수능, 모의고사 연도별 문제모음

단원 : 수1-삼각함수

반:　　번호:　　이름:

수식활용

1. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n = \sin\frac{n\pi}{4}$일 때, $\sum_{n=1}^{32} n{a_n}^2$의 값을 구하시오.

[4점][2012년 4월 나28]

2. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 0$ 이고

$$a_{n+1} = (-1)^n a_n + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (n \geqq 1)$$

을 만족시킬 때, a_{50} 의 값은?

[4점][2012년 5월 나18]

① -50　② -25　③ 0　④ 25　⑤ 50

3. 함수 $f(x) = a\sin x + 1$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 하자. $M - m = 6$ 일 때, 양수 a 의 값은?

[3점][2016년 3월 가05]

① 2　② $\frac{5}{2}$　③ 3　④ $\frac{7}{2}$　⑤ 4

4. x에 대한 방정식 $\left|\cos x + \frac{1}{4}\right| = k$가 서로 다른 3개의 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값을 α라 할 때, 40α의 값을 구하시오. (단, $0 \leq x < 2\pi$)

[4점][2016년 4월 가26]

5. $\sin\theta - \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 일 때, $\tan\theta + \cot\theta$ 의 값은?

[3점][2016년 7월 가06]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

6. $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식

$$2\sin^2 x + 3\cos x = 3$$

의 모든 해의 합은?

[3점][2016년 9월 가07]

① $\frac{\pi}{2}$　② π　③ $\frac{3\pi}{2}$　④ 2π　⑤ $\frac{5\pi}{2}$

7. 이차방정식 $5x^2+x-a=0$ 의 두 근을 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 라 할 때, 상수 a의 값은?

[3점][2016년 경남10월 가08]

① $\frac{12}{5}$ ② $\frac{13}{5}$ ③ $\frac{14}{5}$ ④ 3 ⑤ $\frac{16}{5}$

8. $0<x<2\pi$ 일 때, 방정식 $\cos^2 x-\sin x=1$의 모든 실근의 합은 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

[3점][2017학년도 수능 가25]

9. 함수 $y=a\sin\frac{\pi}{2b}x$의 최댓값은 2이고 주기는 2이다. 두 양수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

[3점][2017년 3월 가06]

① 2 ② $\frac{17}{8}$ ③ $\frac{9}{4}$ ④ $\frac{19}{8}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

10. $0\le x<2\pi$일 때, 방정식

$$|\sin 2x|=\frac{1}{2}$$

의 모든 실근의 개수는?

[3점][2017년 4월 가09]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

11. $0\le x\le\pi$일 때, 방정식 $(\sin x+\cos x)^2=\sqrt{3}\sin x+1$의 모든 실근의 합은?

[3점][2017년 7월 가11]

① $\frac{7}{6}\pi$ ② $\frac{4}{3}\pi$ ③ $\frac{3}{2}\pi$ ④ $\frac{5}{3}\pi$ ⑤ $\frac{11}{6}\pi$

12. $0\le x\le 2\pi$ 일 때, $2\cos^2 x+\sin x=1$ 의 서로 다른 모든 실근의 합은?

[3점][2017년 대구8월 가09]

① $\frac{5}{2}\pi$ ② 3π ③ $\frac{7}{2}\pi$ ④ 4π ⑤ $\frac{9}{2}\pi$

13. $0 \le x \le \pi$ 일 때, 방정식

$$1+\sqrt{2}\sin 2x=0$$

의 모든 해의 합은?

[3점][2017년 9월 가06]

① π ② $\frac{5\pi}{4}$ ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ $\frac{7\pi}{4}$ ⑤ 2π

14. $0 \le x < \pi$ 일 때, 방정식

$$2\sin 2x+\sqrt{3}=0$$

의 모든 해의 합은 $\frac{q}{p}\pi$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

[3점][2017년 경남10월 가24]

15. $0 \le x \le 2\pi$ 일 때, 방정식

$$\cos^2 x=\sin^2 x-\sin x$$

의 모든 해의 합은?

[3점][2018학년도 수능 가07]

① 2π ② $\frac{5}{2}\pi$ ③ 3π ④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ 4π

16. 함수 $f(x)=\sin^2 x+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1$ 의 최댓값을 M이라 할 때, $4M$의 값을 구하시오.

[3점][2018년 3월 가25]

17. $0 \le x < 2\pi$에서 부등식 $2\sin x+1<0$의 해가 $\alpha < x < \beta$일 때, $\cos(\beta-\alpha)$의 값은?

[3점][2018년 4월 가09]

① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

18. 실수 k에 대하여 함수

$$f(x)=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$$

의 최댓값은 3, 최솟값은 m이다. $k+m$의 값은?

[4점][2018년 9월 가14]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

19. 열린 구간 $(0,\ \pi)$에서 부등식

$$(2^x-8)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)<0$$

의 해가 $a<x<b$ 또는 $c<x<d$일 때, $(b-a)+(d-c)$의 값은? (단, $b<c$)

[3점][2018년 10월 가12]

① $\pi-3$ ② $\frac{7\pi}{6}-3$ ③ $\frac{4\pi}{3}-3$ ④ $3-\frac{\pi}{3}$ ⑤ $3-\frac{\pi}{6}$

20. $0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $6\sin x\cos x+3\sin x=2\cos x+1$의 모든 실근의 합은?

[3점][2018년 대구11월 가07]

① 2π ② $\frac{5}{2}\pi$ ③ 3π ④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ 4π

21. $0\le\theta<2\pi$ 일 때, x에 대한 이차방정식

$$6x^2+(4\cos\theta)x+\sin\theta=0$$

이 실근을 갖지 않도록 하는 모든 θ의 값의 범위는 $\alpha<\theta<\beta$이다. $3\alpha+\beta$의 값은?

[3점][2019학년도 수능 가11]

① $\frac{5}{6}\pi$ ② π ③ $\frac{7}{6}\pi$ ④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{3}{2}\pi$

22. 실수 a에 대하여 $0\le x\le 2$에서 x에 대한 방정식

$$3\sin(2\pi x)-a=0$$

의 실근의 개수를 $f(a)$라 하자. 집합 $A=\{f(a)\,|\,a\text{는 실수}\}$의 모든 원소의 합은?

[3점][2019년 5월 가10]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

23. 두 함수

$$f(x)=\cos(ax)+1,\ g(x)=|\sin 3x|$$

의 주기가 서로 같을 때, 양수 a의 값은?

[4점][2020년 4월 나15]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

24. $0<x\le 2\pi$일 때, 방정식 $\sin^2 x=\cos^2 x+\cos x$와 부등식 $\sin x>\cos x$를 동시에 만족시키는 모든 x의 값의 합은?

[3점][2020년 4월 가09]

① $\frac{4}{3}\pi$ ② $\frac{5}{3}\pi$ ③ 2π ④ $\frac{7}{3}\pi$ ⑤ $\frac{8}{3}\pi$

25. $\pi<\theta<2\pi$인 θ에 대하여 $\frac{\sin\theta\cos\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1-\cos\theta}{\tan\theta}=1$일 때, $\cos\theta$의 값은?

[3점][2020년 4월 가12]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

26. $0\le\theta<2\pi$일 때, x에 대한 이차방정식

$$x^2-(2\sin\theta)x-3\cos^2\theta-5\sin\theta+5=0$$

이 실근을 갖도록 하는 θ의 최솟값과 최댓값을 각각 α, β라 하자. $4\beta-2\alpha$의 값은?

[4점][2020년 6월 가14]

① 3π ② 4π ③ 5π ④ 6π ⑤ 7π

27. $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$ 일 때, $\frac{1+\tan\theta}{\sin\theta}$의 값은?

[3점][2020년 7월 나11]

① $-\frac{7}{3}$ ② $-\frac{4}{3}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

28. 자연수 n에 대하여 $0\le x<2^{n+1}$일 때, 부등식

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}x\right)\le-\frac{1}{2}$$

을 만족시키는 서로 다른 모든 자연수 x의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{7}a_n$의 값을 구하시오.

[4점][2020년 7월 나27]

29. $0\le x<2\pi$일 때, 방정식

$$\sin x=\sqrt{3}(1+\cos x)$$

의 모든 해의 합은?

[3점][2020년 10월 가11]

① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{2}{3}\pi$ ③ π ④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5}{3}\pi$

30. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\tan(\pi-\theta)=\frac{3}{5}$ 일 때, $30(1-\sin\theta)$의 값을 구하시오.

[3점][2020년 10월 가24]

31. $0 \le x \le 4\pi$일 때, 방정식

$$4\sin^2 x - 4\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - 3 = 0$$

의 모든 해의 합은?

[4점][2021학년도 수능 나16]

① 5π ② 6π ③ 7π ④ 8π ⑤ 9π

32. $0 < x < 2\pi$일 때, 방정식 $2\cos^2 x - \sin(\pi + x) - 2 = 0$의 모든 해의 합은?

[4점][2021년 4월 11]

① π ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ 2π ④ $\frac{5}{2}\pi$ ⑤ 3π

33. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$인 θ에 대하여 $\sin\theta\cos\theta = \frac{7}{18}$일 때, $30(\sin\theta + \cos\theta)$의 값을 구하시오.

[3점][2021년 4월 17]

34. $0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식

$$3\cos^2 x + 5\sin x - 1 = 0$$

의 모든 해의 합은?

[4점][2021년 7월 10]

① π ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ 2π ④ $\frac{5}{2}\pi$ ⑤ 3π

35. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$인 θ에 대하여 $\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{1+\sin\theta} = 4$일 때, $\cos\theta$의 값은?

[3점][2021년 9월 06]

① $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

36. $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta - \frac{6}{\tan\theta} = 1$일 때, $\sin\theta + \cos\theta$의 값은?

[3점][2022학년도 수능 07]

① $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

그래프활용

37. 양의 상수 a에 대하여 곡선 $f(x)=a\sin\dfrac{x+\pi}{3}$ $(0 \le x \le 6\pi)$와 직선 $y=-\dfrac{a}{2}$가 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값이 6π일 때, a의 값을 구하시오.

[3점][2017년 전북10월 가25]

38. 좌표평면에서 곡선 $y=4\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$ $(0 \le x \le 2)$ 위의 점 중 y좌표가 정수인 점의 개수를 구하시오.

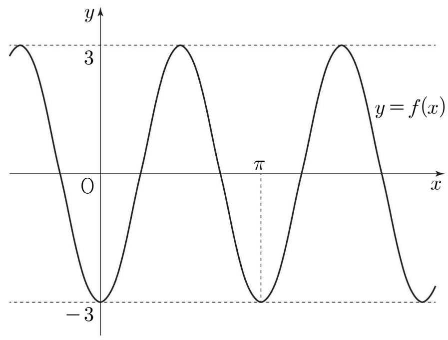
[3점][2018년 4월 가24]

39. $0 \le x \le \pi$일 때, 2 이상의 자연수 n에 대하여 두 곡선 $y=\sin x$와 $y=\sin(nx)$의 교점의 개수를 a_n이라 하자. a_3+a_5의 값을 구하시오.

[4점][2019년 3월 가26]

40. 두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\cos bx$의 그래프가 그림과 같다. 함수 $g(x)=b\sin x+a$의 최댓값은? (단, $b>0$)

[3점][2019년 4월 가10]



① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

41. $0 \le x < 2\pi$일 때, 두 곡선 $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$와 $y=\sin 4x$가 만나는 점의 개수는?

[3점][2020년 3월 나07]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

42. $0<a<\dfrac{4}{7}$인 실수 a와 유리수 b에 대하여 닫힌구간 $\left[-\dfrac{\pi}{a}, \dfrac{2\pi}{a}\right]$에서 정의된 함수 $f(x)=2\sin(ax)+b$가 있다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{7}{2}\pi, 0\right)$을 지날 때, $30(a+b)$의 값을 구하시오.

[4점][2020년 3월 가28]

43. $0 \le x \le 2\pi$에서 정의된 함수 $y = a\sin 3x + b$의 그래프가 두 직선 $y = 9$, $y = 2$와 만나는 점의 개수가 각각 3, 7이 되도록 하는 두 양수 a, b에 대하여 $a \times b$의 값을 구하시오.

[4점][2020년 4월 가26]

44. $0 \le x < 2\pi$일 때, 두 함수 $y = \sin x$와 $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$의 그래프가 만나는 모든 점의 x좌표의 합은?

[3점][2020년 10월 나07]

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3}{2}\pi$ ④ 2π ⑤ $\frac{5}{2}\pi$

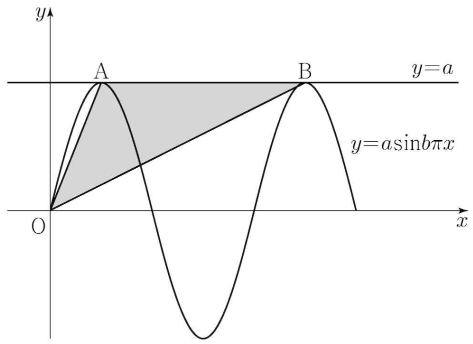
45. 함수 $y = \tan\left(nx - \frac{\pi}{2}\right)$의 그래프가 직선 $y = -x$와 만나는 점의 x좌표가 구간 $(-\pi, \pi)$에 속하는 점의 개수를 a_n이라 할 때, $a_2 + a_3$의 값을 구하시오.

[4점][2020년 10월 나26]

46. 두 양수 a, b에 대하여 곡선 $y = a\sin b\pi x\left(0 \le x \le \frac{3}{b}\right)$이 직선 $y = a$와 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 5이고 직선 OA의 기울기와 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$일 때, $a+b$의 값은? (단, O는 원점이다.)

[4점][2021년 9월 10]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

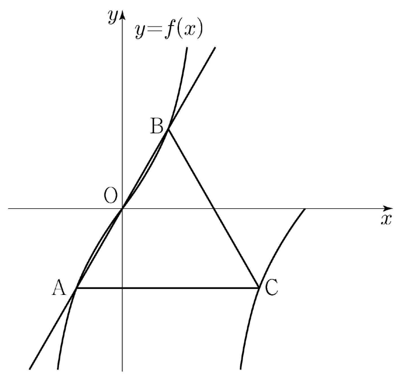


47. 양수 a에 대하여 집합 $\left\{x \,\middle|\, -\frac{a}{2} < x \le a,\ x \ne \frac{a}{2}\right\}$에서 정의된 함수

$$f(x) = \tan\frac{\pi x}{a}$$

가 있다. 그림과 같이 함수 $y = f(x)$의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y = f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

[4점][2022학년도 수능 11]



① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{17\sqrt{3}}{12}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

48. 자연수 k에 대하여 $0 \le x < 2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $\sin kx = \frac{1}{3}$의 서로 다른 실근의 개수가 8이다.

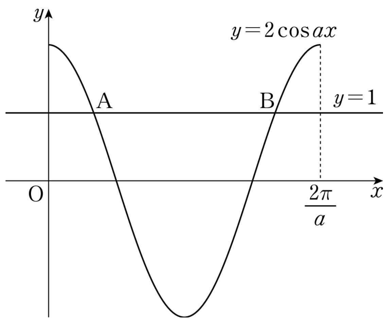
$0 \le x < 2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $\sin kx = \frac{1}{3}$의 모든 해의 합은?

[4점][2022년 4월 공통11]

① 5π ② 6π ③ 7π ④ 8π ⑤ 9π

49. 그림과 같이 양의 상수 a에 대하여 곡선 $y = 2\cos ax \left(0 \le x \le \frac{2\pi}{a}\right)$와 직선 $y=1$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}} = \frac{8}{3}$일 때, a의 값은?

[3점][2022년 3월 공통08]



① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{5\pi}{12}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{7\pi}{12}$ ⑤ $\frac{2\pi}{3}$

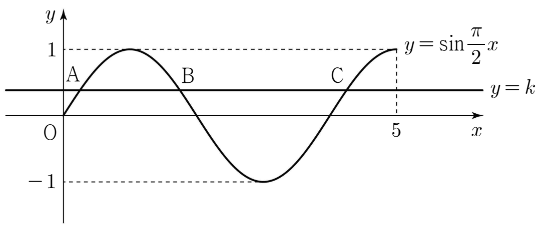
50. 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 정의된 함수 $f(x) = -\sin 2x$가 $x=a$에서 최댓값을 갖고 $x=b$에서 최솟값을 갖는다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기는?

[3점][2022년 6월 공통07]

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$ ④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$

51. 곡선 $y = \sin\frac{\pi}{2}x \ (0 \le x \le 5)$가 직선 $y = k \ (0 < k < 1)$과 만나는 서로 다른 세 점을 y축에서 가까운 순서대로 A, B, C라 하자. 세 점 A, B, C의 x좌표의 합이 $\frac{25}{4}$일 때, 선분 AB의 길이는?

[4점][2022년 7월 공통10]



① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{11}{8}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{13}{8}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

52. 닫힌구간 $[0, 12]$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\cos\frac{\pi x}{6},\quad g(x)=-3\cos\frac{\pi x}{6}-1$$

이 있다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 α_1, α_2라 할 때, $|\alpha_1-\alpha_2|=8$이다. 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 β_1, β_2라 할 때, $|\beta_1-\beta_2|$의 값은? (단, k는 $-1<k<1$인 상수이다.)

[4점][2022년 9월 공통09]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

53. 양수 a에 대하여 함수

$$f(x)=\left|4\sin\left(ax-\frac{\pi}{3}\right)+2\right|\quad\left(0\le x<\frac{4\pi}{a}\right)$$

의 그래프가 직선 $y=2$와 만나는 서로 다른 점의 개수는 n이다. 이 n개의 점의 x좌표의 합이 39일 때, $n\times a$의 값은?

[4점][2022년 10월 공통12]

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ 2π ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

54. 함수

$$f(x)=a-\sqrt{3}\tan 2x$$

가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6},\ b\right]$에서 최댓값 7, 최솟값 3을 가질 때, $a\times b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

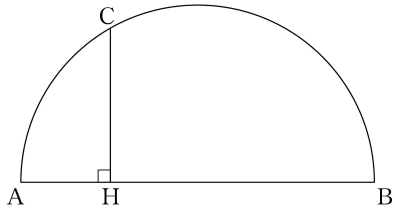
[4점][2023학년도 수능 공통09]

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{5\pi}{12}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{\pi}{6}$

도형활용

55. 그림과 같이 길이가 12인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 반원 위에서 호 BC의 길이가 4π인 점 C를 잡고 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{\mathrm{CH}}^2$의 값을 구하시오.

[3점][2017년 3월 가25]



56. 좌표평면에서 제1사분면에 점 P가 있다. 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 하고, 점 Q를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 R라 할 때, 세 동경 OP, OQ, OR가 나타내는 각을 각각 α, β, γ라 하자.

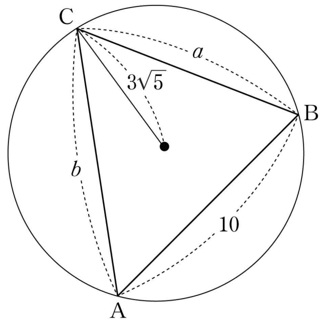
$\sin\alpha=\frac{1}{3}$일 때, $9(\sin^2\beta+\tan^2\gamma)$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 시초선은 x축의 양의 방향이다.)

[4점][2020년 3월 가26]

57. 길이가 각각 10, a, b인 세 선분 AB, BC, CA를 각 변으로 하는 예각삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점을 지나는 원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$이고 $\dfrac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab}=\dfrac{4}{3}$일 때, ab의 값은?

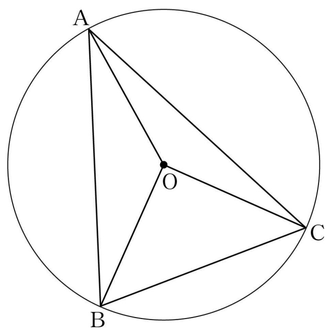
[4점][2020년 3월 나19]

① 140 ② 150 ③ 160 ④ 170 ⑤ 180



58. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 원에 내접하는 예각삼각형 ABC에 대하여 두 삼각형 OAB, OCA의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. $3S_1=4S_2$이고 $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{5}$일 때, 선분 AB의 길이는?

[4점][2020년 3월 가19]



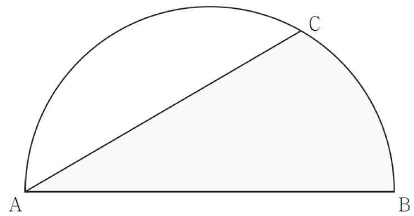
① $2\sqrt{7}$ ② $\sqrt{30}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{34}$ ⑤ 6

59. 중심각의 크기가 1라디안이고 둘레의 길이가 24인 부채꼴의 넓이를 구하시오.

[3점][2020년 3월 가23]

60. 그림과 같이 길이가 12인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 C가 있다. 호 CB의 길이가 2π일 때, 두 선분 AB, AC와 호 CB로 둘러싸인 부분의 넓이는?

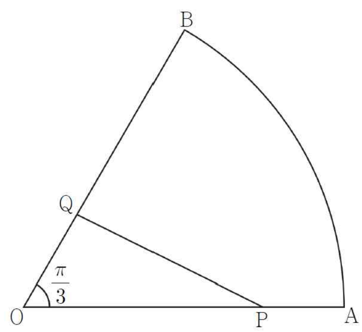
[4점][2020년 4월 나17]



① $5\pi+9\sqrt{3}$ ② $5\pi+10\sqrt{3}$ ③ $6\pi+9\sqrt{3}$
④ $6\pi+10\sqrt{3}$ ⑤ $7\pi+9\sqrt{3}$

61. 그림과 같이 중심각의 크기가 $\dfrac{\pi}{3}$인 부채꼴 OAB에서 선분 OA를 $3:1$로 내분하는 점을 P, 선분 OB를 $1:2$로 내분하는 점을 Q라 하자. 삼각형 OPQ의 넓이가 $4\sqrt{3}$일 때 호 AB의 길이는?

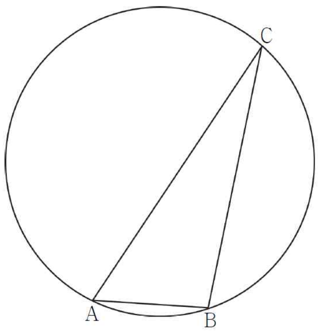
[3점][2020년 4월 가10]



① $\dfrac{5}{3}\pi$ ② 2π ③ $\dfrac{7}{3}\pi$ ④ $\dfrac{8}{3}\pi$ ⑤ 3π

62. 그림과 같이 원 C에 내접하고 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 원 C의 넓이가 $\frac{49}{3}\pi$일 때, 원 C 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은? (단, 점 P는 점 A도 아니고 점 C도 아니다.)

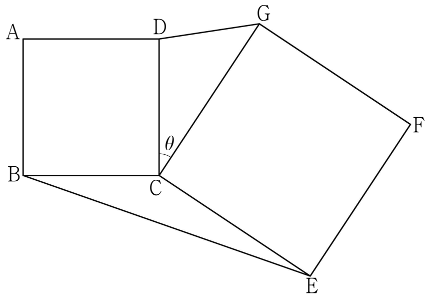
[4점][2020년 4월 가19]



① $\frac{32}{3}\sqrt{3}$ ② $\frac{34}{3}\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$
④ $\frac{38}{3}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{40}{3}\sqrt{3}$

63. 그림과 같이 평면 위에 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD와 한 변의 길이가 4인 정사각형 CEFG가 있다.
$\angle\mathrm{DCG}=\theta\,(0<\theta<\pi)$라 할 때, $\sin\theta=\frac{\sqrt{11}}{6}$이다.
$\overline{\mathrm{DG}}\times\overline{\mathrm{BE}}$의 값은?

[4점][2020년 7월 나15]



① 15 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

64. $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{7}$인 예각삼각형 ABC의 넓이가 $\sqrt{6}$이다. $\angle\mathrm{A}=\theta$일 때, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$의 값은?

[3점][2020년 7월 가07]

① $\frac{\sqrt{3}}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{7}$ ④ $\frac{\sqrt{6}}{7}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{7}$

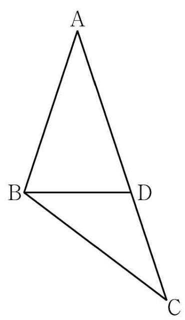
65. $\overline{\mathrm{AB}}=8$이고 $\angle\mathrm{A}=45°$, $\angle\mathrm{B}=15°$인 삼각형 ABC에서 선분 BC의 길이는?

[3점][2020년 9월 나09]

① $2\sqrt{6}$ ② $\frac{7\sqrt{6}}{3}$ ③ $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ ④ $3\sqrt{6}$ ⑤ $\frac{10\sqrt{6}}{3}$

66. $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{AC}}=10$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위에 점 D를 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}$가 되도록 잡는다. $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{15}$일 때, 선분 BC의 길이는?

[3점][2020년 9월 가12나25]

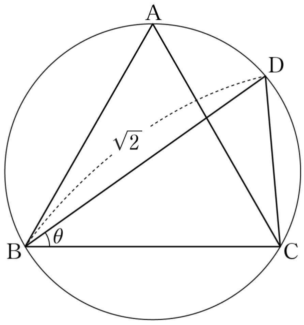


① $\sqrt{37}$ ② $\sqrt{38}$ ③ $\sqrt{39}$ ④ $2\sqrt{10}$ ⑤ $\sqrt{41}$

67. 정삼각형 ABC가 반지름의 길이가 r인 원에 내접하고 있다. 선분 AC와 선분 BD가 만나고 $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{2}$가 되도록 원 위에서 점 D를 잡는다. $\angle\mathrm{DBC}=\theta$라 할 때, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$이다. 반지름의 길이 r의 값은?

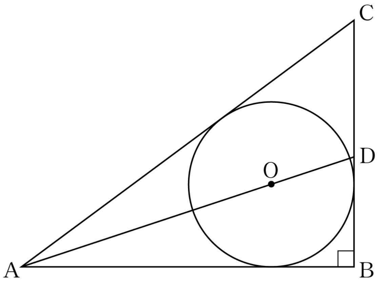
[4점][2020년 10월 나19]

① $\frac{6-\sqrt{6}}{5}$ ② $\frac{6-\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{4}{5}$
④ $\frac{6-\sqrt{3}}{5}$ ⑤ $\frac{6-\sqrt{2}}{5}$



68. 그림과 같이 $\angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC에 내접하고 반지름의 길이가 3인 원의 중심을 O라 하자. 직선 AO가 선분 BC와 만나는 점을 D라 할 때, $\overline{\mathrm{DB}}=4$이다. 삼각형 ADC의 외접원의 넓이는?

[4점][2020년 10월 가17]

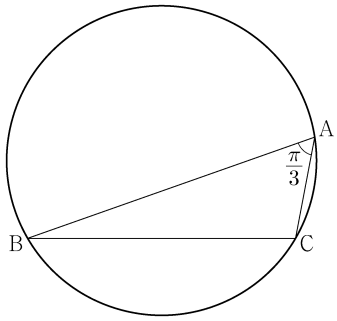


① $\frac{125}{2}\pi$ ② 63π ③ $\frac{127}{2}\pi$
④ 64π ⑤ $\frac{129}{2}\pi$

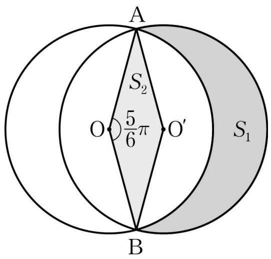
69. $\angle\mathrm{A}=\frac{\pi}{3}$이고 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=3:1$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 선분 AC의 길이는?

[3점][2021학년도 수능 가10나28]

① $2\sqrt{5}$ ② $\sqrt{21}$ ③ $\sqrt{22}$ ④ $\sqrt{23}$ ⑤ $2\sqrt{6}$



70. 그림과 같이 두 점 O, O′을 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 두 원 O, O'이 한 평면 위에 있다. 두 원 O, O'이 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, $\angle\mathrm{AOB}=\frac{5}{6}\pi$이다.



원 O의 외부와 원 O'의 내부의 공통부분의 넓이를 S_1, 마름모 AOBO′의 넓이를 S_2라 할 때, S_1-S_2의 값은?

[4점][2021년 3월 11]

① $\frac{5}{4}\pi$ ② $\frac{4}{3}\pi$ ③ $\frac{17}{12}\pi$ ④ $\frac{3}{2}\pi$ ⑤ $\frac{19}{12}\pi$

71. $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA} = 1 : 2 : \sqrt{2}$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 28π일 때, 선분 CA의 길이를 구하시오.

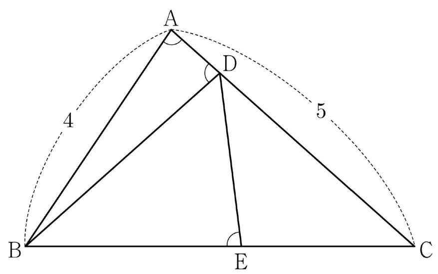
[4점][2021년 4월 20]

72. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$$\angle BAC = \angle BDA = \angle BED$$

일 때, 선분 DE의 길이는?

[4점][2021년 6월 12]



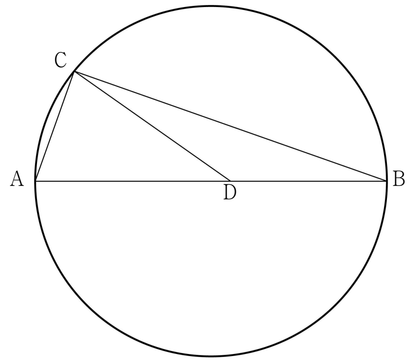
① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

73. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 C에 대하여

$$\overline{BC}=12\sqrt{2},\ \cos(\angle CAB)=\frac{1}{3}$$

이다. 선분 AB를 5 : 4로 내분하는 점을 D라 할 때, 삼각형 CAD의 외접원의 넓이는 S이다. $\frac{S}{\pi}$의 값을 구하시오.

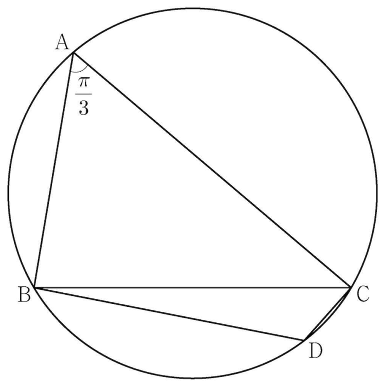
[4점][2021년 7월 20]



74. 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle A=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD)=\frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때, $\overline{BD}+\overline{CD}$의 값은?

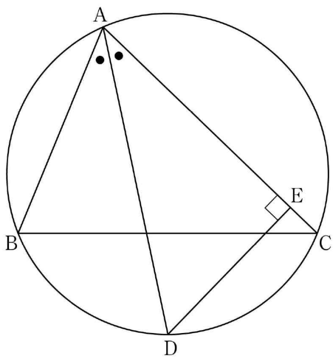
[4점][2021년 9월 12]

① $\frac{19}{2}$ ② 10 ③ $\frac{21}{2}$ ④ 11 ⑤ $\frac{23}{2}$

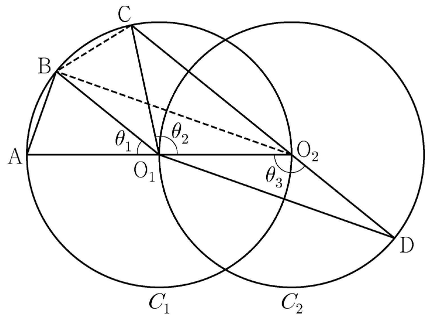


75. $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=8$인 예각삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 D, 점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E라 하자. 선분 AE의 길이를 k라 할 때, $12k$의 값을 구하시오.

[4점][2021년 10월 21]



76. 두 점 O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{O_1O_2}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 그림과 같이 원 C_1 위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 주어져 있고, 세 점 A, O_1, O_2와 세 점 C, O_2, D가 각각 한 직선 위에 있다.
이때 $\angle BO_1A=\theta_1$, $\angle O_2O_1C=\theta_2$, $\angle O_1O_2D=\theta_3$이라 하자.



다음은 $\overline{AB}:\overline{O_1D}=1:2\sqrt{2}$이고, $\theta_3=\theta_1+\theta_2$일 때, 선분 AB와 선분 CD의 길이의 비를 구하는 과정이다.

> $\angle CO_2O_1+\angle O_1O_2D=\pi$이므로 $\theta_3=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta_2}{2}$이고
> $\theta_3=\theta_1+\theta_2$에서 $2\theta_1+\theta_2=\pi$이므로 $\angle CO_1B=\theta_1$이다.
> 이때 $\angle O_2O_1B=\theta_1+\theta_2=\theta_3$이므로 삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.
> $\overline{AB}=k$라 할 때,
> $\overline{BO_2}=\overline{O_1D}=2\sqrt{2}k$이므로 $\overline{AO_2}=\boxed{\text{(가)}}$이고,
> $\angle BO_2A=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로 $\cos\dfrac{\theta_1}{2}=\boxed{\text{(나)}}$이다.
> 삼각형 O_2BC에서
> $\overline{BC}=k$, $\overline{BO_2}=2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로
> 코사인법칙에 의하여 $\overline{O_2C}=\boxed{\text{(다)}}$이다.
> $\overline{CD}=\overline{O_2D}+\overline{O_2C}=\overline{O_1O_2}+\overline{O_2C}$이므로
> $\overline{AB}:\overline{CD}=k:\left(\dfrac{\boxed{\text{(가)}}}{2}+\boxed{\text{(다)}}\right)$이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고,
(나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p)\times g(p)$의 값은?

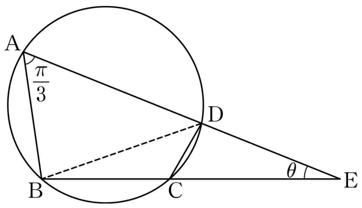
[4점][2022학년도 수능 15]

① $\dfrac{169}{27}$ ② $\dfrac{56}{9}$ ③ $\dfrac{167}{27}$ ④ $\dfrac{166}{27}$ ⑤ $\dfrac{55}{9}$

77. 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여

$$\overline{AB}=\overline{BC}=2,\quad \overline{AD}=3,\quad \angle BAD=\frac{\pi}{3}$$

이다. 두 직선 AD, BC의 교점을 E라 하자.



다음은 $\angle AEB=\theta$일 때, $\sin\theta$의 값을 구하는 과정이다.

> 삼각형 ABD와 삼각형 BCD에서 코사인법칙을 이용하면
> $\overline{CD}=$ (가)
> 이다. 삼각형 EAB와 삼각형 ECD에서
> $\angle AEB$는 공통, $\angle EAB=\angle ECD$
> 이므로 삼각형 EAB와 삼각형 ECD는 닮음이다.
> 이를 이용하면
> $\overline{ED}=$ (나)
> 이다. 삼각형 ECD에서 사인법칙을 이용하면
> $\sin\theta=$ (다)
> 이다.

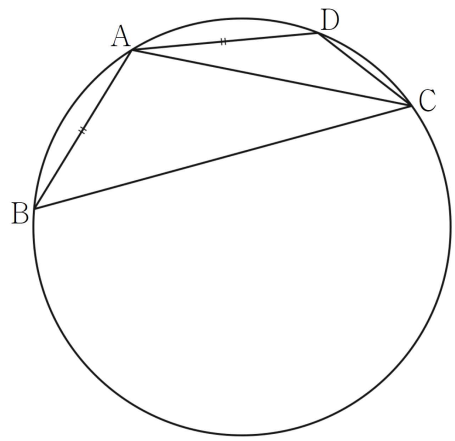
위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $(p+q)\times r$의 값은?

[4점][2022년 3월 공통15]

① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{7}$ ③ $\frac{9\sqrt{3}}{14}$ ④ $\frac{5\sqrt{3}}{7}$ ⑤ $\frac{11\sqrt{3}}{14}$

78. 그림과 같이 반지름의 길이가 $R(5<R<5\sqrt{5})$인 원에 내접하는 사각형 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{AB}=\overline{AD}$이고 $\overline{AC}=10$이다.
> (나) 사각형 ABCD의 넓이는 40이다.



다음은 선분 BD의 길이와 R의 비를 구하는 과정이다.

> $\overline{AB}=\overline{AD}=k$라 할 때
> 두 삼각형 ABC, ACD에서 각각 코사인법칙에 의하여
> $\cos(\angle ACB)=\frac{1}{20}\left(\overline{BC}+\frac{\text{(가)}}{\overline{BC}}\right)$,
> $\cos(\angle DCA)=\frac{1}{20}\left(\overline{CD}+\frac{\text{(가)}}{\overline{CD}}\right)$
> 이다.
> 이때 두 호 AB, AD에 대한 원주각의 크기가 같으므로
> $\cos(\angle ACB)=\cos(\angle DCA)$이다.
> 사각형 ABCD의 넓이는
> 두 삼각형 ABD, BCD의 넓이의 합과 같으므로
> $\frac{1}{2}k^2\sin(\angle BAD)+\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CD}\times\sin(\pi-\angle BAD)=40$
> 에서 $\sin(\angle BAD)=$ (나) 이다.
> 따라서 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여
> $\overline{BD} : R=$ (다) $: 1$이다.

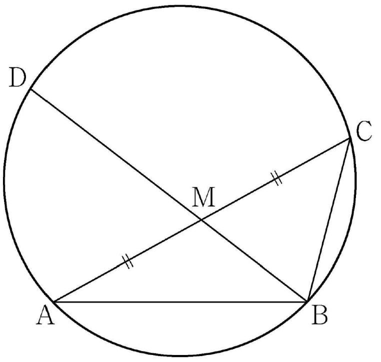
위의 (가)에 알맞은 식을 $f(k)$라 하고, (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $\frac{f(10p)}{q}$의 값은?

[4점][2022년 4월 공통15]

① $\frac{25}{2}$ ② 15 ③ $\frac{35}{2}$ ④ 20 ⑤ $\frac{45}{2}$

79. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는?

[4점][2022년 6월 공통10]



① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$
④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$

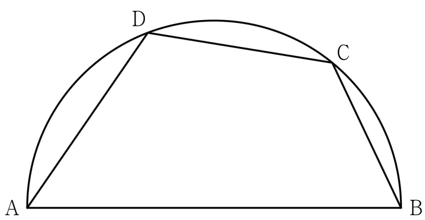
80. 길이가 14인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB위에 점 C를 $\overline{BC}=6$이 되도록 잡는다. 점 D가 호 AC 위의 점일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, 점 D는 점 A와 점 C가 아닌 점이다.)

[4점][2022년 7월 공통14]

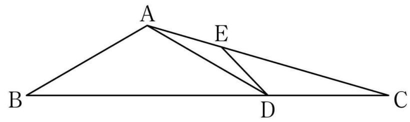
[보 기]

ㄱ. $\sin(\angle CBA)=\frac{2\sqrt{10}}{7}$
ㄴ. $\overline{CD}=7$일 때, $\overline{AD}=-3+2\sqrt{30}$
ㄷ. 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 $20\sqrt{10}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



81. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=3\sqrt{3}$, $\overline{CA}=\sqrt{13}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위에 점 B가 아닌 점 D를 $\overline{AD}=2$가 되도록 잡고, 선분 AC 위에 양 끝점 A, C가 아닌 점 E를 사각형 ABDE가 원에 내접하도록 잡는다.



다음은 선분 DE의 길이를 구하는 과정이다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여
$\cos(\angle ABC)=\boxed{\text{(가)}}$
이다. 삼각형 ABD에서 $\sin(\angle ABD)=\sqrt{1-\left(\boxed{\text{(가)}}\right)^2}$
이므로 사인법칙에 의하여 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이는 $\boxed{\text{(나)}}$이다.
삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여
$$\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}=\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)}$$
이므로 $\sin(\angle CAD)=\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}\times\sin(\angle ACD)$이다.
삼각형 ADE에서 사인법칙에 의하여
$\overline{DE}=\boxed{\text{(다)}}$
이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p\times q\times r$의 값은?

[4점][2022년 10월 공통13]

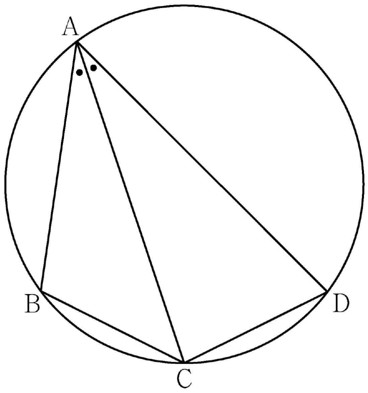
① $\frac{6\sqrt{13}}{13}$ ② $\frac{7\sqrt{13}}{13}$ ③ $\frac{8\sqrt{13}}{13}$
④ $\frac{9\sqrt{13}}{13}$ ⑤ $\frac{10\sqrt{13}}{13}$

82. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고

$\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{AD}}=7$, $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}$

일 때, 이 원의 반지름의 길이는?

[4점][2023학년도 수능 공통11]



① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$
④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

23년도 문제

83. $0\le x\le 2\pi$일 때, 방정식 $2\sin^2 x-3\cos x=k$의 서로 다른 실근의 개수가 3이다. 이 세 실근 중 가장 큰 실근을 α라 할 때, $k\times\alpha$의 값은? (단, k는 상수이다.)

[4점][2023년 4월 공통11]

① $\frac{7}{2}\pi$ ② 4π ③ $\frac{9}{2}\pi$ ④ 5π ⑤ $\frac{11}{2}\pi$

84. 두 함수

$f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=\sin x$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?
(단, a, b는 상수이고, $0\le a\le 2$이다.)

[4점][2023년 3월 공통13]

(가) $\{g(a\pi)\}^2=1$
(나) $0\le x\le 2\pi$일 때, 방정식 $f(g(x))=0$의 모든 해의 합은 $\frac{5}{2}\pi$이다.

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

85. 두 자연수 a, b에 대하여 함수

$f(x)=a\sin bx+8-a$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오.

[3점][2023년 6월 공통19]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이다.
(나) $0\le x<2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

86. $0 \le x < 2\pi$일 때, 곡선 $y = |4\sin 3x + 2|$와 직선 $y = 2$가 만나는 서로 다른 점의 개수는?

[4점][2023년 7월 공통10]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

87. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 부등식

$$\cos x \le \sin \frac{\pi}{7}$$

를 만족시키는 모든 x의 값의 범위는 $\alpha \le x \le \beta$이다. $\beta - \alpha$의 값은?

[4점][2023년 9월 공통09]

① $\frac{8}{7}\pi$ ② $\frac{17}{14}\pi$ ③ $\frac{9}{7}\pi$ ④ $\frac{19}{14}\pi$ ⑤ $\frac{10}{7}\pi$

88. 함수 $f(x) = \sin\frac{\pi}{4}x$라 할 때, $0 < x < 16$에서 부등식

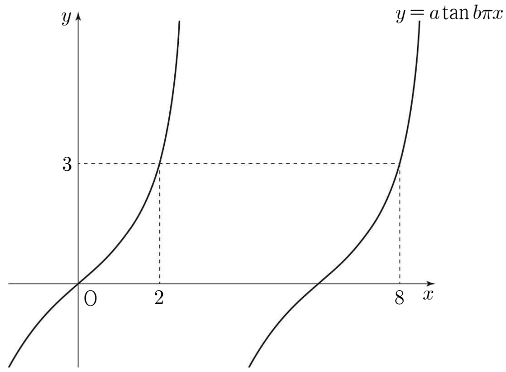
$$f(2+x)f(2-x) < \frac{1}{4}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오.

[3점][2024학년도 수능 공통19]

89. 그림과 같이 함수 $y = a\tan b\pi x$의 그래프가 두 점 $(2, 3)$, $(8, 3)$을 지날 때, $a^2 \times b$의 값은? (단, a, b는 양수이다.)

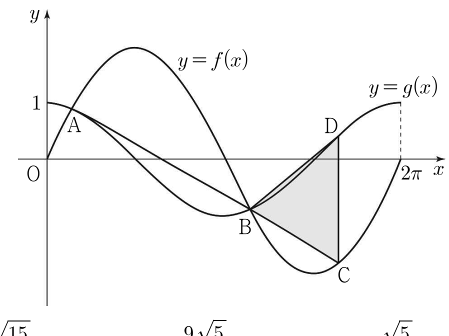
[3점][2023년 4월 공통08]



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

90. 그림과 같이 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 두 함수 $f(x) = k\sin x$, $g(x) = \cos x$에 대하여 곡선 $y = f(x)$와 곡선 $y = g(x)$가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점을 C라 할 때, 점 C는 곡선 $y = f(x)$ 위에 있다. 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y = g(x)$와 만나는 점을 D라 할 때, 삼각형 BCD의 넓이는? (단, k는 양수이고, 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.)

[4점][2023년 4월 공통13]



① $\frac{\sqrt{15}}{8}\pi$ ② $\frac{9\sqrt{5}}{40}\pi$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{4}\pi$
④ $\frac{3\sqrt{10}}{16}\pi$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{10}\pi$

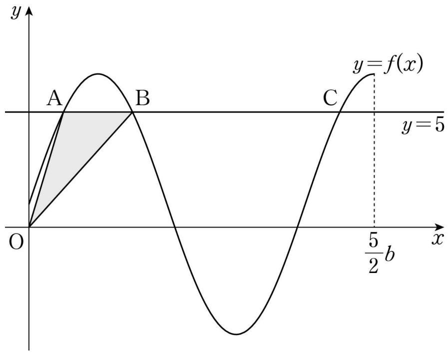
91. 그림과 같이 두 상수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=a\sin\frac{\pi x}{b}+1\left(0\le x\le\frac{5}{2}b\right)$$

의 그래프와 직선 $y=5$가 만나는 점을 x좌표가 작은 것부터 차례로 A, B, C라 하자.

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AB}}+6$이고 삼각형 AOB의 넓이가 $\frac{15}{2}$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, $a>4$, $b>0$이고, O는 원점이다.)

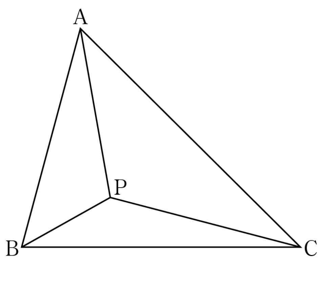
[4점][2023년 10월 공통11]



① 68 ② 70 ③ 72 ④ 74 ⑤ 76

92. 그림과 같이 $\angle\mathrm{BAC}=60°$, $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 내부의 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{PBC}=30°$, $\angle\mathrm{PCB}=15°$일 때, 삼각형 APC의 넓이는?

[4점][2023년 3월 공통11]



① $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{3+2\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

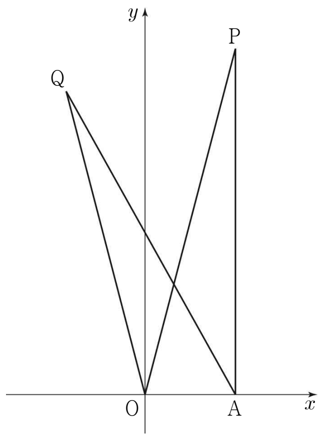
④ $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $2+\sqrt{3}$

93. 좌표평면 위의 두 점 O$(0, 0)$, A$(2, 0)$과 y좌표가 양수인 서로 다른 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}=2\sqrt{15}$이고 $\overline{\mathrm{OP}}>\overline{\mathrm{OQ}}$이다.
>
> (나) $\cos(\angle\mathrm{OPA})=\cos(\angle\mathrm{OQA})=\frac{\sqrt{15}}{4}$

사각형 OAPQ의 넓이가 $\frac{q}{p}\sqrt{15}$일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2023년 4월 공통21]

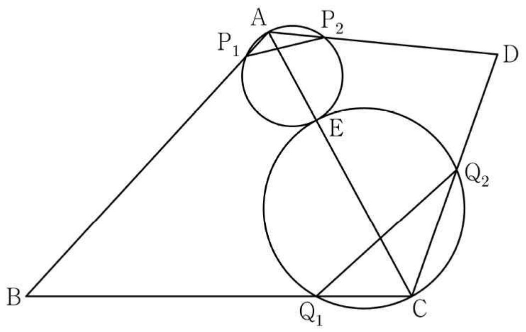


94. 그림과 같이

$\overline{BC}=3,\ \overline{CD}=2,\ \cos(\angle BCD)=-\frac{1}{3},\ \angle DAB>\frac{\pi}{2}$

인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AE를 1:2로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 P_1, P_2라 하고, 선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 Q_1, Q_2라 하자.
$\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=3:5\sqrt{2}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{AB}+\overline{AD}$의 값은? (단, $\overline{AB}>\overline{AD}$)

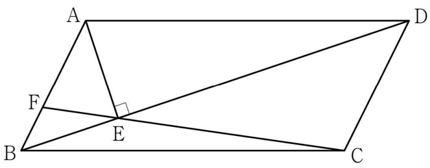
[4점][2023년 6월 공통13]



① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{22}$ ③ $\sqrt{23}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

95. 그림과 같이 평행사변형 ABCD가 있다. 점 A에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 E라 하고, 직선 CE가 선분 AB와 만나는 점을 F라 하자. $\cos(\angle AFC)=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\overline{EC}=10$이고 삼각형 CDE의 외접원의 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$일 때, 삼각형 AFE의 넓이는?

[4점][2023년 7월 공통13]

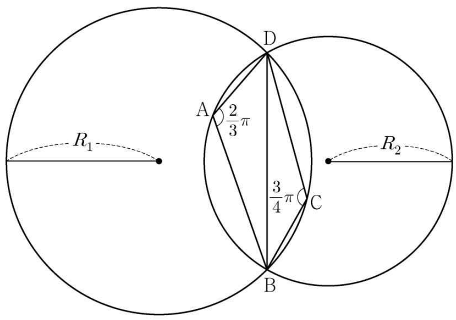


① $\frac{20}{3}$ ② 7 ③ $\frac{22}{3}$ ④ $\frac{23}{3}$ ⑤ 8

96. 그림과 같이

$$\overline{\mathrm{AB}}=2,\ \overline{\mathrm{AD}}=1,\ \angle\mathrm{DAB}=\frac{2}{3}\pi,\ \angle\mathrm{BCD}=\frac{3}{4}\pi$$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R_1, 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하자.



다음은 $R_1\times R_2$의 값을 구하는 과정이다.

> 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여
> $$R_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{\mathrm{BD}}$$
> 이고, 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여
> $$R_2=\boxed{(가)}\times\overline{\mathrm{BD}}$$
> 이다. 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여
> $$\overline{\mathrm{BD}}^2=2^2+1^2-(\ \boxed{(나)}\ )$$
> 이므로
> $$R_1\times R_2=\boxed{(다)}$$
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $9\times(p\times q\times r)^2$의 값을 구하시오.

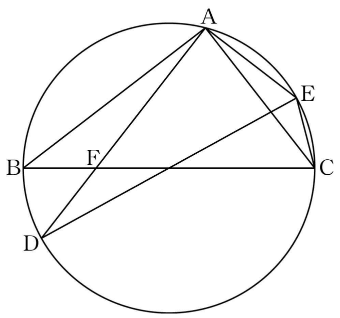
[4점][2023년 9월 공통20]

97. 그림과 같이 선분 BC를 지름으로 하는 원에 두 삼각형 ABC와 ADE가 모두 내접한다. 두 선분 AD와 BC가 점 F에서 만나고

$$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{DE}}=4,\ \overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{CE}},\ \sin(\angle\mathrm{CAE})=\frac{1}{4}$$

이다. $\overline{\mathrm{AF}}=k$일 때, k^2의 값을 구하시오.

[4점][2023년 10월 공통21]

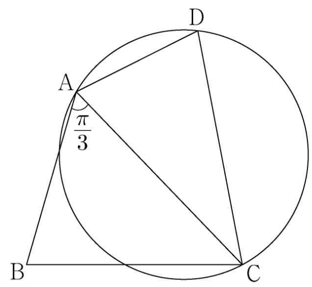


98. 그림과 같이

$$\overline{\mathrm{AB}}=3,\ \overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{13},\ \overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{CD}}=9,\ \angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{3}$$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 ABC의 넓이를 S_1, 삼각형 ACD의 넓이를 S_2라 하고, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자. $S_2=\frac{5}{6}S_1$일 때, $\frac{R}{\sin(\angle\mathrm{ADC})}$의 값은?

[4점][2024학년도 수능 공통13]



① $\frac{54}{25}$ ② $\frac{117}{50}$ ③ $\frac{63}{25}$ ④ $\frac{27}{10}$ ⑤ $\frac{72}{25}$

[해설] 수1-삼각함수

1) 256

$a_1^2=\frac{1}{2},\ a_2^2=1,\ a_3^2=\frac{1}{2},\ a_4^2=0,$

$a_5^2=\frac{1}{2},\ a_6^2=1,\ a_7^2=\frac{1}{2},\ a_8^2=0,\ \cdots$

$\sum_{n=1}^{32} na_n^2=\frac{1}{2}\times\frac{16\times32}{2}+1\times\frac{8\times32}{2}=256$

2) ④

점화식에 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 를 대입하면

$a_1=0,\ a_2=1,\ a_3=1,\ a_4=-2,\ a_5=-2,\ a_6=3,\ \cdots$

이므로 $a_{2n}=\begin{cases} n & (n\text{ 이 홀수}) \\ -n & (n\text{ 이 짝수}) \end{cases}$ 이다.

따라서 $a_{50}=a_{2\times25}=25$ 이다.

3) ③

[출제의도] 함수의 평행이동을 이해하여 삼각함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

함수 $f(x)=a\sin x+1$의 그래프는

함수 $y=a\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

조건 $a>0$에서

$y=a\sin x$가 최대일 때 $f(x)$는 최대이고,

$y=a\sin x$가 최소일 때 $f(x)$는 최소이므로

함수 $f(x)$는 $\sin x=1$일 때 최댓값 $M=a+1$,

$\sin x=-1$일 때 최솟값 $m=-a+1$을 갖는다.

따라서 $M-m=(a+1)-(-a+1)=2a$

$2a=6$이므로 $a=3$이다.

4) 30

[출제의도] 삼각함수의 그래프의 성질 추론하기

$y=\cos x+\frac{1}{4}$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로

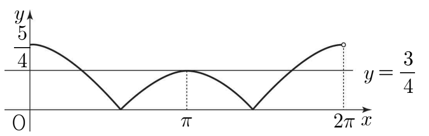
$\frac{1}{4}$만큼 평행이동한 그래프이므로 주기는 2π, 치역은

$\left\{y\ \middle|\ -\frac{3}{4}\le y\le\frac{5}{4}\right\}$이다.

$y=\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|$의 그래프는 $y=\cos x+\frac{1}{4}$의 그래프에서 $y<0$인

부분을 x축에 대하여 대칭이동시켜 얻은 그래프이다.

$y=\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|$의 그래프는 그림과 같다.



$y=\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나는

k의 값은 $\frac{3}{4}$

따라서 $\alpha=\frac{3}{4}$이고 $40\alpha=30$

5) ③

[출제의도] 삼각함수 사이의 관계 이해하기

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{4}$

이므로 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{8}$

따라서 $\tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=8$

6) ④

$2(1-\cos^2x)+3\cos x-3=0$

$2-2\cos^2x+3\cos x-3=0$

$\cos x=t\ \ (-1\le t\le 1)$

$-2t^2+3t-1=0$

$2t^2-3t+1=0$

$(2t-1)(t-1)=0$

$t=\frac{1}{2},\ t=1$

$\cos x=\frac{1}{2}$ 일 때, $x=\frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3}$

$\cos x=1$ 일 때, $x=0$

따라서 모든 근의 합은 $0+\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{3}=2\pi$이다

7) ①

[출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{5}$, $\sin\theta\cos\theta=-\frac{a}{5}$

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{5}$ 의 양변을 제곱하면

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{25}$ 이므로 $1+2\times\left(-\frac{a}{5}\right)=\frac{1}{25}$

따라서 $a=\frac{12}{5}$

8) 7

[출제의도] 주어진 범위에서 삼각방정식의 근을 구할 수 있는가?

$\cos^2x-\sin x=1$

$1-\sin^2x-\sin x=1$

$\sin^2x+\sin x=0$

$\sin x(\sin x+1)=0$

$\sin x=0$ 또는 $\sin x=-1$

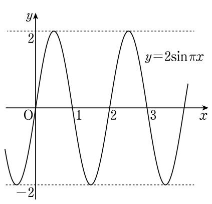
$x=\pi$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

따라서 모든 실근의 합은 $\frac{5}{2}\pi$

$p+q=2+5=7$

9) ⑤

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하고 미지수의 값을 구한다.



함수 $y=a\sin\frac{\pi}{2b}x$의 그래프는 $y=\sin\frac{\pi}{2b}x$의 그래프를 y축의

방향으로 a 배한 것이고 $a>0$ 이므로 최댓값은 a 이고 최솟값은 $-a$ 이다.

그런데 함수 $y=a\sin\frac{\pi}{2b}x$ 의 최댓값이 2 이므로 $a=2$

또한 $a\sin\frac{\pi}{2b}x=a\sin\left(\frac{\pi}{2b}x+2\pi\right)=a\sin\frac{\pi}{2b}(x+4b)$ 이므로

함수 $y=a\sin\frac{\pi}{2b}x$ 의 주기가 $4b$ 이다.

그러므로 $4b=2,\ b=\frac{1}{2}$

따라서 $a+b=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

10) ④

[출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

$|\sin 2x|=\frac{1}{2}$ 에서

$\sin 2x=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin 2x=-\frac{1}{2}$

i) $\sin 2x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{\pi}{12}$ 또는 $\frac{5}{12}\pi$ 또는 $\frac{13}{12}\pi$ 또는 $\frac{17}{12}\pi$

ii) $\sin 2x=-\frac{1}{2}$

$x=\frac{7}{12}\pi$ 또는 $\frac{11}{12}\pi$ 또는 $\frac{19}{12}\pi$ 또는 $\frac{23}{12}\pi$

따라서 실근의 개수는 8

11) ①

[출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

$(\sin x+\cos x)^2=\sqrt{3}\sin x+1$ 에서

$1+2\sin x\cos x=\sqrt{3}\sin x+1$

$\sin x(2\cos x-\sqrt{3})=0$

$0\le x\le\pi$ 이므로

$\sin x=0$ 일 때, $x=0$ 또는 $x=\pi$

$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 일 때, $x=\frac{\pi}{6}$

따라서 모든 실근의 합은 $0+\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7}{6}\pi$

12) ③

[출제의도] 삼각함수의 관계 이해하기

$\cos^2 x=1-\sin^2 x$ 이므로

$2\cos^2 x+\sin x=1$ 에 대입하면

$2(1-\sin^2 x)+\sin x=1$

$(2\sin x+1)(\sin x-1)=0$

$x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{11}{6}\pi$

따라서 모든 실근의 합은 $\frac{7}{2}\pi$

13) ③

$\sin 2x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ $(0\le 2x\le 2\pi)$에서

$2x=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $2x=\frac{7}{4}\pi$

$x=\frac{5}{8}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{8}\pi$

따라서 모든 해의 합은 $\frac{5}{8}\pi+\frac{7}{8}\pi=\frac{12}{8}\pi=\frac{3}{2}\pi$ 이다.

14) 5

[출제의도] 삼각방정식을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

$2\sin 2x+\sqrt{3}=0$ 에서 $\sin 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

즉, 삼각방정식의 모든 실근의 합은

$\frac{2}{3}\pi+\frac{5}{6}\pi=\frac{3}{2}\pi$

따라서 $p=2,\ q=3$ 이므로 $p+q=5$

15) ④

[출제의도] 삼각방정식의 해를 구할 수 있는가?

$\cos^2 x=1-\sin^2 x$이므로

방정식 $\cos^2 x=\sin^2 x-\sin x$에서

$1-\sin^2 x=\sin^2 x-\sin x$

$2\sin^2 x-\sin x-1=0$

$(2\sin x+1)(\sin x-1)=0$

$\sin x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=1$

이때, $0\le x<2\pi$이므로

(i) $\sin x=-\frac{1}{2}$에서

$x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

(ii) $\sin x=1$에서

$x=\frac{\pi}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 해의 합은

$\frac{7}{6}\pi+\frac{11}{6}\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{7}{2}\pi$

16) 9

[출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 함수의 최댓값을 구한다.

$\sin^2 x=1-\cos^2 x,\ \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$이므로

$f(x)=\sin^2 x+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1$

$=1-\cos^2 x+\cos x+1$

$=-\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$

이때 $-1\le\cos x\le 1$이므로

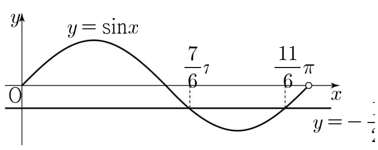
함수 $f(x)$는 $\cos x=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{9}{4}$를 갖는다.

따라서 $M=\frac{9}{4}$이므로

$4M=9$

17) ②

[출제의도] 삼각함수 이해하기



$2\sin x+1<0$의 해는 $\frac{7}{6}\pi<x<\frac{11}{6}\pi$

$\therefore\ \alpha=\frac{7}{6}\pi,\ \beta=\frac{11}{6}\pi$

따라서 $\cos(\beta-\alpha)=\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$

18) ③

$x=\theta+\frac{3}{4}\pi$라 하면

$f\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)=\cos^2\theta-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+k$

$=\cos^2\theta+\sin\theta+k$

$=1-\sin^2\theta+\sin\theta+k$

$=-\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2+k+\frac{5}{4}$

최댓값은 $k+\frac{5}{4}=3,\ k=\frac{7}{4}$

최솟값은 $\sin\theta=-1$일 때, $m=\frac{3}{4}$

$k+m=\frac{7}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{2}$

19) ③

[출제의도] 지수함수와 삼각함수가 포함된 부등식을 이해한다.

(i) $2^x-8<0$이고 $\cos x-\frac{1}{2}>0$인 경우

$0<x<3$이고 $0<x<\frac{\pi}{3}$ 이므로 $0<x<\frac{\pi}{3}$

(ii) $2^x-8>0$이고 $\cos x-\frac{1}{2}<0$인 경우

$3<x<\pi$이고 $\frac{\pi}{3}<x<\pi$이므로 $3<x<\pi$

따라서 $0<x<\frac{\pi}{3}$ 또는 $3<x<\pi$이므로

$(b-a)+(d-c)=\left(\frac{\pi}{3}-0\right)+(\pi-3)=\frac{4\pi}{3}-3$

20) ③

[출제의도] 삼각함수를 이용하여 방정식 문제해결하기

$6\sin x\cos x+3\sin x=2\cos x+1$에서

$6\sin x\cos x+3\sin x-2\cos x-1=0$

$(3\sin x-1)(2\cos x+1)=0$

$\sin x=\frac{1}{3}$ 또는 $\cos x=-\frac{1}{2}$

$\sin x=\frac{1}{3}$을 만족시키는 두 실수를 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라 하면

$\beta=\pi-\alpha$이므로 $\alpha+\beta=\pi$

$\cos x=-\frac{1}{2}$을 만족시키는 두 실수를 $\gamma,\ \delta$라 하면

$\gamma+\delta=\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}\pi=2\pi$

따라서 구하는 모든 실근의 합은

$\pi+2\pi=3\pi$

21) ④

[출제의도] 삼각부등식을 풀 수 있는가?

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면 실근을 갖지 않아야 하므로

$\frac{D}{4}=4\cos^2\theta-6\sin\theta<0$

$2\sin^2\theta+3\sin\theta-2>0$

$(2\sin\theta-1)(\sin\theta+2)>0$

$\sin\theta+2>0$이므로 $\sin\theta>\frac{1}{2}$에서 $\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5}{6}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$ 이므로

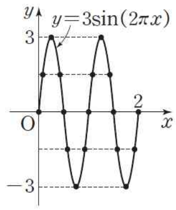
$3\alpha+\beta=\frac{4}{3}\pi$

22) ①

[출제의도] 수학내적 문제해결능력-삼각함수

$0\le x\le 2$에서 방정식 $3\sin(2\pi x)-a=0$의 실근의 개수는 곡선 $y=3\sin(2\pi x)$와 직선 $y=a$의 교점의 개수와 같다.

함수 $y=3\sin(2\pi x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{2\pi}=1$이므로 그림에서 a의 값의 범위에 따라 교점의 개수는 다음과 같다.



$a=0$일 때 5개

$0<|a|<3$일 때 4개

$|a|=3$일 때 2개

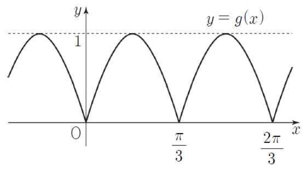
$|a|>3$일 때 0개

이므로 $A=\{0,2,4,5\}$

따라서 집합 A의 모든 원소의 합은 11이다.

23) ②

함수 $g(x)=|\sin 3x|$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $g(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{3}$

함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{|a|}$

두 함수 $f(x),\ g(x)$의 주기가 서로 같으므로 $\frac{2\pi}{|a|}=\frac{\pi}{3}$

a는 양수이므로 $a=6$

24) ①

$\sin^2x=\cos^2x+\cos x$

$1-\cos^2x=\cos^2x+\cos x$

$2\cos^2x+\cos x-1=0$

$(2\cos x-1)(\cos x+1)=0$에서

$\cos x=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=-1$

$0<x\le 2\pi$이므로

$\cos x=\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

$\cos x=-1$에서 $x=\pi$

$\sin\frac{\pi}{3}>\cos\frac{\pi}{3},\ \sin\frac{5}{3}\pi<\cos\frac{5}{3}\pi,\ \sin\pi>\cos\pi$

이므로 구하는 모든 x의 값의 합은

$\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4}{3}\pi$

25) ②

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\frac{\sin\theta\cos\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1-\cos\theta}{\tan\theta}=1$

$\frac{\sin^2\theta\cos\theta+(1-\cos\theta)^2\cos\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=1$

$\frac{(\sin^2\theta\cos^2\theta-2\cos\theta+1)\cos\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=1$

$\frac{2(1-\cos\theta)\cos\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=1$, $\sin\theta=2\cos\theta$

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이고 $\cos^2\theta=\frac{1}{5}$이므로

$\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

26) ①

[출제의도] 삼각함수가 포함된 부등식의 해를 구할 수 있는가?

이차방정식 $x^2-(2\sin\theta)x-3\cos^2\theta-5\sin\theta+5=0$ 의 판별식을 D라 하면 이 이차방정식이 실근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=(-\sin\theta)^2-(-3\cos^2\theta-5\sin\theta+5)\ \geq\ 0$

이어야 한다.

즉, $\sin^2\theta+3\cos^2\theta+5\sin\theta-5\ \geq\ 0$

이때 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$이므로

$\sin^2\theta+3(1-\sin^2\theta)+5\sin\theta-5\ \geq\ 0$

$2\sin^2\theta-5\sin\theta+2\ \leq\ 0$

$(2\sin\theta-1)(\sin\theta-2)\ \leq\ 0$

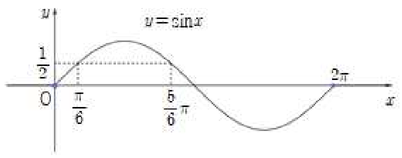
$\sin\theta-2<0$이므로

$2\sin\theta-1\ \geq\ 0$

$\sin\theta\ \geq\ \frac{1}{2}$

이때 $0\ \leq\ \theta<2\pi$이므로

$\frac{\pi}{6}\ \leq\ \theta\ \leq\ \frac{5}{6}\pi$



따라서 $\alpha=\frac{\pi}{6}, \beta=\frac{5}{6}\pi$이므로

$\therefore\ 4\beta-2\alpha=4\times\frac{5}{6}\pi-2\times\frac{\pi}{6}=3\pi$

27) ②

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

$\frac{1}{4}=1+2\sin\theta\cos\theta$, $\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

$\frac{1+\tan\theta}{\sin\theta}=\frac{1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\sin\theta}=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}=-\frac{4}{3}$

28) 169

$0\leq x<2^{n+1}$일 때, $0\leq\frac{\pi}{2^n}x<2\pi$이므로

부등식 $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}x\right)\leq-\frac{1}{2}$의 해는

$\frac{2}{3}\pi\leq\frac{\pi}{2^n}x\leq\frac{4}{3}\pi$, 즉 $\frac{2^{n+1}}{3}\leq x\leq\frac{2^{n+2}}{3}$

a_n은 $\frac{2^{n+1}}{3}\leq x\leq\frac{2^{n+2}}{3}$을 만족시키는 서로 다른 모든 자연수 x의 개수이고, $\frac{2^{n+2}}{3}$은 자연수가 아니므로

$\sum_{n=1}^{7}a_n$은 $\frac{2^2}{3}\leq x\leq\frac{2^9}{3}$인 자연수의 개수와 같다.

$\frac{2^2}{3}=1.333\cdots$, $\frac{2^9}{3}=170.666\cdots$

따라서 $\sum_{n=1}^{7}a_n=170-1=169$

[참고]

$n=1$일 때, $\frac{2^2}{3}\leq x\leq\frac{2^3}{3}$인 자연수 x는 2이므로 $a_1=1$

$n=2$일 때, $\frac{2^3}{3}\leq x\leq\frac{2^4}{3}$인 자연수 x는 3, 4, 5이므로 $a_2=3$

$n=3$일 때, $\frac{2^4}{3}\leq x\leq\frac{2^5}{3}$인 자연수 x는 6, 7, 8, 9, 10이므로 $a_3=5$

$n=4$일 때, $\frac{2^5}{3}\leq x\leq\frac{2^6}{3}$인 자연수 x는 11, 12, 13, $\cdots$, 21이므로 $a_4=11$

$n=5$일 때, $\frac{2^6}{3}\leq x\leq\frac{2^7}{3}$인 자연수 x는 22, 23, 24, $\cdots$, 42이므로 $a_5=21$

$n=6$일 때, $\frac{2^7}{3}\leq x\leq\frac{2^8}{3}$인 자연수 x는 43, 44, 45, $\cdots$, 85이므로 $a_6=43$

$n=7$일 때, $\frac{2^8}{3}\leq x\leq\frac{2^9}{3}$인 자연수 x는 86, 87, 88, $\cdots$, 170이므로 $a_7=85$

29) ⑤

[출제의도] 삼각함수가 포함된 방정식을 푼다.

$\sin x=\sqrt{3}(1+\cos x)$, $\sin^2x=1-\cos^2x$ 이므로

$1-\cos^2x=3(1+\cos x)^2$, $2(1+\cos x)(2\cos x+1)=0$

(ⅰ) $\cos x=-1$ 일 때, $\sin x=0$ 이고 $x=\pi$

(ⅱ) $\cos x=-\frac{1}{2}$ 일 때, $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이고 $x=\frac{2}{3}\pi$

(ⅰ), (ⅱ)에서 방정식의 모든 해의 합은 $\frac{5}{3}\pi$이다.

30) 48

[출제의도] 삼각함수의 성질을 이해한다.

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\tan(\pi-\theta)=\cos\theta\times(-\tan\theta)=-\sin\theta$

$\sin\theta=-\frac{3}{5}$ 이므로 $30(1-\sin\theta)=30\times\frac{8}{5}=48$

31) ②

$4\sin^2x-4\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-3=0$

$4\sin^2x+4\sin x-3=0$

$(2\sin x-1)(2\sin x+3)=0$

$-1 \le \sin x \le 1$이므로

$\sin x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, 2\pi+\frac{\pi}{6}, 2\pi+\frac{5}{6}\pi,$

따라서 모든 해의 합은 6π

32) ③

[출제의도] 삼각함수 이해하기

$2\cos^2 x-\sin(\pi+x)-2=2(1-\sin^2 x)+\sin x-2$

$=-2\sin^2 x+\sin x=-\sin x(2\sin x-1)=0$

$\sin x=0$또는 $\sin x=\frac{1}{2}$

$0<x<2\pi$이므로

$\sin x=0$에서 $x=\pi$

$\sin x=\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{6}$또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

따라서 모든 해의 합은 2π이다.

33) 40

[출제의도] 삼각함수 이해하기

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2\times\frac{7}{18}=\frac{16}{9}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{4}{3}$

따라서 $30(\sin\theta+\cos\theta)=40$

34) ⑤

[출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

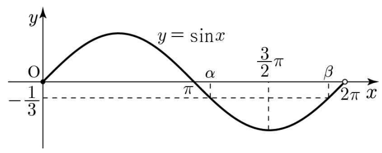
$\cos^2 x=1-\sin^2 x$이므로

$3(1-\sin^2 x)+5\sin x-1=0$

$3\sin^2 x-5\sin x-2=0$

$(3\sin x+1)(\sin x-2)=0$

$-1 \le \sin x \le 1$이므로 $\sin x=-\frac{1}{3}$ …… ㉠



㉠을 만족시키는 x의 값을 $x=\alpha$, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2}\pi$이므로 $\alpha+\beta=3\pi$

따라서 모든 해의 합은 3π

35) ①

[출제의도] 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

$\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=4$ 에서

$\frac{\sin\theta(1+\sin\theta)-\sin\theta(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}=4$

$\frac{2\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}=4$

$\frac{2(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}=4$

$1-\cos^2\theta=2\cos^2\theta$

따라서

$\cos^2\theta=\frac{1}{3}$

이고, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로

$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

36) ①

[출제의도] 삼각함수의 정의와 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

$\tan\theta-\frac{6}{\tan\theta}=1$이므로

양변에 $\tan\theta$를 곱하면

$\tan^2\theta-6=\tan\theta$

$\tan^2\theta-\tan\theta-6=0$

$(\tan\theta+2)(\tan\theta-3)=0$

$\tan\theta=-2$ 또는 $\tan\theta=3$

이때, $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로

$\tan\theta=3$

이때,

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=3,$

$\sin\theta=3\cos\theta$

이므로

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 대입하면

$9\cos^2\theta+\cos^2\theta=1$

$10\cos^2\theta=1$

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$ 또는 $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$

이때, $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로

$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$ …… ㉠

이 값을 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 대입하면

$\sin^2\theta+\frac{1}{10}=1$

$\sin^2\theta=\frac{9}{10}$

$\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$ 또는 $\sin\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$

이때, $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로

$\sin\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$ …… ㉡

따라서 ㉠과 ㉡에서

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

$=-\frac{4}{\sqrt{10}}$

$=-\frac{2\sqrt{10}}{5}$

37) 4

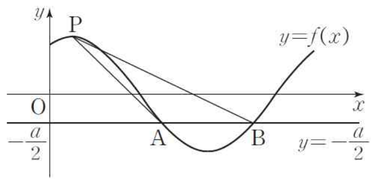
[출제의도] 이해능력-삼각함수

$a\sin\dfrac{x+\pi}{3}=-\dfrac{a}{2}$ 에서 $\sin\dfrac{x+\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$ 이므로

$\dfrac{x+\pi}{3}=\dfrac{7}{6}\pi$ 또는 $\dfrac{x+\pi}{3}=\dfrac{11}{6}\pi$

$x=\dfrac{5}{2}\pi$ 또는 $x=\dfrac{9}{2}\pi$

즉, $\overline{AB}=\dfrac{9}{2}\pi-\dfrac{5}{2}\pi=2\pi$



삼각형 PAB의 넓이가 최대이려면 삼각형 PAB의 높이가 최대이어야 하므로 점 P의 y좌표가 a일 때 최대이다.

삼각형 PAB의 높이가 최대일 때 그 높이는 $\dfrac{3}{2}a$이다.

삼각형 PAB의 넓이의 최댓값이 6π이므로

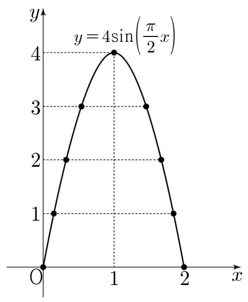
$\dfrac{1}{2}\times 2\pi\times\dfrac{3}{2}a=6\pi$

따라서 $a=4$

38) 9

[출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

곡선 $y=4\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)(0\le x\le 2)$는 그림과 같다.



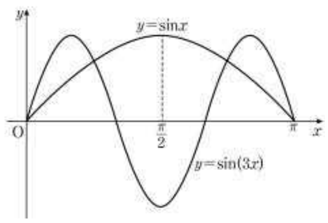
따라서 y좌표가 정수인 점의 개수는 9

39) 9

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 두 그래프가 만나는 점의 개수를 추론한다.

두 함수 $y=\sin x$, $y=\sin(3x)$의 주기가 각각 2π, $\dfrac{2\pi}{3}$ 이므로

$0\le x\le\pi$에서 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\sin(3x)$를 나타내면 [그림 1]과 같다.

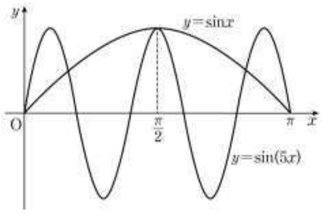


[그림 1]

[그림 1]에서 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\sin(3x)$의 교점의 개수가 4이므로 $a_3=4$

두 함수 $y=\sin x$, $y=\sin(5x)$의 주기가 각각 2π, $\dfrac{2\pi}{5}$ 이므로

$0\le x\le\pi$에서 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\sin(5x)$를 좌표평면에 나타내면 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

[그림 2]에서 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\sin(5x)$의 교점의 개수가 5이므로 $a_5=5$

따라서 $a_3+a_5=4+5=9$

40) ②

[출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

$f(0)=a=-3$

함수 $f(x)$의 주기가 π이므로 $\dfrac{2\pi}{b}=\pi$, $b=2$

$\therefore\ g(x)=2\sin x-3$

$-1\le\sin x\le 1$이므로 $-5\le 2\sin x-3\le -1$

따라서 함수 $g(x)$의 최댓값은 -1

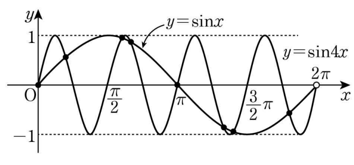
41) ④

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 교점의 개수를 구한다.

함수 $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프와 일치하고

함수 $y=\sin 4x$의 최댓값은 1, 최솟값은 -1, 주기는 $\dfrac{\pi}{2}$ 이므로

$0\le x<2\pi$에서 두 함수 $y=\sin x$와 $y=\sin 4x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 두 곡선이 만나는 점의 개수는 8

42) 40

[출제의도] 삼각함수의 그래프의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

닫힌구간 $\left[-\dfrac{\pi}{a},\dfrac{2\pi}{a}\right]$에서 $0<a<\dfrac{4}{7}$ 이므로

$-\dfrac{\pi}{a}<-\dfrac{7}{4}\pi$, $\dfrac{7\pi}{2}<\dfrac{2\pi}{a}$ 이다.

함수 $f(x)=2\sin(ax)+b$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{7}{2}\pi,0\right)$을 지나므로

$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(-\dfrac{a}{2}\pi\right)+b=-2\sin\left(\dfrac{a}{2}\pi\right)+b=0$

$f\left(\dfrac{7}{2}\pi\right)=2\sin\left(\dfrac{7a}{2}\pi\right)+b=0$

따라서 $\sin\left(\dfrac{7a}{2}\pi\right)=-\sin\left(\dfrac{a}{2}\pi\right)$

$0<a<\dfrac{4}{7}$ 에서 $0<\dfrac{a}{2}\pi<\dfrac{2}{7}\pi$, $0<\dfrac{7a}{2}\pi<2\pi$ 이므로

$\frac{7a}{2}\pi=2\pi-\frac{a}{2}\pi$ 또는 $\frac{7a}{2}\pi=\pi+\frac{a}{2}\pi$

따라서 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{1}{3}$

(i) $a=\frac{1}{2}$일 때

$f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+b$에서

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+b=2\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+b=-\sqrt{2}+b=0$

이므로 $b=\sqrt{2}$

이는 b는 유리수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=\frac{1}{3}$일 때

$f(x)=2\sin\left(\frac{1}{3}x\right)+b$에서

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+b=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+b=-1+b=0$

이므로 $b=1$

이때 $f\left(\frac{7}{2}\pi\right)=0$이다.

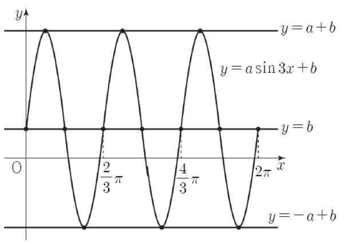
(i), (ii)에서 $a=\frac{1}{3}$, $b=1$이고

$30(a+b)=30\times\left(\frac{1}{3}+1\right)=40$

43) 14

함수 $y=a\sin 3x+b$의 그래프의 주기가 $\frac{2}{3}\pi$이므로 $0\le x\le 2\pi$에서

함수 $y=a\sin 3x+b$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $y=a\sin 3x+b$의 그래프가 직선 $y=k$와 만나는 점의 개수는

$k=-a+b$ 또는 $k=a+b$일 때, 3

$k=b$일 때, 7이므로 $b=2$이고,

$-a+2=9$ 또는 $a+2=9$

a가 양수이므로 $a=7$

따라서 $a\times b=7\times 2=14$

44) ②

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 교점의 좌표를 구한다.

두 함수의 그래프가 만나는 점의 y좌표가 같으므로

$\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$이므로 $2\sin x=1$

즉, $\sin x=\frac{1}{2}$, 그러므로 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

따라서 모든 점의 x좌표의 합은 π

45) 10

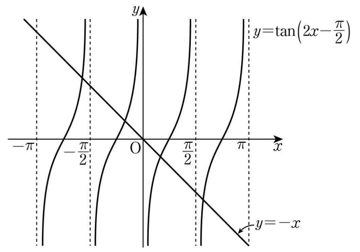
[출제의도] 삼각함수의 그래프와 직선의 교점의 개수를 구한다.

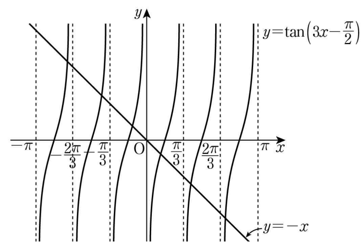
$y=\tan\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)=\tan n\left(x-\frac{\pi}{2n}\right)$의 주기는 $\frac{\pi}{n}$이고

$y=\tan\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=\tan nx$의 그래프를 x축의 방향으로

$\frac{\pi}{2n}$만큼 평행이동한 그래프이다.

아래 그림은 $n=2$, $n=3$일 때의 그래프이다.





그러므로 직선 $y=-x$와

$y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프의 교점의 개수는 $a_2=4$,

$y=\tan\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프의 교점의 개수는 $a_3=6$

따라서 $a_2+a_3=4+6=10$

46) ③

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하고 조건을 만족시키는 삼각함수를 구할 수 있는가?

함수 $y=a\sin b\pi x$의 주기는

$\frac{2\pi}{b\pi}=\frac{2}{b}$

이므로 두 점 A, B의 좌표는

$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2b},\ a\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{5}{2b},\ a\right)$

따라서 삼각형 OAB의 넓이가 5이므로

$\frac{1}{2}\times a\times\left(\frac{5}{2b}-\frac{1}{2b}\right)=5$, $\frac{a}{b}=5$

$a=5b$ …… ㉠

직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$이므로

$\frac{a}{\frac{1}{2b}}\times\frac{a}{\frac{5}{2b}}=2ab\times\frac{2ab}{5}$

$=\frac{4a^2b^2}{5}$

$=\frac{5}{4}$

$a^2b^2=\frac{25}{16}$, $ab=\frac{5}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=\frac{5}{2}$, $b=\frac{1}{2}$이므로

$a+b=3$

47) ③

[출제의도] 삼각함수의 그래프의 성질을 이용하여 조건을 만족하는 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

$\dfrac{\pi}{\dfrac{\pi}{a}}=a$이므로

함수 $f(x)$의 주기는 a이다.

직선 AB는 원점을 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선이므로

양수 t에 대하여

$\mathrm{B}(t,\ \sqrt{3}t)$로 놓으면

$\mathrm{A}(-t,\ -\sqrt{3}t)$이고,

$\overline{\mathrm{AB}}=4t$이다.

이때, 함수 $f(x)$의 주기가 a이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=4t=a$이고,

$\mathrm{C}(-t+a,\ -\sqrt{3}t)$, 즉 $\mathrm{C}(3t,\ -\sqrt{3}t)$이다.

점 C가 곡선 $y=\tan\dfrac{\pi x}{a}=\tan\dfrac{\pi x}{4t}$ 위의 점이므로

$-\sqrt{3}t=\tan\dfrac{\pi\times 3t}{4t}$

$-\sqrt{3}t=\tan\dfrac{3\pi}{4}$에서

$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4t)^2&=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2\\&=\frac{4}{\sqrt{3}}\\&=\frac{4\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

48) ③

[출제의도] 삼각함수의 뜻과 그래프 이해하기

함수 $y=\sin kx$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{k}$

$0\le x<2\pi$일 때, 방정식 $\sin kx=\dfrac{1}{3}$의 서로 다른 실근의 개수는

$0\le x<2\pi$에서 곡선 $y=\sin kx$와 직선 $y=\dfrac{1}{3}$이 만나는 점의 개수와 같다.

$1\le l\le k$인 자연수 l에 대하여

$\dfrac{2(l-1)}{k}\pi\le x<\dfrac{2l}{k}\pi$에서 곡선 $y=\sin kx$와 직선 $y=\dfrac{1}{3}$이 만나는 점의 개수는 2이고

$0\le x<2\pi$에서 곡선 $y=\sin kx$와 직선 $y=\dfrac{1}{3}$이 만나는 점의 개수가 8이므로

$2k=8$에서 $k=4$

$0\le x<2\pi$일 때, 방정식 $\sin 4x=\dfrac{1}{3}$의 서로 다른 실근을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을

$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_8$이라 하자.

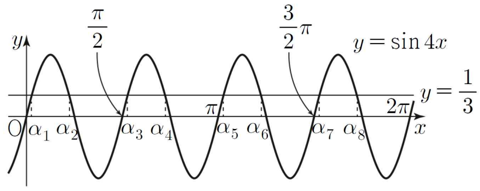
함수 $y=\sin 4x$의 주기는 $\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\alpha_2=\dfrac{\pi}{4}-\alpha_1,\ \alpha_3=\dfrac{\pi}{2}+\alpha_1,\ \alpha_4=\dfrac{3}{4}\pi-\alpha_1,\ \alpha_5=\pi+\alpha_1,$

$\alpha_6=\dfrac{5}{4}\pi-\alpha_1,\ \alpha_7=\dfrac{3}{2}\pi+\alpha_1,\ \alpha_8=\dfrac{7}{4}\pi-\alpha_1$

따라서 구하는 모든 해의 합은 7π

[참고]



49) ③

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 상수의 값을 구한다.

$0\le x\le\dfrac{2\pi}{a}$에서 $0\le ax\le 2\pi$이므로

$2\cos ax=1$, 즉 $\cos ax=\dfrac{1}{2}$에서

$ax=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $ax=\dfrac{5\pi}{3}$, 즉 $x=\dfrac{\pi}{3a}$ 또는 $x=\dfrac{5\pi}{3a}$

두 점 A, B의 좌표가 각각 $\left(\dfrac{\pi}{3a},\ 1\right)$, $\left(\dfrac{5\pi}{3a},\ 1\right)$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{8}{3}$이므로

$\dfrac{5\pi}{3a}-\dfrac{\pi}{3a}=\dfrac{4\pi}{3a}=\dfrac{8}{3}$

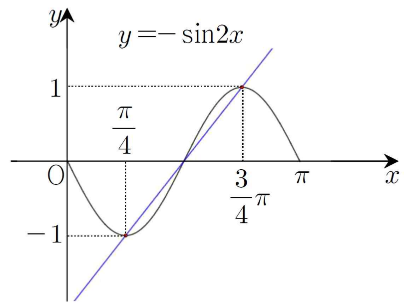
$a=\dfrac{4\pi}{3}\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{\pi}{2}$

50) ④

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 곡선 위의 두 점을 지나는 직선의 기울기를 구할 수 있는가?

함수 $f(x)=-\sin 2x$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{4}$일 때 최솟값

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{2}=-1$

을 갖고, $x=\dfrac{3}{4}\pi$일 때 최댓값

$f\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)=-\sin\dfrac{3}{2}\pi=1$

따라서 $a=\dfrac{3}{4}\pi,\ b=\dfrac{\pi}{4}$이므로

두 점 $\left(\dfrac{3}{4}\pi,\ 1\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{4},\ -1\right)$을 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{-1-1}{\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{3}{4}\pi}=\dfrac{2}{\dfrac{\pi}{2}}=\dfrac{4}{\pi}$

51) ③

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 $x_1\ (0<x_1<1)$, x_2, x_3이라 하면

삼각함수 $y=\sin\dfrac{\pi}{2}x$의 주기가 4이므로

$x_2=2-x_1$, $x_3=x_1+4$

$x_1+x_2+x_3=x_1+(2-x_1)+(x_1+4)=x_1+6=\frac{25}{4}$

$x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=2-x_1=\frac{7}{4}$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=x_2-x_1=\frac{3}{2}$

52) ③

$12-\alpha_1=\alpha_2$이므로 $\alpha_2-\alpha_1=12-2\alpha_1=8$, $\alpha_1=2$

$f(2)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}=k$

$-3\cos\frac{\pi x}{6}-1=\frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi x}{6}=-\frac{1}{2}$

$\frac{\pi x}{6}=\frac{2}{3}\pi$, $x=4$,

$\beta_1=4$, $\beta_2=12-4=8$이므로

$|\beta_1-\beta_2|=4$

53) ④

[출제의도] 삼각함수의 그래프의 성질을 활용하여 문제를 해결한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=2$와 만나는 점의 x좌표는

$0\le x<\frac{4\pi}{a}$일 때 방정식

$\left|4\sin\left(ax-\frac{\pi}{3}\right)+2\right|=2$ ⋯⋯ ㉠

의 실근과 같다.

$ax-\frac{\pi}{3}=t$라 하면 $-\frac{\pi}{3}\le t<\frac{11\pi}{3}$이고

$|4\sin t+2|=2$ ⋯⋯ ㉡

에서 $\sin t=0$ 또는 $\sin t=-1$

$-\frac{\pi}{3}\le t<\frac{11\pi}{3}$일 때, 방정식 ㉡의 실근은

0, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, 3π, $\frac{7\pi}{2}$의 6개이고

이 6개의 실근의 합은 11π이다.

따라서 $n=6$이고 방정식 ㉠의 6개의 실근의 합이 39이므로

$39a-\frac{\pi}{3}\times6=11\pi$, $a=\frac{\pi}{3}$

따라서 $n\times a=6\times\frac{\pi}{3}=2\pi$

54) ③

[출제의도] 닫힌구간에서 탄젠트함수의 최댓값과 최솟값을 이용하여 두 상수의 곱을 구할 수 있는가?

함수 $f(x)=a-\sqrt{3}\tan2x$의 그래프의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6},\ b\right]$에서 최댓값과 최솟값을 가지므로

$-\frac{\pi}{6}<b<\frac{\pi}{4}$ 이다.

한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $\left[-\frac{\pi}{6},\ b\right]$에서 x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소한다.

함수 $f(x)$는 $x=-\frac{\pi}{6}$에서 최댓값 7을 가지므로

$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=a-\sqrt{3}\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=7$에서

$a+\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{3}=7$

$a+3=7$

$a=4$

함수 $f(x)$는 $x=b$에서 최솟값 3을 가지므로

$f(b)=4-\sqrt{3}\tan2b=3$에서

$\tan2b=\frac{\sqrt{3}}{3}$

이때, $-\frac{\pi}{3}<2b<\frac{\pi}{2}$이므로

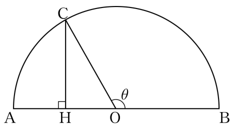
$2b=\frac{\pi}{6}$

$b=\frac{\pi}{12}$

따라서 $a\times b=4\times\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$

55) 27

[출제의도] 호도법을 이해하여 주어진 도형에서 선분의 길이를 구한다.



반원의 중심을 O라 하면 반원의 지름의 길이가 12이므로 $\overline{\mathrm{OB}}=6$이다.

$\angle\mathrm{COB}=\theta$라 하면 호 BC의 길이가 4π이므로

$6\times\theta=4\pi$, $\theta=\frac{2}{3}\pi$

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle\mathrm{COH}=\pi-\theta=\frac{\pi}{3}$

삼각형 CHO는 직각삼각형이고 $\overline{\mathrm{OC}}=6$이므로

$\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{OC}}\times\sin\frac{\pi}{3}=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

따라서 $\overline{\mathrm{CH}}^2=(3\sqrt{3})^2=27$

56) 80

[출제의도] 삼각함수의 정의를 이해한다.

원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원이 세 동경 OP, OQ, OR와 만나는 점을 각각 A, B, C라 하자.

점 P가 제1사분면 위에 있고, $\sin\alpha=\frac{1}{3}$이므로

점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(2\sqrt{2},\ 1)$

점 Q가 점 P와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

동경 OQ도 동경 OP와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 그러므로 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(1,\ 2\sqrt{2})$

점 R가 점 Q와 원점에 대하여 대칭이므로

동경 OR도 동경 OQ와 원점에 대하여 대칭이다.

그러므로 점 C의 좌표는 $\mathrm{C}(-1,\ -2\sqrt{2})$

삼각함수의 정의에 의해

$\sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan\gamma=\frac{(-2\sqrt{2})}{(-1)}=2\sqrt{2}$

따라서 $9(\sin^2\beta+\tan^2\gamma)=9\times\left(\frac{8}{9}+8\right)=80$

57) ②

[출제의도] 삼각함수의 성질을 이해하여 주어진 조건을 만족시키는 값을 구한다.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$이므로 사인법칙에 의해

$\frac{10}{\sin C}=2\times3\sqrt{5}$, $\sin C=\frac{\sqrt{5}}{3}$

삼각형 ABC는 예각삼각형이므로

$\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab}=\dfrac{4}{3}$에서 $\dfrac{a^2+b^2-\frac{2}{3}ab}{ab}=\dfrac{4}{3}$

$3a^2+3b^2-2ab=4ab,\ 3(a-b)^2=0$이므로 $a=b$

코사인법칙에 의해

$10^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+a^2-2a^2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}a^2,$

$100=\dfrac{2}{3}a^2,\ a^2=150$

따라서 $ab=a^2=150$

58) ③

[출제의도] 코사인법칙을 이용하여 문제를 해결한다.

$\overline{BC}=2\sqrt{5},\ \overline{OB}=\overline{OC}=\sqrt{10}$이므로 삼각형 OBC는

직각이등변삼각형이고 $\angle BOC=\dfrac{\pi}{2}$이다.

$\angle AOB=\alpha,\ \angle AOC=\beta$라 하면

두 삼각형 OAB, OCA의 넓이 $S_1,\ S_2$는 각각

$S_1=\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{10})^2\times\sin\alpha=5\sin\alpha$

$S_2=\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{10})^2\times\sin\beta=5\sin\beta$

주어진 조건에서 $3S_1=4S_2$이므로

$\sin\alpha=\dfrac{4}{3}\sin\beta$

$\alpha+\beta+\dfrac{\pi}{2}=2\pi$이므로 $\beta=\dfrac{3}{2}\pi-\alpha$

$\sin\alpha=\dfrac{4}{3}\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\dfrac{4}{3}\cos\alpha$ …… ㉠

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$에서 $\dfrac{16}{9}\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\cos^2\alpha=\dfrac{9}{25}$

$\sin\alpha>0$이므로 ㉠에서 $\cos\alpha<0$

따라서 $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$

코사인법칙에 의하여 구하는 선분 AB의 길이는

$\overline{AB}=\sqrt{(\overline{OA})^2+(\overline{OB})^2-2\times\overline{OA}\times\overline{OB}\cos\alpha}$

$=\sqrt{(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2-2(\sqrt{10})^2\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)}$

$=4\sqrt{2}$

59) 32

[출제의도] 호도법을 이용하여 부채꼴의 넓이를 계산한다.

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 할 때, 중심각의 크기가

1라디안이므로 $\dfrac{l}{r}=1$ 즉, $l=r$

부채꼴의 둘레의 길이는 $2r+l=24$이므로

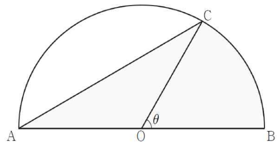
$l=r$를 대입하면 $3r=24$

$r=8,\ l=8$

따라서 부채꼴의 넓이는 $\dfrac{1}{2}rl=\dfrac{1}{2}\times8\times8=32$

60) ③

반원의 중심을 O라 하고, 부채꼴 OBC의 중심각의 크기를 θ라 하자.



반원의 반지름의 길이가 6이고 호 CB의 길이가 2π이므로

$2\pi=6\theta$에서 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

부채꼴 OBC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times6^2\times\dfrac{\pi}{3}=6\pi$

$\angle COA=\dfrac{2\pi}{3}$이므로 삼각형 CAO의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times6^2\times\sin\dfrac{2\pi}{3}=9\sqrt{3}$

따라서 구하는 넓이는 $6\pi+9\sqrt{3}$

61) ④

부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 r이라 하면

$\overline{OP}=\dfrac{3}{4}r,\ \overline{OQ}=\dfrac{1}{3}r$

삼각형 OPQ의 넓이가 $4\sqrt{3}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}r\times\dfrac{1}{3}r\times\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{16}r^2=4\sqrt{3},\ r=8$

따라서 호의 길이는 $8\times\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{8}{3}\pi$

62) ①

원 C의 반지름의 길이를 R라 하면

원 C의 넓이가 $\dfrac{49}{3}\pi$이므로

$R^2\pi=\dfrac{49}{3}\pi,\ R=\dfrac{7}{3}\sqrt{3}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R,\ \overline{BC}=2\times\dfrac{7}{3}\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=7$

삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=a$라 하면 코사인법칙에 의해

$7^2=a^2+3^2-2\times a\times3\times\cos\dfrac{\pi}{3}$

$a^2=3a-40=0,\ (a-8)(a+5)=0$

$a>0$이므로 $a=8$

$\overline{AC}=8$이고 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

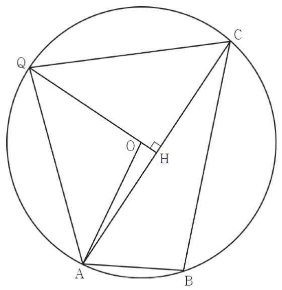
$\cos(\angle CBA)=\dfrac{3^2+7^2-8^2}{2\times3\times7}=-\dfrac{1}{7}$

이므로 $\dfrac{\pi}{2}<\angle CBA<\pi$가 되어 삼각형 ABC는 둔각삼각형이다.

삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되도록 하는 점을 Q라 하면

점 Q는 선분 AC의 수직이등분선과 원 C의 두 교점 중 직선 AC로부터 멀리 떨어져 있는 점이다.

그림과 같이 점 Q에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 원 C의 중심 O는 선분 QH 위에 있다.



직각삼각형 AHO에서

$\overline{OH}=\sqrt{\left(\frac{7}{3}\sqrt{3}\right)^2-4^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\overline{QH}=\frac{8}{3}\sqrt{3}$ 이므로 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times 8\times\frac{8}{3}\sqrt{3}=\frac{32}{3}\sqrt{3}$

63) ①

$\angle DCG=\theta\ (0<\theta<\pi)$, $\angle BCE=\pi-\theta$

$\sin\theta=\frac{\sqrt{11}}{6}$ 이므로 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=\frac{25}{36}$

코사인법칙에 의하여

$\overline{DG}^2=3^2+4^2-2\times3\times4\times\cos\theta=25-24\cos\theta$

$\overline{BE}^2=3^2+4^2-2\times3\times4\times\cos(\pi-\theta)$

$=25-24\cos(\pi-\theta)=25+24\cos\theta$

따라서 $\overline{DG}\times\overline{BE}=\sqrt{25^2-24^2\times\cos^2\theta}$

$=\sqrt{25^2-24^2\times\frac{25}{36}}$

$=5\sqrt{25-16}=15$

64) ⑤

삼각형 ABC의 넓이가 $\sqrt{6}$ 이므로

$\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{7}\times\sin\theta=\sqrt{6}$

$\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{42}}{7}$

$\angle A$는 예각이므로 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$

따라서 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta=\sqrt{1-\frac{6}{7}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$

65) ③

$\angle C=120^\circ$ 이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin45^\circ}=\frac{8}{\sin120^\circ}$ 따라서

$\overline{BC}=\frac{8}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{8\sqrt{6}}{3}$

66) ⑤

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{6^2+6^2-\{\sqrt{15}\}^2}{2\times6\times6}=\frac{57}{72}$

이므로 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{CA}\times\cos A$

$=6^2+10^2-2\times6\times10\times\frac{57}{72}$

$=36+100-95=41$

따라서 $\overline{BC}=\sqrt{41}$

67) ①

[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 외접원의 반지름의 길이를 구한다.

주어진 원이 삼각형 BCD의 외접원이고 반지름의 길이가 r 이므로

사인법칙에 의하여

$\overline{CD}=2r\sin\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}r$, $\overline{BC}=2r\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}\,r$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{3}r)^2=(\sqrt{2})^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^2-2\times\sqrt{2}\times\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)\times\cos\frac{\pi}{3}$

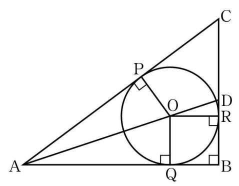
이 식을 정리하면 $5r^2+2\sqrt{6}r-6=0$

그러므로 $r=\frac{-\sqrt{6}\pm6}{5}$

따라서 $r>0$이므로 $r=\frac{6-\sqrt{6}}{5}$

68) ①

[출제의도] 사인법칙을 이용하여 삼각형의 외접원의 넓이를 구한다.



삼각형 ABC에 내접하는 원이 세 선분 CA, AB, BC와 만나는 점을

각각 P, Q, R라 하자.

$\overline{OQ}=\overline{OR}=3$ 이므로 $\overline{DR}=\overline{DB}-\overline{RB}=1$

$\overline{DO}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ 이므로

$\sin(\angle DOR)=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

삼각형 DOR와 삼각형 OAQ는 닮음비가 $1:3$ 이므로 $\overline{AQ}=3\times\overline{OR}=9$

이때 점 O가 삼각형 ABC의 내심이므로

$\overline{PA}=\overline{AQ}=9$, $\angle CAD=\angle DAB$

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$, $12:(9+\overline{CP})=4:(\overline{CR}-1)$

$9+\overline{CP}=3(\overline{CR}-1)$

이때 $\overline{CP}=\overline{CR}$ 이므로 $\overline{CR}=6$, 즉 $\overline{CD}=5$

직선 OR와 직선 AB가 평행하므로

$\angle DAB=\angle DOR$, 즉 $\angle CAD=\angle DOR$

삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$2R=\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}=5\sqrt{10}$

$R=\frac{5\sqrt{10}}{2}$ 이므로 삼각형 ADC의 외접원의 넓이는 $\frac{125}{2}\pi$이다.

69) ②

$\overline{AB}=3a$, $\overline{AC}=a$라 하면

$\overline{BC}^2=9a^2+a^2-2\cdot3a\cdot a\cos\frac{\pi}{3}=7a^2$

$\therefore\overline{BC}=\sqrt{7}a$

$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{7}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{7}a}{\sqrt{3}}=2\times7$

$a=\sqrt{21}=\overline{AC}$

70) ④

[출제의도] 부채꼴의 넓이를 이용하여 문제를 해결한다.

원 O'에서 중심각의 크기가 $\frac{7}{6}\pi$인 부채꼴 AO′B의 넓이를 T_1, 원 O에서 중심각의 크기가 $\frac{5}{6}\pi$인 부채꼴 AOB의 넓이를 T_2라 하면,

$S_1 = T_1 + S_2 - T_2$

$= \left(\frac{1}{2}\times 3^2 \times \frac{7}{6}\pi\right) + S_2 - \left(\frac{1}{2}\times 3^2 \times \frac{5}{6}\pi\right)$

$= \frac{3}{2}\pi + S_2$

따라서 $S_1 - S_2 = \frac{3}{2}\pi$

71) 7

[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제해결하기

$\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA} = 1 : 2 : \sqrt{2}$에서

삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA의 길이를 각각 $k,\ 2k,\ \sqrt{2}k(k>0)$이라 하자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$2k^2 = k^2 + 4k^2 - 4k^2\cos(\angle ABC)$

$4k^2\cos(\angle ABC) = 3k^2$

$\cos(\angle ABC) = \frac{3}{4}$이므로

$\sin(\angle ABC) = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 28π이므로

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{7}$이다.

따라서 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{CA}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = 4\sqrt{7}$이므로 선분 CA의 길이는 7이다.

72) ③

[출제의도] 코사인법칙과 삼각비를 이용하여 변의 길이를 구할 수 있는가?

삼각형 ABD에서

$\angle BAC = \angle BDA$이고 $\overline{AB} = 4$이므로

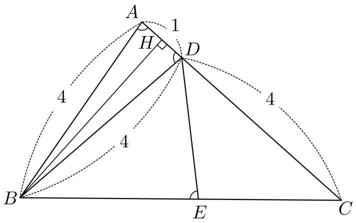
$\overline{BD} = 4$ …… ㉠

이때 점 B에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH} = \overline{AB}\cos(\angle BAC) = 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

그러므로

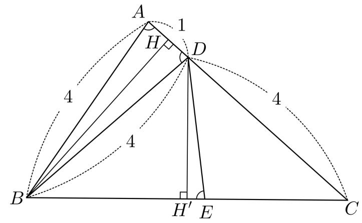
$\overline{AD} = 1$



삼각형 BCD는 $\overline{DB} = \overline{DC} = 4$인 이등변삼각형이다.

점 D에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H′, $\overline{DE} = x$라 하면

$\overline{DH'} = x\sin(\angle H'ED) = x \times \sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{63}}{8}x$ …… ㉡



한편, 삼각형 ABC에서

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$

$= -2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos(\angle BAC)$

$= 4^2 + 5^2 - 2\times 4 \times 5 \times \frac{1}{8}$

$= 36$

이므로

$\overline{BC} = 6$

이때, $\overline{BH'} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 3$ …… ㉢

직각삼각형 DBH′에서 ㉠, ㉡, ㉢을 이용하면

$4^2 = \left(\frac{\sqrt{63}}{8}x\right)^2 + 3^2$

$\frac{63}{64}x^2 = 7$

$x^2 = \frac{64}{9}$

$\overline{DE} = x$이므로 $x > 0$

따라서 $\overline{DE} = \frac{8}{3}$

73) 27

[출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

선분 AB는 삼각형 ABC의 외접원의 지름이므로

삼각형 ABC는 직각삼각형이다.

$\angle BCA = \frac{\pi}{2}$, $\angle CAB = \alpha$라 하면

$\cos\alpha = \frac{1}{3}$이고, $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = \frac{8}{9}$이므로

$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\overline{BC} = \overline{AB}\times\sin\alpha$이므로 $\overline{AB} = 18$이고, $\overline{AC} = 6$

점 D는 선분 AB를 5 : 4로 내분하는 점이므로

$\overline{AD} = 10$

삼각형 CAD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{DC}^2 = 6^2 + 10^2 - 2\times 6\times 10\times\cos\alpha = 96$

$\overline{DC} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$

삼각형 CAD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면,

사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{DC}}{\sin\alpha} = 2R$에서 $R = 3\sqrt{3}$

삼각형 CAD의 외접원의 넓이 $S = 27\pi$

따라서 $\frac{S}{\pi} = 27$

74) ②

[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 변의 길이를 구할 수 있는가?

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$이므로

사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\text{BC}}}{\sin(\angle\text{BAC})}=4\sqrt{7}$

즉,

$\overline{\text{BC}}=\sin\dfrac{\pi}{3}\times4\sqrt{7}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times4\sqrt{7}=2\sqrt{21}$

또, 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이도 $2\sqrt{7}$이므로

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\text{BD}}}{\sin(\angle\text{BCD})}=4\sqrt{7}$

즉,

$\overline{\text{BD}}=\sin(\angle\text{BCD})\times4\sqrt{7}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\times4\sqrt{7}=8$

한편, $\angle\text{BDC}=\pi-\angle\text{BAC}=\dfrac{2}{3}\pi$이므로

$\overline{\text{CD}}=x$라 하면 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{21})^2=x^2+8^2-2\times x\times8\times\cos\dfrac{2}{3}\pi$

$x^2+8x-20=0$

$(x-2)(x+10)=0$

$x>0$이므로 $x=2$

즉, $\overline{\text{CD}}=2$

따라서 $\overline{\text{BD}}+\overline{\text{CD}}=8+2=10$

75) 84

[출제의도] 코사인법칙을 이용하여 문제를 해결한다.

호 BD와 호 DC에 대한 원주각의 크기가 같으므로

$\angle\text{CBD}=\angle\text{CAD}=\angle\text{DAB}=\angle\text{DCB}$이다.

즉, $\overline{\text{BD}}=\overline{\text{DC}}$

$\overline{\text{BD}}=\overline{\text{DC}}=a$, $\overline{\text{AD}}=b$, $\angle\text{CAD}=\theta$라 하면

$\angle\text{DAB}=\theta$이고 $\overline{\text{BD}}^2=\overline{\text{DC}}^2$이므로

삼각형 DAB와 삼각형 CAD에 각각 코사인법칙을 적용하면

$6^2+b^2-2\times6\times b\times\cos\theta=b^2+8^2-2\times b\times8\times\cos\theta$

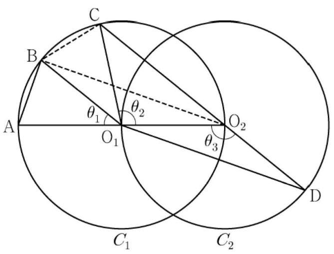
$4b\cos\theta=28$이므로

직각삼각형 ADE에서 $k=b\cos\theta=7$

따라서 $12k=84$

76) ②

[출제의도] 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이의 비를 구할 수 있는가?



$\angle\text{CO}_2\text{O}_1+\angle\text{O}_1\text{O}_2\text{D}=\pi$이므로

$\theta_3=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta_2}{2}$이고

$\theta_3=\theta_1+\theta_2$에서 $2\theta_1+\theta_2=\pi$이므로

$\angle\text{CO}_1\text{B}=\theta_1$이다.

이때, $\angle\text{O}_2\text{O}_1\text{B}=\theta_1+\theta_2=\theta_3$이므로

삼각형 $\text{O}_1\text{O}_2\text{B}$와 삼각형 $\text{O}_2\text{O}_1\text{D}$는 합동이다.

$\overline{\text{AB}}=k$라 할 때,

$\overline{\text{BO}_2}=\overline{\text{O}_1\text{D}}=2\sqrt{2}k$이므로

$\overline{\text{AO}_2}=\sqrt{k^2+(2\sqrt{2}k)^2}=\boxed{3k}$이고,

$\angle\text{BO}_2\text{A}=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로

$\cos\dfrac{\theta_1}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}k}{3k}=\boxed{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$이다.

삼각형 O_2BC에서

$\overline{\text{BC}}=k$, $\overline{\text{BO}_2}=2\sqrt{2}k$, $\angle\text{CO}_2\text{B}=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로

삼각형 BO_2C에서

$\overline{\text{O}_2\text{C}}=x\,(0<x<3k)$라 하면

코사인법칙에 의하여

$k^2=x^2+(2\sqrt{2}k)^2-2\times x\times2\sqrt{2}k\times\cos\dfrac{\theta_1}{2}$

$k^2=x^2+(2\sqrt{2}k)^2-2\times x\times2\sqrt{2}k\times\cos\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$3x^2-16kx+21k^2=0$

$(3x-7k)(x-3k)=0$

$0<x<3k$이므로

$x=\dfrac{7}{3}k$

즉, $\overline{\text{O}_2\text{C}}=\boxed{\dfrac{7}{3}k}$이다.

$\overline{\text{CD}}=\overline{\text{O}_2\text{D}}+\overline{\text{O}_2\text{C}}=\overline{\text{O}_1\text{O}_2}+\overline{\text{O}_2\text{C}}$이므로

$\overline{\text{AB}}:\overline{\text{CD}}=k:\left(\dfrac{\boxed{3k}}{2}+\boxed{\dfrac{7}{3}k}\right)$이다.

이상에서

$f(k)=3k$, $g(k)=\dfrac{7}{3}k$, $p=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

이므로

$f(p)\times g(p)$

$=\left(3\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)\times\left(\dfrac{7}{3}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

$=\dfrac{56}{9}$

77) ④

[출제의도] 코사인법칙과 사인법칙을 이용하여 각의 사인값을 추론한다.

삼각형 ABD와 삼각형 BCD에서 코사인법칙을 이용하여 선분 CD의 길이를 구하자.

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\text{BD}}^2=3^2+2^2-2\times3\times2\times\cos\dfrac{\pi}{3}=7$

이므로 $\overline{\text{BD}}=\sqrt{7}$이다.

$\angle\text{BAD}+\angle\text{BCD}=\pi$이므로 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$2^2+\overline{\text{CD}}^2-2\times2\times\overline{\text{CD}}\times\cos\dfrac{2\pi}{3}=7$

이므로 $\overline{\text{CD}}=\boxed{1}$이다.

삼각형 EAB와 삼각형 ECD에서 $\angle\text{AEB}$는 공통이고

$\angle\text{EAB}=\angle\text{ECD}$이므로 삼각형 EAB와 삼각형 ECD는 닮음이다.

따라서 $\dfrac{\overline{\text{EA}}}{\overline{\text{EC}}}=\dfrac{\overline{\text{EB}}}{\overline{\text{ED}}}=\dfrac{\overline{\text{AB}}}{\overline{\text{CD}}}$이다. 즉,

$\dfrac{3+\overline{\text{ED}}}{\overline{\text{EC}}}=\dfrac{2+\overline{\text{EC}}}{\overline{\text{ED}}}=\dfrac{2}{1}$

에서 $\overline{\text{ED}}=\boxed{\dfrac{7}{3}}$이다.

$\angle\text{DCE}=\pi-\angle\text{BCD}=\angle\text{BAD}=\dfrac{\pi}{3}$

이므로 삼각형 ECD에서 사인법칙을 이용하면

$$\frac{\frac{7}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{\sin\theta}$$

에서 $\sin\theta=\boxed{\frac{3\sqrt{3}}{14}}$이다.

$p=1,\ q=\frac{7}{3},\ r=\frac{3\sqrt{3}}{14}$ 이므로

$(p+q)\times r=\left(1+\frac{7}{3}\right)\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{5\sqrt{3}}{7}$

78) ⑤

[출제의도] 삼각함수를 이용하여 추론하기

$\overline{AB}=\overline{AD}=k$라 할 때

두 삼각형 ABC, ACD에서 각각 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle ACB)=\frac{10^2+\overline{BC}^2-k^2}{2\times10\times\overline{BC}}=\frac{1}{20}\left(\overline{BC}+\frac{\boxed{100-k^2}}{\overline{BC}}\right)$,

$\cos(\angle DCA)=\frac{10^2+\overline{CD}^2-k^2}{2\times10\times\overline{CD}}=\frac{1}{20}\left(\overline{CD}+\frac{\boxed{100-k^2}}{\overline{CD}}\right)$

이다.

이때 두 호 AB, AD에 대한 원주각의 크기가 같으므로

$\cos(\angle ACB)=\cos(\angle DCA)$이다.

$\frac{1}{20}\left(\overline{BC}+\frac{100-k^2}{\overline{BC}}\right)=\frac{1}{20}\left(\overline{CD}+\frac{100-k^2}{\overline{CD}}\right)$

$\overline{BC}-\overline{CD}=(100-k^2)\times\left(\frac{1}{\overline{CD}}-\frac{1}{\overline{BC}}\right)$

$\overline{BC}-\overline{CD}=(100-k^2)\times\left(\frac{\overline{BC}-\overline{CD}}{\overline{BC}\times\overline{CD}}\right)$

$\overline{AC}=10<2R$이므로 $\overline{BC}\neq\overline{CD}$

그러므로 $\overline{BC}\times\overline{CD}=100-k^2$

사각형 ABCD의 넓이는

두 삼각형 ABD, BCD의 넓이의 합과 같으므로

$\frac{1}{2}k^2\sin(\angle BAD)+\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CD}\times\sin(\pi-\angle BAD)$

$=\frac{1}{2}\{k^2+(100-k^2)\}\sin(\angle BAD)$

$=50\sin(\angle BAD)=40$

에서 $\sin(\angle BAD)=\boxed{\frac{4}{5}}$이다.

따라서 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BAD)}=2R$에서 $\overline{BD}=\frac{8}{5}R$이므로

$\overline{BD}:R=\boxed{\frac{8}{5}}:1$

따라서 $f(k)=100-k^2,\ p=\frac{4}{5},\ q=\frac{8}{5}$이므로

$\frac{f(10p)}{q}=(100-8^2)\times\frac{5}{8}=\frac{45}{2}$

79) ③

[출제의도] 코사인법칙을 이용하여 변의 길이를 구할 수 있는가?

$\angle BAC=\theta,\ \overline{AC}=a$라 하면 삼각형 $\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\theta$

즉,

$2^2=3^2+a^2-2\times3\times a\times\frac{7}{8}$

$a^2-\frac{21}{4}a+5=0$

$4a^2-21a+20=0$

$(4a-5)(a-4)=0$

따라서 조건에서 $a>3$이므로 $a=4$

같은 방법으로 삼각형 ABM에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{MB}^2=\overline{AB}^2+\overline{AM}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AM}\times\cos\theta$

$=3^2+2^2-2\times3\times2\times\frac{7}{8}=\frac{5}{2}$

이므로

$\overline{MB}=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

이때 두 삼각형 ABM, DCM은 서로 닮은 도형이므로

$\overline{MA}\times\overline{MC}=\overline{MB}\times\overline{MD}$

에서

$2\times2=\frac{\sqrt{10}}{2}\times\overline{MD}$

따라서

$\overline{MD}=\frac{8}{\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$

80) ⑤

[출제의도] 코사인법칙을 활용하여 추론하기

ㄱ. $\angle BCA=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$\cos(\angle CBA)=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{3}{7}$

$\sin(\angle CBA)=\sqrt{1-\left(\frac{3}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{10}}{7}$ (참)

ㄴ. $\angle CBA=\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 $\angle ADC=\pi-\theta$

$\overline{AC}=\overline{AB}\times\sin\theta=14\times\frac{2\sqrt{10}}{7}=4\sqrt{10}$

$\overline{AD}=k\ (k>0)$ 이라 하면

삼각형 ACD 에서 코사인법칙에 의하여

$(4\sqrt{10})^2=k^2+7^2-2\times k\times7\times\cos(\pi-\theta)$

$=k^2+49+14k\cos\theta$

$=k^2+6k+49$

$k^2+6k-111=0$ 이므로

$\overline{AD}=-3+\sqrt{9+111}=-3+2\sqrt{30}$ (참)

ㄷ. 삼각형 ACD 의 넓이가 최대일 때 사각형 ABCD 의 넓이가 최대이므로 점 D 는 선분 AC 의 수직이등분선이 호 AC 와 만나는 점이다. 그러므로 $\overline{AD}=\overline{CD}$

$\overline{AD}=x\ (x>0)$ 이라 하면

삼각형 ACD 에서 코사인법칙에 의하여

$(4\sqrt{10})^2=x^2+x^2-2\times x\times x\times\cos(\pi-\theta)=2x^2+2x^2\times\frac{3}{7}=\frac{20}{7}x^2$

$x^2=56$ 이므로 $\overline{AD}=2\sqrt{14}$

사각형 ABCD 의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{CD}\times\sin(\pi-\theta)+\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BC}$

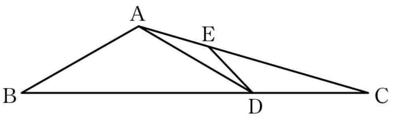
$=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{14})^2\times\frac{2\sqrt{10}}{7}+\frac{1}{2}\times4\sqrt{10}\times6$

$=8\sqrt{10}+12\sqrt{10}=20\sqrt{10}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

81) ①

[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구하는 과정을 추론한다.



삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle \mathrm{ABC}) = \dfrac{2^2+(3\sqrt{3})^2-(\sqrt{13})^2}{2\times2\times3\sqrt{3}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

이다. 삼각형 ABD에서

$\sin(\angle \mathrm{ABD}) = \sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2}$

이므로 사인법칙에 의하여 삼각형 ABD의 외접권의 반지름의 길이는

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin(\angle \mathrm{ABD})} = \boxed{2}$이다.

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin(\angle \mathrm{CAD})} = \dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin(\angle \mathrm{ACD})}$

이므로

$\sin(\angle \mathrm{CAD}) = \dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AD}}}\times\sin(\angle \mathrm{ACD}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{13}}{13} = \dfrac{\sqrt{39}}{26}$

이다. 삼각형 ADE에서 사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{DE}} = 2\times2\times\sin(\angle \mathrm{CAD}) = \boxed{\dfrac{2\sqrt{39}}{13}}$

이다.

따라서 $p=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $q=2$, $r=\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$이므로

$p\times q\times r = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\times2\times\dfrac{2\sqrt{39}}{13} = \dfrac{6\sqrt{13}}{13}$

82) ①

[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

$\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{CAD} = \theta$라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\cos\theta$

$= 25+45-2\times5\times3\sqrt{5}\times\cos\theta$

$= 70-30\sqrt{5}\cos\theta$

또 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{CD}}^2 = \overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\cos\theta$

$= 49+45-2\times7\times3\sqrt{5}\times\cos\theta$

$= 94-42\sqrt{5}\cos\theta$

이때 $\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{CAD}$이므로 $\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{CD}}^2$

$70-30\sqrt{5}\cos\theta = 94-42\sqrt{5}\cos\theta$에서 $\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\overline{\mathrm{BC}}^2 = 70-30\sqrt{5}\cos\theta = 70-30\sqrt{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5} = 10$

즉, $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{10}$

한편,

$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \dfrac{1}{5}$이므로 $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이를 R라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta} = 2R$

$\dfrac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = 2R$

$5\sqrt{2} = 2R$

즉, $R = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

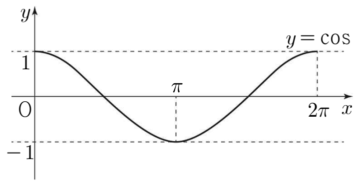
83) ②

[출제의도] 삼각함수를 이용하여 추론하기

$2(1-\cos^2x)-3\cos x = k$

$2\cos^2x+3\cos x+k-2=0$

$0\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프는 그림과 같다.



상수 a에 대하여

$0\le x\le 2\pi$에서 곡선 $y=\cos x$와 직선 $y=a$가 만나는 서로 다른 점의 개수는

$a=-1$일 때 1이고, $-1<a\le1$일 때 2이므로

$0\le x\le2\pi$일 때,

방정식 $2\cos^2x+3\cos x+k-2=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이려면

$x=\pi$가 이 방정식의 실근이어야 한다.

$2\times(-1)^2+3\times(-1)+k-2=0$에서 $k=3$

$2\cos^2x+3\cos x+1=(2\cos x+1)(\cos x+1)=0$

에서 $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $\cos x=-1$

$x=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}\pi$ 또는 $x=\pi$

따라서 $k\times\alpha = 3\times\dfrac{4}{3}\pi = 4\pi$

84) ④

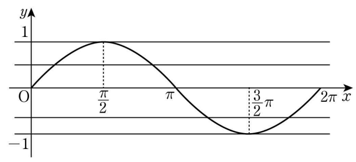
[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 함숫값을 추론한다.

(가)에서 $g(a\pi)=-1$ 또는 $g(a\pi)=1$이다.

$\sin(a\pi)=-1$에서 $a=\dfrac{3}{2}$, $\sin(a\pi)=1$에서 $a=\dfrac{1}{2}$

(나)에서 방정식 $f(g(x))=0$의 해가 존재하므로

$-1\le t\le1$이고 $f(t)=0$인 실수 t가 존재한다.



$0\le x\le2\pi$에서 방정식 $g(x)=t$의 모든 해의 합은

$t=-1$일 때 $\dfrac{3}{2}\pi$, $-1<t\le0$일 때 3π,

$0<t<1$일 때 π, $t=1$일 때 $\dfrac{\pi}{2}$이다.

$0\le x\le2\pi$일 때, 방정식 $f(g(x))=0$의 모든 해의 합이 $\dfrac{5}{2}\pi$이므로

방정식 $f(x)=0$은 두 실근 -1, α를 가지고 $0<\alpha<1$이다.

(i) $a=\dfrac{3}{2}$인 경우

$f(x)=x^2+\frac{3}{2}x+b$ 에서 $f(-1)=0$ 이므로

$f(-1)=b-\frac{1}{2}=0$ 즉, $b=\frac{1}{2}$

$f(x)=x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}=(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 에서

방정식 $f(x)=0$ 의 두 근은 $x=-1$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$

이므로 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $a=\frac{1}{2}$ 인 경우

$f(x)=x^2+\frac{1}{2}x+b$ 에서 $f(-1)=0$ 이므로

$f(-1)=b+\frac{1}{2}=0$ 즉, $b=-\frac{1}{2}$

$f(x)=x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 에서

방정식 $f(x)=0$ 의 두 근은 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 이고 $f(2)=\frac{9}{2}$ 이다.

85) 8

[출제의도] 사인함수의 최댓값, 최솟값 및 주기를 이해하고, 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가

함수 $f(x)$의 최솟값이 $-a+8-a=8-2a$ 이므로 조건 (가)를 만족시키려면 $8-2a\geq 0$

즉, $a\leq 4$이어야 한다.

그런데, $a=1$ 또는 $a=2$ 또는 $a=3$일 때는 함수 $f(x)$의 최솟값이 0보다 크므로 조건 (나)를 만족시킬 수 없다.

그러므로 $a=4$

이때 $f(x)=4\sin bx+4$이고 이 함수의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$ 이므로

$0\leq x\leq\frac{2\pi}{b}$ 일 때 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

그러므로 $0\leq x<2\pi$ 일 때, 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되려면

$\frac{15\pi}{2b}<2\pi\leq\frac{19\pi}{2b}$

이어야 한다.

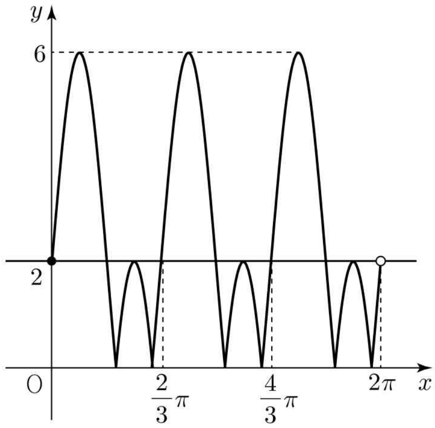
즉, $\frac{15}{4}<b\leq\frac{19}{4}$ 이고 b는 자연수이므로

$b=4$

따라서 $a+b=4+4=8$

86) ③

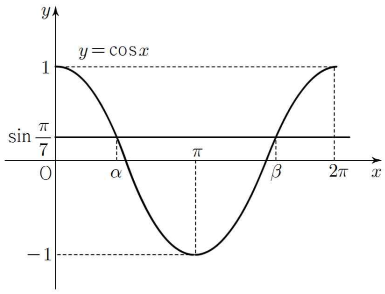
삼각함수 $y=4\sin 3x+2$는 주기가 $\frac{2}{3}\pi$, 최댓값이 6, 최솟값이 -2이므로 $0\leq x<2\pi$일 때, 곡선 $y=|4\sin 3x+2|$는 다음과 같다.



따라서 $0\leq x<2\pi$일 때, 곡선 $y=|4\sin 3x+2|$와 직선 $y=2$가 만나는 서로 다른 점의 개수는 9

87) ③

$0\leq x\leq 2\pi$ 일 때 주어진 부등식 $\cos x\leq\sin\frac{\pi}{7}$ 을 만족시키는 모든 x의 값의 범위는 다음 그림에서와 같이 $\alpha\leq x\leq\beta$ 이다.



이때 $\sin\frac{\pi}{7}>0$ 이고 함수 $y=\cos x$ 의 그래프는 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로

$$\frac{\pi}{2}-\alpha=\beta-\frac{3}{2}\pi=t$$

로 놓으면

$$\sin\frac{\pi}{7}=\cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t\qquad\therefore\ t=\frac{\pi}{7}$$

$$\therefore\ \beta-\alpha=\left(\frac{3}{2}\pi+t\right)-\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\frac{9}{7}\pi$$

[다른 풀이]

$\sin\frac{\pi}{7}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)=\cos\frac{5}{14}\pi$ 이므로 부등식 $\cos x\leq\sin\frac{\pi}{7}$ 에서

$\cos x\leq\cos\frac{5}{14}\pi$

$$\therefore\ \frac{5}{14}\pi\leq x\leq 2\pi-\frac{5}{14}\pi$$

$\alpha=\frac{5}{14}\pi$, $\beta=\frac{23}{14}\pi$ 이므로

$$\beta-\alpha=\frac{9}{7}\pi$$

88) 32

함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{4}x$의 주기가 $2\pi\div\frac{\pi}{4}=8$이므로 정수 n에 대하여 함숫값 $f(n)$은 다음의 8개의 값이 차례로 반복된다.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(n)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$g(x)=f(2+x)f(2-x)$라 하면 함수 f의 주기가 8이므로 함수 g의 주기도 8이다.

$g(1)=f(3)f(1)=\frac{1}{2}$

$g(2)=f(4)f(0)=0$

$g(3)=f(5)f(-1)=f(5)f(7)=\frac{1}{2}$

$g(4)=f(6)f(-2)=f(6)f(6)=1$

$g(5)=f(7)f(-3)=f(7)f(5)=\frac{1}{2}$

$g(6)=f(8)f(-4)=f(0)f(4)=0$

$g(7)=f(9)f(-5)=f(1)f(3)=\frac{1}{2}$

$g(8)=f(10)f(-6)=f(2)f(2)=1$

이므로 $x=1,\ 2,\ \cdots,\ 15$인 자연수 x에 대하여

$g(x)=f(2+x)f(2-x)<\frac{1}{4}$

인 자연수 x는 2, 6, 10, 14이다.

따라서 그 합은

$2+6+10+14=32$

89) ③

[출제의도] 삼각함수의 뜻과 그래프 이해하기

함수 $y=a\tan b\pi x$의 그래프에서

함수 $y=a\tan b\pi x$의 주기는 $8-2=6$이므로

$\frac{\pi}{|b\pi|}=\frac{1}{b}=6,\ b=\frac{1}{6}$

함수 $y=a\tan\frac{\pi}{6}x$의 그래프는 점 $(2,3)$을 지나므로

$a\tan\left(\frac{\pi}{6}\times 2\right)=3$에서 $a=\sqrt{3}$

따라서 $a^2\times b=3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

90) ③

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

$0\le x\le 2\pi$일 때, 방정식 $f(x)=g(x)$에서

$k\sin x=\cos x$

$\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x=\frac{1}{k}\ (\cos x\ne 0)$

그러므로 점 A의 x좌표를 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

함수 $y=\tan x$의 주기는 π이므로

점 B의 x좌표는 $\alpha+\pi$이고 두 점 A, B의 좌표는

각각 $(\alpha,\cos\alpha)$, $(\alpha+\pi,-\cos\alpha)$

선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점 C의 좌표는

$\left(\frac{3\times(\alpha+\pi)-1\times\alpha}{3-1},\ \frac{3\times(-\cos\alpha)-1\times\cos\alpha}{3-1}\right)$

이므로 $\mathrm{C}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi,\ -2\cos\alpha\right)$

점 C는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$-2\cos\alpha=k\sin\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)$

$-2\cos\alpha=k\times(-\cos\alpha)$에서 $k=2$이므로

$\tan\alpha=\frac{1}{2}$이고, $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\cos\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)=\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$

에서 점 D의 좌표는 $\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi,\ \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$이고

$\overline{\mathrm{CD}}=\frac{\sqrt{5}}{5}-\left(-2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=\sqrt{5}$

점 B와 직선 CD 사이의 거리는

$\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)-(\alpha+\pi)=\frac{\pi}{2}$

따라서 삼각형 BCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{5}}{4}\pi$

91) ①

[출제의도] 삼각함수의 그래프의 성질을 활용하여 문제를 해결한다.

삼각형 AOB의 넓이가 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times 5=\frac{15}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=3$, 이때 $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AB}}+6=9$

함수 $y=f(x)$의 주기가 $2b$이므로

$2b=\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}=12,\ b=6$

선분 AB의 중점의 x좌표가 3이므로

점 A의 좌표는 $\left(\frac{3}{2},\ 5\right)$이다.

점 A는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f\left(\frac{3}{2}\right)=5$에서 $a\sin\frac{\pi}{4}+1=5,\ a=4\sqrt{2}$

따라서 $a^2+b^2=(4\sqrt{2})^2+6^2=32+36=68$

92) ③

[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형에 관한 문제를 해결한다.

삼각형 PBC에서

$\angle\mathrm{BPC}=180°-(30°+15°)=135°$

삼각형 PBC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 135°}=\frac{\overline{\mathrm{PC}}}{\sin 30°}$ 이므로

$\overline{\mathrm{PC}}=2\sqrt{3}\times\frac{\sin 30°}{\sin 135°}=\sqrt{6}$

$\overline{\mathrm{AC}}=b$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{3})^2=(2\sqrt{2})^2+b^2-2\times 2\sqrt{2}\times b\times\cos 60°$

$b^2-2\sqrt{2}b-4=0$

$b>0$이므로 $b=\sqrt{2}+\sqrt{6}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60°}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin C}$이므로 $\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$A=60°$에서 $C<120°$이므로 $C=45°$

$\angle\mathrm{PCA}=45°-15°=30°$이므로 삼각형 APC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times(\sqrt{2}+\sqrt{6})\times\sin 30°=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

93) 22

[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제해결하기

$\overline{\mathrm{OP}}=k_1$, $\overline{\mathrm{OQ}}=k_2$라 하자.

삼각형 OAP에서 코사인법칙에 의하여

$2^2=k_1^2+(2\sqrt{15})^2-2\times k_1\times 2\sqrt{15}\times\frac{\sqrt{15}}{4}$

삼각형 OAQ에서 코사인법칙에 의하여

$$2^2 = k_2^2 + (2\sqrt{15})^2 - 2\times k_2 \times 2\sqrt{15}\times\frac{\sqrt{15}}{4}$$

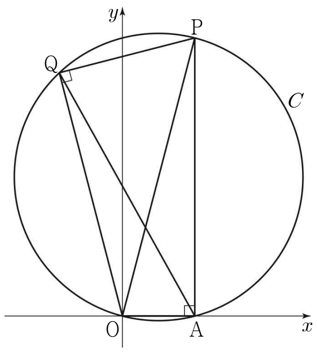
이므로 두 실수 k_1, k_2는 이차방정식

$$2^2 = x^2 + (2\sqrt{15})^2 - 2\times x \times 2\sqrt{15}\times\frac{\sqrt{15}}{4}$$

의 서로 다른 두 실근이다.

$x^2-15x+56=(x-7)(x-8)=0$

에서 $k_1 > k_2$이므로 $k_1=8$, $k_2=7$



$\cos(\angle \mathrm{OPA}) = \cos(\angle \mathrm{OQA})$이므로 $\angle\mathrm{OPA} = \angle\mathrm{OQA}$

삼각형 OAP의 외접원을 C라 하면

두 점 P, Q의 y좌표가 양수이므로 점 Q도 원 C 위의 점이다.

$\sin(\angle\mathrm{OPA}) = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}$이므로

원 C의 반지름의 길이를 R라 하면 삼각형 OAP에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{OA}}}{\sin(\angle\mathrm{OPA})} = 8 = 2R$$

그러므로 선분 OP는 원 C의 지름이다.

$\angle\mathrm{PAO} = \angle\mathrm{OQP} = \frac{\pi}{2}$이므로

직각삼각형 OPQ에서 $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{8^2-7^2} = \sqrt{15}$

사각형 OAPQ의 넓이는

두 직각삼각형 OAP, OPQ의 넓이의 합과 같으므로

$$\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{15} + \frac{1}{2}\times 7\times\sqrt{15} = \frac{11}{2}\sqrt{15}$$

에서 $p=2$, $q=11$

따라서 $p\times q = 22$

94) ①

[출제의도] 사인법칙, 코사인법칙과 삼각형의 넓이를 이용하여 조건을 만족시키는 사각형의 변의 길이를 구할 수 있는가

$\angle\mathrm{BCD} = \alpha$, $\angle\mathrm{DAB} = \beta$ $\left(\frac{\pi}{2} < \beta < \pi\right)$,

$\overline{\mathrm{AB}} = a$, $\overline{\mathrm{AD}} = b$라 하자.

삼각형 BCD에서

$\overline{\mathrm{BC}} = 3$, $\overline{\mathrm{CD}} = 2$, $\cos(\angle\mathrm{BCD}) = -\frac{1}{3}$

이므로 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BD}}^2 = 9+4-2\times 3\times 2\times\left(-\frac{1}{3}\right) = 17$$

그러므로 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$a^2+b^2-2ab\cos\beta = 17$ …… ㉠

한편, 점 E가 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점이므로

두 삼각형 $\mathrm{AP_1P_2}$, $\mathrm{CQ_1Q_2}$의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r, $2r$로 놓을 수 있다.

이때 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{P_1P_2}}}{\sin\beta} = r$, $\frac{\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}}{\sin\alpha} = 2r$ 이므로

$$\sin\alpha : \sin\beta = \frac{\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}}{2r} : \frac{\overline{\mathrm{P_1P_2}}}{r} = \frac{5\sqrt{2}}{2} : 3$$

즉, $\sin\beta = \frac{6\sin\alpha}{5\sqrt{2}}$

이때

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이므로

$$\sin\beta = \frac{6}{5\sqrt{2}}\times\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4}{5}$$

$\cos\beta < 0$이므로

$$\cos\beta = -\sqrt{1-\sin^2\beta} = -\sqrt{1-\frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

삼각형 ABD의 넓이가 2이므로

$\frac{1}{2}ab\sin\beta = 2$ 에서

$\frac{1}{2}ab\times\frac{4}{5} = 2$

$ab = 5$

㉠에서

$$a^2+b^2-2\times 5\times\left(-\frac{3}{5}\right) = 17$$

$a^2+b^2 = 11$

따라서

$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab = 11+2\times 5 = 21$

이므로

$a+b = \sqrt{21}$

95) ①

$\angle\mathrm{AFC} = \alpha$, $\angle\mathrm{CDE} = \beta$라 하자.

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$이므로 $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\angle\mathrm{ECD} = \angle\mathrm{EFB} = \pi - \alpha$

삼각형 CDE에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{ED}}}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{\overline{\mathrm{EC}}}{\sin\beta} = 10\sqrt{2}$$

$$\overline{\mathrm{ED}} = 10\sqrt{2}\times\sin\alpha = 10\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{10} = 6\sqrt{5}$$

$\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$

$\overline{\mathrm{CD}} = x$라 하자.

삼각형 CDE에서 코사인법칙에 의하여

$180 = x^2+100-2\times x\times 10\times\cos(\pi-\alpha)$

$= x^2+100+2\times x\times 10\times\cos\alpha$

$= x^2+2\sqrt{10}x+100$

$x^2+2\sqrt{10}x-80=0$이고 $x>0$이므로

$x = -\sqrt{10}+\sqrt{10+80} = 2\sqrt{10}$

$\angle\mathrm{ABE} = \angle\mathrm{CDE} = \frac{\pi}{4}$이므로 삼각형 ABE는 직각이등변삼각형이다.

$\overline{\mathrm{AB}} = 2\sqrt{10}$이므로 $\overline{\mathrm{BE}} = \overline{\mathrm{AE}} = 2\sqrt{5}$

두 삼각형 BEF, DEC는 서로 닮음이고 닮음비가 1 : 3이다.

$$\overline{\mathrm{AF}} = \frac{2}{3}\times\overline{\mathrm{AB}} = \frac{4\sqrt{10}}{3}$$

따라서 삼각형 AFE의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AF}\times\overline{AE}\times\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{10}}{3}\times2\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{20}{3}$

96) 98

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$R_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{BD}$

이고, 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BD}}{\sin\frac{2}{3}\pi}=2R_2$에서

$R_2=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}\times\overline{BD}$

이다. 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\cos\frac{2}{3}\pi$

$=2^2+1^2-2\times2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=2^2+1^2-(\boxed{-2})$

$=7$

이므로

$R_1\times R_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times\overline{BD}^2=\boxed{\frac{7}{6}\sqrt{6}}$

이상에서 $p=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $q=-2$, $r=\frac{7}{6}\sqrt{6}$ 이므로

$9(pqr)^2=9\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\times(-2)\times\frac{7\sqrt{6}}{6}\right)^2=98$

97) 6

[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형에 관한 문제를 해결한다.

$\angle CAE=\theta$라 하면 $\sin\theta=\frac{1}{4}$ 이고 $\overline{BC}=4$ 이므로

삼각형 ACE 에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{CE}}{\sin\theta}=\overline{BC}$, $\overline{CE}=1$

$\overline{BF}=\overline{CE}=1$ 이므로 $\overline{FC}=3$

$\overline{BC}=\overline{DE}$ 에서 선분 DE 도 주어진 원의 지름이므로

$\angle BAC=\angle DAE=90^\circ$ 이다.

$\angle BAD=90^\circ-\angle DAC=\theta$

삼각형 ABF 에서 사인법칙에 의하여

$\frac{k}{\sin(\angle ABF)}=\frac{1}{\sin\theta}=4$ 이므로 $\sin(\angle ABF)=\frac{k}{4}$

직각삼각형 ABC 에서 $\sin(\angle ABC)=\frac{\overline{AC}}{4}$ 이므로

$\overline{AC}=4\sin(\angle ABC)=4\times\frac{k}{4}=k$

직각삼각형 ABC 에서 $\cos(\angle BCA)=\frac{k}{4}$ 이므로

삼각형 AFC 에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AF}^2=\overline{AC}^2+\overline{FC}^2-2\times\overline{AC}\times\overline{FC}\times\cos(\angle FCA)$

$k^2=k^2+3^2-2\times k\times3\times\frac{k}{4}$, $\frac{3}{2}k^2=9$

따라서 $k^2=6$

98) ①

$\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=\sqrt{13}$ 이고, $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$ 이다.

$\overline{AC}=x$라 하자. 삼각형 ABC 에서 코사인 법칙에 의하여

$(\sqrt{13})^2=3^2+x^2-2\cdot3\cdot x\cdot\cos\frac{\pi}{3}$

$=3^2+x^2-2\cdot3\cdot x\cdot\frac{1}{2}$

이므로 $x=4$ 이다.

$\therefore\ \overline{AC}=4$

삼각형 ABC 의 넓이는 S_1 이다.

$S_1=\frac{1}{2}\times3\times4\times\sin\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$

삼각형 ACD 의 넓이는 S_2 이고, $S_2=\frac{5}{6}S_1$ 이다.

$\therefore\ S_2=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

$\angle ADC=\theta$라 하자. $\overline{AD}\times\overline{CD}=9$ 이므로 S_2 는

$\frac{1}{2}\times9\times\sin\theta=\frac{5\sqrt{3}}{2}$, $\quad\sin\theta=\frac{5\sqrt{3}}{9}$

$\therefore\ \sin(\angle ADC)=\frac{5\sqrt{3}}{9}$

삼각형 ACD 의 외접원의 반지름의 길이가 R 이다. 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AC}}{\sin\theta}=2R$, $\quad\frac{4}{\frac{5\sqrt{3}}{9}}=2R$, $\quad R=\frac{18}{5\sqrt{3}}$

이다.

$\therefore\ \frac{R}{\sin(\angle ADC)}=\frac{\frac{18}{5\sqrt{3}}}{\frac{5\sqrt{3}}{9}}=\frac{54}{25}$