

1 2012학년도 대수능

출제 의도 | 분수부등식과 해의 집합 사이의 관계를 이해하고 있는지를 묻는 문제이다.

두 집합

$$A = \left\{ x \mid \frac{(x-2)^2}{x-4} \leq 0 \right\}, B = \{ x \mid x^2 - 8x + a \leq 0 \}$$

에 대하여 집합  $A \cup B = \{ x \mid x \leq 5 \}$  일 때, 상수  $a$ 의 값은? [3점]

- ① 7                      ② 10                      ③ 12                      ④ 15                      ⑤ 16

[풀이]

1 집합  $A = \left\{ x \mid \frac{(x-2)^2}{x-4} \leq 0 \right\}$ 에서 분수부등식

$$\frac{(x-2)^2}{x-4} \leq 0 \text{의 양변에 } (x-4)^2 \text{을 곱하면}$$

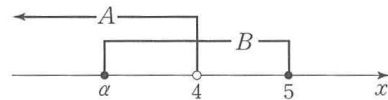
$$(x-2)^2(x-4) \leq 0, x \neq 4$$

$$(x-2)^2 \geq 0 \text{이므로}$$

$$x=2 \text{ 또는 } x-4 \leq 0, x \neq 4$$

$$\therefore x < 4, A = \{ x \mid x < 4 \}$$

따라서 집합  $A \cup B = \{ x \mid x \leq 5 \}$ 가 되려면 집합  $B$ 의 이차 부등식  $x^2 - 8x + a \leq 0$ 은  $(x-a)(x-5) \leq 0 (a \leq 4)$ 가 되어야 한다.



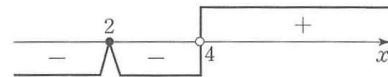
그런데  $a+5=8$ 이므로  $a=3$

$$\therefore a=15$$

답 ④

참고

$(x-2)^2(x-4) \leq 0, x \neq 4$ 를 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



2 2011학년도 대수능 6월 모의평가

출제 의도 | 그래프를 이용하여 분수부등식의 해를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

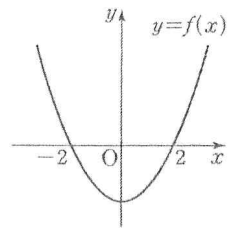
이차함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.

두 집합

$$A = \left\{ x \mid \frac{f(x+1)}{f(x-1)} \leq 1 \right\}, B = \{ x \mid -5 < x < 5 \}$$

에 대하여 집합  $A \cap B$ 에 속하는 정수의 개수는? (단,  $f(2)=f(-2)=0$ ) [3점]

- ① 4                      ② 5                      ③ 6                      ④ 7                      ⑤ 8



[풀이]

2 함수  $f(x)$ 의 이차항의 계수를  $a(a>0)$ 이라 하면

$$f(x) = a(x-2)(x+2)$$

$$\frac{f(x+1)}{f(x-1)} \leq 1$$

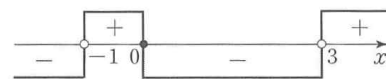
$$\frac{a(x-1)(x+3)}{a(x-3)(x+1)} \leq 1$$

$$\frac{(x-1)(x+3)}{(x-3)(x+1)} \leq 1$$

$$\frac{(x-1)(x+3)}{(x-3)(x+1)} - 1 \leq 0$$

$$\frac{4x}{(x-3)(x+1)} \leq 0$$

$$x(x+1)(x-3) \leq 0, x \neq -1, x \neq 3$$



$$\therefore A = \{ x \mid x < -1 \text{ 또는 } 0 \leq x < 3 \}$$

$$\therefore A \cap B = \{ x \mid -5 < x < -1 \text{ 또는 } 0 \leq x < 3 \}$$

따라서 집합  $A \cap B$ 의 원소 중에서 정수인 것의 개수는  $-4, -3, -2, 0, 1, 2$ 의 6이다.

답 ③



출제 의도 | 조건으로 제시된 함수가 들어 있는 분수부등식의 해를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

사차함수  $f(x)$ 와 이차함수  $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가)  $f(x)$ ,  $g(x)$ 의 최고차항의 계수는 모두 양수이다.

(나)  $g(-1)=g(2)=0$

(다) 두 곡선  $y=f(x)$ 와  $y=g(x-2)$ 가 만나는 네 점의  $x$ 좌표는 각각  $-2, 1, 2, 6$ 이다.

분수부등식  $\frac{f(x)}{g(x-2)} \leq 1$ 을 만족시키는 모든 정수  $x$ 의 값의 합을 구하시오. [4점]

[풀이]

3  $g(-1)=g(2)=0$ 이고, 이차함수  $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로

$$g(x)=a(x+1)(x-2) \quad (\text{단, } a>0)$$

$$\text{즉, } g(x-2)=a(x-1)(x-4) \quad (a>0) \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

으로 놓을 수 있다.

사차함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 이차함수  $y=g(x-2)$ 의 그래프가 만나는 네 점의  $x$ 좌표가 각각  $-2, 1, 2, 6$ 이고,  $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로

$$f(x)-g(x-2)=b(x+2)(x-1)(x-2)(x-6) \quad (b>0) \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

으로 놓을 수 있다.

주어진 부등식  $\frac{f(x)}{g(x-2)} \leq 1$ 의 양변에  $\{g(x-2)\}^2$ 을 곱하면

$$f(x)g(x-2) \leq \{g(x-2)\}^2, \quad g(x-2) \neq 0$$

$$\therefore g(x-2)\{f(x)-g(x-2)\} \leq 0, \quad x \neq 1, \quad x \neq 4$$

$$(\because g(-1)=g(2)=0)$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에서

$$a(x-1)(x-4) \times b(x+2)(x-1)(x-2)(x-6) \leq 0$$

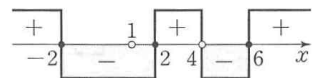
$$(\text{단, } x \neq 1, \quad x \neq 4)$$

$$ab(x-1)^2(x+2)(x-2)(x-4)(x-6) \leq 0$$

$$(\text{단, } x \neq 1, \quad x \neq 4)$$

$$ab>0, \quad (x-1)^2>0 \text{이므로}$$

$$(x+2)(x-2)(x-4)(x-6) \leq 0 \quad (\text{단, } x \neq 1, \quad x \neq 4)$$



$$\therefore -2 \leq x < 1 \quad \text{또는} \quad 1 < x \leq 2 \quad \text{또는} \quad 4 < x \leq 6$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 모든 정수  $x$ 는  $-2, -1, 0, 2, 5, 6$ 이므로 그 합은

$$(-2) + (-1) + 0 + 2 + 5 + 6 = 10$$

**답** 10