2 조건부확률

01
조건부확률

02
사건의 독립과 종속

" 행동의 결과는 자신에게 다시 되돌아올 수 있다.
그럴 때, 그 결과는
그 행동이 다시 발생할 확률에 영향을 줄 수 있다. "

(출처: Skinner, B. F., 『Science and Human Behavior』)

스키너(Skinner, B. F., 1904∼1990)
미국의 심리학자

이 글은 행동주의 심리학자인 스키너가, 인간의 행동이 되풀이될 때 나중 행동이 이전 행동의 영향을 받는 상황을 조건부확률의 구조로 설명한 것이다.

01 조건부확률

학습 목표

- 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.
- 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

준비하기

네 개의 문자 a, b, c, d를 일렬로 나열할 때, 다음을 구하시오.

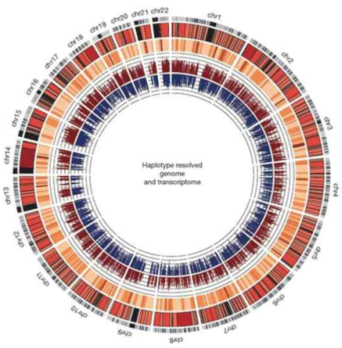
(1) a가 맨 앞에 나올 확률

(2) a가 맨 앞에 나오고 d는 맨 뒤에 나올 확률

다가서기

부모 중의 한 사람이 특정 유전 인자를 가진 경우에 그들의 자녀가 그 유전 인자를 가질 확률을 구하거나, 버스로 등교하는 학생과 도보로 등교하는 학생이 지각을 할 확률을 각각 구하는 경우가 있다.

여기서는 이와 같이 주어진 조건에서 어떤 사건이 일어날 확률을 구하는 방법을 알아본다.



유전자 지도

조건부확률

생각 열기 오른쪽 표는 어느 야구 팀에 등록된 선수를 대상으로 오른손과 왼손을 쓰는 투수와 타자의 수를 조사하여 나타낸 것이다.

(단위: 명)

	투수	타자	합계
오른손	8	8	16
왼손	4	7	11
합계	12	15	27

❶ 선수 중에서 임의로 한 명을 택할 때, 그 선수가 왼손을 쓰는 선수일 확률을 구해 보자.

❷ 투수 중에서 임의로 한 명을 택할 때, 그 선수가 왼손을 쓰는 선수일 확률을 구해 보자.

위의 **생각 열기**에서 선수 중 임의로 한 명을 택할 때, 그 선수가 투수인 사건을 A, 왼손을 쓰는 선수인 사건을 B라 하면 투수로서 왼손을 쓰는 선수인 사건은 $A\cap B$이다. 따라서 투수 중에서 임의로 한 명을 택할 때, 그 선수가 왼손을 쓰는 선수일 확률은

$$\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

이다.

일반적으로 두 사건 A와 B에 대하여, 확률이 0이 아닌 사건 A가 일어났다고 가정할 때 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 **조건부확률**이라 하며, 이것을 기호로

$$\mathrm{P}(B|A)$$

와 같이 나타낸다.

각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대되는 표본공간 S의 두 사건 A와 B에 대하여, 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률은 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

앞의 식에서 우변의 분자와 분모를 각각 $n(S)$로 나누면

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

조건부확률

사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\quad (\text{단, } \mathrm{P}(A)\neq 0)$$

생각톡톡

$\mathrm{P}(B|A)$와 $\mathrm{P}(A|B)$는 같을까?

예제 1 1부터 9까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 9개의 공이 상자에 들어 있다. 이 상자에서 임의로 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수일 때, 그 수가 10의 약수일 확률을 구하시오.

풀이 공에 적힌 수가 홀수인 사건을 A, 10의 약수인 사건을 B라 하면

$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{1, 2, 5\}$이고, $A\cap B=\{1, 5\}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{9},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{9}$$

따라서 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수일 때, 그 수가 10의 약수일 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{2}{5}$$

답 $\frac{2}{5}$

문제 1 한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 6의 약수일 때, 그 수가 소수일 확률을 구하시오.

문제 2 오른쪽 표는 어느 학급 학생 32명을 대상으로 반바지로 된 생활복에 대한 찬성 여부를 조사하여 나타낸 것이다. 이 학급에서 임의로 택한 한 명이 찬성한 학생일 때, 그 학생이 여학생일 확률을 구하시오.

(단위: 명)

	찬성	반대	합계
남학생	13	4	17
여학생	8	7	15
합계	21	11	32

확률의 곱셈정리

확률이 0이 아닌 두 사건 A와 B에 대하여 사건 $A\cap B$의 확률을 구하는 방법을 알아보자.

조건부확률에서

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)},\ \mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$$

이상을 정리하면 다음과 같은 확률의 곱셈정리를 얻는다.

확률의 곱셈정리

두 사건 A와 B에 대하여 $\mathrm{P}(A)\neq 0$, $\mathrm{P}(B)\neq 0$일 때,

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$$

예제 2 상자 안에 아몬드 초콜릿 10개와 호두 초콜릿 6개가 들어 있다. 이 상자에서 민수와 선미가 차례대로 초콜릿을 임의로 한 개씩 꺼낼 때, 두 사람 모두 호두 초콜릿을 꺼낼 확률을 구하시오. (단, 꺼낸 초콜릿은 다시 넣지 않는다.)

풀이 민수가 꺼낸 초콜릿이 호두 초콜릿인 사건을 A, 선미가 꺼낸 초콜릿이 호두 초콜릿인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8},\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{8}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{8}$$

답 $\frac{1}{8}$

문제 3 흰색 탁구공 8개와 주황색 탁구공 4개가 들어 있는 주머니에서 탁구공을 임의로 한 개씩 두 번 꺼낼 때, 흰색 탁구공, 주황색 탁구공의 순서로 탁구공을 꺼낼 확률을 구하시오.

(단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

예제 3 어느 회사는 같은 부품을 A 공장에서 40 %, B 공장에서 60 % 납품받는다. 두 공장 A, B에서 생산된 부품의 불량률은 각각 1 %, 2 %이다. 이 부품 중에서 임의로 한 개를 택할 때, 다음을 구하시오.

(1) 택한 부품이 불량품일 확률

(2) 택한 부품이 불량품일 때, 그 부품이 A 공장에서 생산되었을 확률

풀이 부품이 두 공장 A, B에서 생산된 사건을 각각 A, B, 불량품인 사건을 E라 하자.

(1) A 공장에서 생산된 부품이 불량품인 사건은 $A\cap E$이고, B 공장에서 생산된 부품이 불량품인 사건은 $B\cap E$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=0.4\times 0.01=0.004$$

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=0.6\times 0.02=0.012$$

따라서 택한 부품이 불량품일 확률은

$$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)=0.016$$

(2) 택한 부품이 불량품일 때, 그 부품이 A 공장에서 생산되었을 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{0.004}{0.016}=0.25$$

답 (1) 0.016 (2) 0.25

문제 4 어느 거짓말 탐지기의 정확도는 90 %이다. 즉, 참말을 참이라고 판정할 확률과 거짓말을 거짓이라고 판정할 확률이 모두 0.9이다. 거짓말을 할 확률이 0.2인 어떤 사람이 한 말에 대해 거짓말 탐지기가 거짓이라고 판정했을 때, 실제로 그 사람이 거짓말을 했을 확률을 구하시오.

생각 넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

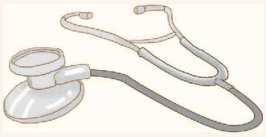
다음은 4개의 당첨 제비가 포함된 20개의 제비 중에서 두 사람이 차례대로 제비를 임의로 한 개씩 뽑을 때, 누가 더 유리한지에 대한 대화이다. 누구의 말이 맞는지 판단해 보자.

(단, 뽑은 제비는 다시 넣지 않는다.)

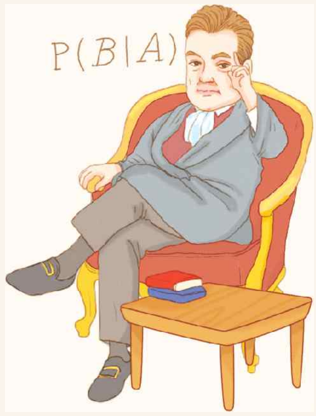
탐구 & 융합

조건부확률과 베이즈의 정리

문제 해결 | 창의·융합



감기, 기관지염, 폐렴에 걸린 환자는 보통 기침을 한다. 이 환자들이 기침을 할 확률을 안다고 할 때, 기침을 하는 환자가 감기, 기관지염, 폐렴에 걸려 있을 확률을 구할 수 있을까?



영국의 목사이자 수학자인 베이즈(Bayes, T., 1702~1761)는 이와 같이 이미 주어진 확률을 이용하여 새로운 확률을 계산하는 공식을 처음 발견했는데, 이를 "베이즈의 정리"라고 한다.

그의 이론에 의하면, 두 사건 A와 B의 확률 $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$와 조건부확률 $\mathrm{P}(A|B)$를 알 때, 확률 $\mathrm{P}(B|A)$를

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A|B)}{\mathrm{P}(A)}\mathrm{P}(B)$$

와 같이 구할 수 있다.

베이즈가 생각해 낸 이 확률 이론은 컴퓨터 공학 분야에서 폭넓게 사용되고 있는데 이 이론을 바탕으로 한 '베이지안 기계 학습(Bayesian machine learning)'은 컴퓨터의 독자적 학습 능력을 의미하며, 인공지능 로봇 기술에 응용된다고 한다.

(출처: 다다 사토시, 『처음 배우는 인공지능』, 송교석 역)

탐구 2000명 중에 한 명꼴로 감염되는 어느 바이러스의 감염 여부를 판정하는 검사법의 정확도가 90 %라고 한다.

(1) 이 검사를 받은 사람이 20000명일 때, 오른쪽 표를 완성해 보자.

(2) 이 검사에서 양성 반응을 보인 사람이 실제로 바이러스에 감염된 사람일 확률을 소수점 아래 다섯째 자리에서 반올림하여 구해 보자.

(단위: 명)

	양성 반응	음성 반응	합계
감염자			10
비감염자			19990
합계			20000

02 사건의 독립과 종속

학습 목표

사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다.

준비하기

두 자리 자연수 중에서 임의로 한 개를 택할 때, 다음을 구하시오.

(1) 십의 자리 숫자가 짝수일 확률

(2) 일의 자리 숫자가 홀수일 때, 십의 자리 숫자가 짝수일 확률

다가서기

옛날에 짚신과 우산을 파는 두 자식을 둔 어머니가 비가 오면 짚신 파는 자식 걱정, 날이 개면 우산 파는 자식 걱정을 했다는 이야기가 있다. 비가 오면 우산이 팔릴 확률이 커지는데, 이와 같이 어떤 사건이 다른 사건에 영향을 주는 경우도 있고, 그렇지 않은 경우도 있다.

사건의 독립과 종속

생각 열기 빨간색 사탕 4개와 파란색 사탕 5개가 들어 있는 주머니에서 사탕을 임의로 한 개씩 두 번 꺼낼 때, 첫 번째 꺼낸 사탕이 빨간색인 사건을 A, 두 번째 꺼낸 사탕이 파란색인 사건을 B라 하자.

❶ 첫 번째 꺼낸 사탕을 다시 넣을 때, $\mathrm{P}(B|A)$와 $\mathrm{P}(B)$를 각각 구해 보자.

❷ 첫 번째 꺼낸 사탕을 다시 넣지 않을 때, $\mathrm{P}(B|A)$와 $\mathrm{P}(B)$를 각각 구해 보자.

위의 **생각 열기**에서 첫 번째 꺼낸 사탕을 다시 넣을 때는

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{4}{9}\times\frac{5}{9}}{\frac{4}{9}}=\frac{5}{9}=\mathrm{P}(B)$$

이다. 이와 같이 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률이 사건 B가 일어날 확률과 같을 때, 즉

$$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$$

일 때, 두 사건 A와 B는 서로 **독립**이라고 한다. 한편, 두 사건 A와 B가 서로 독립이 아닐 때, 두 사건 A와 B는 서로 **종속**이라고 한다.

확률이 0이 아닌 두 사건 A와 B에 대하여 두 사건 A와 B가 서로 독립이면 확률의 곱셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

이다.

역으로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이고 $\mathrm{P}(A)\neq 0$이면

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}=\mathrm{P}(B)$$

이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

두 사건이 독립일 조건

두 사건 A와 B가 서로 독립일 필요충분조건은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\ (\text{단, } \mathrm{P}(A)\neq 0,\ \mathrm{P}(B)\neq 0)$$

예제 1 한 개의 주사위를 던질 때, 나오는 눈의 수가 짝수인 사건을 A, 소수인 사건을 B, 6의 약수인 사건을 C라 하자. 다음 두 사건이 서로 독립인지 종속인지 말하시오.

(1) A와 B (2) A와 C

풀이 $A=\{2,\ 4,\ 6\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5\}$, $C=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(C)=\frac{2}{3}$$

(1) $A\cap B=\{2\}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

또, $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 종속이다.

(2) $A\cap C=\{2,\ 6\}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{3}$$

또, $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$$

따라서 두 사건 A와 C는 서로 독립이다.

답 (1) 종속 (2) 독립

두 사건 A와 B가 서로 종속일 필요충분조건은
$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
(단, $\mathrm{P}(A)\neq 0$, $\mathrm{P}(B)\neq 0$)

문제 1 1부터 10까지의 자연수 중에서 임의로 한 개를 택할 때, 택한 수가 2의 배수인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B, 5의 배수인 사건을 C라 하자. 다음 두 사건이 서로 독립인지 종속인지 말하시오.

(1) A와 B (2) A와 C

독립시행의 확률

주사위나 동전을 여러 번 던지는 것과 같이 동일한 시행을 반복할 때, 각 시행에서 일어나는 사건이 서로 독립인 경우에 그러한 시행을 **독립시행**이라고 한다.

다음을 통해 독립시행의 확률을 구하는 방법을 알아보자.

함께하기 한 개의 주사위를 4번 던질 때, 1의 눈이 2번 나올 확률을 구하려고 한다.

활동 1 1의 눈이 나오는 경우를 ○, 1의 눈이 나오지 않는 경우를 × 로 나타낼 때, 1의 눈이 2번 나오는 모든 경우와 각각의 사건이 일어날 확률을 구하여 오른쪽 표를 완성해 보자.

1회	2회	3회	4회	확률
○	○	×	×	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}$

활동 2 활동 1의 결과를 이용하여 한 개의 주사위를 4번 던질 때, 1의 눈이 2번 나올 확률을 구해 보자.

위의 활동에서 각 사건이 일어날 확률은

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

이고, 한 개의 주사위를 4번 던지는 독립시행에서 1의 눈이 2번 나오는 경우는 ${}_4C_2=6$(가지)이다.

이들은 모두 배반사건이므로 1의 눈이 2번 나올 확률은

$$ {}_4C_2\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

이다.

일반적으로 독립시행의 확률에 대하여 다음이 성립한다.

독립시행의 확률

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 $p(0<p<1)$일 때, 이 시행을 n번 반복하는 독립시행에서 사건 A가 r번 일어날 확률은

$$ {}_nC_r p^r(1-p)^{n-r} \quad (\text{단, } r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

예제 2 어느 클레이 사격 선수가 날아오르는 표적을 맞힐 확률은 $\frac{4}{5}$라고 한다. 이 선수가 3발을 쏘았을 때, 다음을 구하시오.

(1) 표적을 2번 맞힐 확률

(2) 표적을 한 번도 맞히지 못할 확률

풀이 (1) 3발을 쏘았을 때 표적을 2번 맞힐 확률은 독립시행의 확률에 의하여

$$ {}_3C_2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{48}{125} $$

(2) 3발을 쏘았을 때 표적을 한 번도 맞히지 못할 확률은

$$ {}_3C_0 \times \left(\frac{4}{5}\right)^0 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125} $$

답 (1) $\frac{48}{125}$ (2) $\frac{1}{125}$

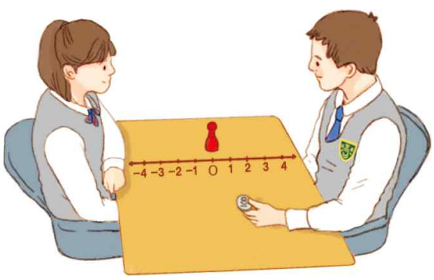
문제 2 승률이 60%인 바둑 기사가 5번의 대국에서 4번 이상 이길 확률을 구하시오.

문제 3 어느 양궁 선수가 10점 과녁을 맞힐 확률은 $\frac{3}{4}$이라고 한다. 이 선수가 3발을 쏘았을 때, 적어도 한 발은 10점 과녁에 맞힐 확률을 구하시오.

생각 넓히기

문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

오른쪽 그림과 같이 수직선 위의 원점 O에 놓인 말을 동전을 한 번 던질 때마다 다음과 같은 규칙에 따라 움직이려고 한다.



(가) 앞면이 나오면 양의 방향으로 1만큼 이동한다.

(나) 뒷면이 나오면 음의 방향으로 1만큼 이동한다.

활동 ▶ 동전을 5번 던질 때, 말이 원점에서 3만큼 떨어진 곳에 위치할 확률을 구해 보자.

Ⅱ - 2. 조건부확률

중단원 마무리하기

조건부확률

(1) **조건부확률**

① 두 사건 A와 B에 대하여, 사건 A가 일어났다고 가정할 때 사건 B가 일어날 확률을 **조건부확률**이라 하며, 이것을 기호로

$\mathrm{P}(B|A)$

와 같이 나타낸다.

② 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} \quad (\text{단, } \mathrm{P}(A)\neq 0)$$

(2) **확률의 곱셈정리**

두 사건 A와 B에 대하여 $\mathrm{P}(A)\neq 0$, $\mathrm{P}(B)\neq 0$일 때,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)\end{aligned}$$

사건의 독립과 종속

(1) **사건의 독립과 종속**

① 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률이 사건 B가 일어날 확률과 같을 때, 즉

$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$

일 때, 두 사건 A와 B는 서로 **독립**이라고 한다.

② 두 사건 A와 B가 서로 독립이 아닐 때, 두 사건 A와 B는 서로 **종속**이라고 한다.

(2) **두 사건이 독립일 조건**

두 사건 A와 B가 서로 독립일 필요충분조건은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

(단, $\mathrm{P}(A)\neq 0$, $\mathrm{P}(B)\neq 0$)

(3) **독립시행의 확률**

① 동일한 시행을 반복할 때, 각 시행에서 일어나는 사건이 서로 독립인 경우에 그러한 시행을 **독립시행**이라고 한다.

② 어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, 이 시행을 n번 반복하는 독립시행에서 사건 A가 r번 일어날 확률은

$${}_n\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{n-r} \quad (\text{단, } r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

기본

01 한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 소수일 때, 그 수가 홀수일 확률을 구하시오.

02 표본공간이 $S=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 10\}$인 두 사건 A와 B에 대하여 $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $B=\{2,\ 5,\ 8\}$일 때, $\mathrm{P}(B|A)$를 구하시오.

03 1부터 12까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 12장의 카드 중에서 임의로 한 장의 카드를 뽑을 때, 카드에 적힌 수가 4의 약수인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B라 하자. 두 사건 A와 B가 서로 독립인지 종속인지 말하시오.

04 두 사건 A와 B가 서로 독립이고 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$를 구하시오.

05 한 개의 동전을 4번 던질 때, 앞면이 3번 나올 확률을 구하시오.

표 준

06 원소의 개수가 15인 표본공간 S의 두 사건 A와 B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}$이고, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{3}$일 때, $n(A\cap B)$를 구하시오.

07 어느 학교 밴드 동아리 전체 회원의 60 %는 남학생이고, 보컬을 담당하는 남학생 회원은 전체 회원의 24 %이다. 이 동아리에서 임의로 택한 한 명이 남학생일 때, 그 학생이 보컬을 담당하는 학생일 확률을 구하시오.

08 상자 안에 크기와 모양이 같은 검은색 볼펜 5자루와 빨간색 볼펜 2자루가 들어 있다. 이 상자에서 민지와 지훈이가 차례대로 볼펜을 임의로 한 자루씩 꺼낼 때, 민지는 검은색 볼펜, 지훈이는 빨간색 볼펜을 꺼낼 확률을 구하시오.

(단, 꺼낸 볼펜은 다시 넣지 않는다.)

09 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 다음 **보기**의 세 사건 A, B, C 중에서 서로 독립인 두 사건을 찾으시오.

보기

A: 첫 번째에 나오는 눈의 수가 4의 약수인 사건

B: 나오는 눈의 수가 모두 짝수인 사건

C: 나오는 눈의 수의 합이 7인 사건

10 어느 푸드 트럭에서는 햄버거, 샌드위치, 케밥을 판매한다. 각 음식에 대한 선호도가 동일한 4명의 손님이 음식을 주문할 때, 적어도 한 명은 케밥을 택할 확률을 구하시오.

|서·술·형|

11 7번의 경기 중에서 4번의 경기를 먼저 이기는 팀이 우승하는 프로 야구 한국 시리즈에 A 팀과 B 팀이 출전하였다. 현재까지 A 팀이 2승 무패로 앞서고 있다고 할 때, B 팀이 우승할 확률을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

$\left(\text{단, A 팀이 B 팀을 이길 확률은 } \frac{1}{2}\text{이고, 비기는 경우는 없다.}\right)$

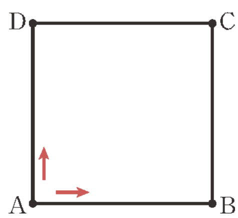
발전

사고력+

12 감귤은 무게에 따라 분류하는데, 두 감귤 농장 A, B에서 생산된 감귤을 잘못 분류할 비율은 각각 2 %, 3 %이다. 어느 과일 가게에 감귤 5상자가 있는데, 이 중에서 3상자는 A 농장에서, 나머지 2상자는 B 농장에서 생산되었다고 한다.
이 5개의 상자 중에서 임의로 한 상자를 택하고, 그 상자에서 꺼낸 감귤 한 개가 잘못 분류된 감귤일 때, 그 감귤이 A 농장에서 생산되었을 확률을 구하시오.

|서·술·형|

13 점 P가 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD의 변 위를 주사위를 한 번 던질 때마다 다음과 같은 규칙에 따라 움직인다. 주사위를 4번 던질 때, 점 A를 출발한 점 P가 다시 점 A로 되돌아올 확률을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



(가) 나오는 눈의 수가 3의 배수이면 시곗바늘이 도는 방향과 반대인 방향으로 1만큼 움직인다.

(나) 나오는 눈의 수가 3의 배수가 아니면 시곗바늘이 도는 방향으로 1만큼 움직인다.

하 ●○○ 중 ●●○ 상 ●●●

01 ●○○

주사위를 한 번 던지는 시행에서 나오는 눈의 수가 3의 약수인 사건을 A라 할 때, 다음 중 A와 서로 배반인 사건은?

① 나오는 눈의 수가 4의 약수인 사건
② 나오는 눈의 수가 소수인 사건
③ 나오는 눈의 수가 짝수인 사건
④ 나오는 눈의 수가 홀수인 사건
⑤ 나오는 눈의 수가 3의 배수인 사건

02 ●●○

야구에서 n타수 중 r개의 안타를 친 선수의 타율은 $\frac{r}{n}$라고 한다. 현재까지 32타수에 나와 타율이 0.25인 선수가 앞으로 48타수에 더 나와 타율이 0.3이 되게 하기 위해서는 몇 개의 안타를 더 쳐야 하는지 구하시오.

03 ●●○

4인승 카누 경기의 연습을 하기 위해 4명의 선수가 임의로 자리에 앉을 때, 특정한 두 선수가 카누의 양 끝에 앉을 확률은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

04 ●●○

1부터 5까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 5장의 카드 중에서 임의로 두 장의 카드를 차례대로 뽑아 첫 번째 뽑은 카드에 적힌 수를 a, 두 번째 뽑은 카드에 적힌 수를 b라 하자. 이때 a, a, b가 어떤 둔각삼각형의 세 변의 길이가 될 확률을 구하시오. (단, 꺼낸 카드는 다시 넣지 않는다.)

05 ●●●

집합 $A=\{a,\ b,\ c\}$의 공집합이 아닌 부분집합 중에서 임의로 2개를 택할 때, 하나가 다른 하나의 진부분집합이 될 확률을 구하시오.

06 ●●○

흰 공 5개와 검은 공 4개가 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 공을 꺼낼 때, 2개 모두 흰 공이거나 2개 모두 검은 공일 확률은?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

07

두 사건 A와 B에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $0 < \mathrm{P}(A) < 1$

② $\mathrm{P}(A^C) = 1 - \mathrm{P}(A)$

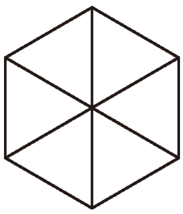
③ $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

④ $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$

⑤ $\mathrm{P}(A - B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B)$

08

오른쪽 그림과 같이 6등분한 정육각형에 빨강, 파랑, 노랑, 초록, 주황, 보라의 6가지 색을 모두 사용하여 임의로 칠할 때, 빨간색과 노란색을 이웃하지 않게 칠할 확률은?



① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{7}{15}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

09

남학생 4명과 여학생 5명으로 구성된 어느 모둠에서 청소 당번 3명을 뽑을 때, 적어도 한 명의 남학생이 청소 당번으로 뽑힐 확률은?

① $\frac{13}{42}$ ② $\frac{7}{14}$ ③ $\frac{11}{14}$

④ $\frac{37}{42}$ ⑤ $\frac{13}{14}$

10

오른쪽 표는 어느 여행사에서 회원 40명을 대상으로 여행을 가고 싶은 지역을 조사하여 나타낸 것이다. 이 회원 중에서 임의로 택한 한 명이 경주를 가고 싶다고 한 회원일 때, 그 회원이 여자일 확률을 구하시오.

(단위: 명)

	경주	담양	합계
남	16	6	22
여	8	10	18
합계	24	16	40

11

1등 당첨 제비 1개와 2등 당첨 제비 2개를 포함한 10개의 제비가 들어 있는 추첨함에서 임의로 뽑은 2개의 제비 중 한 개가 당첨 제비일 때, 그 제비가 1등 당첨 제비일 확률을 구하시오.

12

두 사건 A와 B에 대하여

$$\mathrm{P}(A) = 0.5,\ \mathrm{P}(B) = 0.6,\ \mathrm{P}(A \cap B) = 0.2$$

일 때, $\mathrm{P}(A^C | B^C)$의 값을 구하시오.

13

어느 지역에서 장마철 날씨를 조사한 결과 비가 온 날의 다음 날에 비가 올 확률은 0.6이고, 비가 오지 않은 날의 다음 날에 비가 올 확률은 0.3이었다. 장마철의 어느 수요일에 비가 왔을 때, 그 주 금요일에도 비가 올 확률을 구하시오.

14

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 눈의 수를 각각 a, b라 하자. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 허근을 가질 때, a가 홀수일 확률을 구하시오.

15

어느 농구 선수의 자유투 성공 확률을 조사하였더니 자유투를 성공한 후 다음 시도에서 성공할 확률은 $\frac{2}{3}$이고, 자유투를 실패한 후 다음 시도에서 성공할 확률은 $\frac{1}{4}$이었다. 이 선수가 첫 번째 자유투를 성공했을 때, 세 번째 시도에서 성공할 확률을 구하시오.

16

확률이 0이 아닌 두 사건에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① 서로 종속인 두 사건은 배반사건이 아니다.
② 서로 독립인 두 사건은 배반사건이다.
③ 서로 배반인 두 사건은 종속사건이다.
④ 서로 배반이 아닌 두 사건은 독립사건이다.
⑤ 어떤 사건과 그 여사건은 독립사건이다.

17

오른쪽 그림과 같은 어느 달의 달력에서 임의로 한 날을 택할 때, 그 날이 일요일인 사건을 A, 수요일인 사건을 B, 날짜가 5의 배수인 사건을 C라 하자. 다음 **보기**에서 서로 독립인 두 사건을 있는 대로 고른 것은?

일	월	화	수	목	금	토
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

보기
ㄱ. A와 B　　ㄴ. B와 C　　ㄷ. A와 C

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18

서로 독립인 두 사건 A와 B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4},\quad \mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}$$

일 때, A와 B 중에서 적어도 한 사건이 일어날 확률을 구하시오.

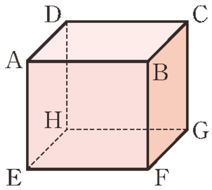
19

5문제 중에서 4문제 이상을 맞히면 합격하는 시험이 있다. 각 문제를 맞힐 확률이 $\frac{1}{2}$인 학생이 이 시험에 합격할 확률을 구하시오.

20번부터 22번까지 서술형입니다.

20

오른쪽 그림과 같은 직육면체의 8개의 꼭짓점 중에서 임의로 서로 다른 3개의 점을 택할 때, 그중에서 2개의 점이 같은 모서리의 꼭짓점일 확률을 구하시오.



21

5번의 경기 중에서 3번을 먼저 이기는 사람이 최종 우승하는 체스 대회의 결승에 A와 B 두 사람이 진출하였다. A가 첫 번째 경기를 이겼을 때, A가 최종 우승할 확률을 구하시오.

$\left(\text{단, A가 B를 이길 확률은 } \frac{2}{3} \text{이고, 비기는 경우는 없다.}\right)$

22

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 첫 번째에 나오는 눈의 수가 4의 배수인 사건을 A, 두 개의 주사위에서 나오는 눈의 수의 합이 k인 사건을 B_k라 하면 두 사건 A와 B_k는 서로 독립이다. 다음에 답하시오.

(단, k는 5 이상의 자연수이다.)

(1) 두 사건 A와 B_k가 일어날 확률을 각각 구하시오.

(2) (1)의 결과를 이용하여 k의 값을 구하시오.

자기평가 정답을 맞힌 문항에 ○표 하여 학습 성취도를 표시하고, 부족한 부분은 교과서의 해당 쪽을 확인하여 복습하자.

문항 번호	성취 기준	성취도	복습
01 02 03 04 05 06	통계적 확률과 수학적 확률의 의미와 확률의 기본 성질을 이해한다.	○ △ ×	43 ~ 48쪽
07 08 09 20	확률의 덧셈정리를 이해하고, 여사건의 확률의 뜻을 안다.	○ △ ×	50 ~ 53쪽
10 11 12 13 14 15	조건부확률의 의미와 확률의 곱셈정리를 이해한다.	○ △ ×	58 ~ 61쪽
16 17 18 19 21 22	사건의 독립과 종속의 의미를 이해한다.	○ △ ×	63 ~ 66쪽

성취도 ○ 만족, △ 보통, × 미흡

수학 이야기

세 명의 죄수와 조건부확률

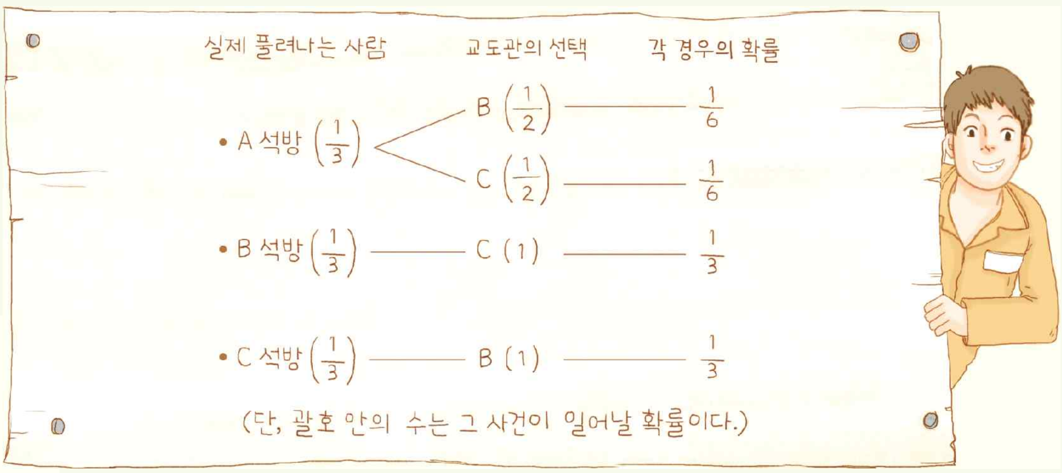
교도소에 갇힌 세 명의 죄수 A, B, C 중에서 한 명만 사면으로 풀려나게 되었다. 세 명의 죄수는 한 명이 풀려난다는 사실만 알고 있을 뿐 누가 풀려날지는 모르고 있다.

이러한 상황에서 A는 누가 풀려나는지를 아는 교도관에게 B와 C 중에서 풀려나지 않는 사람 한 명만 가르쳐 달라고 하면서, 교도관이 누구를 말하든 자신이 풀려날 확률 $\frac{1}{3}$은 변하지 않는다고 말했다.

그런데 교도관은 풀려나지 않는 사람 중에서 한 명을 말하면 A가 풀려날 확률이 $\frac{1}{2}$이 되어서 $\frac{1}{3}$보다 더 커지게 되므로 알려 줄 수 없다고 했다. 과연 누구의 말이 옳은가?

A가 풀려날 경우, 교도관이 B 또는 C를 알려 줄 확률은 $\frac{1}{2}$로 서로 같다. 그런데 B 또는 C가 풀려난다면, 교도관은 그중에서 풀려나지 않는 사람을 알려 주게 되므로 각 확률은 1이 된다.

그러므로 각 경우의 확률은 다음 그림과 같이 계산할 수 있다.



따라서 교도관이 B 또는 C를 알려 줄 때 A가 풀려날 조건부확률은 모두 $\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$이고, 이것은 A가 풀려날 확률과 같으므로 A의 말이 옳음을 알 수 있다.

(출처: Tijms, H., 『Understanding Probability』)

보험료의 결정과 확률

보험 계리인은 보험 상품을 개발할 때, 관련된 통계와 예측 전망 등을 기반으로 각종 금융 기법을 활용하여 적정한 보험료를 산출하는 일을 한다. 또한, 보험 회사의 재무적인 성과나 지표를 측정하고 평가하여 회사 전체의 손익을 추정하는 업무도 한다.

보험은 재해나 각종 사고 따위가 일어날 경우의 경제적 손해를 대비하여, 사람들이 미리 일정한 돈을 함께 적립하여 두었다가 사고를 당한 사람에게 일정 금액을 주어 손해를 보상하는 제도이다. 보험은 시대에 따라 변화되어 왔는데, 갈수록 복잡해지는 현대 사회의 환경과 상황에 맞추어 다양한 보험이 설계되고 있다.

보험 회사에서는 보험금이 지급되어야 하는 사고가 발생할 확률을 충분한 경험 데이터를 근거로 다양한 방법으로 분석하여 보험료를 산출하게 된다.

예를 들어 사망 시 보험금을 지급하는 보험의 경우에 사람의 생존 확률을 계산하는 일이 많은데, x살인 사람이 앞으로 10년 후까지 생존할 확률은 앞으로 5년을 더 살 확률과 5년 후부터 2년을 더 살 확률, 그리고 그 뒤에 3년을 더 살 확률의 곱으로 다음과 같이 계산할 수 있다.

${}_{10}\mathrm{P}_x = {}_5\mathrm{P}_x \times {}_2\mathrm{P}_{x+5} \times {}_3\mathrm{P}_{x+7}$ (단, ${}_t\mathrm{P}_x$는 x살인 사람이 앞으로 t년 후까지 생존할 확률이다.)

이와 같이 보험 계리인은 보험 및 연금 분야에서 확률, 통계적인 방법을 적용하여 위험을 평가하고 분석하여 이를 바탕으로 적정 보험료는 어느 정도가 되어야 하는지, 사고 시에 보험금을 지급하려면 보험 회사가 어느 정도를 준비해야 하는지 등을 계산한다.

(출처: Garrett, S., 『Introduction to Actuarial and Financial Mathematical Methods』)