi$ 일 때, x 에 대한 이차방정식

$$x^2 - (2\sin\theta)x - 3\cos^2\theta - 5\sin\theta + 5 = 0$$

이 실근을 갖도록 하는 θ 의 최솟값과 최댓값을 각각 α, β 라 하자. $4\beta - 2\alpha$ 의 값은?

[4점][2020년 6월 가14]

- ① 3π ② 4π ③ 5π ④ 6π ⑤ 7π

27. $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2}$ 일 때, $\frac{1+\tan\theta}{\sin\theta}$ 의 값은?

[3점][2020년 7월 나11]

- ① $-\frac{7}{3}$ ② $-\frac{4}{3}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

28. 자연수 n 에 대하여 $0 \leq x < 2^{n+1}$ 일 때, 부등식

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}x\right) \leq -\frac{1}{2}$$

을 만족시키는 서로 다른 모든 자연수 x 의 개수를 a_n 이라 하자.

$\sum_{n=1}^7 a_n$ 의 값을 구하시오.

[4점][2020년 7월 나27]

29. $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식

$$\sin x = \sqrt{3}(1 + \cos x)$$

의 모든 해의 합은?

[3점][2020년 10월 가11]

- ① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{2}{3}\pi$ ③ π ④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5}{3}\pi$

30. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\tan(\pi - \theta) = \frac{3}{5}$ 일 때, $30(1 - \sin\theta)$ 의 값을 구하시오.

[3점][2020년 10월 가24]

31. $0 \leq x \leq 4\pi$ 일 때, 방정식

$$4\sin^2 x - 4\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3 = 0$$

의 모든 해의 합은?

[4점][2021학년도 수능 나16]

- ① 5π ② 6π ③ 7π ④ 8π ⑤ 9π

32. $0 < x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $2\cos^2 x - \sin(\pi + x) - 2 = 0$ 의 모든 해의 합은?

[4점][2021년 4월 11]

- ① π ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ 2π ④ $\frac{5}{2}\pi$ ⑤ 3π

33. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 인 θ 에 대하여 $\sin\theta\cos\theta = \frac{7}{18}$ 일 때,

$30(\sin\theta + \cos\theta)$ 의 값을 구하시오.

[3점][2021년 4월 17]

34. $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식

$$3\cos^2 x + 5\sin x - 1 = 0$$

의 모든 해의 합은?

[4점][2021년 7월 10]

- ① π ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ 2π ④ $\frac{5}{2}\pi$ ⑤ 3π

35. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 인 θ 에 대하여 $\frac{\sin\theta}{1 - \sin\theta} - \frac{\sin\theta}{1 + \sin\theta} = 4$ 일 때, $\cos\theta$ 의 값은?

[3점][2021년 9월 06]

- ① $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

36. $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 인 θ 에 대하여 $\tan\theta - \frac{6}{\tan\theta} = 1$ 일 때,

$\sin\theta + \cos\theta$ 의 값은?

[3점][2022학년도 수능 07]

- ① $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

그래프활용

37. 양의 상수 a 에 대하여 곡선 $f(x) = a \sin \frac{x+\pi}{3}$ ($0 \leq x \leq 6\pi$)

와 직선 $y = -\frac{a}{2}$ 가 만나는 두 점을 각각 A, B 라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 위의 제1사분면에 있는 점 P 에 대하여 삼각형 PAB 의 넓이의 최댓값이 6π 일 때, a 의 값을 구하시오.

[3점][2017년 전북10월 가25]

38. 좌표평면에서 곡선 $y = 4\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ ($0 \leq x \leq 2$) 위의 점 중 y 좌표가 정수인 점의 개수를 구하시오.

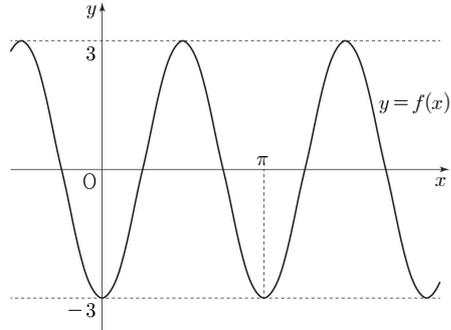
[3점][2018년 4월 가24]

39. $0 \leq x \leq \pi$ 일 때, 2 이상의 자연수 n 에 대하여 두 곡선 $y = \sin x$ 와 $y = \sin(nx)$ 의 교점의 개수를 a_n 이라 하자. $a_3 + a_5$ 의 값을 구하시오.

[4점][2019년 3월 가26]

40. 두 상수 a, b 에 대하여 함수 $f(x) = a \cos bx$ 의 그래프가 그림과 같다. 함수 $g(x) = b \sin x + a$ 의 최댓값은? (단, $b > 0$)

[3점][2019년 4월 가10]



- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

41. $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 두 곡선 $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 와 $y = \sin 4x$ 가 만나는 점의 개수는?

[3점][2020년 3월 나07]

- ① 2
- ② 4
- ③ 6
- ④ 8
- ⑤ 10

42. $0 < a < \frac{4}{7}$ 인 실수 a 와 유리수 b 에 대하여 닫힌구간

$\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}\right]$ 에서 정의된 함수 $f(x) = 2\sin(ax) + b$ 가 있다.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 두 점 $A\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), B\left(\frac{7}{2}\pi, 0\right)$ 을 지날 때, $30(a+b)$ 의 값을 구하시오.

[4점][2020년 3월 가28]

43. $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 정의된 함수 $y = a \sin 3x + b$ 의 그래프가 두 직선 $y=9$, $y=2$ 와 만나는 점의 개수가 각각 3, 7이 되도록 하는 두 양수 a, b 에 대하여 $a \times b$ 의 값을 구하시오.

[4점][2020년 4월 가26]

44. $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 두 함수 $y = \sin x$ 와 $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$ 의 그래프가 만나는 모든 점의 x 좌표의 합은?

[3점][2020년 10월 나07]

- ① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3}{2}\pi$ ④ 2π ⑤ $\frac{5}{2}\pi$

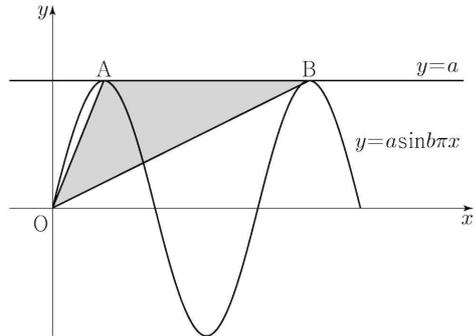
45. 함수 $y = \tan\left(nx - \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프가 직선 $y = -x$ 와 만나는 점의 x 좌표가 구간 $(-\pi, \pi)$ 에 속하는 점의 개수를 a_n 이라 할 때, $a_2 + a_3$ 의 값을 구하시오.

[4점][2020년 10월 나26]

46. 두 양수 a, b 에 대하여 곡선 $y = a \sin b\pi x \left(0 \leq x \leq \frac{3}{b}\right)$ 이 직선 $y=a$ 와 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 5이고 직선 OA의 기울기와 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, O는 원점이다.)

[4점][2021년 9월 10]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

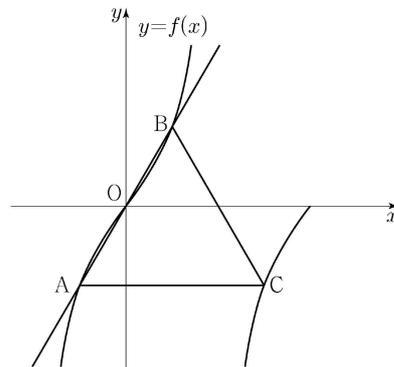


47. 양수 a 에 대하여 집합 $\left\{x \mid -\frac{a}{2} < x \leq a, x \neq \frac{a}{2}\right\}$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = \tan \frac{\pi x}{a}$$

가 있다. 그림과 같이 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점 A를 지나고 x 축에 평행한 직선이 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

[4점][2022학년도 수능 11]



- ① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{17\sqrt{3}}{12}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

48. 자연수 k 에 대하여 $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, x 에 대한 방정식 $\sin kx = \frac{1}{3}$ 의 서로 다른 실근의 개수가 8이다.

$0 \leq x < 2\pi$ 일 때, x 에 대한 방정식 $\sin kx = \frac{1}{3}$ 의 모든 해의 합은?

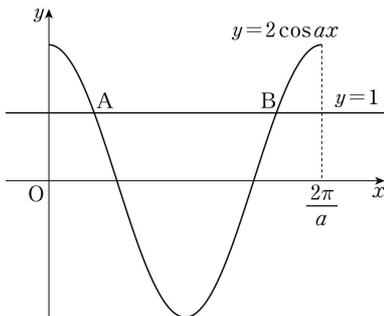
[4점][2022년 4월 공통11]

- ① 5π ② 6π ③ 7π ④ 8π ⑤ 9π

49. 그림과 같이 양의 상수 a 에 대하여

곡선 $y = 2\cos ax$ ($0 \leq x \leq \frac{2\pi}{a}$)와 직선 $y = 1$ 이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{AB} = \frac{8}{3}$ 일 때, a 의 값은?

[3점][2022년 3월 공통08]



- ① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{5\pi}{12}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{7\pi}{12}$ ⑤ $\frac{2\pi}{3}$

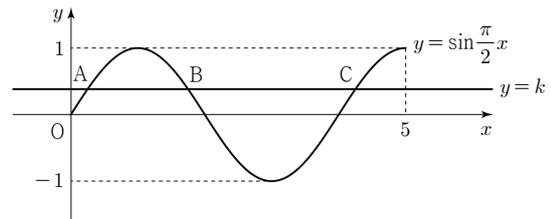
50. 닫힌구간 $[0, \pi]$ 에서 정의된 함수 $f(x) = -\sin 2x$ 가 $x = a$ 에서 최댓값을 갖고 $x = b$ 에서 최솟값을 갖는다. 곡선 $y = f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기는?

[3점][2022년 6월 공통07]

- ① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$ ④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$

51. 곡선 $y = \sin \frac{\pi}{2}x$ ($0 \leq x \leq 5$)가 직선 $y = k$ ($0 < k < 1$)과 만나는 서로 다른 세 점을 y 축에서 가까운 순서대로 A, B, C라 하자. 세 점 A, B, C의 x 좌표의 합이 $\frac{25}{4}$ 일 때, 선분 AB의 길이는?

[4점][2022년 7월 공통10]



- ① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{11}{8}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{13}{8}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

52. 닫힌구간 $[0, 12]$ 에서 정의된 두 함수

$$f(x) = \cos \frac{\pi x}{6}, \quad g(x) = -3\cos \frac{\pi x}{6} - 1$$

이 있다. 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 가 만나는 두 점의 x 좌표를 α_1, α_2 라 할 때, $|\alpha_1 - \alpha_2| = 8$ 이다. 곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $y=k$ 가 만나는 두 점의 x 좌표를 β_1, β_2 라 할 때, $|\beta_1 - \beta_2|$ 의 값은? (단, k 는 $-1 < k < 1$ 인 상수이다.)

[4점][2022년 9월 공통09]

- ① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

53. 양수 a 에 대하여 함수

$$f(x) = \left| 4 \sin \left(ax - \frac{\pi}{3} \right) + 2 \right| \quad \left(0 \leq x < \frac{4\pi}{a} \right)$$

의 그래프가 직선 $y=2$ 와 만나는 서로 다른 점의 개수는 n 이다. 이 n 개의 점의 x 좌표의 합이 39일 때, $n \times a$ 의 값은?

[4점][2022년 10월 공통12]

- ① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ 2π ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

54. 함수

$$f(x) = a - \sqrt{3} \tan 2x$$

가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6}, b \right]$ 에서 최댓값 7, 최솟값 3을 가질 때, $a \times b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

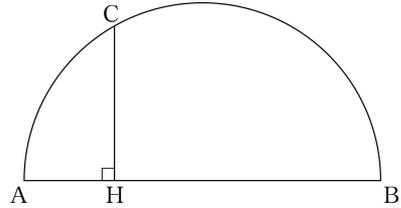
[4점][2023학년도 수능 공통09]

- ① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{5\pi}{12}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{\pi}{6}$

도형활용

55. 그림과 같이 길이가 12인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 반원 위에서 호 BC의 길이가 4π 인 점 C를 잡고 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. \overline{CH}^2 의 값을 구하시오.

[3점][2017년 3월 가25]



56. 좌표평면에서 제1사분면에 점 P가 있다. 점 P를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 하고, 점 Q를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 R라 할 때, 세 동경 OP, OQ, OR가 나타내는 각을 각각 α, β, γ 라 하자.

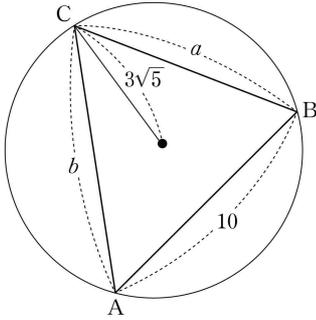
$\sin \alpha = \frac{1}{3}$ 일 때, $9(\sin^2 \beta + \tan^2 \gamma)$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 시초선은 x 축의 양의 방향이다.)

[4점][2020년 3월 가26]

57. 길이가 각각 10, a , b 인 세 선분 AB, BC, CA를 각 변으로 하는 예각삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점을 지나는 원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$ 이고 $\frac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab} = \frac{4}{3}$ 일 때, ab 의 값은?

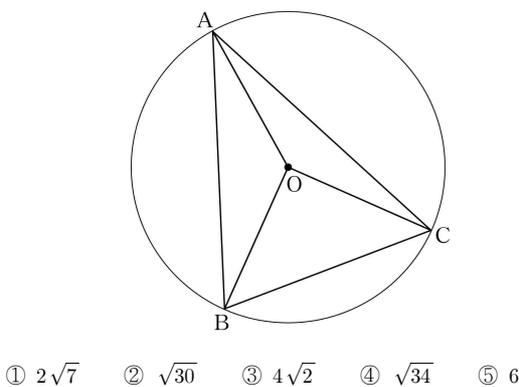
[4점][2020년 3월 나19]

- ① 140 ② 150 ③ 160 ④ 170 ⑤ 180



58. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 인 원에 내접하는 예각삼각형 ABC에 대하여 두 삼각형 OAB, OCA의 넓이를 각각 S_1 , S_2 라 하자. $3S_1 = 4S_2$ 이고 $\overline{BC} = 2\sqrt{5}$ 일 때, 선분 AB의 길이는?

[4점][2020년 3월 가19]



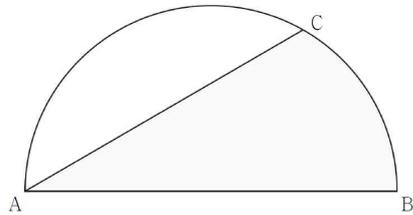
- ① $2\sqrt{7}$ ② $\sqrt{30}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{34}$ ⑤ 6

59. 중심각의 크기가 1라디안이고 둘레의 길이가 24인 부채꼴의 넓이를 구하시오.

[3점][2020년 3월 가23]

60. 그림과 같이 길이가 12인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 C가 있다. 호 CB의 길이가 2π 일 때, 두 선분 AB, AC와 호 CB로 둘러싸인 부분의 넓이는?

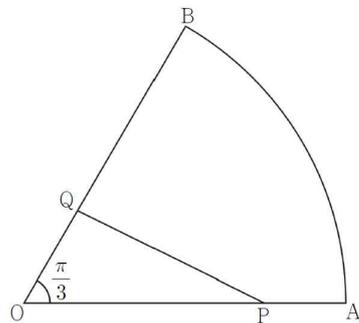
[4점][2020년 4월 나17]



- ① $5\pi + 9\sqrt{3}$ ② $5\pi + 10\sqrt{3}$ ③ $6\pi + 9\sqrt{3}$
 ④ $6\pi + 10\sqrt{3}$ ⑤ $7\pi + 9\sqrt{3}$

61. 그림과 같이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴 OAB에서 선분 OA를 3:1로 내분하는 점을 P, 선분 OB를 1:2로 내분하는 점을 Q라 하자. 삼각형 OPQ의 넓이가 $4\sqrt{3}$ 일 때 호 AB의 길이는?

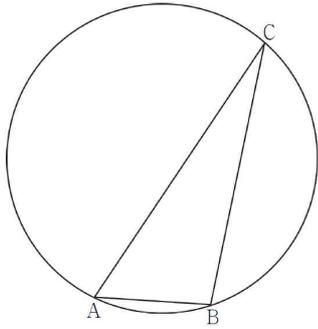
[3점][2020년 4월 가10]



- ① $\frac{5}{3}\pi$ ② 2π ③ $\frac{7}{3}\pi$ ④ $\frac{8}{3}\pi$ ⑤ 3π

62. 그림과 같이 원 C 에 내접하고 $\overline{AB}=3$, $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ 인 삼각형 ABC 가 있다. 원 C 의 넓이가 $\frac{49}{3}\pi$ 일 때, 원 C 위의 점 P 에 대하여 삼각형 PAC 의 넓이의 최댓값은? (단, 점 P 는 점 A 도 아니고 점 C 도 아니다.)

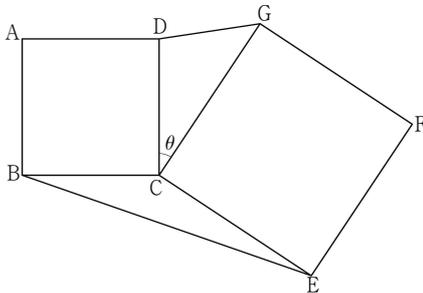
[4점][2020년 4월 가19]



- ① $\frac{32}{3}\sqrt{3}$
- ② $\frac{34}{3}\sqrt{3}$
- ③ $12\sqrt{3}$
- ④ $\frac{38}{3}\sqrt{3}$
- ⑤ $\frac{40}{3}\sqrt{3}$

63. 그림과 같이 평면 위에 한 변의 길이가 3인 정사각형 $ABCD$ 와 한 변의 길이가 4인 정사각형 $CEFG$ 가 있다. $\angle DCG = \theta$ ($0 < \theta < \pi$)라 할 때, $\sin\theta = \frac{\sqrt{11}}{6}$ 이다. $\overline{DG} \times \overline{BE}$ 의 값은?

[4점][2020년 7월 나15]



- ① 15
- ② 17
- ③ 19
- ④ 21
- ⑤ 23

64. $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}=\sqrt{7}$ 인 예각삼각형 ABC 의 넓이가 $\sqrt{6}$ 이다. $\angle A = \theta$ 일 때, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ 의 값은?

[3점][2020년 7월 가07]

- ① $\frac{\sqrt{3}}{7}$
- ② $\frac{2}{7}$
- ③ $\frac{\sqrt{5}}{7}$
- ④ $\frac{\sqrt{6}}{7}$
- ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{7}$

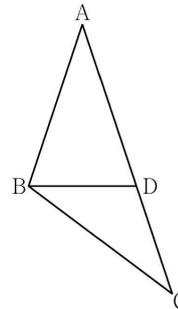
65. $\overline{AB}=8$ 이고 $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 15^\circ$ 인 삼각형 ABC 에서 선분 BC 의 길이는?

[3점][2020년 9월 나09]

- ① $2\sqrt{6}$
- ② $\frac{7\sqrt{6}}{3}$
- ③ $\frac{8\sqrt{6}}{3}$
- ④ $3\sqrt{6}$
- ⑤ $\frac{10\sqrt{6}}{3}$

66. $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=10$ 인 삼각형 ABC 가 있다. 선분 AC 위에 점 D 를 $\overline{AB}=\overline{AD}$ 가 되도록 잡는다. $\overline{BD}=\sqrt{15}$ 일 때, 선분 BC 의 길이는?

[3점][2020년 9월 가12나25]

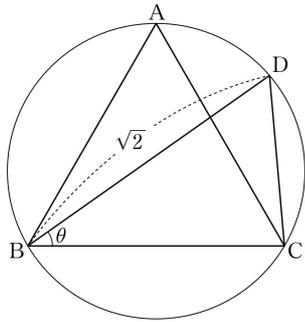


- ① $\sqrt{37}$
- ② $\sqrt{38}$
- ③ $\sqrt{39}$
- ④ $2\sqrt{10}$
- ⑤ $\sqrt{41}$

67. 정삼각형 ABC가 반지름의 길이가 r 인 원에 내접하고 있다. 선분 AC와 선분 BD가 만나고 $\overline{BD} = \sqrt{2}$ 가 되도록 원 위에서 점 D를 잡는다. $\angle DBC = \theta$ 라 할 때, $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다. 반지름의 길이 r 의 값은?

[4점][2020년 10월 나19]

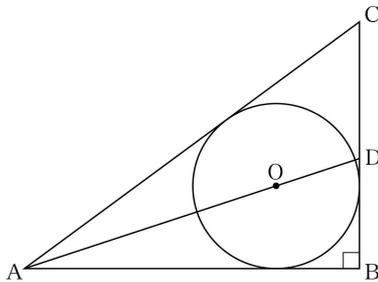
- ① $\frac{6-\sqrt{6}}{5}$
- ② $\frac{6-\sqrt{5}}{5}$
- ③ $\frac{4}{5}$
- ④ $\frac{6-\sqrt{3}}{5}$
- ⑤ $\frac{6-\sqrt{2}}{5}$



68. 그림과 같이 $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ 인 삼각형 ABC에 내접하고 반지름의 길이가 3인 원의 중심을 O라 하자. 직선 AO가 선분 BC와 만나는 점을 D라 할 때, $\overline{DB} = 4$ 이다. 삼각형 ADC의 외접원의 넓이는?

[4점][2020년 10월 가17]

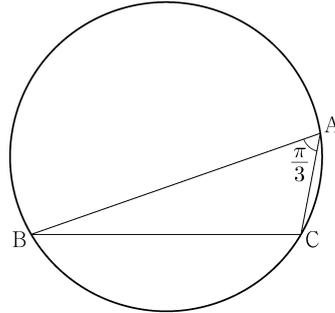
- ① $\frac{125}{2}\pi$
- ② 63π
- ③ $\frac{127}{2}\pi$
- ④ 64π
- ⑤ $\frac{129}{2}\pi$



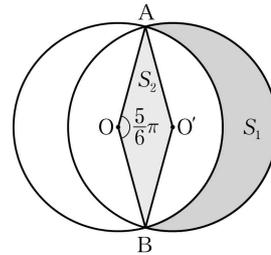
69. $\angle A = \frac{\pi}{3}$ 이고 $\overline{AB} : \overline{AC} = 3 : 1$ 인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 선분 AC의 길이는?

[3점][2021학년도 수능 가10나28]

- ① $2\sqrt{5}$
- ② $\sqrt{21}$
- ③ $\sqrt{22}$
- ④ $\sqrt{23}$
- ⑤ $2\sqrt{6}$



70. 그림과 같이 두 점 O, O'을 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 두 원 O, O'이 한 평면 위에 있다. 두 원 O, O'이 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, $\angle AOB = \frac{5}{6}\pi$ 이다.



원 O의 외부와 원 O'의 내부의 공통부분의 넓이를 S_1 , 마름모 AOB O'의 넓이를 S_2 라 할 때, $S_1 - S_2$ 의 값은?

[4점][2021년 3월 11]

- ① $\frac{5}{4}\pi$
- ② $\frac{4}{3}\pi$
- ③ $\frac{17}{12}\pi$
- ④ $\frac{3}{2}\pi$
- ⑤ $\frac{19}{12}\pi$

71. $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA} = 1 : 2 : \sqrt{2}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 28π 일 때, 선분 CA의 길이를 구하시오.

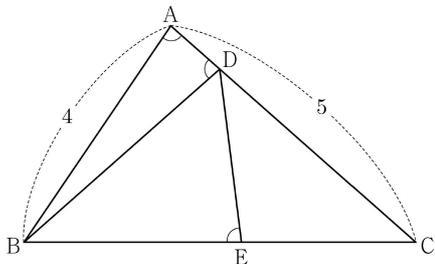
[4점][2021년 4월 20]

72. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$ 이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$$\angle BAC = \angle BDA = \angle BED$$

일 때, 선분 DE의 길이는?

[4점][2021년 6월 12]



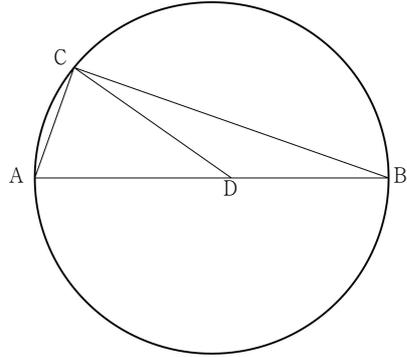
- ① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

73. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 C에 대하여

$$\overline{BC} = 12\sqrt{2}, \cos(\angle CAB) = \frac{1}{3}$$

이다. 선분 AB를 5 : 4로 내분하는 점을 D라 할 때, 삼각형 CAD의 외접원의 넓이는 S 이다. $\frac{S}{\pi}$ 의 값을 구하시오.

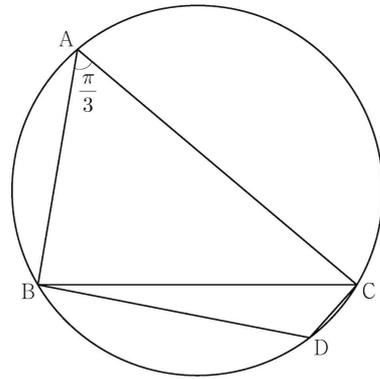
[4점][2021년 7월 20]



74. 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$ 인 원에 내접하고 $\angle A = \frac{\pi}{3}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD) = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ 일 때, $\overline{BD} + \overline{CD}$ 의 값은?

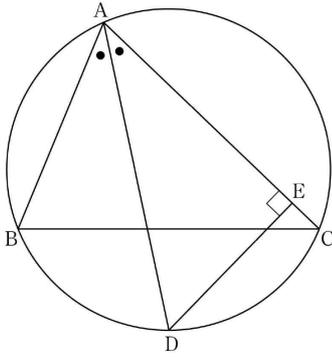
[4점][2021년 9월 12]

- ① $\frac{19}{2}$ ② 10 ③ $\frac{21}{2}$ ④ 11 ⑤ $\frac{23}{2}$

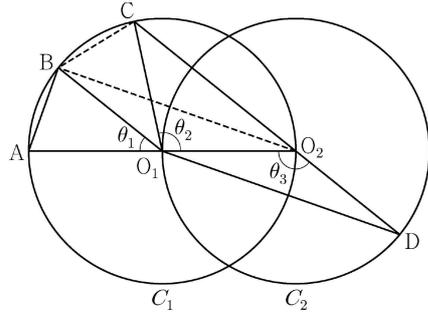


75. $\overline{AB} = 6$, $\overline{AC} = 8$ 인 예각삼각형 ABC에서 $\angle A$ 의 이등분선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 D, 점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E라 하자. 선분 AE의 길이를 k 라 할 때, $12k$ 의 값을 구하시오.

[4점][2021년 10월 21]



76. 두 점 O_1, O_2 를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{O_1O_2}$ 인 두 원 C_1, C_2 가 있다. 그림과 같이 원 C_1 위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 주어져 있고, 세 점 A, O_1, O_2 와 세 점 C, O_2, D 가 각각 한 직선 위에 있다. 이때 $\angle BO_1A = \theta_1$, $\angle O_2O_1C = \theta_2$, $\angle O_1O_2D = \theta_3$ 이라 하자.



다음은 $\overline{AB} : \overline{O_1D} = 1 : 2\sqrt{2}$ 이고, $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$ 일 때, 선분 AB와 선분 CD의 길이의 비를 구하는 과정이다.

$\angle CO_2O_1 + \angle O_1O_2D = \pi$ 이므로 $\theta_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta_2}{2}$ 이고
 $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$ 에서 $2\theta_1 + \theta_2 = \pi$ 이므로 $\angle CO_1B = \theta_1$ 이다.
 이때 $\angle O_2O_1B = \theta_1 + \theta_2 = \theta_3$ 이므로 삼각형 O_1O_2B 와 삼각형 O_2O_1D 는 합동이다.
 $\overline{AB} = k$ 라 할 때,
 $\overline{BO_2} = \overline{O_1D} = 2\sqrt{2}k$ 이므로 $\overline{AO_2} = \boxed{\text{(가)}}$ 이고,
 $\angle BO_2A = \frac{\theta_1}{2}$ 이므로 $\cos \frac{\theta_1}{2} = \boxed{\text{(나)}}$ 이다.
 삼각형 O_2BC 에서
 $\overline{BC} = k$, $\overline{BO_2} = 2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B = \frac{\theta_1}{2}$ 이므로
 코사인법칙에 의하여 $\overline{O_2C} = \boxed{\text{(다)}}$ 이다.
 $\overline{CD} = \overline{O_2D} + \overline{O_2C} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2C}$ 이므로
 $\overline{AB} : \overline{CD} = k : \left(\frac{\boxed{\text{(가)}}}{2} + \boxed{\text{(다)}} \right)$ 이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k), g(k)$ 라 하고, (나)에 알맞은 수를 p 라 할 때, $f(p) \times g(p)$ 의 값은?

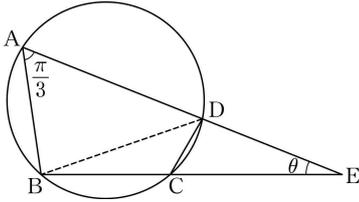
[4점][2022학년도 수능 15]

- ① $\frac{169}{27}$ ② $\frac{56}{9}$ ③ $\frac{167}{27}$ ④ $\frac{166}{27}$ ⑤ $\frac{55}{9}$

77. 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여

$$\overline{AB} = \overline{BC} = 2, \quad \overline{AD} = 3, \quad \angle BAD = \frac{\pi}{3}$$

이다. 두 직선 AD, BC의 교점을 E라 하자.



다음은 $\angle AEB = \theta$ 일 때, $\sin \theta$ 의 값을 구하는 과정이다.

삼각형 ABD와 삼각형 BCD에서 코사인법칙을 이용하면

$$\overline{CD} = \boxed{\text{(가)}}$$

이다. 삼각형 EAB와 삼각형 ECD에서

$$\angle AEB \text{는 공통, } \angle EAB = \angle ECD$$

이므로 삼각형 EAB와 삼각형 ECD는 닮음이다.

이를 이용하면

$$\overline{ED} = \boxed{\text{(나)}}$$

이다. 삼각형 ECD에서 사인법칙을 이용하면

$$\sin \theta = \boxed{\text{(다)}}$$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r 라 할 때, $(p+q) \times r$ 의 값은?

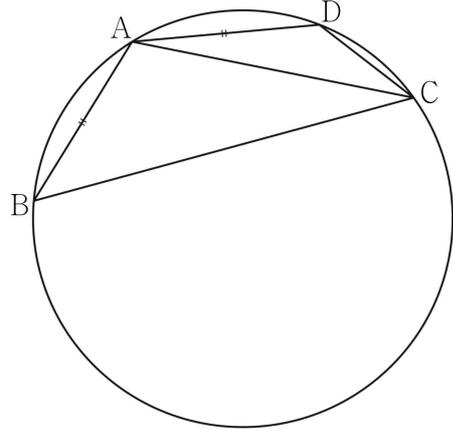
[4점][2022년 3월 공통15]

- ① $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ② $\frac{4\sqrt{3}}{7}$
- ③ $\frac{9\sqrt{3}}{14}$
- ④ $\frac{5\sqrt{3}}{7}$
- ⑤ $\frac{11\sqrt{3}}{14}$

78. 그림과 같이 반지름의 길이가 $R(5 < R < 5\sqrt{5})$ 인 원에 내접하는 사각형 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{AB} = \overline{AD}$ 이고 $\overline{AC} = 10$ 이다.

(나) 사각형 ABCD의 넓이는 40이다.



다음은 선분 BD의 길이와 R의 비를 구하는 과정이다.

$\overline{AB} = \overline{AD} = k$ 라 할 때

두 삼각형 ABC, ACD에서 각각 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle ACB) = \frac{1}{20} \left(\overline{BC} + \frac{\boxed{\text{(가)}}}{\overline{BC}} \right),$$

$$\cos(\angle DCA) = \frac{1}{20} \left(\overline{CD} + \frac{\boxed{\text{(가)}}}{\overline{CD}} \right)$$

이다.

이때 두 호 AB, AD에 대한 원주각의 크기가 같으므로

$$\cos(\angle ACB) = \cos(\angle DCA) \text{이다.}$$

사각형 ABCD의 넓이는

두 삼각형 ABD, BCD의 넓이의 합과 같으므로

$$\frac{1}{2} k^2 \sin(\angle BAD) + \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{CD} \times \sin(\pi - \angle BAD) = 40$$

에서 $\sin(\angle BAD) = \boxed{\text{(나)}}$ 이다.

따라서 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\overline{BD} : R = \boxed{\text{(다)}} : 1 \text{이다.}$$

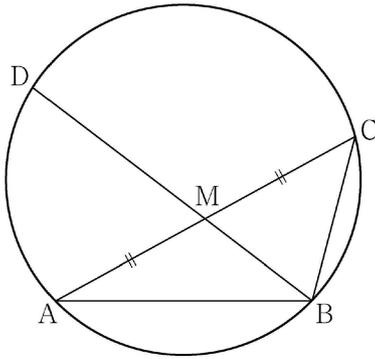
위의 (가)에 알맞은 식을 $f(k)$ 라 하고, (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q 라 할 때, $\frac{f(10p)}{q}$ 의 값은?

[4점][2022년 4월 공통15]

- ① $\frac{25}{2}$
- ② 15
- ③ $\frac{35}{2}$
- ④ 20
- ⑤ $\frac{45}{2}$

79. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$ 이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는?

[4점][2022년 6월 공통10]



- ① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$
- ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$
- ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$
- ④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$
- ⑤ $\sqrt{10}$

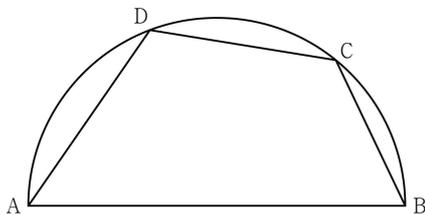
80. 길이가 14인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB위에 점 C를 $\overline{BC}=6$ 이 되도록 잡는다. 점 D가 호 AC 위의 점일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 점 D는 점 A와 점 C가 아닌 점이다.)

[4점][2022년 7월 공통14]

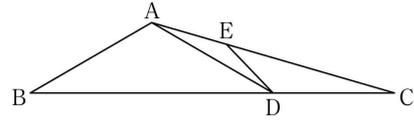
[보 기]

ㄱ. $\sin(\angle CBA)=\frac{2\sqrt{10}}{7}$
 ㄴ. $\overline{CD}=7$ 일 때, $\overline{AD}=-3+2\sqrt{30}$
 ㄷ. 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 $20\sqrt{10}$ 이다.

- ① ㄱ
- ② ㄱ, ㄴ
- ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



81. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=3\sqrt{3}$, $\overline{CA}=\sqrt{13}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위에 점 B가 아닌 점 D를 $\overline{AD}=2$ 가 되도록 잡고, 선분 AC 위에 양 끝점 A, C가 아닌 점 E를 사각형 ABDE가 원에 내접하도록 잡는다.



다음은 선분 DE의 길이를 구하는 과정이다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle ABC) = \boxed{\text{(가)}}$$

이다. 삼각형 ABD에서 $\sin(\angle ABD) = \sqrt{1 - \boxed{\text{(가)}}^2}$

이므로 사인법칙에 의하여 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이는 $\boxed{\text{(나)}}$ 이다.

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)} = \frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)}$$

이므로 $\sin(\angle CAD) = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \times \sin(\angle ACD)$ 이다.

삼각형 ADE에서 사인법칙에 의하여

$$\overline{DE} = \boxed{\text{(다)}}$$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p \times q \times r$ 의 값은?

[4점][2022년 10월 공통13]

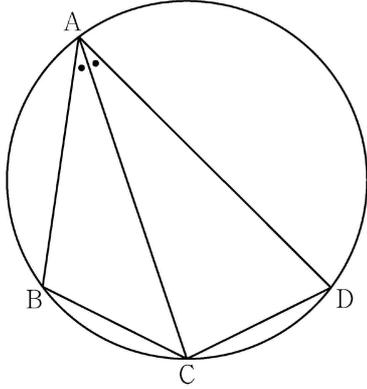
- ① $\frac{6\sqrt{13}}{13}$
- ② $\frac{7\sqrt{13}}{13}$
- ③ $\frac{8\sqrt{13}}{13}$
- ④ $\frac{9\sqrt{13}}{13}$
- ⑤ $\frac{10\sqrt{13}}{13}$

82. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고

$$\overline{AB}=5, \overline{AC}=3\sqrt{5}, \overline{AD}=7, \angle BAC = \angle CAD$$

일 때, 이 원의 반지름의 길이는?

[4점][2023학년도 수능 공통11]



① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

② $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$

④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

[해설] 수1-삼각함수

1) 256

$$a_1^2 = \frac{1}{2}, a_2^2 = 1, a_3^2 = \frac{1}{2}, a_4^2 = 0,$$

$$a_5^2 = \frac{1}{2}, a_6^2 = 1, a_7^2 = \frac{1}{2}, a_8^2 = 0, \dots$$

$$\sum_{n=1}^{32} na_n^2 = \frac{1}{2} \times \frac{16 \times 32}{2} + 1 \times \frac{8 \times 32}{2} = 256$$

2) ④

점화식에 $n = 1, 2, 3, \dots$ 를 대입하면

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = -2, a_5 = -2, a_6 = 3, \dots$$

$$\text{이므로 } a_{2n} = \begin{cases} n & (n \text{ 이 홀수}) \\ -n & (n \text{ 이 짝수}) \end{cases} \text{이다.}$$

따라서 $a_{50} = a_{2 \times 25} = 25$ 이다.

3) ③

[출제의도] 함수의 평행이동을 이해하여 삼각함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

함수 $f(x) = a \sin x + 1$ 의 그래프는

함수 $y = a \sin x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

조건 $a > 0$ 에서

$y = a \sin x$ 가 최대일 때 $f(x)$ 는 최대이고,

$y = a \sin x$ 가 최소일 때 $f(x)$ 는 최소이므로

함수 $f(x)$ 는 $\sin x = 1$ 일 때 최댓값 $M = a + 1$,

$\sin x = -1$ 일 때 최솟값 $m = -a + 1$ 을 갖는다.

따라서 $M - m = (a + 1) - (-a + 1) = 2a$

$2a = 6$ 이므로 $a = 3$ 이다.

4) 30

[출제의도] 삼각함수의 그래프의 성질 추론하기

$y = \cos x + \frac{1}{4}$ 의 그래프는 $y = \cos x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로

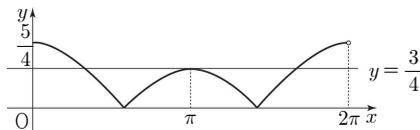
$\frac{1}{4}$ 만큼 평행이동한 그래프이므로 주기는 2π , 치역은

$$\left\{ y \mid -\frac{3}{4} \leq y \leq \frac{5}{4} \right\} \text{이다.}$$

$y = \left| \cos x + \frac{1}{4} \right|$ 의 그래프는 $y = \cos x + \frac{1}{4}$ 의 그래프에서 $y < 0$ 인

부분을 x 축에 대하여 대칭이동시켜 얻은 그래프이다.

$y = \left| \cos x + \frac{1}{4} \right|$ 의 그래프는 그림과 같다.



$y = \left| \cos x + \frac{1}{4} \right|$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나는

k 의 값은 $\frac{3}{4}$

따라서 $\alpha = \frac{3}{4}$ 이고 $40\alpha = 30$

5) ③

[출제의도] 삼각함수 사이의 관계 이해하기

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{4}$$

$$\text{이므로 } \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{8}$$

$$\text{따라서 } \tan \theta + \cot \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 8$$

6) ④

$$2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x - 3 = 0$$

$$2 - 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = 0$$

$$\cos x = t \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

$$-2t^2 + 3t - 1 = 0$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$(2t - 1)(t - 1) = 0$$

$$t = \frac{1}{2}, t = 1$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ 일 때, } x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

$$\cos x = 1 \text{ 일 때, } x = 0$$

따라서 모든 근의 합은 $0 + \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = 2\pi$ 이다

7) ①

[출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{5}, \sin \theta \cos \theta = -\frac{a}{5}$$

$$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{5} \text{ 의 양변을 제곱하면}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{25} \text{ 이므로 } 1 + 2 \times \left(-\frac{a}{5}\right) = \frac{1}{25}$$

$$\text{따라서 } a = \frac{12}{5}$$

8) 7

[출제의도] 주어진 범위에서 삼각방정식의 근을 구할 수 있는가?

$$\cos^2 x - \sin x = 1$$

$$1 - \sin^2 x - \sin x = 1$$

$$\sin^2 x + \sin x = 0$$

$$\sin x (\sin x + 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ 또는 } \sin x = -1$$

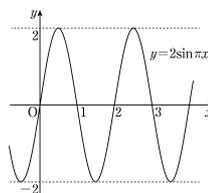
$$x = \pi \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi$$

따라서 모든 실근의 합은 $\frac{5}{2}\pi$

$$p + q = 2 + 5 = 7$$

9) ⑤

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하고 미지수의 값을 구한다.



함수 $y = a \sin \frac{\pi}{2b} x$ 의 그래프는 $y = \sin \frac{\pi}{2b} x$ 의 그래프를 y 축의

방향으로 a 배한 것이고 $a > 0$ 이므로 최댓값은 a 이고 최솟값은 $-a$ 이다.

그런데 함수 $y = a \sin \frac{\pi}{2b} x$ 의 최댓값이 2 이므로 $a = 2$

또한 $a \sin \frac{\pi}{2b} x = a \sin \left(\frac{\pi}{2b} x + 2\pi \right) = a \sin \frac{\pi}{2b} (x + 4b)$ 이므로

함수 $y = a \sin \frac{\pi}{2b} x$ 의 주기가 $4b$ 이다.

그러므로 $4b = 2, b = \frac{1}{2}$

따라서 $a + b = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

10) ④

[출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제 해결하기

$$|\sin 2x| = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \sin 2x = -\frac{1}{2}$$

i) $\sin 2x = \frac{1}{2}$

$$x = \frac{\pi}{12} \text{ 또는 } \frac{5}{12}\pi \text{ 또는 } \frac{13}{12}\pi \text{ 또는 } \frac{17}{12}\pi$$

ii) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$

$$x = \frac{7}{12}\pi \text{ 또는 } \frac{11}{12}\pi \text{ 또는 } \frac{19}{12}\pi \text{ 또는 } \frac{23}{12}\pi$$

따라서 실근의 개수는 8

11) ①

[출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sqrt{3} \sin x + 1 \text{에서}$$

$$1 + 2\sin x \cos x = \sqrt{3} \sin x + 1$$

$$\sin x(2\cos x - \sqrt{3}) = 0$$

$$0 \leq x \leq \pi \text{이므로}$$

$$\sin x = 0 \text{일 때, } x = 0 \text{ 또는 } x = \pi$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{일 때, } x = \frac{\pi}{6}$$

따라서 모든 실근의 합은 $0 + \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi$

12) ③

[출제의도] 삼각함수의 관계 이해하기

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \text{이므로}$$

$$2\cos^2 x + \sin x = 1 \text{에 대입하면}$$

$$2(1 - \sin^2 x) + \sin x = 1$$

$$(2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } \frac{11}{6}\pi$$

따라서 모든 실근의 합은 $\frac{7}{2}\pi$

13) ③

$$\sin 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (0 \leq 2x \leq 2\pi) \text{에서}$$

$$2x = \frac{5}{4}\pi \text{ 또는 } 2x = \frac{7}{4}\pi$$

$$x = \frac{5}{8}\pi \text{ 또는 } x = \frac{7}{8}\pi$$

따라서 모든 해의 합은 $\frac{5}{8}\pi + \frac{7}{8}\pi = \frac{12}{8}\pi = \frac{3}{2}\pi$ 이다.

14) 5

[출제의도] 삼각방정식을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

$$2\sin 2x + \sqrt{3} = 0 \text{에서 } \sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{따라서 } x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi$$

즉, 삼각방정식의 모든 실근의 합은

$$\frac{2}{3}\pi + \frac{5}{6}\pi = \frac{3}{2}\pi$$

따라서 $p = 2, q = 3$ 이므로 $p + q = 5$

15) ④

[출제의도] 삼각방정식의 해를 구할 수 있는가?

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \text{이므로}$$

$$\text{방정식 } \cos^2 x = \sin^2 x - \sin x \text{에서}$$

$$1 - \sin^2 x = \sin^2 x - \sin x$$

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$(2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \sin x = 1$$

이때, $0 \leq x < 2\pi$ 이므로

(i) $\sin x = -\frac{1}{2}$ 에서

$$x = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{11}{6}\pi$$

(ii) $\sin x = 1$ 에서

$$x = \frac{\pi}{2}$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 해의 합은

$$\frac{7}{6}\pi + \frac{11}{6}\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{7}{2}\pi$$

16) 9

[출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 함수의 최댓값을 구한다.

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x, \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \cos x \text{이므로}$$

$$f(x) = \sin^2 x + \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) + 1$$

$$= 1 - \cos^2 x + \cos x + 1$$

$$= -\left(\cos x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{9}{4}$$

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

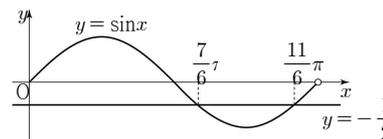
함수 $f(x)$ 는 $\cos x = \frac{1}{2}$ 일 때 최댓값 $\frac{9}{4}$ 를 갖는다.

따라서 $M = \frac{9}{4}$ 이므로

$$4M = 9$$

17) ②

[출제의도] 삼각함수 이해하기



$2\sin x + 1 < 0$ 의 해는 $\frac{7}{6}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$

$\therefore \alpha = \frac{7}{6}\pi, \beta = \frac{11}{6}\pi$

따라서 $\cos(\beta - \alpha) = \cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$

18) ③

$x = \theta + \frac{3}{4}\pi$ 라 하면

$f\left(\theta + \frac{3}{4}\pi\right) = \cos^2\theta - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + k$

$= \cos^2\theta + \sin\theta + k$

$= 1 - \sin^2\theta + \sin\theta + k$

$= -\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + k + \frac{5}{4}$

최댓값은 $k + \frac{5}{4} = 3, k = \frac{7}{4}$

최솟값은 $\sin\theta = -1$ 일 때, $m = \frac{3}{4}$

$k + m = \frac{7}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{2}$

19) ③

[출제의도] 지수함수와 삼각함수가 포함된 부등식을 이해한다.

(i) $2^x - 8 < 0$ 이고 $\cos x - \frac{1}{2} > 0$ 인 경우

$0 < x < 3$ 이고 $0 < x < \frac{\pi}{3}$ 이므로 $0 < x < \frac{\pi}{3}$

(ii) $2^x - 8 > 0$ 이고 $\cos x - \frac{1}{2} < 0$ 인 경우

$3 < x < \pi$ 이고 $\frac{\pi}{3} < x < \pi$ 이므로 $3 < x < \pi$

따라서 $0 < x < \frac{\pi}{3}$ 또는 $3 < x < \pi$ 이므로

$(b-a) + (d-c) = \left(\frac{\pi}{3} - 0\right) + (\pi - 3) = \frac{4\pi}{3} - 3$

20) ③

[출제의도] 삼각함수를 이용하여 방정식 문제해결하기

$6\sin x \cos x + 3\sin x = 2\cos x + 1$ 에서

$6\sin x \cos x + 3\sin x - 2\cos x - 1 = 0$

$(3\sin x - 1)(2\cos x + 1) = 0$

$\sin x = \frac{1}{3}$ 또는 $\cos x = -\frac{1}{2}$

$\sin x = \frac{1}{3}$ 을 만족시키는 두 실수를 α, β ($\alpha < \beta$)라 하면

$\beta = \pi - \alpha$ 이므로 $\alpha + \beta = \pi$

$\cos x = -\frac{1}{2}$ 을 만족시키는 두 실수를 γ, δ 라 하면

$\gamma + \delta = \frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi = 2\pi$

따라서 구하는 모든 실근의 합은

$\pi + 2\pi = 3\pi$

21) ④

[출제의도] 삼각부등식을 풀 수 있는가?

주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 실근을 갖지 않아야 하므로

$\frac{D}{4} = 4\cos^2\theta - 6\sin\theta < 0$

$2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 > 0$

$(2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 2) > 0$

$\sin\theta + 2 > 0$ 이므로 $\sin\theta > \frac{1}{2}$ 에서 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{5}{6}\pi$ 이므로

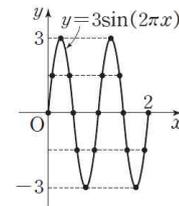
$3\alpha + \beta = \frac{4}{3}\pi$

22) ①

[출제의도] 수학내적 문제해결능력-삼각함수

$0 \leq x \leq 2$ 에서 방정식 $3\sin(2\pi x) - a = 0$ 의 실근의 개수는 곡선 $y = 3\sin(2\pi x)$ 와 직선 $y = a$ 의 교점의 개수와 같다.

함수 $y = 3\sin(2\pi x)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$ 이므로 그림에서 a 의 값의 범위에 따라 교점의 개수는 다음과 같다.



$a = 0$ 일 때 5개

$0 < |a| < 3$ 일 때 4개

$|a| = 3$ 일 때 2개

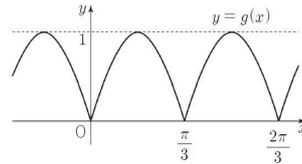
$|a| > 3$ 일 때 0개

이므로 $A = \{0, 2, 4, 5\}$

따라서 집합 A 의 모든 원소의 합은 11이다.

23) ②

함수 $g(x) = |\sin 3x|$ 의 그래프는 다음과 같다.



함수 $g(x)$ 의 주기는 $\frac{\pi}{3}$

함수 $f(x)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{|a|}$

두 함수 $f(x), g(x)$ 의 주기가 서로 같으므로 $\frac{2\pi}{|a|} = \frac{\pi}{3}$

a 는 양수이므로 $a = 6$

24) ①

$\sin^2 x = \cos^2 x + \cos x$

$1 - \cos^2 x = \cos^2 x + \cos x$

$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$ 에서

$\cos x = \frac{1}{2}$ 또는 $\cos x = -1$

$0 < x \leq 2\pi$ 이므로

$\cos x = \frac{1}{2}$ 에서 $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$

$\cos x = -1$ 에서 $x = \pi$

$\sin \frac{\pi}{3} > \cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{5}{3}\pi < \cos \frac{5}{3}\pi, \sin \pi > \cos \pi$

이므로 구하는 모든 x 의 값의 합은

$$\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4}{3}\pi$$

25) ②

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ 이므로}$$

$$\frac{\sin \theta \cos \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 - \cos \theta}{\tan \theta} = 1$$

$$\frac{\sin^2 \theta \cos \theta + (1 - \cos \theta)^2 \cos \theta}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} = 1$$

$$\frac{(\sin^2 \theta \cos^2 \theta - 2 \cos \theta + 1) \cos \theta}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} = 1$$

$$\frac{2(1 - \cos \theta) \cos \theta}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} = 1, \sin \theta = 2 \cos \theta$$

$$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{ 이고 } \cos^2 \theta = \frac{1}{5} \text{ 이므로}$$

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

26) ①

[출제의도] 삼각함수가 포함된 부등식의 해를 구할 수 있는가?

이차방정식 $x^2 - (2\sin\theta)x - 3\cos^2\theta - 5\sin\theta + 5 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 이 이차방정식이 실근을 가져야 하므로

$$\frac{D}{4} = (-\sin\theta)^2 - (-3\cos^2\theta - 5\sin\theta + 5) \geq 0$$

이어야 한다.

$$\text{즉, } \sin^2\theta + 3\cos^2\theta + 5\sin\theta - 5 \geq 0$$

$$\text{이때 } \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta \text{ 이므로}$$

$$\sin^2\theta + 3(1 - \sin^2\theta) + 5\sin\theta - 5 \geq 0$$

$$2\sin^2\theta - 5\sin\theta + 2 \leq 0$$

$$(2\sin\theta - 1)(\sin\theta - 2) \leq 0$$

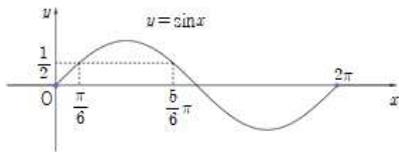
$$\sin\theta - 2 < 0 \text{ 이므로}$$

$$2\sin\theta - 1 \geq 0$$

$$\sin\theta \geq \frac{1}{2}$$

이때 $0 \leq \theta < 2\pi$ 이므로

$$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi$$



따라서 $\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{5}{6}\pi$ 이므로

$$\therefore 4\beta - 2\alpha = 4 \times \frac{5}{6}\pi - 2 \times \frac{\pi}{6} = 3\pi$$

27) ②

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{1}{4} = 1 + 2\sin\theta\cos\theta, \sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{8}$$

$$\frac{1 + \tan\theta}{\sin\theta} = \frac{1 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\sin\theta} = \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} = -\frac{4}{3}$$

28) 169

$$0 \leq x < 2^{n+1} \text{ 일 때, } 0 \leq \frac{\pi}{2^n}x < 2\pi \text{ 이므로}$$

$$\text{부등식 } \cos\left(\frac{\pi}{2^n}x\right) \leq -\frac{1}{2} \text{ 의 해는}$$

$$\frac{2}{3}\pi \leq \frac{\pi}{2^n}x \leq \frac{4}{3}\pi, \text{ 즉 } \frac{2^{n+1}}{3} \leq x \leq \frac{2^{n+2}}{3}$$

$$a_n \text{ 은 } \frac{2^{n+1}}{3} \leq x \leq \frac{2^{n+2}}{3} \text{ 을 만족시키는 서로 다른 모든 자연수 } x \text{ 의}$$

$$\text{개수이고, } \frac{2^{n+2}}{3} \text{ 은 자연수가 아니므로}$$

$$\sum_{n=1}^7 a_n \text{ 은 } \frac{2^2}{3} \leq x \leq \frac{2^9}{3} \text{ 인 자연수의 개수와 같다.}$$

$$\frac{2^2}{3} = 1.333 \dots, \frac{2^9}{3} = 170.666 \dots$$

$$\text{따라서 } \sum_{n=1}^7 a_n = 170 - 1 = 169$$

[참고]

$$n = 1 \text{ 일 때, } \frac{2^2}{3} \leq x \leq \frac{2^3}{3} \text{ 인 자연수 } x \text{ 는 } 2 \text{ 이므로 } a_1 = 1$$

$$n = 2 \text{ 일 때, } \frac{2^3}{3} \leq x \leq \frac{2^4}{3} \text{ 인 자연수 } x \text{ 는 } 3, 4, 5 \text{ 이므로 } a_2 = 3$$

$$n = 3 \text{ 일 때, } \frac{2^4}{3} \leq x \leq \frac{2^5}{3} \text{ 인 자연수 } x \text{ 는 } 6, 7, 8, 9, 10 \text{ 이므로 } a_3 = 5$$

$$n = 4 \text{ 일 때, } \frac{2^5}{3} \leq x \leq \frac{2^6}{3} \text{ 인 자연수 } x \text{ 는 } 11, 12, 13, \dots, 21 \text{ 이므로}$$

$$a_4 = 11$$

$$n = 5 \text{ 일 때, } \frac{2^6}{3} \leq x \leq \frac{2^7}{3} \text{ 인 자연수 } x \text{ 는 } 22, 23, 24, \dots, 42 \text{ 이므로}$$

$$a_5 = 21$$

$$n = 6 \text{ 일 때, } \frac{2^7}{3} \leq x \leq \frac{2^8}{3} \text{ 인 자연수 } x \text{ 는 } 43, 44, 45, \dots, 85 \text{ 이므로}$$

$$a_6 = 43$$

$$n = 7 \text{ 일 때, } \frac{2^8}{3} \leq x \leq \frac{2^9}{3} \text{ 인 자연수 } x \text{ 는 } 86, 87, 88, \dots, 170 \text{ 이므로}$$

$$a_7 = 85$$

29) ⑤

[출제의도] 삼각함수가 포함된 방정식을 푼다.

$$\sin x = \sqrt{3}(1 + \cos x), \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \text{ 이므로}$$

$$1 - \cos^2 x = 3(1 + \cos x)^2, 2(1 + \cos x)(2\cos x + 1) = 0$$

$$(i) \cos x = -1 \text{ 일 때, } \sin x = 0 \text{ 이고 } x = \pi$$

$$(ii) \cos x = -\frac{1}{2} \text{ 일 때, } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 이고 } x = \frac{2}{3}\pi$$

$$(i), (ii) \text{ 에서 방정식의 모든 해의 합은 } \frac{5}{3}\pi \text{ 이다.}$$

30) 48

[출제의도] 삼각함수의 성질을 이해한다.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \tan(\pi - \theta) = \cos \theta \times (-\tan \theta) = -\sin \theta$$

$$\sin \theta = -\frac{3}{5} \text{ 이므로 } 30(1 - \sin \theta) = 30 \times \frac{8}{5} = 48$$

31) ②

$$4\sin^2 x - 4\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3 = 0$$

$$4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0$$

$$(2\sin x - 1)(2\sin x + 3) = 0$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \text{ 이므로}$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{5}{6}\pi,$$

따라서 모든 해의 합은 6π

32) ③

[출제의도] 삼각함수 이해하기

$$2\cos^2 x - \sin(\pi + x) - 2 = 2(1 - \sin^2 x) + \sin x - 2$$

$$= -2\sin^2 x + \sin x = -\sin x(2\sin x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ 또는 } \sin x = \frac{1}{2}$$

$0 < x < 2\pi$ 이므로

$$\sin x = 0 \text{ 에서 } x = \pi$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ 에서 } x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi$$

따라서 모든 해의 합은 2π 이다.

33) 40

[출제의도] 삼각함수 이해하기

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ 이므로}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2\sin \theta \cos \theta = 1 + 2 \times \frac{7}{18} = \frac{16}{9}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{4}{3}$$

따라서 $30(\sin \theta + \cos \theta) = 40$

34) ⑤

[출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

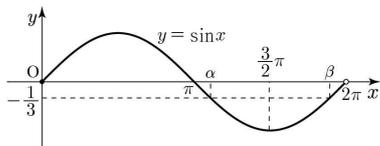
$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \text{ 이므로}$$

$$3(1 - \sin^2 x) + 5\sin x - 1 = 0$$

$$3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$$

$$(3\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \text{ 이므로 } \sin x = -\frac{1}{3} \quad \dots \textcircled{1}$$



①을 만족시키는 x 의 값을 $x = \alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{3}{2}\pi \text{ 이므로 } \alpha + \beta = 3\pi$$

따라서 모든 해의 합은 3π

35) ①

[출제의도] 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

$$\frac{\sin \theta}{1 - \sin \theta} - \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta} = 4 \text{ 에서}$$

$$\frac{\sin \theta(1 + \sin \theta) - \sin \theta(1 - \sin \theta)}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} = 4$$

$$\frac{2\sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} = 4$$

$$\frac{2(1 - \cos^2 \theta)}{\cos^2 \theta} = 4$$

$$1 - \cos^2 \theta = 2\cos^2 \theta$$

따라서

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{3}$$

이고, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이므로

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

36) ①

[출제의도] 삼각함수의 정의와 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

$$\tan \theta - \frac{6}{\tan \theta} = 1 \text{ 이므로}$$

양변에 $\tan \theta$ 를 곱하면

$$\tan^2 \theta - 6 = \tan \theta$$

$$\tan^2 \theta - \tan \theta - 6 = 0$$

$$(\tan \theta + 2)(\tan \theta - 3) = 0$$

$$\tan \theta = -2 \text{ 또는 } \tan \theta = 3$$

이때, $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 이므로

$$\tan \theta = 3$$

이때,

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 3,$$

$$\sin \theta = 3\cos \theta$$

이므로

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ 에 대입하면}$$

$$9\cos^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$10\cos^2 \theta = 1$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ 또는 } \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

이때, $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 이므로

$$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}} \quad \dots \textcircled{1}$$

이 값을 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에 대입하면

$$\sin^2 \theta + \frac{1}{10} = 1$$

$$\sin^2 \theta = \frac{9}{10}$$

$$\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}} \text{ 또는 } \sin \theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

이때, $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 이므로

$$\sin \theta = -\frac{3}{\sqrt{10}} \quad \dots \textcircled{2}$$

따라서 ①과 ②에서

$$\begin{aligned} \therefore \sin \theta + \cos \theta &= \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \\ &= -\frac{4}{\sqrt{10}} \\ &= -\frac{2\sqrt{10}}{5} \end{aligned}$$

37) 4

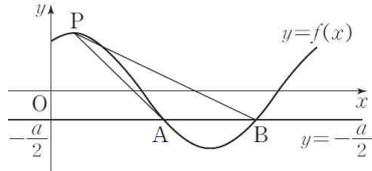
[출제의도] 이해능력-삼각함수

$a \sin \frac{x+\pi}{3} = -\frac{a}{2}$ 에서 $\sin \frac{x+\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{x+\pi}{3} = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } \frac{x+\pi}{3} = \frac{11}{6}\pi$$

$$x = \frac{5}{2}\pi \text{ 또는 } x = \frac{9}{2}\pi$$

$$\text{즉, } \overline{AB} = \frac{9}{2}\pi - \frac{5}{2}\pi = 2\pi$$



삼각형 PAB 의 넓이가 최대이려면 삼각형 PAB 의 높이가 최대이어야 하므로 점 P 의 y 좌표가 a 일 때 최대이다.

삼각형 PAB 의 높이가 최대일 때 그 높이는 $\frac{3}{2}a$ 이다.

삼각형 PAB 의 넓이의 최댓값이 6π 이므로

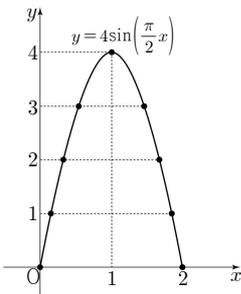
$$\frac{1}{2} \times 2\pi \times \frac{3}{2}a = 6\pi$$

따라서 $a = 4$

38) 9

[출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

곡선 $y = 4\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ ($0 \leq x \leq 2$)는 그림과 같다.



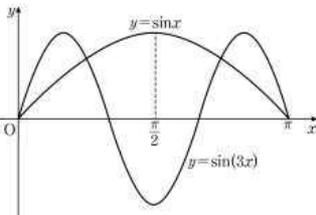
따라서 y 좌표가 정수인 점의 개수는 9

39) 9

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 두 그래프가 만나는 점의 개수를 추론한다.

두 함수 $y = \sin x$, $y = \sin(3x)$ 의 주기가 각각 2π , $\frac{2\pi}{3}$ 이므로

$0 \leq x \leq \pi$ 에서 두 곡선 $y = \sin x$, $y = \sin(3x)$ 를 나타내면 [그림 1]과 같다.

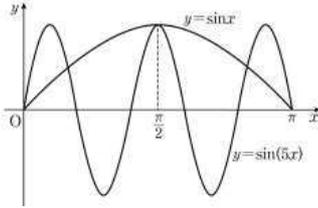


[그림 1]

[그림 1]에서 두 곡선 $y = \sin x$, $y = \sin(3x)$ 의 교점의 개수가 4이므로 $a_3 = 4$

두 함수 $y = \sin x$, $y = \sin(5x)$ 의 주기가 각각 2π , $\frac{2\pi}{5}$ 이므로

$0 \leq x \leq \pi$ 에서 두 곡선 $y = \sin x$, $y = \sin(5x)$ 를 좌표평면에 나타내면 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

[그림 2]에서 두 곡선 $y = \sin x$, $y = \sin(5x)$ 의 교점의 개수가 5이므로 $a_5 = 5$

따라서 $a_3 + a_5 = 4 + 5 = 9$

40) ②

[출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

$$f(0) = a = -3$$

함수 $f(x)$ 의 주기가 π 이므로 $\frac{2\pi}{b} = \pi$, $b = 2$

$$\therefore g(x) = 2\sin x - 3$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \text{ 이므로 } -5 \leq 2\sin x - 3 \leq -1$$

따라서 함수 $g(x)$ 의 최댓값은 -1

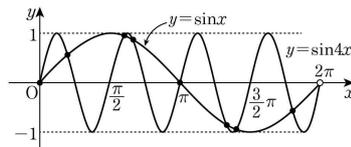
41) ④

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 교점의 개수를 구한다.

함수 $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 일치하고

함수 $y = \sin 4x$ 의 최댓값은 1, 최솟값은 -1 , 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이므로

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 두 함수 $y = \sin x$ 와 $y = \sin 4x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 두 곡선이 만나는 점의 개수는 8

42) 40

[출제의도] 삼각함수의 그래프의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

단원구간 $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}\right]$ 에서 $0 < a < \frac{4}{7}$ 이므로

$$-\frac{\pi}{a} < -\frac{7}{4}\pi, \frac{7\pi}{2} < \frac{2\pi}{a} \text{ 이다.}$$

함수 $f(x) = 2\sin(ax) + b$ 의 그래프가 두 점 $A\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $B\left(\frac{7\pi}{2}, 0\right)$ 을 지나므로

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(-\frac{a}{2}\pi\right) + b = -2\sin\left(\frac{a}{2}\pi\right) + b = 0$$

$$f\left(\frac{7\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{7a}{2}\pi\right) + b = 0$$

$$\text{따라서 } \sin\left(\frac{7a}{2}\pi\right) = -\sin\left(\frac{a}{2}\pi\right)$$

$$0 < a < \frac{4}{7} \text{ 에서 } 0 < \frac{a}{2}\pi < \frac{2}{7}\pi, 0 < \frac{7a}{2}\pi < 2\pi \text{ 이므로}$$

$$\frac{7a}{2}\pi = 2\pi - \frac{a}{2}\pi \text{ 또는 } \frac{7a}{2}\pi = \pi + \frac{a}{2}\pi$$

따라서 $a = \frac{1}{2}$ 또는 $a = \frac{1}{3}$

(i) $a = \frac{1}{2}$ 일 때

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) + b \text{ 에서}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + b = 2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + b = -\sqrt{2} + b = 0$$

이므로 $b = \sqrt{2}$

이는 b 는 유리수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a = \frac{1}{3}$ 일 때

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{3}x\right) + b \text{ 에서}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + b = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + b = -1 + b = 0$$

이므로 $b = 1$

이때 $f\left(\frac{7}{2}\pi\right) = 0$ 이다.

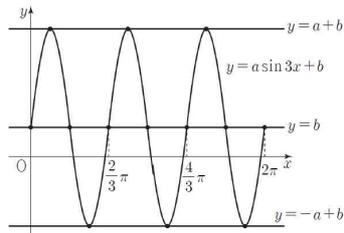
(i), (ii)에서 $a = \frac{1}{3}$, $b = 1$ 이고

$$30(a+b) = 30 \times \left(\frac{1}{3} + 1\right) = 40$$

43) 14

함수 $y = a \sin 3x + b$ 의 그래프의 주기가 $\frac{2}{3}\pi$ 이므로 $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서

함수 $y = a \sin 3x + b$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $y = a \sin 3x + b$ 의 그래프가 직선 $y = k$ 와 만나는 점의 개수는

$k = -a + b$ 또는 $k = a + b$ 일 때, 3

$k = b$ 일 때, 7이므로 $b = 2$ 이고,

$$-a + 2 = 9 \text{ 또는 } a + 2 = 9$$

a 가 양수이므로 $a = 7$

따라서 $a \times b = 7 \times 2 = 14$

44) ②

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 교점의 좌표를 구한다.

두 함수의 그래프가 만나는 점의 y 좌표가 같으므로

$$\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \text{ 이므로 } 2\sin x = 1$$

즉, $\sin x = \frac{1}{2}$, 그러므로 $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$

따라서 모든 점의 x 좌표의 합은 π

45) 10

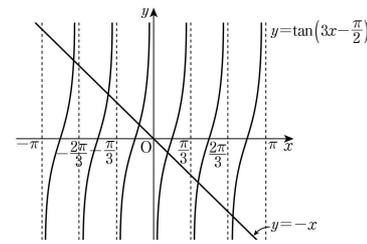
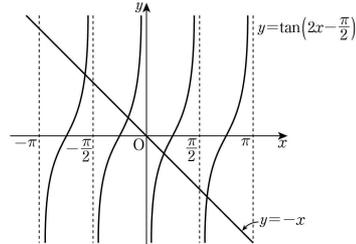
[출제의도] 삼각함수의 그래프와 직선의 교점의 개수를 구한다.

$$y = \tan\left(nx - \frac{\pi}{2}\right) = \tan n\left(x - \frac{\pi}{2n}\right) \text{의 주기는 } \frac{\pi}{n} \text{ 이고}$$

$y = \tan\left(nx - \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프는 $y = \tan nx$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

$\frac{\pi}{2n}$ 만큼 평행이동한 그래프이다.

아래 그림은 $n=2$, $n=3$ 일 때의 그래프이다.



그러므로 직선 $y = -x$ 와

$y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프의 교점의 개수는 $a_2 = 4$,

$y = \tan\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프의 교점의 개수는 $a_3 = 6$

따라서 $a_2 + a_3 = 4 + 6 = 10$

46) ③

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하고 조건을 만족시키는 삼각함수를 구할 수 있는가?

함수 $y = a \sin b\pi x$ 의 주기는

$$\frac{2\pi}{b\pi} = \frac{2}{b}$$

이므로 두 점 A, B의 좌표는

$$A\left(\frac{1}{2b}, a\right), B\left(\frac{5}{2b}, a\right)$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이가 5이므로

$$\frac{1}{2} \times a \times \left(\frac{5}{2b} - \frac{1}{2b}\right) = 5, \frac{a}{b} = 5$$

$$a = 5b \quad \dots \textcircled{1}$$

직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$ 이므로

$$\frac{a}{\frac{1}{2b}} \times \frac{a}{\frac{5}{2b}} = 2ab \times \frac{2ab}{5}$$

$$= \frac{4a^2b^2}{5}$$

$$= \frac{5}{4}$$

$$a^2b^2 = \frac{25}{16}, ab = \frac{5}{4} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ 이므로

$$a + b = 3$$

47) ③

[출제의도] 삼각함수의 그래프의 성질을 이용하여 조건을 만족하는 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

$$\frac{\pi}{a} = a \text{ 이므로}$$

함수 $f(x)$ 의 주기는 a 이다.

직선 AB는 원점을 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$ 인 직선이므로 양수 t 에 대하여

$B(t, \sqrt{3}t)$ 로 놓으면

$A(-t, -\sqrt{3}t)$ 이고,

$\overline{AB} = 4t$ 이다.

이때, 함수 $f(x)$ 의 주기가 a 이므로

$\overline{AC} = 4t = a$ 이고,

$C(-t+a, -\sqrt{3}t)$, 즉 $C(3t, -\sqrt{3}t)$ 이다.

점 C가 곡선 $y = \tan \frac{\pi x}{a} = \tan \frac{\pi x}{4t}$ 위의 점이므로

$$-\sqrt{3}t = \tan \frac{\pi \times 3t}{4t}$$

$$-\sqrt{3}t = \tan \frac{3\pi}{4} \text{에서}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{4} \times (4t)^2 &= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

48) ③

[출제의도] 삼각함수의 뜻과 그래프 이해하기

함수 $y = \sin kx$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{k}$

$0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $\sin kx = \frac{1}{3}$ 의 서로 다른 실근의 개수는

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 곡선 $y = \sin kx$ 와 직선 $y = \frac{1}{3}$ 이 만나는 점의 개수와 같다.

$1 \leq l \leq k$ 인 자연수 l 에 대하여

$\frac{2(l-1)\pi}{k} \leq x < \frac{2l\pi}{k}$ 에서 곡선 $y = \sin kx$ 와 직선 $y = \frac{1}{3}$ 이 만나는

점의 개수는 2이고

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 곡선 $y = \sin kx$ 와 직선 $y = \frac{1}{3}$ 이 만나는 점의 개수가

8이므로

$2k = 8$ 에서 $k = 4$

$0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $\sin 4x = \frac{1}{3}$ 의 서로 다른 실근을 작은 수부터

크기순으로 나열한 것을

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_8$ 이라 하자.

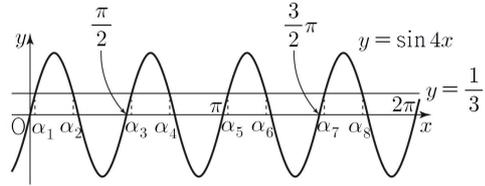
함수 $y = \sin 4x$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{4} - \alpha_1, \alpha_3 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1, \alpha_4 = \frac{3}{4}\pi - \alpha_1, \alpha_5 = \pi + \alpha_1,$$

$$\alpha_6 = \frac{5}{4}\pi - \alpha_1, \alpha_7 = \frac{3}{2}\pi + \alpha_1, \alpha_8 = \frac{7}{4}\pi - \alpha_1$$

따라서 구하는 모든 해의 합은 7π

[참고]



49) ③

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 상수의 값을 구한다.

$$0 \leq x \leq \frac{2\pi}{a} \text{에서 } 0 \leq ax \leq 2\pi \text{이므로}$$

$$2\cos ax = 1, \text{ 즉 } \cos ax = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$ax = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } ax = \frac{5\pi}{3}, \text{ 즉 } x = \frac{\pi}{3a} \text{ 또는 } x = \frac{5\pi}{3a}$$

두 점 A, B의 좌표가 각각 $(\frac{\pi}{3a}, 1), (\frac{5\pi}{3a}, 1)$ 이고 $\overline{AB} = \frac{8}{3}$ 이므로

$$\frac{5\pi}{3a} - \frac{\pi}{3a} = \frac{4\pi}{3a} = \frac{8}{3}$$

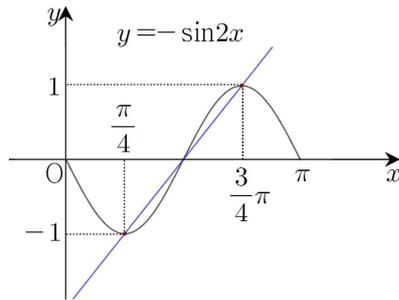
$$a = \frac{4\pi}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{\pi}{2}$$

50) ④

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 곡선 위의 두 점을 지나는 직선의 기울기를 구할 수 있는가?

함수 $f(x) = -\sin 2x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 이므로

함수 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{4}$ 일 때 최솟값

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$$

을 갖고, $x = \frac{3\pi}{4}$ 일 때 최댓값

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sin \frac{3}{2}\pi = 1$$

따라서 $a = \frac{3}{4}\pi, b = \frac{\pi}{4}$ 이므로

두 점 $(\frac{3}{4}\pi, 1), (\frac{\pi}{4}, -1)$ 을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{-1-1}{\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}\pi} = \frac{2}{-\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{\pi}$$

51) ③

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 $x_1 (0 < x_1 < 1), x_2, x_3$ 이라 하면

삼각함수 $y = \sin \frac{\pi}{2}x$ 의 주기가 4이므로

$$x_2 = 2 - x_1, x_3 = x_1 + 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + (2 - x_1) + (x_1 + 4) = x_1 + 6 = \frac{25}{4}$$

$$x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 2 - x_1 = \frac{7}{4}$$

$$\text{따라서 } \overline{AB} = x_2 - x_1 = \frac{3}{2}$$

52) ③

$$12 - \alpha_1 = \alpha_2 \text{ 이므로 } \alpha_2 - \alpha_1 = 12 - 2\alpha_1 = 8, \alpha_1 = 2$$

$$f(2) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = k$$

$$-3 \cos \frac{\pi x}{6} - 1 = \frac{1}{2}, \cos \frac{\pi x}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi x}{6} = \frac{2}{3}\pi, x = 4,$$

$$\beta_1 = 4, \beta_2 = 12 - 4 = 8 \text{ 이므로}$$

$$|\beta_1 - \beta_2| = 4$$

53) ④

[출제의도] 삼각함수의 그래프의 성질을 활용하여 문제를 해결한다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=2$ 와 만나는 점의 x 좌표는

$$0 \leq x < \frac{4\pi}{a} \text{ 일 때 방정식}$$

$$\left| 4 \sin \left(ax - \frac{\pi}{3} \right) + 2 \right| = 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

의 실근과 같다.

$$ax - \frac{\pi}{3} = t \text{ 라 하면 } -\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{11\pi}{3} \text{ 이고}$$

$$|4 \sin t + 2| = 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

에서 $\sin t = 0$ 또는 $\sin t = -1$

$$-\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{11\pi}{3} \text{ 일 때, 방정식 } \textcircled{2} \text{의 실근은}$$

$$0, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, 3\pi, \frac{7\pi}{2} \text{의 6개이고}$$

이 6개의 실근의 합은 11π 이다.

따라서 $n=6$ 이고 방정식 $\textcircled{1}$ 의 6개의 실근의 합이 39이므로

$$39a - \frac{\pi}{3} \times 6 = 11\pi, a = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{따라서 } n \times a = 6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi$$

54) ③

[출제의도] 닫힌구간에서 탄젠트함수의 최댓값과 최솟값을 이용하여 두 상수의 곱을 구할 수 있는가?

$$\text{함수 } f(x) = a - \sqrt{3} \tan 2x \text{의 그래프의 주기는 } \frac{\pi}{2} \text{이다.}$$

$$\text{함수 } f(x) \text{가 닫힌구간 } \left[-\frac{\pi}{6}, b \right] \text{에서 최댓값과 최솟값을 가지므로}$$

$$-\frac{\pi}{6} < b < \frac{\pi}{4} \text{이다.}$$

한편, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 구간 $\left[-\frac{\pi}{6}, b \right]$ 에서 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

$$\text{함수 } f(x) \text{는 } x = -\frac{\pi}{6} \text{에서 최댓값 7을 가지므로}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = a - \sqrt{3} \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 7 \text{에서}$$

$$a + \sqrt{3} \tan \frac{\pi}{3} = 7$$

$$a + 3 = 7$$

$$a = 4$$

함수 $f(x)$ 는 $x=b$ 에서 최솟값 3을 가지므로

$$f(b) = 4 - \sqrt{3} \tan 2b = 3 \text{에서}$$

$$\tan 2b = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{이때, } -\frac{\pi}{3} < 2b < \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

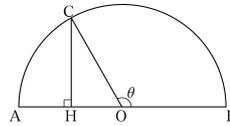
$$2b = \frac{\pi}{6}$$

$$b = \frac{\pi}{12}$$

$$\text{따라서 } a \times b = 4 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

55) 27

[출제의도] 호도법을 이해하여 주어진 도형에서 선분의 길이를 구한다.



반원의 중심을 O라 하면 반원의 지름의 길이가 12 이므로 $\overline{OB} = 6$ 이다.

$\angle COB = \theta$ 라 하면 호 BC의 길이가 4π 이므로

$$6 \times \theta = 4\pi, \theta = \frac{2}{3}\pi$$

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\angle COH = \pi - \theta = \frac{\pi}{3}$$

삼각형 CHO는 직각삼각형이고 $\overline{OC} = 6$ 이므로

$$\overline{CH} = \overline{OC} \times \sin \frac{\pi}{3} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$\text{따라서 } \overline{CH}^2 = (3\sqrt{3})^2 = 27$$

56) 80

[출제의도] 삼각함수의 정의를 이해한다.

원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원이 세 동경 OP, OQ, OR와 만나는 점을 각각 A, B, C라 하자.

$$\text{점 P가 제 1사분면 위에 있고, } \sin \alpha = \frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$\text{점 A의 좌표는 } A(2\sqrt{2}, 1)$$

점 Q가 점 P와 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

동경 OQ도 동경 OP와 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다. 그러므로 점 B의 좌표는 $B(1, 2\sqrt{2})$

점 R가 점 Q와 원점에 대하여 대칭이므로

동경 OR도 동경 OQ와 원점에 대하여 대칭이다.

그러므로 점 C의 좌표는 $C(-1, -2\sqrt{2})$

삼각함수의 정의에 의해

$$\sin \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \tan \gamma = \frac{(-2\sqrt{2})}{(-1)} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{따라서 } 9(\sin^2 \beta + \tan^2 \gamma) = 9 \times \left(\frac{8}{9} + 8 \right) = 80$$

57) ②

[출제의도] 삼각함수의 성질을 이해하여 주어진 조건을 만족시키는 값을 구한다.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$ 이므로 사인법칙에 의해

$$\frac{10}{\sin C} = 2 \times 3\sqrt{5}, \sin C = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

삼각형 ABC는 예각삼각형이므로

$$\cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{a^2 + b^2 - ab \cos C}{ab} = \frac{4}{3} \text{에서 } \frac{a^2 + b^2 - \frac{2}{3}ab}{ab} = \frac{4}{3}$$

$$3a^2 + 3b^2 - 2ab = 4ab, 3(a-b)^2 = 0 \text{이므로 } a = b$$

코사인법칙에 의해

$$10^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = a^2 + a^2 - 2a^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}a^2,$$

$$100 = \frac{2}{3}a^2, a^2 = 150$$

따라서 $ab = a^2 = 150$

58) ③

[출제의도] 코사인법칙을 이용하여 문제를 해결한다.

$$\overline{BC} = 2\sqrt{5}, \overline{OB} = \overline{OC} = \sqrt{10} \text{이므로 삼각형 OBC는}$$

직각이등변삼각형이고 $\angle BOC = \frac{\pi}{2}$ 이다.

$$\angle AOB = \alpha, \angle AOC = \beta \text{라 하면}$$

두 삼각형 OAB, OCA의 넓이 S_1, S_2 는 각각

$$S_1 = \frac{1}{2} \times (\sqrt{10})^2 \times \sin \alpha = 5 \sin \alpha$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times (\sqrt{10})^2 \times \sin \beta = 5 \sin \beta$$

주어진 조건에서 $3S_1 = 4S_2$ 이므로

$$\sin \alpha = \frac{4}{3} \sin \beta$$

$$\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = 2\pi \text{이므로 } \beta = \frac{3}{2}\pi - \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{3} \sin \left(\frac{3}{2}\pi - \alpha \right) = -\frac{4}{3} \cos \alpha \dots\dots \text{㉠}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{에서 } \frac{16}{9} \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{9}{25}$$

$$\sin \alpha > 0 \text{이므로 ㉠에서 } \cos \alpha < 0$$

$$\text{따라서 } \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

코사인법칙에 의하여 구하는 선분 AB의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(\overline{OA})^2 + (\overline{OB})^2 - 2 \times \overline{OA} \times \overline{OB} \cos \alpha} \\ &= \sqrt{(\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 - 2(\sqrt{10})^2 \times \left(-\frac{3}{5}\right)} \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

59) 32

[출제의도] 호도법을 이용하여 부채꼴의 넓이를 계산한다.

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 할 때, 중심각의 크기가

$$1 \text{라디안이므로 } \frac{l}{r} = 1 \text{ 즉, } l = r$$

부채꼴의 둘레의 길이는 $2r + l = 24$ 이므로

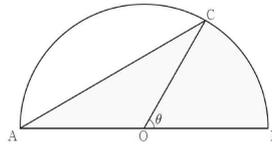
$$l = r \text{를 대입하면 } 3r = 24$$

$$r = 8, l = 8$$

$$\text{따라서 부채꼴의 넓이는 } \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 = 32$$

60) ③

반원의 중심을 O라 하고, 부채꼴 OBC의 중심각의 크기를 θ 라 하자.



반원의 반지름의 길이가 6이고 호 CB의 길이가 2π 이므로

$$2\pi = 6\theta \text{에서 } \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{부채꼴 OBC의 넓이는 } \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{\pi}{3} = 6\pi$$

$$\angle COA = \frac{2\pi}{3} \text{이므로 삼각형 CAO의 넓이는}$$

$$\frac{1}{2} \times 6^2 \times \sin \frac{2\pi}{3} = 9\sqrt{3}$$

$$\text{따라서 구하는 넓이는 } 6\pi + 9\sqrt{3}$$

61) ④

부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 r 이라 하면

$$\overline{OP} = \frac{3}{4}r, \overline{OQ} = \frac{1}{3}r$$

삼각형 OPQ의 넓이가 $4\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}r \times \frac{1}{3}r \times \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{16}r^2 = 4\sqrt{3}, r = 8$$

$$\text{따라서 호의 길이는 } 8 \times \frac{\pi}{3} = \frac{8}{3}\pi$$

62) ①

원 C의 반지름의 길이를 R 라 하면

$$\text{원 C의 넓이가 } \frac{49}{3}\pi \text{이므로}$$

$$R^2\pi = \frac{49}{3}\pi, R = \frac{7}{3}\sqrt{3}$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2R, \overline{BC} = 2 \times \frac{7}{3}\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 7$$

삼각형 ABC에서 $\overline{AC} = a$ 라 하면 코사인법칙에 의해

$$7^2 = a^2 + 3^2 - 2 \times a \times 3 \times \cos \frac{\pi}{3}$$

$$a^2 = 3a - 40 = 0, (a-8)(a+5) = 0$$

$$a > 0 \text{이므로 } a = 8$$

$\overline{AC} = 8$ 이고 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

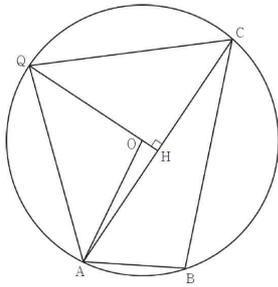
$$\cos(\angle CBA) = \frac{3^2 + 7^2 - 8^2}{2 \times 3 \times 7} = -\frac{1}{7}$$

이므로 $\frac{\pi}{2} < \angle CBA < \pi$ 가 되어 삼각형 ABC는 둔각삼각형이다.

삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되도록 하는 점을 Q라 하면

점 Q는 선분 AC의 수직이등분선과 원 C의 두 교점 중 직선 AC로부터 멀리 떨어져 있는 점이다.

그림과 같이 점 Q에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 원 C의 중심 O는 선분 QH 위에 있다.



직각삼각형 AHO에서

$$\overline{OH} = \sqrt{\left(\frac{7}{3}\sqrt{3}\right)^2 - 4^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\overline{QH} = \frac{8}{3}\sqrt{3}$ 이므로 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 8 \times \frac{8}{3}\sqrt{3} = \frac{32}{3}\sqrt{3}$$

63) ①

$\angle DCG = \theta$ ($0 < \theta < \pi$), $\angle BCE = \pi - \theta$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{11}}{6} \text{ 이므로 } \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = \frac{25}{36}$$

코사인법칙에 의하여

$$\overline{DG}^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \cos\theta = 25 - 24\cos\theta$$

$$\begin{aligned} \overline{BE}^2 &= 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \cos(\pi - \theta) \\ &= 25 - 24\cos(\pi - \theta) = 25 + 24\cos\theta \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \overline{DG} \times \overline{BE} = \sqrt{25^2 - 24^2 \times \cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{25^2 - 24^2 \times \frac{25}{36}}$$

$$= 5\sqrt{25 - 16} = 15$$

64) ⑤

삼각형 ABC의 넓이가 $\sqrt{6}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{7} \times \sin\theta = \sqrt{6}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{42}}{7}$$

$\angle A$ 는 예각이므로 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$\text{따라서 } \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta = \sqrt{1 - \frac{6}{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

65) ③

$\angle C = 120^\circ$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 45^\circ} = \frac{8}{\sin 120^\circ} \text{ 따라서}$$

$$\overline{BC} = \frac{8}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{8\sqrt{6}}{3}$$

66) ⑤

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{6^2 + 6^2 - \{\sqrt{15}\}^2}{2 \times 6 \times 6} = \frac{57}{72}$$

이므로 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{CA} \times \cos A \\ &= 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \frac{57}{72} \end{aligned}$$

$$= 36 + 100 - 95 = 41$$

$$\text{따라서 } \overline{BC} = \sqrt{41}$$

67) ①

[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 외접원의 반지름의 길이를 구한다.

주어진 원이 삼각형 BCD의 외접원이고 반지름의 길이가 r 이므로 사인법칙에 의하여

$$\overline{CD} = 2r \sin\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}r, \overline{BC} = 2r \sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}r$$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{3}r)^2 = (\sqrt{2})^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^2 - 2 \times \sqrt{2} \times \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right) \times \cos\frac{\pi}{3}$$

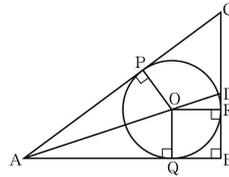
이 식을 정리하면 $5r^2 + 2\sqrt{6}r - 6 = 0$

$$\text{그러므로 } r = \frac{-\sqrt{6} \pm 6}{5}$$

$$\text{따라서 } r > 0 \text{ 이므로 } r = \frac{6 - \sqrt{6}}{5}$$

68) ①

[출제의도] 사인법칙을 이용하여 삼각형의 외접원의 넓이를 구한다.



삼각형 ABC에 내접하는 원이 세 선분 CA, AB, BC와 만나는 점을 각각 P, Q, R라 하자.

$$\overline{OQ} = \overline{OR} = 3 \text{ 이므로 } \overline{DR} = \overline{DB} - \overline{RB} = 1$$

$$\overline{DO} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \text{ 이므로}$$

$$\sin(\angle DOR) = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

삼각형 DOR와 삼각형 OAQ는 닮음비가 1:3이므로 $\overline{AQ} = 3 \times \overline{OR} = 9$ 이때 점 O가 삼각형 ABC의 내심이므로

$$\overline{PA} = \overline{AQ} = 9, \angle CAD = \angle DAB$$

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}, 12 : (9 + \overline{CP}) = 4 : (\overline{CR} - 1)$$

$$9 + \overline{CP} = 3(\overline{CR} - 1)$$

이때 $\overline{CP} = \overline{CR}$ 이므로 $\overline{CR} = 6$, 즉 $\overline{CD} = 5$

직선 OR와 직선 AB가 평행하므로

$$\angle DAB = \angle DOR, \text{ 즉 } \angle CAD = \angle DOR$$

삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$2R = \frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)} = 5\sqrt{10}$$

$$R = \frac{5\sqrt{10}}{2} \text{ 이므로 삼각형 ADC의 외접원의 넓이는 } \frac{125}{2}\pi \text{이다.}$$

69) ②

$\overline{AB} = 3a, \overline{AC} = a$ 라 하면

$$\overline{BC}^2 = 9a^2 + a^2 - 2 \cdot 3a \cdot a \cos\frac{\pi}{3} = 7a^2$$

$$\therefore \overline{BC} = \sqrt{7}a$$

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{7}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{7}a}{\sqrt{3}} = 2 \times 7$$

$$a = \sqrt{21} = \overline{AC}$$

70) ④

[출제의도] 부채꼴의 넓이를 이용하여 문제를 해결한다.

원 O' 에서 중심각의 크기가 $\frac{7}{6}\pi$ 인 부채꼴 $AO'B$ 의 넓이를 T_1 , 원 O 에서 중심각의 크기가 $\frac{5}{6}\pi$ 인 부채꼴 AOB 의 넓이를 T_2 라 하면,
 $S_1 = T_1 + S_2 - T_2$
 $= \left(\frac{1}{2} \times 3^2 \times \frac{7}{6}\pi\right) + S_2 - \left(\frac{1}{2} \times 3^2 \times \frac{5}{6}\pi\right)$
 $= \frac{3}{2}\pi + S_2$
 따라서 $S_1 - S_2 = \frac{3}{2}\pi$

71) 7

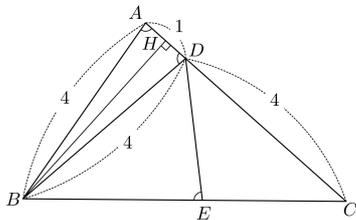
[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제해결하기

$\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA} = 1 : 2 : \sqrt{2}$ 에서
 삼각형 ABC 의 세 변 AB, BC, CA 의 길이를 각각 $k, 2k, \sqrt{2}k (k > 0)$ 이라 하자.
 삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의해
 $2k^2 = k^2 + 4k^2 - 4k^2 \cos(\angle ABC)$
 $4k^2 \cos(\angle ABC) = 3k^2$
 $\cos(\angle ABC) = \frac{3}{4}$ 이므로
 $\sin(\angle ABC) = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$
 삼각형 ABC 의 외접원의 넓이가 28π 이므로
 삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{7}$ 이다.
 따라서 삼각형 ABC 에서 사인법칙에 의해
 $\frac{\overline{CA}}{\sqrt{7}} = 4\sqrt{7}$ 이므로 선분 CA 의 길이는 7이다.

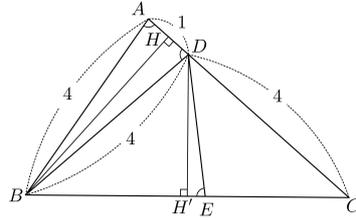
72) ③

[출제의도] 코사인법칙과 삼각비를 이용하여 변의 길이를 구할 수 있는가?

삼각형 ABD 에서
 $\angle BAC = \angle BDA$ 이고 $\overline{AB} = 4$ 이므로
 $\overline{BD} = 4$ ㉠
 이때 점 B 에서 선분 AD 에 내린 수선의 발을 H 라 하면
 $\overline{AH} = \overline{AB} \cos(\angle BAC) = 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$
 그러므로
 $\overline{AD} = 1$



삼각형 BCD 는 $\overline{DB} = \overline{DC} = 4$ 인 이등변삼각형이다.
 점 D 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 H' , $\overline{DE} = x$ 라 하면
 $\overline{DH'} = x \sin(\angle H'ED) = x \times \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{63}}{8}x$ ㉡



한편, 삼각형 ABC 에서
 $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$
 $= -2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos(\angle BAC)$
 $= 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \frac{1}{8}$
 $= 36$

이므로
 $\overline{BC} = 6$
 이때, $\overline{BH'} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 3$ ㉢
 직각삼각형 DBH' 에서 ㉠, ㉡, ㉢을 이용하면
 $4^2 = \left(\frac{\sqrt{63}}{8}x\right)^2 + 3^2$
 $\frac{63}{64}x^2 = 7$
 $x^2 = \frac{64}{9}$
 $\overline{DE} = x$ 이므로 $x > 0$
 따라서 $\overline{DE} = \frac{8}{3}$

73) 27

[출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

선분 AB 는 삼각형 ABC 의 외접원의 지름이므로
 삼각형 ABC 는 직각삼각형이다.
 $\angle BCA = \frac{\pi}{2}$, $\angle CAB = \alpha$ 라 하면
 $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ 이고, $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{8}{9}$ 이므로
 $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
 $\overline{BC} = \overline{AB} \times \sin \alpha$ 이므로 $\overline{AB} = 18$ 이고, $\overline{AC} = 6$
 점 D 는 선분 AB 를 5 : 4로 내분하는 점이므로
 $\overline{AD} = 10$
 삼각형 CAD 에서 코사인법칙에 의하여
 $\overline{DC}^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \cos \alpha = 96$
 $\overline{DC} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$
 삼각형 CAD 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면,
 사인법칙에 의하여
 $\frac{\overline{DC}}{\sin \alpha} = 2R$ 에서 $R = 3\sqrt{3}$
 삼각형 CAD 의 외접원의 넓이 $S = 27\pi$
 따라서 $\frac{S}{\pi} = 27$

74) ②

[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 변의 길이를 구할 수 있는가?

삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$ 이므로
 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)} = 4\sqrt{7}$$

즉,

$$\overline{BC} = \sin \frac{\pi}{3} \times 4\sqrt{7} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4\sqrt{7} = 2\sqrt{21}$$

또, 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이도 $2\sqrt{7}$ 이므로 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)} = 4\sqrt{7}$$

즉,

$$\overline{BD} = \sin(\angle BCD) \times 4\sqrt{7} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \times 4\sqrt{7} = 8$$

한편, $\angle BDC = \pi - \angle BAC = \frac{2}{3}\pi$ 이므로

$\overline{CD} = x$ 라 하면 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$(2\sqrt{21})^2 = x^2 + 8^2 - 2 \times x \times 8 \times \cos \frac{2}{3}\pi$$

$$x^2 + 8x - 20 = 0$$

$$(x-2)(x+10) = 0$$

$$x > 0 \text{이므로 } x = 2$$

$$\text{즉, } \overline{CD} = 2$$

$$\text{따라서 } \overline{BD} + \overline{CD} = 8 + 2 = 10$$

75) 84

[출제의도] 코사인법칙을 이용하여 문제를 해결한다.

호 BD와 호 DC에 대한 원주각의 크기가 같으므로

$$\angle CBD = \angle CAD = \angle DAB = \angle DCB \text{이다.}$$

$$\text{즉, } \overline{BD} = \overline{DC}$$

$$\overline{BD} = \overline{DC} = a, \overline{AD} = b, \angle CAD = \theta \text{라 하면}$$

$$\angle DAB = \theta \text{이고 } \overline{BD}^2 = \overline{DC}^2 \text{이므로}$$

삼각형 DAB와 삼각형 CAD에 각각 코사인법칙을 적용하면

$$6^2 + b^2 - 2 \times 6 \times b \times \cos \theta = b^2 + 8^2 - 2 \times b \times 8 \times \cos \theta$$

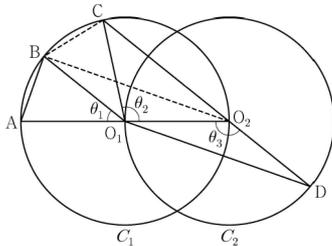
$$4b \cos \theta = 28 \text{이므로}$$

$$\text{직각삼각형 ADE에서 } k = b \cos \theta = 7$$

$$\text{따라서 } 12k = 84$$

76) ②

[출제의도] 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이의 비를 구할 수 있는가?



$$\angle CO_2O_1 + \angle O_1O_2D = \pi \text{이므로}$$

$$\theta_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta_2}{2} \text{이고}$$

$$\theta_3 = \theta_1 + \theta_2 \text{에서 } 2\theta_1 + \theta_2 = \pi \text{이므로}$$

$$\angle CO_1B = \theta_1 \text{이다.}$$

$$\text{이때, } \angle O_2O_1B = \theta_1 + \theta_2 = \theta_3 \text{이므로}$$

삼각형 O_1O_2B 와 삼각형 O_2O_1D 는 합동이다.

$$\overline{AB} = k \text{라 할 때,}$$

$$\overline{BO_2} = \overline{O_1D} = 2\sqrt{2}k \text{이므로}$$

$$\overline{AO_2} = \sqrt{k^2 + (2\sqrt{2}k)^2} = \sqrt{3k^2} \text{이고,}$$

$$\angle BO_2A = \frac{\theta_1}{2} \text{이므로}$$

$$\cos \frac{\theta_1}{2} = \frac{2\sqrt{2}k}{3k} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{이다.}$$

삼각형 O_2BC 에서

$$\overline{BC} = k, \overline{BO_2} = 2\sqrt{2}k, \angle CO_2B = \frac{\theta_1}{2} \text{이므로}$$

삼각형 BO_2C 에서

$$\overline{O_2C} = x (0 < x < 3k) \text{라 하면}$$

코사인법칙에 의하여

$$k^2 = x^2 + (2\sqrt{2}k)^2 - 2 \times x \times 2\sqrt{2}k \times \cos \frac{\theta_1}{2}$$

$$k^2 = x^2 + (2\sqrt{2}k)^2 - 2 \times x \times 2\sqrt{2}k \times \cos \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$3x^2 - 16kx + 21k^2 = 0$$

$$(3x-7k)(x-3k) = 0$$

$$0 < x < 3k \text{이므로}$$

$$x = \frac{7}{3}k$$

$$\text{즉, } \overline{O_2C} = \frac{7}{3}k \text{이다.}$$

$$\overline{CD} = \overline{O_2D} + \overline{O_2C} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2C} \text{이므로}$$

$$\overline{AB} : \overline{CD} = k : \left(\frac{3k}{2} + \frac{7}{3}k \right) \text{이다.}$$

이상에서

$$f(k) = 3k, g(k) = \frac{7}{3}k, p = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이므로

$$f(p) \times g(p)$$

$$= \left(3 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \times \left(\frac{7}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)$$

$$= \frac{56}{9}$$

77) ④

[출제의도] 코사인법칙과 사인법칙을 이용하여 각의 사인값을 추론한다.

삼각형 ABD와 삼각형 BCD에서 코사인법칙을 이용하여 선분 CD의 길이를 구하자.

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{3} = 7$$

$$\text{이므로 } \overline{BD} = \sqrt{7} \text{이다.}$$

$\angle BAD + \angle BCD = \pi$ 이므로 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$2^2 + \overline{CD}^2 - 2 \times 2 \times \overline{CD} \times \cos \frac{2\pi}{3} = 7$$

$$\text{이므로 } \overline{CD} = 1 \text{이다.}$$

삼각형 EAB와 삼각형 ECD에서 $\angle AEB$ 는 공통이고

$\angle EAB = \angle ECD$ 이므로 삼각형 EAB와 삼각형 ECD는 닮음이다.

$$\text{따라서 } \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \text{이다. 즉,}$$

$$\frac{3 + \overline{ED}}{\overline{EC}} = \frac{2 + \overline{EC}}{\overline{ED}} = \frac{2}{1}$$

$$\text{에서 } \overline{ED} = \frac{7}{3} \text{이다.}$$

$$\angle DCE = \pi - \angle BCD = \angle BAD = \frac{\pi}{3}$$

이므로 삼각형 ECD에서 사인법칙을 이용하면

$$\frac{\frac{7}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sin \theta}$$

에서 $\sin \theta = \frac{3\sqrt{3}}{14}$ 이다.

$$p = 1, q = \frac{7}{3}, r = \frac{3\sqrt{3}}{14} \text{ 이므로}$$

$$(p+q) \times r = \left(1 + \frac{7}{3}\right) \times \frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{5\sqrt{3}}{7}$$

78) ⑤

[출제의도] 삼각함수를 이용하여 추론하기

$\overline{AB} = \overline{AD} = k$ 라 할 때

두 삼각형 ABC, ACD에서 각각 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle ACB) = \frac{10^2 + \overline{BC}^2 - k^2}{2 \times 10 \times \overline{BC}} = \frac{1}{20} \left(\frac{\overline{BC} + \frac{100 - k^2}{\overline{BC}}}{\overline{BC}} \right),$$

$$\cos(\angle DCA) = \frac{10^2 + \overline{CD}^2 - k^2}{2 \times 10 \times \overline{CD}} = \frac{1}{20} \left(\frac{\overline{CD} + \frac{100 - k^2}{\overline{CD}}}{\overline{CD}} \right)$$

이다.

이때 두 호 AB, AD에 대한 원주각의 크기가 같으므로

$\cos(\angle ACB) = \cos(\angle DCA)$ 이다.

$$\frac{1}{20} \left(\frac{\overline{BC} + \frac{100 - k^2}{\overline{BC}}}{\overline{BC}} \right) = \frac{1}{20} \left(\frac{\overline{CD} + \frac{100 - k^2}{\overline{CD}}}{\overline{CD}} \right)$$

$$\overline{BC} - \overline{CD} = (100 - k^2) \times \left(\frac{1}{\overline{CD}} - \frac{1}{\overline{BC}} \right)$$

$$\overline{BC} - \overline{CD} = (100 - k^2) \times \left(\frac{\overline{BC} - \overline{CD}}{\overline{BC} \times \overline{CD}} \right)$$

$$\overline{AC} = 10 < 2R \text{ 이므로 } \overline{BC} \neq \overline{CD}$$

그러므로 $\overline{BC} \times \overline{CD} = 100 - k^2$

사각형 ABCD의 넓이는

두 삼각형 ABD, BCD의 넓이의 합과 같으므로

$$\frac{1}{2} k^2 \sin(\angle BAD) + \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{CD} \times \sin(\pi - \angle BAD)$$

$$= \frac{1}{2} \{k^2 + (100 - k^2)\} \sin(\angle BAD)$$

$$= 50 \sin(\angle BAD) = 40$$

에서 $\sin(\angle BAD) = \frac{4}{5}$ 이다.

따라서 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BAD)} = 2R \text{에서 } \overline{BD} = \frac{8}{5} R \text{ 이므로}$$

$$\overline{BD} : R = \frac{8}{5} : 1$$

따라서 $f(k) = 100 - k^2, p = \frac{4}{5}, q = \frac{8}{5}$ 이므로

$$\frac{f(10p)}{q} = (100 - 8^2) \times \frac{5}{8} = \frac{45}{2}$$

79) ③

[출제의도] 코사인법칙을 이용하여 변의 길이를 구할 수 있는가?

$\angle BAC = \theta, \overline{AC} = a$ 라 하면 삼각형 $\triangle ABC$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos \theta$$

즉,

$$2^2 = 3^2 + a^2 - 2 \times 3 \times a \times \frac{7}{8}$$

$$a^2 - \frac{21}{4} a + 5 = 0$$

$$4a^2 - 21a + 20 = 0$$

$$(4a - 5)(a - 4) = 0$$

따라서 조건에서 $a > 3$ 이므로 $a = 4$

같은 방법으로 삼각형 ABM에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{MB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AM}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AM} \times \cos \theta$$

$$= 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \frac{7}{8} = \frac{5}{2}$$

이므로

$$\overline{MB} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

이때 두 삼각형 ABM, DCM은 서로 닮은 도형이므로

$$\overline{MA} \times \overline{MC} = \overline{MB} \times \overline{MD}$$

에서

$$2 \times 2 = \frac{\sqrt{10}}{2} \times \overline{MD}$$

따라서

$$\overline{MD} = \frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$$

80) ⑤

[출제의도] 코사인법칙을 활용하여 추론하기

ㄱ. $\angle BCA = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\cos(\angle CBA) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{3}{7}$$

$$\sin(\angle CBA) = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{10}}{7} \text{ (참)}$$

ㄴ. $\angle CBA = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ 라 하면 $\angle ADC = \pi - \theta$

$$\overline{AC} = \overline{AB} \times \sin \theta = 14 \times \frac{2\sqrt{10}}{7} = 4\sqrt{10}$$

$\overline{AD} = k \ (k > 0)$ 이라 하면

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} (4\sqrt{10})^2 &= k^2 + 7^2 - 2 \times k \times 7 \times \cos(\pi - \theta) \\ &= k^2 + 49 + 14k \cos \theta \\ &= k^2 + 6k + 49 \end{aligned}$$

$$k^2 + 6k - 111 = 0 \text{ 이므로}$$

$$\overline{AD} = -3 + \sqrt{9 + 111} = -3 + 2\sqrt{30} \text{ (참)}$$

ㄷ. 삼각형 ACD의 넓이가 최대일 때 사각형 ABCD의 넓이가 최대이므로 점 D는 선분 AC의 수직이등분선이 호 AC와 만나는 점이다. 그러므로 $\overline{AD} = \overline{CD}$

$\overline{AD} = x \ (x > 0)$ 이라 하면

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$(4\sqrt{10})^2 = x^2 + x^2 - 2 \times x \times x \times \cos(\pi - \theta) = 2x^2 + 2x^2 \times \frac{3}{7} = \frac{20}{7} x^2$$

$$x^2 = 56 \text{ 이므로 } \overline{AD} = 2\sqrt{14}$$

사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{CD} \times \sin(\pi - \theta) + \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BC}$$

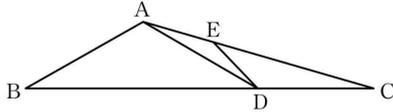
$$= \frac{1}{2} \times (2\sqrt{14})^2 \times \frac{2\sqrt{10}}{7} + \frac{1}{2} \times 4\sqrt{10} \times 6$$

$$= 8\sqrt{10} + 12\sqrt{10} = 20\sqrt{10} \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

81) ①

[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구하는 과정을 추론한다.



삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle ABC) = \frac{2^2 + (3\sqrt{3})^2 - (\sqrt{13})^2}{2 \times 2 \times 3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이다. 삼각형 ABD에서

$$\sin(\angle ABD) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

이므로 사인법칙에 의하여 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ABD)} = \boxed{2} \text{이다.}$$

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)} = \frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)}$$

이므로

$$\sin(\angle CAD) = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \times \sin(\angle ACD) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{13}}{13} = \frac{\sqrt{39}}{26}$$

이다. 삼각형 ADE에서 사인법칙에 의하여

$$\overline{DE} = 2 \times 2 \times \sin(\angle CAD) = \frac{2\sqrt{39}}{13}$$

이다.

따라서 $p = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $q = 2$, $r = \frac{2\sqrt{39}}{13}$ 이므로

$$p \times q \times r = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 \times \frac{2\sqrt{39}}{13} = \frac{6\sqrt{13}}{13}$$

82) ①

[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

$\angle BAC = \angle CAD = \theta$ 라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos \theta \\ &= 25 + 45 - 2 \times 5 \times 3\sqrt{5} \times \cos \theta \\ &= 70 - 30\sqrt{5} \cos \theta \end{aligned}$$

또 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{CD}^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AD} \times \overline{AC} \times \cos \theta \\ &= 49 + 45 - 2 \times 7 \times 3\sqrt{5} \times \cos \theta \\ &= 94 - 42\sqrt{5} \cos \theta \end{aligned}$$

이때 $\angle BAC = \angle CAD$ 이므로 $\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2$

$$70 - 30\sqrt{5} \cos \theta = 94 - 42\sqrt{5} \cos \theta \text{에서 } \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\overline{BC}^2 = 70 - 30\sqrt{5} \cos \theta = 70 - 30\sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = 10$$

즉, $\overline{BC} = \sqrt{10}$

한편,

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{1}{5} \text{이므로 } \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이를 R 라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \theta} = 2R$$

$$\frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = 2R$$

$$5\sqrt{2} = 2R$$

$$\text{즉, } R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$