이상을 정리하면 다음과 같다.

음함수로 나타내어진 함수의 미분법

x의 함수 y가 음함수 $f(x, y) = 0$의 꼴로 주어졌을 때, y를 x의 함수로 생각하고, 각 항을 x에 대하여 미분하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구한다.

문제 2 다음과 같이 함수가 주어졌을 때 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하여라.

(1) $xy = 1$ (2) $x^3 + y^3 = 6xy$

[사고력 문제] 1 음함수의 미분법을 이용하여 r이 유리수일 때, $(x^r)' = rx^{r-1}$임을 보여라.

x^c

m, n : 정수, $r = \frac{n}{m}$, $y = x^r$ 이라 하면

$y = x^r = x^{\frac{n}{m}} \Rightarrow y^m = x^n$ → 미분.

$m y^{m-1} \cdot dy = n x^{n-1} dx$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{n}{m} \cdot \dfrac{x^{n-1}}{y^{m-1}} = \dfrac{n}{m} \cdot \dfrac{x^{n-1}}{(x^{\frac{n}{m}})^{m-1}}$ → $\frac{n \cdot m}{m} - \frac{n}{m} = n - \frac{n}{m}$

$= \dfrac{n}{m} \cdot x^{n-1-(n-\frac{n}{m})}$

$= \dfrac{n}{m} \cdot x^{\frac{n}{m}-1} = r \cdot x^{r-1}$

[사고력 문제] 2 음함수의 미분법을 이용하여 중심이 O인 원 위의 점 P에서 그은 접선은 선분 OP에 수직임을 증명하여라.

let $P(x_1, y_1)$, 반지름 r

⇒ 원 방정식 $x^2 + y^2 = r^2$ → 미분

$2x\,dx + 2y\,dy = 0$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y} \Rightarrow$ 접선의 기울기 $-\dfrac{x_1}{y_1}$

$\overline{OP}$ 직선의 기울기 $\dfrac{y_1}{x_1}$

$\therefore -\dfrac{x_1}{y_1} \times \dfrac{y_1}{x_1} = -1$

[문제 해결력 문제] 1 곡선 $x = \dfrac{7}{2}t^2$, $y = 1 - 4t - t^3$ 위의 어느 점에서 그 접선이 기울기 1을 가지는지 구하여라.

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-4-3t^2}{7t} = 1$

$\therefore 3t^2 + 7t + 4 = 0 \Rightarrow t = -1$ or $-\frac{4}{3} \Rightarrow$ 2개 존재

[문제 해결력 문제] 2 $f(x) + x^3\{f(x)\}^2 = 7$이고 $f(1) = 3$일 때 $f'(1)$을 구하여라.

미분

$f'(x) + 3x^2 f(x)^2 + x^3\{2f(x) \cdot f'(x)\} = 0$

$x = 1$ 대입

$f'(1) + 3f(1)^2 + 2f(1) \cdot f'(1) = 0 \Rightarrow f'(1) + 27 + 6f'(1) = 0$

$\therefore f'(1) = -\dfrac{27}{7}$