

$$(f^{-1})'(8) = \frac{1}{f'(f^{-1}(8))} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{12}$$

답 $\frac{1}{12}$

문제 3 함수 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 7x + 4$ 에서 $(f^{-1})'(4)$ 의 값을 구하여라.

[사고력 문제] 1 미분가능한 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 에 대하여 합성함수 $r(x)$ 를 $r(x) = f(g(h(x)))$ 라 정의하자.

$h(1) = 2$, $g(2) = 3$, $h'(1) = 4$, $g'(2) = 5$, $f'(3) = 6$ 일 때 $r'(1)$ 을 구하여라.

$$\begin{aligned} r'(x) &= f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x) \\ \Rightarrow r'(1) &= f'(g(h(1))) \cdot g'(h(1)) \cdot h'(1) \\ &= f'(g(2)) \cdot g'(2) \cdot 4 \\ &= f'(3) \cdot 5 \cdot 4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120 \end{aligned}$$

[사고력 문제] 2 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)}$$

라 정의하자. $f(3) = 2$ 이고 $f'(3) = \frac{1}{9}$ 일 때 $g'(2)$ 를 구하여라.

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{f^{-1}(x)} \quad \hookrightarrow f^{-1}(2) = 3 \\ \Leftrightarrow g(x) \cdot f^{-1}(x) &= 1 \\ \text{양변 미분} \quad g'(x) \cdot f^{-1}(x) + g(x) \cdot f^{-1}'(x) &= 0 \\ x=2 \text{ 대입} \quad g'(2) \cdot f^{-1}(2) + g(2) \cdot f^{-1}'(2) &= 0 \\ \Rightarrow g'(2) \times 3 + \frac{1}{3} \times 9 &= 0 \\ \therefore g'(2) &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= x \text{ 이므로} \\ f'(f^{-1}(x)) \cdot f^{-1}'(x) &= 1 \\ x=2 \text{ 대입} \quad \Rightarrow f'(f^{-1}(2)) \cdot f^{-1}'(2) &= 1 \\ \therefore f'(3) \cdot f^{-1}'(2) &= 1 \Rightarrow f^{-1}'(2) = 9 \end{aligned}$$

$$g(2) = \frac{1}{f^{-1}(2)} = \frac{1}{3}$$