수능특강

수학영역 | **수학 I**

정답과 풀이

01 지수와 로그

유제					본문 5~13쪽
1 ⑤	2 ④	3 ③	4 ①	5 ②	6 ③
7 ①	8 ⑤	9 ③	10 ④		

1 $\sqrt[3]{81}\times\sqrt[3]{48}\times\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{3^4}\times\sqrt[3]{3\times2^4}\times\sqrt[3]{2\times\frac{1}{3}}$

$=\sqrt[3]{3^4\times3\times\frac{1}{3}\times2^4\times2}$

$=\sqrt[3]{3^4\times2^5}$

이므로 $m=4$, $n=5$

따라서 $m+n=4+5=9$

답 ⑤

2 n이 홀수이면 $n-5$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이다.

즉, $f(3)=f(5)=f(7)=\cdots=1$

n이 짝수이면

(i) $2\le n\le4$일 때

$n-5$는 음수이므로 $n-5$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 0이다.

즉, $f(2)=f(4)=0$

(ii) $n\ge6$일 때

$n-5$는 양수이므로 $n-5$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 2이다.

즉, $f(6)=f(8)=f(10)=\cdots=2$

(i), (ii)에 의하여

$f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(11)$

$=0+1+0+1+2+1+2+1+2+1=11$

이므로 $f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(k)=11$을 만족시키는 자연수 k의 값은 11이다.

답 ④

3 $a=(2^2)^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{2}{5}}$, $b=3^{\frac{1}{3}}$이므로

$(ab)^{15}=\left(2^{\frac{2}{5}}\times3^{\frac{1}{3}}\right)^{15}=2^6\times3^5$

따라서 $x=6$, $y=5$이므로

$x+y=6+5=11$

답 ③

4 $(1-\sqrt{3})^{-1}+(1+\sqrt{3})^{-1}(1-\sqrt{3})^2$

$=\frac{1}{1-\sqrt{3}}+\frac{4-2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

$=\frac{1+\sqrt{3}+(4-2\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{-2}$

$=\frac{1+\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}-4\sqrt{3}+6}{-2}$

$=\frac{5\sqrt{3}-11}{2}$

답 ①

5 $\log_2\sqrt{20}-\log_2\sqrt{5}+\log_2\frac{1}{2}$

$=\log_2\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}+\log_2 2^{-1}$

$=\log_2 2-\log_2 2$

$=0$

답 ②

6 진수 조건에 의하여 $a>-1$, $b>1$이다.

$\log_2(a+1)=1-\log_2(b-1)$에서

$\log_2(a+1)+\log_2(b-1)=1$

$\log_2(a+1)(b-1)=1$

이므로

$(a+1)(b-1)=2$

$(a+1)(b-1)=2$를 만족시키는 두 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(0, 3)$, $(1, 2)$이다.

(i) $a=0$, $b=3$일 때

$\log_2(a^2+b^2-1)=\log_2(0^2+3^2-1)$

$=\log_2 8=3$

(ii) $a=1$, $b=2$일 때

$\log_2(a^2+b^2-1)=\log_2(1^2+2^2-1)$

$=\log_2 4=2$

(i), (ii)에 의하여

$\log_2(a^2+b^2-1)$의 최솟값은 2이다.

답 ③

7 $\log_2 7=x$에서 $\log_7 2=\frac{1}{x}$이므로

$7^{\frac{1}{x}}=7^{\log_7 2}=2^{\log_7 7}=2^1=2=(2\sqrt{2})^a=2^{\frac{3}{2}a}$

$2=2^{\frac{3}{2}a}$이므로 $a=\frac{2}{3}$

답 ①

8 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=\frac{3}{2}$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=9-6=3$

이므로

$|\alpha-\beta|=\sqrt{3}$

$\log_{\alpha+\beta}\left(\frac{2\sqrt{6}}{\alpha}+\frac{\beta}{\sqrt{6}}\right)^2+\log_{|\alpha-\beta|}\left(\frac{2\sqrt{6}}{\beta}+\frac{\alpha}{\sqrt{6}}\right)$

$=\log_3\left(\frac{2\sqrt{6}}{\alpha}+\frac{\beta}{\sqrt{6}}\right)^2+\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{2\sqrt{6}}{\beta}+\frac{\alpha}{\sqrt{6}}\right)$

$=\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{2\sqrt{6}}{\alpha}+\frac{\beta}{\sqrt{6}}\right)^2+\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{2\sqrt{6}}{\beta}+\frac{\alpha}{\sqrt{6}}\right)$

$=\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{2\sqrt{6}}{\alpha}+\frac{\beta}{\sqrt{6}}\right)+\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{2\sqrt{6}}{\beta}+\frac{\alpha}{\sqrt{6}}\right)$

$=\log_{\sqrt{3}}\left\{\left(\frac{2\sqrt{6}}{\alpha}+\frac{\beta}{\sqrt{6}}\right)\times\left(\frac{2\sqrt{6}}{\beta}+\frac{\alpha}{\sqrt{6}}\right)\right\}$

$=\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{24}{\alpha\beta}+2+2+\frac{\alpha\beta}{6}\right)$

$=\log_{\sqrt{3}}\left(16+2+2+\frac{1}{4}\right)$

$=\log_{\sqrt{3}}\frac{81}{4}$

답 ⑤

9 $2\log 6+\log 2-\log 30=\log 36+\log 2-\log 30$

$=\log\frac{36\times 2}{30}$

$=\log\frac{24}{10}$

$=\log 2.4$

$=0.3802$

답 ③

10 $\frac{1}{\log_{a+1}10}+\frac{2}{\log_{b+1}100}=\log(a+1)+\frac{2}{2\log_{b+1}10}$

$=\log(a+1)+\log(b+1)$

$=\log(a+1)(b+1)$

이므로 $\log(a+1)(b+1)=k$ (k는 자연수)라 하면

$(a+1)(b+1)=10^k$

조건을 만족시키는 100 이하의 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

(i) $k=1$일 때

㉠ $a+1=2,\ b+1=5$

즉, $a=1$, $b=4$일 때 성립하므로 순서쌍은 $(1, 4)$

㉡ $a+1=5,\ b+1=2$

즉, $a=4$, $b=1$일 때 성립하므로 순서쌍은 $(4, 1)$

따라서 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 2

(ii) $k=2$일 때

㉠ $a+1=2,\ b+1=50$

즉, $a=1$, $b=49$일 때 성립하므로 순서쌍은 $(1, 49)$

㉡ $a+1=4,\ b+1=25$

즉, $a=3$, $b=24$일 때 성립하므로 순서쌍은 $(3, 24)$

㉢ $a+1=5,\ b+1=20$

즉, $a=4$, $b=19$일 때 성립하므로 순서쌍은 $(4, 19)$

㉣ $a+1=10,\ b+1=10$

즉, $a=9$, $b=9$일 때 성립하므로 순서쌍은 $(9, 9)$

㉤ $a+1=20,\ b+1=5$

즉, $a=19$, $b=4$일 때 성립하므로 순서쌍은 $(19, 4)$

㉥ $a+1=25,\ b+1=4$

즉, $a=24$, $b=3$일 때 성립하므로 순서쌍은 $(24, 3)$

㉦ $a+1=50,\ b+1=2$

즉, $a=49$, $b=1$일 때 성립하므로 순서쌍은 $(49, 1)$

따라서 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 7

(iii) $k=3$일 때

㉠ $a+1=10,\ b+1=100$

즉, $a=9$, $b=99$일 때 성립하므로 순서쌍은 $(9, 99)$

㉡ $a+1=20,\ b+1=50$

즉, $a=19$, $b=49$일 때 성립하므로 순서쌍은 $(19, 49)$

㉢ $a+1=25,\ b+1=40$

즉, $a=24$, $b=39$일 때 성립하므로 순서쌍은 $(24, 39)$

㉣ $a+1=40,\ b+1=25$

즉, $a=39$, $b=24$일 때 성립하므로 순서쌍은 $(39, 24)$

㉤ $a+1=50,\ b+1=20$

즉, $a=49$, $b=19$일 때 성립하므로 순서쌍은 $(49, 19)$

㉥ $a+1=100,\ b+1=10$

즉, $a=99$, $b=9$일 때 성립하므로 순서쌍은

$(99,\ 9)$

따라서 두 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 6

(iv) $k=4$일 때

$a+1=100$, $b+1=100$

즉, $a=99$, $b=99$일 때 성립하므로 순서쌍은

$(99,\ 99)$

따라서 두 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 1

(i)~(iv)에 의하여 100 이하의 두 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$2+7+6+1=16$

답 ④

Level 1 기초 연습 본문 14~15쪽

1 ④	2 ②	3 ②	4 ⑤	5 ④	6 ⑤
7 ④	8 ①				

1 $2^{-2}=\frac{1}{4}>0$, $-2^2=-4<0$, $2^0=1>0$이므로

2^{-2}, -2^2, 2^0의 네제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 각각 2, 0, 2이다.

따라서 $p=2$, $q=0$, $r=2$이므로

$p+q+r=2+0+2=4$

답 ④

2 $\alpha=\sqrt[3]{2}$, $\beta=\sqrt{\sqrt[3]{4^2}}=\sqrt[6]{2^4}=\sqrt[3]{2^2}$ 이므로

$$\alpha\beta=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2^2}$$
$$=\sqrt[3]{2\times2^2}$$
$$=\sqrt[3]{2^3}=2$$

답 ②

3
$$\frac{9^2\times81^{-2}\times\left(\frac{1}{9}\right)^2}{27^{-4}\times9^3}$$
$$=\frac{(3^2)^2\times(3^4)^{-2}\times(3^{-2})^2}{(3^3)^{-4}\times(3^2)^3}$$
$$=\frac{3^4\times3^{-8}\times3^{-4}}{3^{-12}\times3^6}$$
$$=\frac{3^{4-8-4}}{3^{-12+6}}$$
$$=\frac{3^{-8}}{3^{-6}}$$
$$=3^{-8+6}$$
$$=3^{-2}$$

답 ②

4 $2^{x+\frac{1}{3}}=2^x\times2^{\frac{1}{3}}=a$이므로

$$2^x=a\times2^{-\frac{1}{3}}$$
$$16^x=(2^4)^x=(2^x)^4$$
$$=\left(a\times2^{-\frac{1}{3}}\right)^4$$
$$=a^4\times2^{-\frac{4}{3}}$$
$$=\frac{a^4}{\sqrt[3]{2^4}}$$

답 ⑤

5 로그의 밑의 조건에서

$x>3$, $x\neq4$ …… ㉠

로그의 진수 조건에서

$-x^2+11x-18>0$

$x^2-11x+18<0$

$(x-2)(x-9)<0$

$2<x<9$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$3<x<9$, $x\neq4$

따라서 조건을 만족시키는 정수 x는 5, 6, 7, 8이고, 그 합은 $5+6+7+8=26$

답 ④

6
$$\left(\log_2 5+\log_2\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\times\log_{\sqrt{5}} 8$$
$$=\log_2\frac{5}{\sqrt{5}}\times\log_{\sqrt{5}} 8$$
$$=\log_2\sqrt{5}\times\frac{\log_2 8}{\log_2\sqrt{5}}$$
$$=\log_2 8$$
$$=\log_2 2^3$$
$$=3\log_2 2$$
$$=3$$

답 ⑤

7 $(2^{\log_3 7})^{\log_7 9}=2^{\log_3 7\times\log_7 9}$

$=2^{\frac{\log_7 7}{\log_7 3}\times\log_7 3^2}$

$=2^{\frac{1}{\log_7 3}\times 2\log_7 3}$

$=2^2$

$=4$

답 ④

8 $\log_a b=\dfrac{1}{3}$에서 $b=a^{\frac{1}{3}}$

$\log ab=\log a^{\frac{4}{3}}=\dfrac{4}{3}\log a=\dfrac{8}{3}$이므로

$\log a=2$, $a=10^2$, $b=10^{\frac{2}{3}}$

따라서 $\dfrac{a}{b}=10^{2-\frac{2}{3}}=10^{\frac{4}{3}}$

답 ①

Level 2 기본 연습 본문 16~17쪽

1 ①	2 ④	3 ③	4 ①	5 ②	6 ⑤
7 ⑤	8 ②				

1 점 $(\sqrt{a}, \sqrt{b})$가 곡선 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 위의 점이므로

$\sqrt{b}=\dfrac{1}{a}$

즉, $b=\dfrac{1}{a^2}=a^{-2}$이고 $a=b^{-\frac{1}{2}}$

따라서

$\log_a \dfrac{a}{b}+\log_b \dfrac{b}{a}=\log_a \dfrac{a}{a^{-2}}+\log_b \dfrac{b}{b^{-\frac{1}{2}}}$

$=\log_a a^3+\log_b b^{\frac{3}{2}}$

$=3\log_a a+\dfrac{3}{2}\log_b b$

$=3+\dfrac{3}{2}$

$=\dfrac{9}{2}$

답 ①

2 $x=\log_a 100^w$, $y=\log_b 100^w$, $z=\log_c 100^w$이므로

$\dfrac{1}{x}=\dfrac{\log a}{w\log 100}=\dfrac{\log a}{2w}$,

$\dfrac{1}{y}=\dfrac{\log b}{w\log 100}=\dfrac{\log b}{2w}$,

$\dfrac{1}{z}=\dfrac{\log c}{w\log 100}=\dfrac{\log c}{2w}$이고

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{\log a+\log b+\log c}{2w}$

$=\dfrac{\log abc}{2w}$

$=\dfrac{\log 42}{2w}$

따라서 $\log abc=\log 42$이므로 $abc=42$

이때 $w\neq0$에서 a, b, c는 1이 아니므로

$42=2\times3\times7$에서 a, b, c의 값은 2 또는 3 또는 7이다.

이때 $a+b-c$는 $c=2$일 때 최댓값 8을 갖는다.

따라서 $a+b-c$의 최댓값은 8이다.

답 ④

3 $\log_2 a=n$ (n은 정수)라 하면

$\log_{\frac{1}{4}} a=\log_{2^{-2}} a=-\dfrac{1}{2}\log_2 a=-\dfrac{n}{2}$

n과 $-\dfrac{n}{2}$이 모두 정수이려면 $n=2k$ (k는 정수)이어야 한다.

$\log_2 a=2k$에서 $a=2^{2k}=4^k$

이때 a가 100 이하의 자연수이므로 $k=0$, 1, 2, 3이다.

따라서 $a=1$, 4, 16, 64이므로 모든 a의 값의 합은

$1+4+16+64=85$

답 ③

4 직선 $y=-2x+3$의 x절편과 y절편은 각각 $\dfrac{3}{2}$, 3이므로

삼각형 BOA의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}\times3=\dfrac{9}{4}$

점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{\mathrm{CH}}=h$라 하면 두 삼각형 COA, BOC의 넓이의 비가 $1:\log_2 5$이므로

삼각형 COA의 넓이는

$S=\dfrac{9}{4}\times\dfrac{1}{1+\log_2 5}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}\times h=\dfrac{3}{4}h$

따라서 $h=\dfrac{3}{1+\log_2 5}=\dfrac{3}{\log_2 10}=3\log 2$

$3\log 2=-2x+3$에서

$2x=3(1-\log 2)$이고

$x=\frac{3(1-\log 2)}{2}$이므로

점 C의 좌표는 $\left(\frac{3(1-\log 2)}{2},\ 3\log 2\right)$

그러므로

$$a=\frac{3\log 2}{\frac{3(1-\log 2)}{2}}$$

$$=\frac{2\log 2}{1-\log 2}$$

$$=\frac{2\log 2}{\log 5}$$

따라서

$$S+a=\frac{9}{4}\log 2+\frac{2\log 2}{\log 5}$$

$$=(\log 2)\left(\frac{9}{4}+\frac{2}{\log 5}\right)$$

$$=(\log 2)\left(\frac{9}{4}+2\log_5 10\right)$$

답 ①

5 $x=\frac{1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt[8]{2}-1)}$

$$=\frac{\sqrt[8]{2}+1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt[8]{2}-1)(\sqrt[8]{2}+1)}$$

$$=\frac{\sqrt[8]{2}+1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt[4]{2}-1)}$$

$$=\frac{\sqrt[8]{2}+1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$

$$=\frac{\sqrt[8]{2}+1}{2-1}$$

$$=\sqrt[8]{2}+1$$

따라서 $(x-1)^4=(\sqrt[8]{2})^4=\sqrt{2}$

답 ②

6 $36^{10}=a\times 10^n$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 36^{10}=\log(a\times 10^n)$이므로

$10\log 36=\log a+\log 10^n$

$10\log(2^2\times 3^2)=n+\log a$

$10(2\log 2+2\log 3)=n+\log a$

$20(\log 2+\log 3)=n+\log a$

이때 $\log 2=0.301$, $\log 3=0.477$이므로

$20(0.301+0.477)=n+\log a$

$20\times 0.778=n+\log a$

$15.56=n+\log a$

이때 $0<\log a<1$이므로 $n=15$이고 $\log a=0.56$이다.

15의 양의 약수는 1, 3, 5, 15이므로

$\log x_1-\log x_2+\log x_3+\log x_4$

$=\log 1-\log 3+\log 5+\log 15$

$=\log\left(\frac{1\times 5\times 15}{3}\right)$

$=\log 25=\log 5^2$

$=2\log 5$

$=2(1-\log 2)$

$=2\times 0.699$

$=1.398$

답 ⑤

7 조건 (가)에서

$f(\log 2)+g^{-1}(\log 4)=7\log 2=\log 2^7=\log 128$이므로

순서쌍 $(f(\log 2),\ g^{-1}(\log 4))$는

$(\log 8,\ \log 16)$ 또는 $(\log 16,\ \log 8)$이다.

(i) $f(\log 2)=\log 8$, $g^{-1}(\log 4)=\log 16$일 때

$g(\log 16)=\log 4$이므로

조건 (나)에서 $g^{-1}(\log 8)+f(\log 16)=\log 64$

함수 f는 일대일대응이므로

$f(\log 16)\neq\log 8$이고,

함수 g도 일대일대응이므로

$g^{-1}(\log 8)\neq\log 16$이다.

따라서 $g^{-1}(\log 8)=\log 4$, $f(\log 16)=\log 16$이므로

$f(\log 16)+g(\log 16)=\log 16+\log 4$

$=\log 64$

$=6\log 2$

(ii) $f(\log 2)=\log 16$, $g^{-1}(\log 4)=\log 8$일 때

$g(\log 8)=\log 4$이므로

조건 (나)에서 $g^{-1}(\log 16)+f(\log 8)=\log 64$

함수 f는 일대일대응이므로

$f(\log 8)\neq\log 16$이고,

함수 g도 일대일대응이므로

$g^{-1}(\log 16)\neq\log 8$이다.

따라서 $g^{-1}(\log 16)=\log 16$, $f(\log 8)=\log 4$

즉, $g(\log 16)=\log 16$

이때 $f(\log 16)=\log 8$ 또는 $f(\log 16)=\log 2$이므로

$f(\log 16)+g(\log 16)$의 값은

$\log 8+\log 16=\log 128=7\log 2$

또는 $\log 2+\log 16=\log 32=5\log 2$

(i), (ii)에 의하여 $f(\log 16)+g(\log 16)$의 최댓값은

$7\log 2$

답 ⑤

8 다항식 x^3+x^2-x+1을 다항식 $x-2^n$으로 나누었을 때의 나머지는

$$f(n)=(2^n)^3+(2^n)^2-2^n+1$$
$$=2^{3n}+2^{2n}-2^n+1$$

이다.

$f\left(\frac{1}{2}\right)=2^{\frac{3}{2}}+2-2^{\frac{1}{2}}+1=3+\sqrt{2}$이고

$f(2)=2^6+2^4-2^2+1=77$이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)+f(2)=80+\sqrt{2}$

따라서 $a=80$

답 ②

Level 3 실력 완성 본문 18쪽

1 ① **2** ③ **3** ③

1 실수 a와 자연수 n에 따른 $f_n(a^{n+1})$, $f_{n+1}(a)$, $f_n(f_{n+1}(a))$의 값은 다음과 같다.

(i) $a>0$일 때

㉠ n이 홀수이면

$n+1$은 짝수이고 $a>0$, $a^{n+1}>0$이므로

$f_n(a^{n+1})=1$, $f_{n+1}(a)=2$, $f_n(f_{n+1}(a))=1$

따라서 $f_n(a^{n+1})+f_n(f_{n+1}(a))=2$

㉡ n이 짝수이면

$n+1$은 홀수이고 $a>0$, $a^{n+1}>0$이므로

$f_n(a^{n+1})=2$, $f_{n+1}(a)=1$, $f_n(f_{n+1}(a))=2$

따라서 $f_n(a^{n+1})+f_n(f_{n+1}(a))=4$

(ii) $a=0$일 때

㉠ n이 홀수이면

$n+1$은 짝수이고 $a=a^{n+1}=0$이므로

$f_n(a^{n+1})=1$, $f_{n+1}(a)=1$, $f_n(f_{n+1}(a))=1$

따라서 $f_n(a^{n+1})+f_n(f_{n+1}(a))=2$

㉡ n이 짝수이면

$n+1$은 홀수이고 $a=a^{n+1}=0$이므로

$f_n(a^{n+1})=1$, $f_{n+1}(a)=1$, $f_n(f_{n+1}(a))=2$

따라서 $f_n(a^{n+1})+f_n(f_{n+1}(a))=3$

(iii) $a<0$일 때

㉠ n이 홀수이면

$n+1$은 짝수이고 $a<0$, $a^{n+1}>0$이므로

$f_n(a^{n+1})=1$, $f_{n+1}(a)=0$, $f_n(f_{n+1}(a))=1$

따라서 $f_n(a^{n+1})+f_n(f_{n+1}(a))=2$

㉡ n이 짝수이면

$n+1$은 홀수이고 $a<0$, $a^{n+1}<0$이므로

$f_n(a^{n+1})=0$, $f_{n+1}(a)=1$, $f_n(f_{n+1}(a))=2$

따라서 $f_n(a^{n+1})+f_n(f_{n+1}(a))=2$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $a>0$, n이 짝수일 때 $f_n(a^{n+1})+f_n(f_{n+1}(a))$는 최댓값 4를 갖는다.

이때 $n+1$은 홀수, $n+2$는 짝수이고, $-a<0$, $|a|-a=0$이므로

$f_n(-a)+f_{n+1}(a)+f_{n+2}(|a|-a)=0+1+1=2$

답 ①

2 조건 (나)에서 a는 b의 네제곱근 중 하나이므로 $a^4=b$

(i) $a>0$이면

$$\sqrt[2n]{a^{2n}}+\sqrt[2n-1]{(-a)^{2n-1}}$$
$$=\sqrt[2n]{a^{2n}}-\sqrt[2n-1]{a^{2n-1}}$$
$$=a-a=0$$

(ii) $a<0$이면

$a^{2n}=(-a)^{2n}$, $(-a)^{2n-1}>0$이므로

$$\sqrt[2n]{a^{2n}}+\sqrt[2n-1]{(-a)^{2n-1}}$$
$$=\sqrt[2n]{(-a)^{2n}}+\sqrt[2n-1]{(-a)^{2n-1}}$$
$$=-a-a$$
$$=-2a\neq 0$$

(iii) $a=1$이면 $b>2$이므로 $a^4=1^4\neq b$로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $0<a<1$ 또는 $a>1$이다.

이때 $0<a<1$이면 $a^4<1$이고 $b>a+1>1$이므로 $a^4\neq b$로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 $a>1$, $b>2$

$\log_2\left(\frac{b}{a}\right)^2=k$ (k는 5 이하의 정수)라 하면 $\frac{b}{a}>0$이므로

$$\log_2\left(\frac{b}{a}\right)^2=2\log_2\frac{b}{a}$$
$$=2\log_2\frac{a^4}{a}$$
$$=2\log_2 a^3$$
$$=6\log_2 a=k$$

$\log_2 a=\frac{k}{6}$

즉, $a=2^{\frac{k}{6}}$이므로

(i) $1\le k\le 5$일 때

a의 값은 차례대로 $2^{\frac{1}{6}}$, $2^{\frac{2}{6}}$, $2^{\frac{3}{6}}$, $2^{\frac{4}{6}}$, $2^{\frac{5}{6}}$이고 모두 1보다 크다.

하지만 $(2^{\frac{1}{6}})^4=2^{\frac{2}{3}}<2$이므로 $a\ne 2^{\frac{1}{6}}$

(ii) $k=0$일 때

$a=2^0=1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $k<0$일 때

$a=\left(\frac{1}{2^{-k}}\right)^{\frac{1}{6}}$에서 $a<1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $\log_2\left(\frac{b}{a}\right)^2$의 값이 5 이하의 정수가 되도록 하는 모든 실수 a는

$2^{\frac{2}{6}}$, $2^{\frac{3}{6}}$, $2^{\frac{4}{6}}$, $2^{\frac{5}{6}}$이고, 그 곱은

$2^{\frac{2}{6}}\times 2^{\frac{3}{6}}\times 2^{\frac{4}{6}}\times 2^{\frac{5}{6}}=2^{\frac{14}{6}}=2^{\frac{7}{3}}$

답 ③

3 원점과 직선 $y=rx+b$ $(b>0)$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\frac{b}{\sqrt{1+r^2}}$이다.

ㄱ. $n=0$이면 원의 반지름의 길이가 d보다 작아야 하므로

$\log r<\frac{b}{\sqrt{1+r^2}}$ (참)

ㄴ. $n=1$이고 $r=10$이면

$\log 10=\frac{b}{\sqrt{1+10^2}}$이므로

$1=\frac{b}{\sqrt{101}}$

따라서 $b=\sqrt{101}>10$ (참)

ㄷ. 직선 $y=rx+b$의 x절편과 y절편은 각각 $-\frac{b}{r}$, b이므로 직선 $y=rx+b$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{b}{r}\times b=\frac{b^2}{2r}=5$

$b^2=10r$

b는 자연수이므로 2와 5를 소인수로 갖는다.

$b=10k$ (k는 자연수)라 하면

$b^2=10r$에서

$100k^2=10r$, $r=10k^2$

이때 $n=1$이므로 $\log r=\frac{b}{\sqrt{1+r^2}}$를 만족시키는 정수 b와 r이 존재한다고 가정하면

$(\log r)^2(1+r^2)=b^2$을 만족시켜야 하므로

$(\log 10k^2)^2(1+100k^4)=100k^2$인 자연수 k가 존재한다.

하지만 $\log 10k^2=1+\log k^2\ge 1$, $1+100k^4>100k^2$이므로 위 등식은 성립하지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

02 지수함수와 로그함수

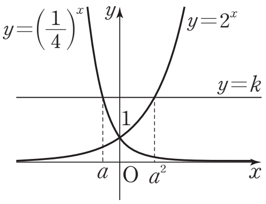
유제 본문 20~28쪽

1 ③	**2** ②	**3** ④	**4** ①	**5** ①	**6** ②
7 ①	**8** ④	**9** ②	**10** ⑤		

1 $a\neq0$이므로 $k>0$, $k\neq1$이다.

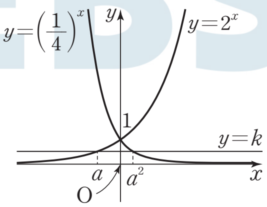
따라서 두 함수 $y=2^x$, $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$의 그래프와 직선 $y=k$는 제1, 2사분면의 서로 다른 점에서 만난다.

또한 $a^2>0$이므로 $a<0$이고 직선 $y=k$와 두 함수 $y=2^x$, $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$의 그래프는 그림과 같다.



또는

[$k>1$일 때]



[$0<k<1$일 때]

(i) $k>1$일 때

$2^{a^2}=\left(\frac{1}{4}\right)^a=2^{-2a}$에서

$a^2=-2a$

$a=-2$, $a^2=4$

따라서 $k=2^4=16$

(ii) $0<k<1$일 때

$2^a=\left(\frac{1}{4}\right)^{a^2}=2^{-2a^2}$에서

$a=-2a^2$, $a=-\frac{1}{2}$

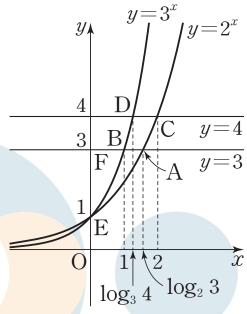
따라서 $k=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(i), (ii)에 의하여 모든 k의 값의 곱은

$16\times\frac{\sqrt{2}}{2}=8\sqrt{2}$

답 ③

2 $2^x=3$에서 $x=\log_2 3$, $3^x=3$에서 $x=1$,
$2^x=4$에서 $x=2$, $3^x=4$에서 $x=\log_3 4$



(삼각형 ABE의 넓이)

$=(\log_2 3-1)\times2\times\frac{1}{2}$

$=\log_2 3-1$

$=\log_2 \frac{3}{2}$

(삼각형 CDF의 넓이)

$=(2-\log_3 4)\times1\times\frac{1}{2}$

$=(\log_3 9-\log_3 4)\times1\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}\log_3 \frac{9}{4}$

$=\frac{1}{2}\times2\log_3 \frac{3}{2}$

$=\log_3 \frac{3}{2}$

삼각형 ABE의 넓이는 삼각형 CDF의 넓이의 k배이므로

$k=\dfrac{\log_2 \frac{3}{2}}{\log_3 \frac{3}{2}}=\dfrac{\log_{\frac{3}{2}} 3}{\log_{\frac{3}{2}} 2}=\log_2 3$

답 ②

3 함수 $y=2^{x+1}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은 $y=2^{x-p+1}$이다.

함수 $y=2^{-x+p}$의 그래프와 함수 $y=2^{x-p+1}$의 그래프는 y축에 대하여 서로 대칭이므로 $2^{-p+1}=2^p$이다.

따라서 $-p+1=p$에서

$p=\frac{1}{2}$

답 ④

4 2^x의 밑은 2이고 $2>1$, 3^{-x}의 밑은 $3^{-1}=\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 함수 $y=f(x)$는 $x=2$에서 최댓값을 갖고 함수 $y=g(x)$는 $x=-1$에서 최댓값을 갖는다.

$$\begin{aligned} f(2)+g(-1)&=2^2+a+3^1+b \\ &=4+3+a+b \\ &=7+a+b=10 \end{aligned}$$

따라서 $a+b=3$

답 ①

5 $a=2^x$에서 $x=\log_2 a$이므로 점 P와 점 Q의 좌표는 $\mathrm{P}(a,\ \log_4 a)$, $\mathrm{Q}(\log_2 a,\ a)$이다.

$\overline{\mathrm{AP}}=a-\log_4 a$이고 $\overline{\mathrm{AQ}}=a-\log_2 a$이므로

$$\begin{aligned} |\overline{\mathrm{AQ}}-\overline{\mathrm{AP}}|&=|a-\log_2 a-a+\log_4 a| \\ &=|-\log_2 a+\log_4 a| \\ &=\left|-\log_2 a+\frac{1}{2}\log_2 a\right| \\ &=\left|-\frac{1}{2}\log_2 a\right| \\ &=\frac{1}{2}\log_2 a\ (a>1) \end{aligned}$$

a가 정수이면서 $|\overline{\mathrm{AQ}}-\overline{\mathrm{AP}}|$의 값, 즉 $\frac{1}{2}\log_2 a$가 자연수이려면 $a=2^{2k}$ (k는 자연수)이어야 한다.

따라서 정수 a의 최솟값은 $k=1$일 때 $2^2=4$이다.

이때 $\mathrm{A}(4,\ 4)$, $\mathrm{P}(4,\ 1)$, $\mathrm{Q}(2,\ 4)$에 대하여 삼각형 AQP의 넓이는

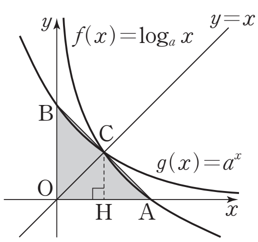
$\frac{1}{2}\times2\times3=3$

답 ①

6 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 1)$이다.

점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{\mathrm{CH}}=k$라 하면 사각형 OACB의 넓이는 삼각형 COA의 넓이의 2배이므로

$\frac{1}{2}\times1\times k\times2=\frac{2}{3}$, 즉 $k=\frac{2}{3}$



$\mathrm{C}\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$이므로

$f\left(\frac{2}{3}\right)=\log_a\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

따라서

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)&=\log_a\sqrt{\frac{2}{3}} \\ &=\frac{1}{2}\log_a\frac{2}{3} \\ &=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \end{aligned}$$

답 ②

7 함수 $y=3^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프는 함수 $y=-3^{-x}$의 그래프이다. 이를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프는 함수 $y=-\log_3(-x)$의 그래프이고, 이를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프는 함수 $y=-\log_3\{-(x-m)\}$의 그래프이다.

이 그래프가 점 $(-6,\ -1)$을 지나므로

$-1=-\log_3(6+m)$에서 $6+m=3$

따라서 $m=-3$

답 ①

다른 풀이

점 $(-6,\ -1)$을 x축의 방향으로 $-m$만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(-6-m,\ -1)$이고, 이를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-1,\ -6-m)$이다. 이를 다시 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(1,\ 6+m)$이고, 이 점이 함수 $y=3^x$의 그래프 위의 점이므로

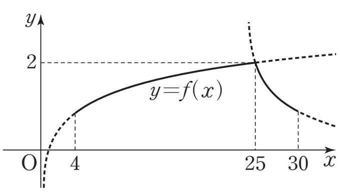
$6+m=3^1$

따라서 $m=-3$

8 함수 $y=-\log_5(x-24)+2$의 그래프는 함수 $y=\log_5 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 24만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$\log_5 25=2$, $-\log_5(25-24)+2=2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고,

함수 $y=f(x)$는 $x=25$에서 최댓값 2를 갖는다.



또한 $f(4)=\log_5 4$이고,

$$f(30)=-\log_5(30-24)+2$$
$$=-\log_5 6+2$$
$$=\log_5\frac{25}{6}$$

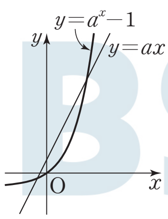
이므로 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최솟값 $\log_5 4$를 갖는다.

따라서 $M=2$, $m=\log_5 4$이므로

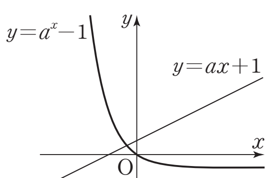
$$M+m=2+\log_5 4$$
$$=\log_5 25+\log_5 4$$
$$=\log_5 100$$
$$=2\log_5 10$$

답 ④

9 $a>1$일 때와 $0<a<1$일 때의 곡선 $y=a^x-1$과 직선 $y=ax+1$은 그림과 같다.



[$a>1$일 때]



[$0<a<1$일 때]

곡선 $y=a^x-1$과 직선 $y=ax+1$이 오직 한 점에서 만나므로 $0<a<1$

$a^{x^2-3x+2}\ge a^{2x-2}$에서 $0<a<1$이므로

$x^2-3x+2\le 2x-2$이고

$x^2-5x+4\le 0$이므로

$(x-1)(x-4)\le 0$, $1\le x\le 4$

$1\le x\le 4$를 만족시키는 정수 x는 1, 2, 3, 4이므로

부등식 $a^{x^2-3x+2}\ge a^{2x-2}$을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합은

$1+2+3+4=10$

답 ②

10 부등식 $x^2-5x+6>0$에서

$(x-2)(x-3)>0$

따라서 $x<2$ 또는 $x>3$ ⋯⋯ ㉠

로그의 진수 조건에 의하여 $x>0$이고

$\log x^2+x\log x-2x<4$에서

$2\log x+x\log x-2x-4<0$이므로

$(x+2)\log x-2(x+2)<0$

$(x+2)(\log x-2)<0$

$x>0$이므로 $\log x-2<0$, 즉 $\log x<2$

따라서 $0<x<100$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $0<x<2$ 또는 $3<x<100$이므로

조건을 만족시키는 정수 x는 1, 4, 5, 6, ⋯, 99이다.

따라서 구하는 정수 x의 개수는 97이다.

답 ⑤

Level 1 기초 연습 (본문 29~30쪽)

1 ④	**2** ④	**3** ②	**4** ①	**5** ②	**6** ③
7 ③	**8** ③				

1 곡선 $y=a\times 2^{x-1}+a$가 점 $(3, 10)$을 지나므로

$10=a\times 2^{3-1}+a$

$5a=10$

$a=2$

따라서 곡선 $y=2^x+2$의 점근선의 방정식은 $y=2$

답 ④

2 $y=2^{-x+2}-1$

$$=2^2\times 2^{-x}-1$$
$$=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$$

에서 밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 함수 $y=2^{-x+2}-1$은

$x=-1$에서 최댓값 $2^3-1=7$을 갖고,

$x=2$에서 최솟값 $2^0-1=0$을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$7+0=7$

답 ④

3 $3^x=t\ (t>0)$이라 하면

$3^x+3^{-x}=\frac{10}{3}$에서

$t+\frac{1}{t}=\frac{10}{3}$

$3t^2-10t+3=0$

$(3t-1)(t-3)=0$

따라서 $t=\frac{1}{3}$ 또는 $t=3$

$t=3^x=\frac{1}{3}$에서 $x=-1$,

$t=3^x=3$에서 $x=1$이므로

모든 실근의 합은

$-1+1=0$

답 ②

4 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}<16<\left(\frac{1}{4}\right)^{2x}$에서

$2^{-x-1}<2^4<2^{-4x}$

지수의 밑은 2이고 $2>1$이므로

$-x-1<4<-4x$

(ⅰ) $-x-1<4$에서 $x>-5$

(ⅱ) $-4x>4$에서 $x<-1$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$-5<x<-1$

따라서 정수 x는 -4, -3, -2이고 그 합은

$-4+(-3)+(-2)=-9$

답 ①

5 함수 $y=\log_3(x+a)+1$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프이므로 함수 $y=\log_3(x+a)+1$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-a$이다.

직선 $x=k$와 함수 $y=\log_3(x+a)+1$의 그래프가 만나지 않도록 하는 자연수 k의 개수가 5이므로

$k=1, 2, 3, 4, 5$이다.

따라서 $5\le -a<6$

즉, $-6<a\le -5$이므로 정수 a의 값은 -5이다.

답 ②

6 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(2x^2-8x+a)$의 밑이 $\frac{1}{3}$이고 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(2x^2-8x+a)$는 진수 $2x^2-8x+a$의 값이 최소일 때 최댓값을 갖는다.

$2x^2-8x+a=2(x-2)^2-8+a$이므로 진수 $2x^2-8x+a$는 $x=2$일 때 최솟값 $-8+a$를 갖는다.

따라서 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(2x^2-8x+a)$는 $x=2$일 때 최댓값 $\log_{\frac{1}{3}}(-8+a)$를 갖는다.

이때 $\log_{\frac{1}{3}}(-8+a)=2$이므로

$-8+a=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

따라서 $a=\frac{1}{9}+8=\frac{73}{9}$

답 ③

7 로그의 진수 조건에 의하여

$x>0$, $(x-2)^2>0$

따라서 $0<x<2$ 또는 $x>2$ …… ㉠

$\log_2 x+\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2=3$에서

$\log_2 x-\log_2(x-2)^2=3$

$\log_2 x=\log_2(x-2)^2+3$

$\log_2 x=\log_2 8(x-2)^2$

$x=8(x-2)^2$

$8x^2-33x+32=0$

$x=\frac{33\pm\sqrt{33^2-32^2}}{16}$이므로

$x=\frac{33+\sqrt{65}}{16}$ 또는 $x=\frac{33-\sqrt{65}}{16}$

위의 값은 모두 ㉠을 만족시키므로

$\frac{33+\sqrt{65}}{16}+\frac{33-\sqrt{65}}{16}=\frac{66}{16}=\frac{33}{8}$

답 ③

8 로그의 진수 조건에 의하여

$3x+1>0$, $x+2>0$

따라서 $x>-\frac{1}{3}$ …… ㉠

$\log_2(3x+1)+\log_2(x+2)<3$에서

$\log_2(3x+1)(x+2)<\log_2 8$

즉, $(3x+1)(x+2)<8$이므로

$3x^2+7x+2-8<0$

$3x^2+7x-6<0$

$(x+3)(3x-2)<0$

따라서 $-3<x<\frac{2}{3}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $-\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}$이므로

$\alpha=-\frac{1}{3}$, $\beta=\frac{2}{3}$

따라서 $\beta-\alpha=\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)=1$

답 ③

Level 2 기본 연습 본문 31~32쪽

1 ⑤	2 ①	3 14	4 ③	5 313	6 ④
7 ④	8 ③				

1 곡선 $y=2^x-\frac{1}{2}$이 x축과 만나는 점 A의 y좌표는 0이므로

$0=2^x-\frac{1}{2}$, $2^x=\frac{1}{2}=2^{-1}$, $x=-1$

따라서 $\mathrm{A}(-1, 0)$

또한 $2^x-\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$에서

$2^x-\frac{1}{2^x}-\frac{1}{2}=0$

$2^x=X$라 하면 $X>0$이고

$X-\frac{1}{X}-\frac{1}{2}=0$에서

$2X^2-X-2=0$

$X>0$이므로 $X=\frac{1+\sqrt{17}}{4}$

즉, $2^x=\frac{1+\sqrt{17}}{4}$이므로

점 B의 y좌표는 $2^x-\frac{1}{2}=\frac{1+\sqrt{17}}{4}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{17}-1}{4}$이다.

점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{BH}}=\frac{\sqrt{17}-1}{4}$

이므로 삼각형 AOB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{BH}}=\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{17}-1}{4}$

$=\frac{\sqrt{17}-1}{8}$

답 ⑤

2 조건 (가), (다)에서

$\{g(x)\}^3-\{f(x)\}^3$

$=\{g(x)-f(x)\}^3+3f(x)g(x)\{g(x)-f(x)\}$

$=2^3+6f(x)g(x)=6x^2-24x+26$

$f(x)g(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$의 계수가 모두 정수이고

$f(x)-g(x)=-2$

$\frac{f(k)+g(k)-f(0)-g(0)}{k}=2$이므로

직선 $y=f(x)+g(x)$의 기울기는 2이다.

따라서 $f(x)=x-3$, $g(x)=x-1$

곡선 $y=\log_2(x-3)+1$이 x축과 만나는 점 A의 y좌표는 0이므로

$0=\log_2(x-3)+1$

$x-3=\frac{1}{2}$, $x=\frac{7}{2}$

따라서 $\mathrm{A}\left(\frac{7}{2}, 0\right)$

곡선 $y=\log_2(x-1)$이 x축과 만나는 점 B의 y좌표는 0이므로

$0=\log_2(x-1)$

$x-1=1$, $x=2$

따라서 $\mathrm{B}(2, 0)$

$\log_2(x-3)+1=\log_2(x-1)$에서

$\log_2(x-3)+\log_2 2=\log_2(x-1)$

$\log_2 2(x-3)=\log_2(x-1)$

즉, $2x-6=x-1$이므로

$x=5$

$y=\log_2(5-1)=2$

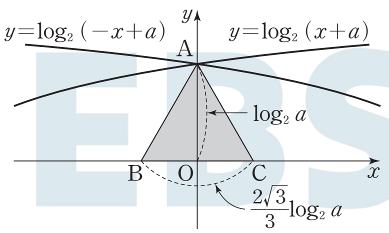
따라서 $\mathrm{C}(5, 2)$

$\mathrm{A}\left(\frac{7}{2}, 0\right)$, $\mathrm{B}(2, 0)$, $\mathrm{C}(5, 2)$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{7}{2}-2\right)\times2=\frac{3}{2}$

답 ①

3 방정식 $\log_2(x+a)=\log_2(-x+a)$에서
$x+a=-x+a$이므로 $x=0$
또한 $\log_2(0+a)=\log_2 a$이므로 $A(0, \log_2 a)$이다.
원점을 O라 하면 삼각형 ABC가 정삼각형이므로
$\overline{BC}=\frac{2}{\sqrt{3}}\overline{AO}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\log_2 a$



$1<\overline{BC}<\frac{8\sqrt{3}}{3}$이어야 하므로

$1<\frac{2\sqrt{3}}{3}\log_2 a<\frac{8\sqrt{3}}{3}$에서

$\frac{\sqrt{3}}{2}<\log_2 a<4$

또한 $0<\frac{\sqrt{3}}{2}<1$이고

$\log_2 1=0$, $\log_2 2=1$, $\log_2 16=\log_2 2^4=4$이므로 조건을 만족시키는 자연수 a는 2, 3, 4, $\cdots$, 14, 15이고 그 개수는 14이다.

답 14

4 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$이므로 $\overline{HI}=k\ (k>0)$이라 하면
$\overline{IC}=2k$, $\overline{BI}=2k$이고 $\overline{HC}=3k$이므로
$\overline{AH}=3k$이다.
따라서 $\overline{OH}=11-3k$

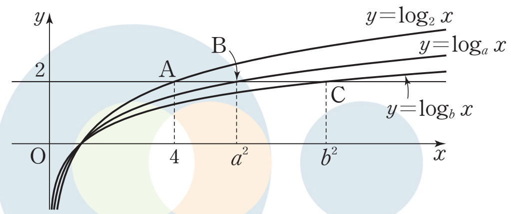
$S=\frac{1}{2}\times(11-3k)\times3k$,

$T=\frac{1}{2}\times2k\times2k$이므로

$S:T=6:1$에서
$(-9k^2+33k):4k^2=6:1$
$24k^2=-9k^2+33k$
$33k(k-1)=0$
따라서 $k=1$
즉, $\overline{OI}=9$, $\overline{IB}=2$이므로
$\log_a 9=2$, $a^2=9$
이때 $a>2$이므로 $a=3$

답 ③

5 $2=\log_2 x$에서 $x=4$이므로 $A(4, 2)$이고
$2=\log_a x$에서 $x=a^2$, $2=\log_b x$에서 $x=b^2$이므로
점 B와 점 C의 x좌표는 각각 a^2, b^2이다.
그러므로 직선 $y=2$와 세 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_a x$, $y=\log_b x$의 그래프는 그림과 같다.



$a:b=3:4$이므로 $a=3k$, $b=4k\ (k>0)$이라 하면
$a^2=9k^2$, $b^2=16k^2$이므로
$\overline{AB}:\overline{BC}=2:3$에서
$(9k^2-4):7k^2=2:3$
즉, $14k^2=27k^2-12$이므로

$13k^2=12$, $k^2=\frac{12}{13}$

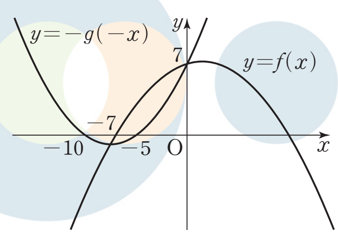
$a^2+b^2=9k^2+16k^2=25k^2=\frac{300}{13}$

따라서 $p=13$, $q=300$이므로
$p+q=313$

답 313

6 $\log_2\left\{-\frac{1}{g(-x)}\right\}=-\log_{\frac{1}{2}}\left\{-\frac{1}{g(-x)}\right\}$
$=\log_{\frac{1}{2}}\left\{-\frac{1}{g(-x)}\right\}^{-1}$
$=\log_{\frac{1}{2}}\{-g(-x)\}$

이고, 함수 $y=-g(-x)$의 그래프는 함수 $y=g(x)$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프이므로
두 함수 $y=f(x)$, $y=-g(-x)$의 그래프는 그림과 같다.



부등식 $\log_{\frac{1}{2}} f(x)\le\log_{\frac{1}{2}}\{-g(-x)\}$에서 밑은 $\frac{1}{2}$이고

$0<\frac{1}{2}<1$이므로

$f(x)\ge-g(-x)$ $\cdots\cdots$ ㉠
또한 진수 조건에 의하여

$f(x)>0$, $-g(-x)>0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-5<x\le 0$이므로 조건을 만족시키는 정수 x는 -4, -3, -2, -1, 0이고 그 개수는 5이다.

답 ④

7 ㄱ. $\log b=-2^{-b}+1<1=\log 10$이므로 $b<10$ (거짓)

ㄴ. $-2^{-b}+1=\log b$에서

$-2^{-b}=\log b-1$

$2^{-b}=1-\log b$

또한 $2^{-a}=\log a$이므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{a+b}=2^{-a-b}$$
$$=2^{-a}\times 2^{-b}$$
$$=(\log a)(1-\log b)\ (참)$$

ㄷ. 직선 OQ의 기울기는 $\dfrac{-2^{-a}+1}{a}$이고,

직선 OR의 기울기는 $\dfrac{\log b}{b}$이므로

$\dfrac{-2^{-a}+1}{a}>\dfrac{\log b}{b}$이다.

즉, $\dfrac{b}{a}>\dfrac{\log b}{-2^{-a}+1}$에서 $2^{-a}=\log a$이므로

$\dfrac{b}{a}>\dfrac{\log b}{1-\log a}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

8 $\log_2(ax+1)=-2$에서

$ax+1=2^{-2}$이므로 $x=-\dfrac{3}{4a}$

즉, $\mathrm{A}\left(-\dfrac{3}{4a},\ -2\right)$

$\log_2(ax+1)=4$에서

$ax+1=2^4$이므로 $x=\dfrac{15}{a}$

즉, $\mathrm{B}\left(\dfrac{15}{a},\ 4\right)$

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 I라 하면

두 삼각형 PHA, PIB는 서로 닮음이고 닮음비는

$\overline{\mathrm{HA}}:\overline{\mathrm{IB}}=1:2$이다.

그러므로 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PB}}=1:2$이고 점 P는 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이다.

따라서 점 P의 x좌표는

$$\frac{1\times\dfrac{15}{a}+2\times\left(-\dfrac{3}{4a}\right)}{1+2}=\frac{\dfrac{30-3}{2a}}{3}=\frac{27}{6a}=\frac{9}{2a}$$

삼각형 OPB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{9}{2a}\times 4=\dfrac{9}{a}=3$

이므로

$a=3$

답 ③

Level 3 실력 완성		본문 33쪽
1 ④	**2** ③	**3** ①

1 $\mathrm{A}(t,\ t)$이므로 $\overline{\mathrm{CD}}=\log_2 t$이다.

선분 AB의 연장선 위에 $\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{BF}}$가 되도록 점 F를 잡고

$\angle\mathrm{EOB}=\theta_1$, $\angle\mathrm{COD}=\theta_2$라 하면

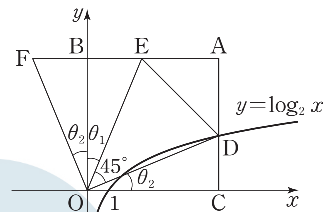
$\angle\mathrm{BOF}=\theta_2$이고 $\theta_1+\theta_2=45°$이다.

따라서 $\angle\mathrm{EOF}=\angle\mathrm{DOE}=45°$

또한 $\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{BF}}$이므로 $\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{OF}}$이고 두 삼각형 FOE, DOE에서 선분 OE는 공통이므로

두 삼각형 FOE, DOE는 합동이다.

따라서 $\overline{\mathrm{ED}}=\overline{\mathrm{EF}}=\overline{\mathrm{BE}}+\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BE}}+\overline{\mathrm{CD}}$



$$f(t)=\overline{\mathrm{AE}}+\overline{\mathrm{ED}}$$
$$=\overline{\mathrm{AE}}+\overline{\mathrm{BE}}+\overline{\mathrm{CD}}$$
$$=\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{CD}}$$
$$=t+\log_2 t$$

따라서 $f(k)-k=\log_2 k=2$이므로 양수 k의 값은 4이다.

답 ④

2 점 B와 점 C의 좌표는 각각

$\mathrm{B}(a,\ \log_2 a)$, $\mathrm{C}(a,\ -\log_2 a)$이다.

직선 $x=a$와 x축이 만나는 점을 K라 하면

$\overline{\mathrm{KA}}=a-1$, $\overline{\mathrm{BK}}=\overline{\mathrm{CK}}=\log_2 a$이다.

삼각형 ACB가 정삼각형이므로

$a-1=\sqrt{3}\log_2 a$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{a-1}\log_2 a$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\log_2 a^{\frac{1}{a-1}}$

즉, $2^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=a^{\frac{1}{a-1}}$이므로 점 D와 점 E의 x좌표는 $2^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$이다.

또한 $\log_2 2^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$\overline{\mathrm{ED}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서 사각형 HIED의 넓이는

$2^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=2^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

답 ③

3 $\overline{\mathrm{BC}}=k\ (k>0)$이라 하면 두 삼각형 ABC, BCD는 서로 닮음이므로

$\sqrt{3} : k=k : 4\sqrt{3}$ 에서

$k^2=12$, $k=2\sqrt{3}$

즉, $\angle\mathrm{CBA}=60^\circ$

E$(1,\ 0)$이라 하면 두 삼각형 ABC, BEC도 서로 닮음이므로 $\angle\mathrm{DEC}=60^\circ$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{EB}}=2$이므로

C$(3,\ 2\sqrt{3})$

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3}$이므로

$\overline{\mathrm{AE}}=1$, $\overline{\mathrm{EH}}=\dfrac{1}{2}$

따라서 A$\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

함수 $y=\log_a(x+1)$의 그래프가 점 A를 지나므로

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\log_a\dfrac{5}{2}$에서

$a^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{5}{2}$, $a=\left(\dfrac{5}{2}\right)^{\frac{2}{\sqrt{3}}}$

함수 $y=\log_a(x+1-m)+n$의 그래프가 점 A$\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$을 지나므로

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\log_a\left(\dfrac{5}{2}-m\right)+n$ …… ㉠

함수 $y=\log_a(x+1-m)+n$의 그래프가 점 C$(3,\ 2\sqrt{3})$을 지나므로

$2\sqrt{3}=\log_a(4-m)+n$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\log_a(4-m)-\log_a\left(\dfrac{5}{2}-m\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$\log_a\left(\dfrac{4-m}{\frac{5}{2}-m}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

이때 $a=\left(\dfrac{5}{2}\right)^{\frac{2}{\sqrt{3}}}$이므로

$\log_{\frac{5}{2}}\left(\dfrac{4-m}{\frac{5}{2}-m}\right)=3$

$\dfrac{125}{8}=\dfrac{4-m}{\frac{5}{2}-m}$

$\dfrac{625}{2}-125m=32-8m$

따라서 $m=\dfrac{187}{78}$

답 ①

03 삼각함수

유제					본문 35~43쪽
1 2	**2** ④	**3** ①	**4** ④	**5** ⑤	**6** ③
7 ③	**8** ①	**9** ④	**10** ⑤		

1 부채꼴 OAB의 호 AB의 길이를 l이라 하자.

부채꼴 OAB의 둘레의 길이는 $2r+l$이므로

$2r+l=6r$에서

$l=4r$

부채꼴 OAB의 넓이가 8이므로

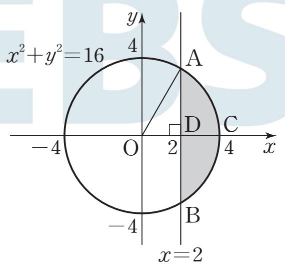
$\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r\times 4r=2r^2=8$

$r^2=4$

$r>0$이므로 $r=2$

답 2

2



그림과 같이 직선 $x=2$와 x축이 만나는 점을 D라 하면

D$(2, 0)$

원점 O에 대하여 직각삼각형 OAD에서

$\overline{OA}=4$, $\overline{OD}=2$이므로

$\overline{AD}=2\sqrt{3}$

$\angle AOD=\angle AOC=\frac{\pi}{3}$

부채꼴 AOC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 4^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{8}{3}\pi$

또한 삼각형 AOD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{OD}\times\overline{AD}=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

따라서 점 C를 포함하는 호 AB와 선분 AB로 둘러싸인 부분의 넓이는

$2\left(\frac{8}{3}\pi-2\sqrt{3}\right)=\frac{16}{3}\pi-4\sqrt{3}$

답 ④

3 $\frac{1}{1-\cos\theta}-\frac{1}{1+\cos\theta}=-\frac{4}{3}$에서

$\frac{1}{1-\cos\theta}-\frac{1}{1+\cos\theta}$

$=\frac{(1+\cos\theta)-(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$

$=\frac{2\cos\theta}{1-\cos^2\theta}=-\frac{4}{3}$

$2\cos^2\theta-3\cos\theta-2=0$

$(2\cos\theta+1)(\cos\theta-2)=0$

$\cos\theta\neq 2$이므로 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$

이때 $\tan\theta>0$이고 $\cos\theta<0$이므로 θ는 제3사분면의 각이다.

따라서

$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=-\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 ①

4 $3\sin\theta+\cos\theta=-1$의 양변을 제곱하면

$9\sin^2\theta+6\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1$

$9\sin^2\theta+6\sin\theta\cos\theta+(1-\sin^2\theta)=1$

$6\sin\theta\cos\theta+8\sin^2\theta=0$

$\sin\theta(3\cos\theta+4\sin\theta)=0$

$\sin\theta\neq 0$이므로

$3\cos\theta=-4\sin\theta$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{3}{4}$이고 θ가 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta=-3k$, $\cos\theta=4k$ $(k>0)$으로 놓을 수 있다.

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=9k^2+16k^2=25k^2=1$에서

$k^2=\frac{1}{25}$

$k>0$에서 $k=\frac{1}{5}$

따라서 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

답 ④

다른 풀이

$3\sin\theta+\cos\theta+1=0$에서

$\cos\theta+1=-3\sin\theta$

양변을 제곱하면

$\cos^2\theta+2\cos\theta+1=9\sin^2\theta$

$\cos^2\theta+2\cos\theta+1=9(1-\cos^2\theta)$

$5\cos^2\theta+\cos\theta-4=0$

$(5\cos\theta-4)(\cos\theta+1)=0$

θ가 제4사분면의 각이므로

$\cos\theta=\frac{4}{5}$

이때 $\cos\theta+1=-3\sin\theta=\frac{9}{5}$이므로

$\sin\theta=-\frac{3}{5}$

따라서 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

즉, $\alpha+\beta=\pi$

$\alpha+2\beta=\frac{13}{6}\pi$에서

$(\alpha+\beta)+\beta=\frac{13}{6}\pi$

$\beta=\frac{7}{6}\pi$, $\alpha=\pi-\beta=-\frac{\pi}{6}$

$2\alpha+\beta=2\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{7}{6}\pi=\frac{5}{6}\pi$

따라서 $\sin(2\alpha+\beta)=\sin\frac{5}{6}\pi=\frac{1}{2}$

답 ③

5 함수 $y=a\cos bx+2b$의 주기는 $\frac{2\pi}{|b|}$이므로

$\frac{2\pi}{|b|}=6\pi$

이때 $b>0$이므로 $b=\frac{1}{3}$

한편, 함수 $y=a\cos bx+2b\ (a>0)$의 최댓값은

$\cos bx=1$일 때 $a+2b$이므로

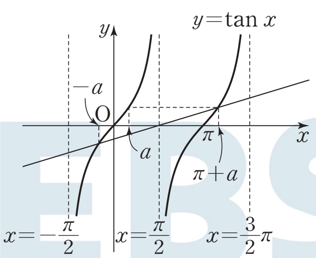
$a+2\times\frac{1}{3}=2$에서

$a=\frac{4}{3}$

따라서 $a+b=\frac{4}{3}+\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

답 ⑤

6 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프를 나타내면 그림과 같다.



함수 $y=\tan x$의 그래프의 주기는 π이고, 원점에 대하여 대칭이다.

또한 α, $\beta\ (\alpha<\beta)$는 기울기가 양수이고 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$을 지나는 직선과 함수 $y=\tan x$의 그래프가 만나는 두 점의 x좌표이므로 그림과 같이 양수 a에 대하여

$\alpha=-a$, $\beta=\pi+a$

로 놓을 수 있다.

7 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta=\frac{1}{3}$에서

$\sin\theta=-\frac{1}{3}$

$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta<0$에서 $\tan\theta>0$

이때 $\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$이므로 θ는 제3사분면의 각이다.

$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$=-\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}$

$=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

따라서 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

답 ③

8 $\sin(\pi+\theta)+\cos(2\pi-\theta)=\sqrt{2}$에서

$-\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$

즉, $\sin\theta-\cos\theta=-\sqrt{2}$

이때

$(-\sqrt{2})^2=(\sin\theta-\cos\theta)^2$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta$

이므로 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{2}$

따라서

$\sin^3\theta-\cos^3\theta$

$=(\sin\theta-\cos\theta)^3+3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)$

$=(-\sqrt{2})^3+3\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-\sqrt{2})$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 ①

9 $2\sin^2 x+2\sqrt{2}\cos x-3=0$에서

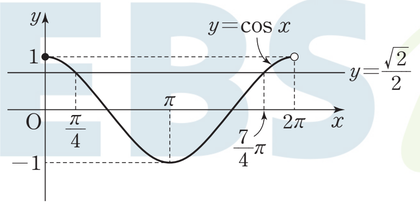
$2(1-\cos^2 x)+2\sqrt{2}\cos x-3=0$

$2\cos^2 x-2\sqrt{2}\cos x+1=0$

$(\sqrt{2}\cos x-1)^2=0$에서

$\sqrt{2}\cos x-1=0$

$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$



$0\le x<2\pi$에서 방정식 $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 x좌표이므로

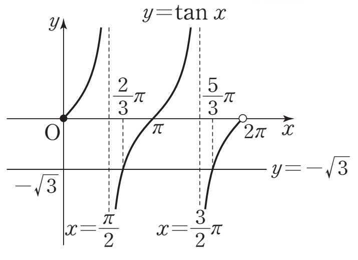
$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

따라서 구하는 모든 실근의 곱은

$\frac{\pi}{4}\times\frac{7}{4}\pi=\frac{7}{16}\pi^2$

답 ④

10



$\tan^2 x<3$에서

$(\tan x+\sqrt{3})(\tan x-\sqrt{3})<0$

$-\sqrt{3}<\tan x<\sqrt{3}$ …… ㉠

$\sin x\cos x<0$에서 x는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

즉, $\tan x<0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$-\sqrt{3}<\tan x<0$

이 부등식의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=-\sqrt{3}$과 x축 사이에 있는 x의 값의 범위이므로

$\frac{2}{3}\pi<x<\pi$ 또는 $\frac{5}{3}\pi<x<2\pi$

따라서 $a=\frac{2}{3}$, $b=1$, $c=\frac{5}{3}$이므로

$a+b+c=\frac{2}{3}+1+\frac{5}{3}=\frac{10}{3}$

답 ⑤

Level 1 기초 연습 본문 44~45쪽

1 ②	2 ①	3 ③	4 ④	5 ⑤	6 ③
7 ④	8 ⑤	9 ③	10 ②		

1 $315°=315\times1°=315\times\frac{\pi}{180}=\frac{7}{4}\pi$

$\frac{4}{9}\pi=\frac{4}{9}\pi\times1=\frac{4}{9}\pi\times\frac{180°}{\pi}=80°$

따라서 $a=\frac{7}{4}$, $b=80$이므로

$ab=\frac{7}{4}\times80=140$

답 ②

2 부채꼴의 반지름의 길이를 r이라 하면

부채꼴의 중심각의 크기가 $\frac{3}{4}\pi$이고 호의 길이가 3π이므로

$3\pi=r\times\frac{3}{4}\pi$

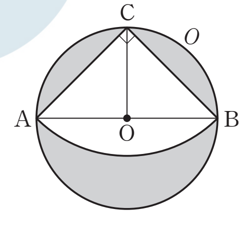
$r=3\pi\times\frac{4}{3\pi}=4$

따라서 구하는 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times3\pi=6\pi$

답 ①

3 선분 AB의 중점을 O라 하면 점 O는 원 O의 중심이다.



$\overline{AO}=\overline{CO}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}=2$

$\overline{AC}=\sqrt{2}\times\overline{AO}=2\sqrt{2}$

선분 AB는 원 O의 지름이므로

$\angle ACB=\frac{\pi}{2}$

따라서 원 O의 넓이는

$\pi\times 2^2=4\pi$

이고 부채꼴 CAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(2\sqrt{2})^2\times\frac{\pi}{2}=2\pi$

이므로 구하는 넓이는

$4\pi-2\pi=2\pi$

답 ③

4 $\sin\frac{3}{4}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$=-\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\frac{5}{4}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

$=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\frac{7}{4}\pi=\tan\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$

따라서

$\sin\frac{3}{4}\pi\times\cos\frac{5}{4}\pi\times\tan\frac{7}{4}\pi$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times(-1)$

$=\frac{1}{2}$

답 ④

5 방정식 $5x^2-ax-2=0$의 두 실근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{a}{5}$

$\sin\theta\times\cos\theta=-\frac{2}{5}$

$\left(\frac{a}{5}\right)^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+2\sin\theta\times\cos\theta$

$=1+2\times\left(-\frac{2}{5}\right)$

$=\frac{1}{5}$

$a^2=5$

$a>0$이므로

$a=\sqrt{5}$

답 ⑤

6 함수 $f(x)=a\sin(2bx)+b$의 최솟값이 -1이므로

$-|a|+b=-1$

이때 $a>0$이므로

$-a+b=-1$ …… ㉠

함수 $f(x)=a\sin(2bx)+b$의 주기가 2π이므로

$\frac{2\pi}{|2b|}=\frac{\pi}{|b|}=2\pi$

이때 $b>0$이므로 $b=\frac{1}{2}$

㉠에서 $a=b+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

따라서 함수 $f(x)=\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}$의 최댓값은

$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$

답 ③

7 함수 $y=\sin ax$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는

$y=\sin a\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+b$

즉, $f(x)=\sin a\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+b$

$a>0$이므로 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{a}$

$\frac{2\pi}{a}=4\pi$에서

$a=\frac{1}{2}$

$f(x)=\sin\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+b$

$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=2$에서

$\sin\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{3}\right)+b=2$

$b=2-\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}$

따라서 함수 $f(x)=\sin\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{3}{2}$이므로

$$\begin{aligned} f(0)&=\sin\frac{1}{2}\left(0-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{3}{2} \\ &=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{3}{2} \\ &=-\sin\frac{\pi}{6}+\frac{3}{2} \\ &=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2} \\ &=1 \end{aligned}$$

답 ④

8 $2\sin^2\frac{\pi}{5}-3\cos\frac{2}{5}\pi-3\cos\left(2\pi+\frac{3}{5}\pi\right)+2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4}{5}\pi\right)$

$$\begin{aligned} &=2\sin^2\frac{\pi}{5}-3\cos\frac{2}{5}\pi-3\cos\frac{3}{5}\pi+2\cos^2\frac{4}{5}\pi \\ &=2\sin^2\frac{\pi}{5}-3\cos\frac{2}{5}\pi-3\cos\left(\pi-\frac{2}{5}\pi\right)+2\cos^2\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right) \\ &=2\sin^2\frac{\pi}{5}-3\cos\frac{2}{5}\pi+3\cos\frac{2}{5}\pi+2\cos^2\frac{\pi}{5} \\ &=2\left(\sin^2\frac{\pi}{5}+\cos^2\frac{\pi}{5}\right) \\ &=2\times1=2 \end{aligned}$$

답 ⑤

9 $4\sin^2 x+4\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-1=0$에서

$4(1-\cos^2 x)+4\cos x-1=0$

$4\cos^2 x-4\cos x-3=0$

$(2\cos x-3)(2\cos x+1)=0$

$2\cos x-3<0$이므로

$2\cos x+1=0$

$\cos x=-\frac{1}{2}$

$0\le x<3\pi$이므로

$x=\frac{2}{3}\pi$, $x=\frac{4}{3}\pi$, $x=2\pi+\frac{2}{3}\pi$

따라서 모든 x의 값의 합은

$\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}\pi+\frac{8}{3}\pi=\frac{14}{3}\pi$

답 ③

10 $\sin^2 x-\cos^2 x+3\sin x-1>0$에서

$\sin^2 x-(1-\sin^2 x)+3\sin x-1>0$

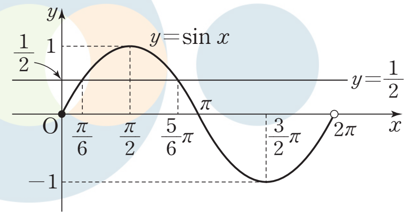
$2\sin^2 x+3\sin x-2>0$에서

$(2\sin x-1)(\sin x+2)>0$

이때 $\sin x+2>0$이므로

$2\sin x-1>0$

$\sin x>\frac{1}{2}$



$0\le x<2\pi$에서 부등식 $\sin x>\frac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$의 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$이므로

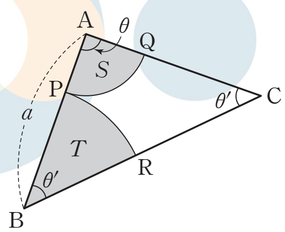
$\beta-\alpha=\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$

답 ②

Level 2 기본 연습 본문 46~48쪽

1 ⑤	2 ①	3 ③	4 ②	5 ④	6 ③
7 ②	8 ⑤	9 ④	10 ③	11 ③	12 ①

1



이등변삼각형 ABC에 대하여

$\overline{AB}=a$, $\angle A=\theta$, $\angle B=\angle C=\theta'$이라 하자.

$\theta+2\theta'=\pi$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

점 P가 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=\frac{1}{3}\times\overline{\mathrm{AB}}=\frac{a}{3}$

$\overline{\mathrm{BP}}=\frac{2}{3}\times\overline{\mathrm{AB}}=\frac{2}{3}a$

부채꼴 APQ의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times\left(\frac{a}{3}\right)^2\times\theta=\frac{1}{18}a^2\theta$

부채꼴 BPR의 넓이 T는

$T=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}a\right)^2\times\theta'=\frac{2}{9}a^2\theta'$

$2S=T$에서

$2\times\frac{1}{18}a^2\theta=\frac{2}{9}a^2\theta'$

$\theta=2\theta'$

㉠에서 $2\theta'+2\theta'=4\theta'=\pi$

즉, $\theta'=\frac{\pi}{4}$, $\theta=\frac{\pi}{2}$

호 PQ의 길이는

$\overline{\mathrm{AP}}\times\theta=\frac{a}{3}\times\frac{\pi}{2}=\frac{1}{6}a\pi$

호 PR의 길이는

$\overline{\mathrm{BP}}\times\theta'=\frac{2}{3}a\times\frac{\pi}{4}=\frac{1}{6}a\pi$

이때 두 호 PQ, PR의 길이의 합이 4π이므로

$\frac{1}{6}a\pi+\frac{1}{6}a\pi=\frac{1}{3}a\pi=4\pi$

따라서 $a=12$이므로

$S+T=3S=3\times\frac{1}{18}a^2\theta$

$\quad=3\times\frac{1}{18}\times12^2\times\frac{\pi}{2}$

$\quad=12\pi$

답 ⑤

2 방정식 $2x^2-5x+2=0$의 한 근이 $\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$이므로 다른 한 근을 β라 하면

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}+\beta=\frac{5}{2}$, $\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\times\beta=1$

이때 $\beta=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$이므로

$\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{5}{2}$에서

$\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

$=\frac{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$

$=\frac{1+2\cos\theta+(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$

$=\frac{2(1+\cos\theta)}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$

$=\frac{2}{\sin\theta}$

즉, $\frac{2}{\sin\theta}=\frac{5}{2}$이므로

$\sin\theta=\frac{4}{5}$

또한 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$\quad=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$

따라서 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}$이므로

$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=-\frac{4}{3}+\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{25}{12}$

답 ①

3 $3\sin\theta-4\tan\theta=4$에서

$3\sin\theta-4\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=4$

$3\sin\theta\cos\theta=4(\sin\theta+\cos\theta)$ …… ㉠

㉠의 양변을 제곱하면

$9\sin^2\theta\cos^2\theta=16(\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta)$

$9\sin^2\theta\cos^2\theta=16(1+2\sin\theta\cos\theta)$

$9\sin^2\theta\cos^2\theta-32\sin\theta\cos\theta-16=0$

$(9\sin\theta\cos\theta+4)(\sin\theta\cos\theta-4)=0$

$\sin\theta\cos\theta=-\frac{4}{9}$ 또는 $\sin\theta\cos\theta=4$

$|\sin\theta|\le1$, $|\cos\theta|\le1$이므로

$|\sin\theta\cos\theta|\le1$

즉, $\sin\theta\cos\theta=-\frac{4}{9}$

또한 $\sin\theta<0$이므로 $\cos\theta>0$

㉠에서

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{3}{4}\times\sin\theta\cos\theta$

$\quad=\frac{3}{4}\times\left(-\frac{4}{9}\right)$

$\quad=-\frac{1}{3}$

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2-4\sin\theta\cos\theta$

$\quad=\left(-\frac{1}{3}\right)^2-4\times\left(-\frac{4}{9}\right)$

$\quad=\frac{17}{9}$

$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$에서 $\sin\theta-\cos\theta<0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{17}}{3}$

따라서

$$\begin{aligned}\sin^2\theta-\cos^2\theta&=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)\\&=\left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{17}}{3}\right)\\&=\frac{\sqrt{17}}{9}\end{aligned}$$

답 ③

4 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면 두 점 A, B의 좌표는 각각 (α, k), (β, k)이다.

직선 OA의 기울기가 직선 OB의 기울기의 5배이므로

$\dfrac{k}{\alpha}=5\times\dfrac{k}{\beta}$

이때 $k\neq0$이므로 $\beta=5\alpha$

함수 $y=4\sin\dfrac{\pi}{3}x$의 그래프는 직선 $x=\dfrac{3}{2}$에 대하여 대칭이므로

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{3}{2}$에서

$\alpha+\beta=3$

이 식에 $\beta=5\alpha$를 대입하면

$\alpha+5\alpha=3$, $\alpha=\dfrac{1}{2}$

$\beta=5\alpha=5\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$

$\alpha=\dfrac{1}{2}$일 때 $y=4\sin\dfrac{\pi}{6}=4\times\dfrac{1}{2}=2=k$

이므로 두 점 A, B의 좌표는 각각 $\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$, $\left(\dfrac{5}{2}, 2\right)$이다.

따라서 $\overline{AB}=\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}=2$, $k=2$이므로

구하는 삼각형 AOB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times2\times2=2$

답 ②

5 함수 $y=4\sin\dfrac{x}{4}$의 주기는

$\dfrac{2\pi}{\frac{1}{4}}=8\pi$

함수 $y=4\sin\dfrac{x}{4}$ $(-2\pi\le x\le2\pi)$의 그래프와 두 직선 $x=\pi$, $y=-2\sqrt{2}$가 만나는 점을 각각 A, B라 하자.

$x=\pi$일 때, $y=4\sin\dfrac{\pi}{4}=4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

즉, $\mathrm{A}(\pi, 2\sqrt{2})$

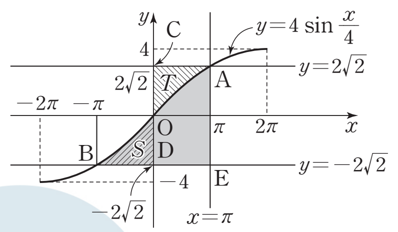
$y=-2\sqrt{2}$일 때, $-2\sqrt{2}=4\sin\dfrac{x}{4}$

$\sin\dfrac{x}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$-\dfrac{\pi}{2}\le\dfrac{x}{4}\le\dfrac{\pi}{2}$에서 $\dfrac{x}{4}=-\dfrac{\pi}{4}$, $x=-\pi$

즉, $\mathrm{B}(-\pi, -2\sqrt{2})$

함수 $y=4\sin\dfrac{x}{4}$ $(-2\pi\le x\le2\pi)$의 그래프는 그림과 같다.



두 점 A, B는 원점에 대하여 대칭이고,

함수 $y=4\sin\dfrac{x}{4}$의 그래프도 원점에 대하여 대칭이므로

함수 $y=4\sin\dfrac{x}{4}$ $(-2\pi\le x\le2\pi)$의 그래프와 직선 $y=-2\sqrt{2}$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S, 함수 $y=4\sin\dfrac{x}{4}$ $(-2\pi\le x\le2\pi)$의 그래프와 직선 $y=2\sqrt{2}$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 T라 하면

$S=T$이다.

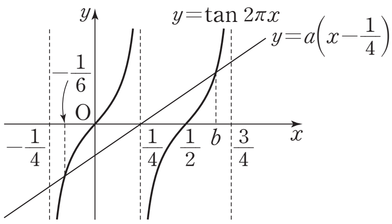
세 점 $\mathrm{C}(0, 2\sqrt{2})$, $\mathrm{D}(0, -2\sqrt{2})$, $\mathrm{E}(\pi, -2\sqrt{2})$에 대하여 함수 $y=4\sin\dfrac{x}{4}$의 그래프와 두 직선 $x=\pi$, $y=-2\sqrt{2}$로 둘러싸인 부분의 넓이는 직사각형 CDEA의 넓이와 같다. 따라서 구하는 넓이는

$\overline{\mathrm{CA}}\times\overline{\mathrm{CD}}=\pi\times4\sqrt{2}=4\sqrt{2}\pi$

답 ④

6 함수 $y=\tan2\pi x$의 그래프는 주기가 $\dfrac{\pi}{2\pi}=\dfrac{1}{2}$이므로

$-\dfrac{1}{4}<x<\dfrac{3}{4}$에서 점 $\left(\dfrac{1}{4}, 0\right)$을 지나고 기울기가 양수 a인 직선 $y=a\left(x-\dfrac{1}{4}\right)$과 함수 $y=\tan2\pi x$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=\tan 2\pi x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고 주기가 $\frac{1}{2}$이므로

$b-\frac{1}{2}=0-\left(-\frac{1}{6}\right)$에서

$b=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$

직선 $y=a\left(x-\frac{1}{4}\right)$은

두 점 $\left(-\frac{1}{6},\ \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$, $\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$을 지나므로

$$a=\frac{0-\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{6}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{5}{12}}=\frac{12\sqrt{3}}{5}$$

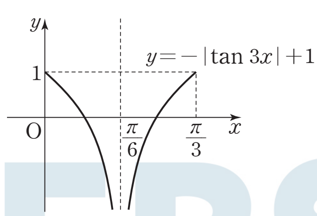
따라서 $ab=\frac{12\sqrt{3}}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{8\sqrt{3}}{5}$

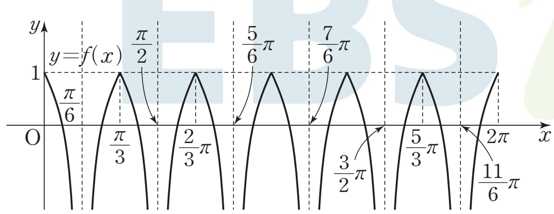
답 ③

7 $f(x)=-|\tan 3x|+1$이라 하자.

함수 $y=f(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{3}$이고 $\frac{\pi}{3}\times 6=2\pi$이므로

$0\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $0\le x\le\frac{\pi}{3}$에서의 함수 $y=-|\tan 3x|+1$의 그래프가 6번 반복해서 나타나므로 다음과 같다.





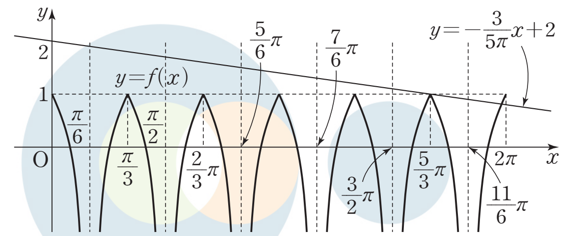
$f\left(\frac{5}{3}\pi\right)=-|\tan 5\pi|+1=0+1=1$

$f(2\pi)=-|\tan 6\pi|+1=0+1=1$

두 점 $(0,\ 2)$, $\left(\frac{5}{3}\pi,\ 1\right)$을 지나는 직선의 기울기가

$\frac{1-2}{\frac{5}{3}\pi-0}=-\frac{3}{5\pi}$이고

직선 $y=-\frac{3}{5\pi}x+2$는 그림과 같이 $0\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만난다.



따라서 $0\le x\le 2\pi$에서 점 $(0,\ 2)$를 지나고 기울기가 $-\frac{3}{5\pi}$보다 작은 직선 l과 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수의 최솟값은 3이다.

답 ②

8 두 직선 $y=2x-5$, $y=-\frac{1}{2}x$가 만나는 점 P의 좌표를 구하면

$2x-5=-\frac{1}{2}x$, $\frac{5}{2}x=5$에서

$x=2$, $y=-1$

즉, $\mathrm{P}(2,\ -1)$

이때 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$이므로

$\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$

따라서

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\times\sin(\pi+\theta)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\times\cos(\pi-\theta)$$
$$=\cos\theta\times(-\sin\theta)+\sin\theta\times(-\cos\theta)$$
$$=-2\cos\theta\times\sin\theta$$
$$=-2\times\frac{2}{\sqrt{5}}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$
$$=\frac{4}{5}$$

답 ⑤

9 $$\cos^2\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)=\cos^2\left\{\frac{\pi}{2}+\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$
$$=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\cos\left(x+\frac{7}{6}\pi\right)=\cos\left\{\pi+\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$
$$=-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=t$라 하면

$\frac{\pi}{6}\le x+\frac{\pi}{6}<\frac{7}{6}\pi$

$-1\le\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\le\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $-1\le t\le\frac{\sqrt{3}}{2}$

$f(x)=2\cos^2\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)-2\cos\left(x+\frac{7}{6}\pi\right)+a$

$=2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+a$

$=2-2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+a$

$=2-2t^2+2t+a$

$=-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+a+\frac{5}{2}\ \left(-1\le t\le\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

함수 $f(x)$는 $t=-1$일 때, 최솟값 $a-2$를 가지므로

$a-2=-3$에서

$a=-1$

함수 $f(x)$는 $t=\frac{1}{2}$일 때, 최댓값 $a+\frac{5}{2}$를 가지므로

$a+\frac{5}{2}=-1+\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$에서

$c=\frac{3}{2}$

$t=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$일 때

$\frac{\pi}{6}\le x+\frac{\pi}{6}<\frac{7}{6}\pi$이므로 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

$x=\frac{\pi}{6}$에서 $b=\frac{1}{6}$

따라서 $a+b+c=-1+\frac{1}{6}+\frac{3}{2}=\frac{2}{3}$

답 ④

10 함수 $y=4\cos a\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+b$의 최댓값이 6이므로

$4+b=6$에서

$b=2$

함수 $y=4\cos a\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2$의 주기를 p라 하면

$\frac{3}{2}p=\frac{7}{6}\pi-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}\pi$에서

$p=\pi$

이때 $a>0$이므로

$\frac{2\pi}{a}=\pi,\ a=2$

함수 $y=4\cos 2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2$, 즉 $y=4\cos\left(2x+\frac{2}{3}\pi\right)+2$의 그래프와 직선 $y=4$가 점 $(c\pi, 4)$에서 만나므로

$4\cos\left(2c\pi+\frac{2}{3}\pi\right)+2=4$에서

$\cos\left(2c\pi+\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}$

이때 $0<c<\frac{2}{3}$이므로 $\frac{2}{3}\pi<2c\pi+\frac{2}{3}\pi<2\pi$에서

$2c\pi+\frac{2}{3}\pi=\frac{5}{3}\pi$

$c=\frac{1}{2}$

따라서 $a+b+c=2+2+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

답 ③

11 $\cos^2 x-\sin x\cos x+\sin x+\cos x-1=0$에서

$(1-\sin^2 x)-\sin x\cos x+\sin x+\cos x-1=0$

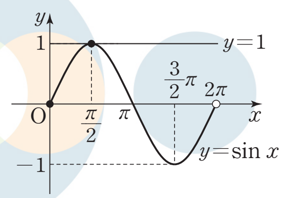
$\sin^2 x+\sin x\cos x-\sin x-\cos x=0$

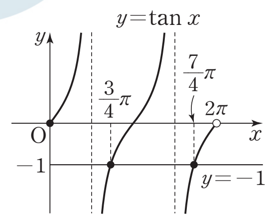
$\sin x(\sin x+\cos x)-(\sin x+\cos x)=0$

$(\sin x-1)(\sin x+\cos x)=0$

$\sin x-1=0$ 또는 $\sin x+\cos x=0$

즉, $\sin x=1$ 또는 $\tan x=-1$





$0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=1$이 만나는 점의 x좌표는 $\frac{\pi}{2}$이고, 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=-1$이 만나는 점의 x좌표는 $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$이다.

따라서 구하는 모든 실수 x의 값의 합은

$\frac{\pi}{2}+\frac{3}{4}\pi+\frac{7}{4}\pi=3\pi$

답 ③

12 모든 실수 x에 대하여 부등식

$x^2-(2\cos\theta)x-3\sin^2\theta-5\cos\theta\ge 0$

이 항상 성립하려면 이차방정식

$x^2-(2\cos\theta)x-3\sin^2\theta-5\cos\theta=0$의 판별식을 D라 할 때 $D\le 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(-\cos\theta)^2+3\sin^2\theta+5\cos\theta\le 0$에서

$\cos^2\theta+3\sin^2\theta+5\cos\theta\le 0$

$\cos^2\theta+3(1-\cos^2\theta)+5\cos\theta\le 0$

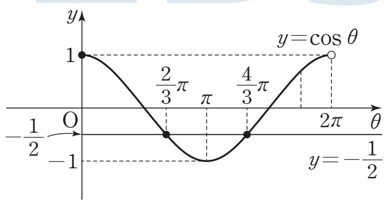
$2\cos^2\theta-5\cos\theta-3\ge 0$

$(\cos\theta-3)(2\cos\theta+1)\ge 0$

이때 $\cos\theta-3<0$이므로

$2\cos\theta+1\le 0$

$\cos\theta\le -\frac{1}{2}$



$0\le\theta<2\pi$에서 부등식 $\cos\theta\le -\frac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\cos\theta$의 그래프가 직선 $y=-\frac{1}{2}$과 만나거나 직선 $y=-\frac{1}{2}$의 아래쪽에 있는 θ의 값의 범위이므로

$\frac{2}{3}\pi\le\theta\le\frac{4}{3}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{2}{3}\pi$, $\beta=\frac{4}{3}\pi$이므로

$$\tan(\beta-\alpha)=\tan\left(\frac{4}{3}\pi-\frac{2}{3}\pi\right)$$
$$=\tan\frac{2}{3}\pi$$
$$=-\sqrt{3}$$

답 ①

Level 3 실력 완성 본문 49쪽

1 ⑤ **2** ② **3** 6

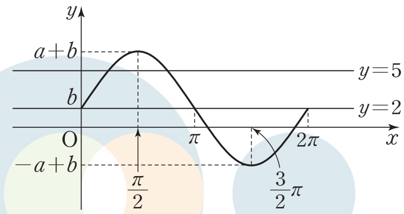
1 $a>0$이므로 $0\le x\le 2\pi$에서

함수 $y=a\sin x+b$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 최댓값 $a+b$를 갖고,

$x=\frac{3}{2}\pi$에서 최솟값 $-a+b$를 갖는다.

k가 양수일 때, $0\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=a\sin x+b$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 서로 다른 점의 개수는 0 또는 1 또는 2 또는 3이므로 $m+n$의 값이 최대가 되려면 $m=3$, $n=2$ 또는 $m=2$, $n=3$, 즉 $m+n=5$이어야 한다.

(i) $m=3$, $n=2$인 경우



함수 $y=a\sin x+b$의 그래프와 직선 $y=2$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 3이므로 $b=2$이다.

또한 함수 $y=a\sin x+b$의 그래프와 직선 $y=5$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 2이려면

$a+b>5$, 즉 $a>3$이어야 하므로

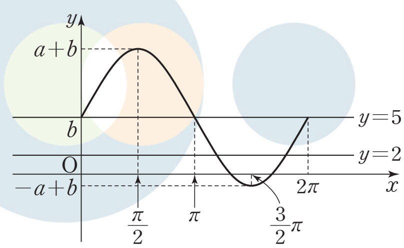
10 이하의 자연수 a는 4, 5, 6, $\cdots$, 10이다.

따라서 구하는 모든 순서쌍 (a, b)는

$(4, 2)$, $(5, 2)$, $\cdots$, $(10, 2)$

로 그 개수는 7이다.

(ii) $m=2$, $n=3$인 경우



함수 $y=a\sin x+b$의 그래프와 직선 $y=5$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 3이므로 $b=5$이다.

또한 함수 $y=a\sin x+b$의 그래프와 직선 $y=2$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 2이려면

$-a+b<2$, 즉 $a>3$이어야 하므로

10 이하의 자연수 a는 4, 5, 6, $\cdots$, 10이다.

따라서 구하는 모든 순서쌍 (a, b)는

$(4, 5)$, $(5, 5)$, $\cdots$, $(10, 5)$

로 그 개수는 7이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 14이다.

답 ⑤

2 양수 k에 대하여 함수 $f(x)=2\cos\frac{x}{k}$의 주기 $g(k)$는

$$g(k)=\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{k}\right|}=\frac{2\pi}{\frac{1}{k}}=2k\pi$$

$$h(k)=f(g(k))-\sin\left\{\frac{g(k)}{9}+\frac{7}{6}\pi\right\}$$
$$=f(2k\pi)-\sin\left(\frac{2k}{9}\pi+\frac{7}{6}\pi\right)$$
$$=2\cos 2\pi-\sin\left(\frac{2k}{9}\pi+\frac{7}{6}\pi\right)$$
$$=2-\sin\left(\frac{2k}{9}\pi+\frac{7}{6}\pi\right)$$

함수 $h(k)$는

$\sin\left(\frac{2k}{9}\pi+\frac{7}{6}\pi\right)$의 값이 최소일 때, 즉

$\sin\left(\frac{2k}{9}\pi+\frac{7}{6}\pi\right)=-1$일 때 최대이고

$\sin\left(\frac{2k}{9}\pi+\frac{7}{6}\pi\right)$의 값이 최대일 때, 즉

$\sin\left(\frac{2k}{9}\pi+\frac{7}{6}\pi\right)=1$일 때 최소이다.

$\frac{2k}{9}\pi+\frac{7}{6}\pi>\frac{7}{6}\pi$에서

$\frac{2k}{9}\pi+\frac{7}{6}\pi$의 값이 $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi+2\pi$, $\frac{3}{2}\pi+4\pi$, $\cdots$일 때

$\sin\left(\frac{2k}{9}\pi+\frac{7}{6}\pi\right)=-1$

이므로 함수 $h(k)$가 $k=\alpha$에서 최댓값을 갖도록 하는 양수 α의 최솟값 a는

$\frac{2a}{9}\pi+\frac{7}{6}\pi=\frac{3}{2}\pi$, $a=\frac{3}{2}$

이어야 한다.

또한 $\frac{2k}{9}\pi+\frac{7}{6}\pi>\frac{7}{6}\pi$에서

$\frac{2k}{9}\pi+\frac{7}{6}\pi$의 값이 $\frac{\pi}{2}+2\pi$, $\frac{\pi}{2}+4\pi$, $\frac{\pi}{2}+6\pi$, $\cdots$일 때

$\sin\left(\frac{2k}{9}\pi+\frac{7}{6}\pi\right)=1$

이므로 함수 $h(k)$가 $k=\beta$에서 최솟값을 갖도록 하는 양수 β의 최솟값 b는

$\frac{2b}{9}\pi+\frac{7}{6}\pi=\frac{5}{2}\pi$

$b=6$

이어야 한다.

따라서 $\frac{a}{b}=\frac{\frac{3}{2}}{6}=\frac{1}{4}$

답 ②

3 $0\le x\le\pi$일 때,

$2\sin^2 x-3a\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+a\sin(\pi+x)-a+8=0$

에서

$2\sin^2 x-3a\sin x-a\sin x-a+8=0$

$2\sin^2 x-4a\sin x-a+8=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\sin x=t$라 하면 $0\le t\le 1$

$2t^2-4at-a+8=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

$0\le x\le\pi$일 때, $\sin x=t$를 만족시키는 서로 다른 x의 개수가 2이려면 $0\le t<1$이어야 하므로 $0\le x\le\pi$에서 방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 방정식 ㉡이 $0\le t<1$에서 오직 하나의 실근만을 가져야 한다.

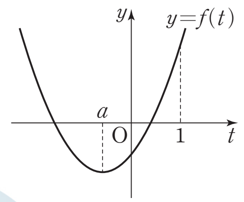
따라서

$f(t)=2t^2-4at-a+8$
$=2(t-a)^2-2a^2-a+8$

이라 하면 구하는 정수 a는 $0\le t<1$에서 함수 $y=f(t)$의 그래프와 t축이 한 점에서만 만나도록 하는 정수 a와 같다.

(i) $a<0$일 때

$f(0)\le 0$, $f(1)>0$이어야 한다.



$f(0)=-a+8\le 0$에서 $a\ge 8$

$f(1)=-5a+10>0$에서 $a<2$

조건을 만족시키는 정수 a는 존재하지 않는다.

(ii) $0\le a<1$, 즉 $a=0$일 때

$f(t)=2t^2+8>0$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

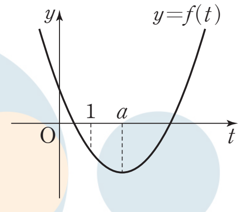
(iii) $a=1$일 때

$f(t)=2(t-1)^2+5>0$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $a>1$일 때

$f(0)\ge 0$, $f(1)<0$이어야 한다.



$f(0)=-a+8\ge 0$에서 $a\le 8$

$f(1)=-5a+10<0$에서 $a>2$

공통범위를 구하면 $2<a\le 8$

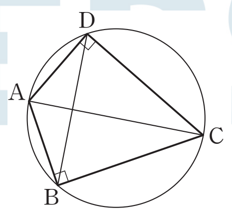
(i)~(iv)에서 구하는 정수 a는 3, 4, 5, 6, 7, 8로 그 개수는 6이다.

답 6

04 사인법칙과 코사인법칙

유제					본문 51~57쪽
1 ③	**2** ①	**3** ③	**4** ①	**5** ⑤	**6** ②
7 ④	**8** ⑤				

1



직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}$

$=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\angle B=\angle D=90^\circ$이므로 네 점 A, B, C, D는 선분 AC를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

삼각형 ABD의 외접원의 지름이 선분 AC이므로 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

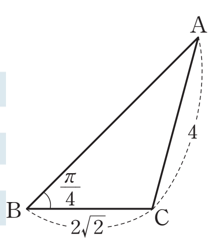
$\dfrac{\overline{BD}}{\sin(\angle BAD)}=\dfrac{\overline{BD}}{\sin(\angle A)}=5$

$\overline{BD}=5\sin(\angle A)$

$=5\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{25}{6}$

답 ③

2



삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AC}}{\sin(\angle B)}=\dfrac{\overline{BC}}{\sin(\angle A)}$이므로

$\sin(\angle A)=\overline{BC}\times\dfrac{\sin(\angle B)}{\overline{AC}}$

$=2\sqrt{2}\times\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}}{4}$

$=2\sqrt{2}\times\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{4}$

$=\dfrac{1}{2}$

이때 $\angle B=\dfrac{\pi}{4}$이므로 $0<\angle A<\dfrac{3}{4}\pi$이어야 한다.

즉, $\angle A=\dfrac{\pi}{6}$

$\angle C=\pi-\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{7}{12}\pi$

$2\angle C=2\times\dfrac{7}{12}\pi=\dfrac{7}{6}\pi$

따라서

$\cos(2\angle C)=\cos\dfrac{7}{6}\pi$

$=\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=-\cos\dfrac{\pi}{6}$

$=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

답 ①

3 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AC}\times\overline{BC}\times\cos\dfrac{\pi}{3}$

$=4^2+5^2-2\times4\times5\times\dfrac{1}{2}$

$=21$

$\overline{AB}>0$이므로 $\overline{AB}=\sqrt{21}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자.

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}=2R$에서

$R=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{21}}{\sin\frac{\pi}{3}}$

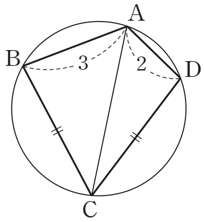
$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{21}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{7}$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$\pi\times(\sqrt{7})^2=7\pi$

답 ③

4



삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos B$

$=3^2+\overline{BC}^2-2\times3\times\overline{BC}\times\cos B$

$=9+\overline{BC}^2-6\times\overline{BC}\cos B$ …… ㉠

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{DC}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{DC}\times\cos D$

$=2^2+\overline{DC}^2-2\times2\times\overline{DC}\times\cos D$

$=4+\overline{DC}^2-4\times\overline{DC}\cos D$ …… ㉡

이때 사각형 ABCD는 원에 내접하므로

$B+D=\pi$

즉, $D=\pi-B$이고 $\overline{BC}=\overline{DC}$이므로

㉠, ㉡에서

$9+\overline{BC}^2-6\times\overline{BC}\cos B$

$=4+\overline{BC}^2-4\times\overline{BC}\cos(\pi-B)$

$9-6\times\overline{BC}\cos B=4+4\times\overline{BC}\cos B$

$10\times\overline{BC}\cos B=5$

따라서 $\overline{BC}\cos B=\dfrac{1}{2}$

답 ①

5 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라 하고 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자.

사인법칙에 의하여

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$이므로

$\sin^2 B+\sin^2 C=\sin^2 A$에서

$\left(\dfrac{b}{2R}\right)^2+\left(\dfrac{c}{2R}\right)^2=\left(\dfrac{a}{2R}\right)^2$

$a^2=b^2+c^2$ …… ㉠

코사인법칙에 의하여

$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$,

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$이므로

$\overline{CA}\cos C=\overline{AB}\cos B$

즉, $b\times\cos C=c\times\cos B$에서

$b\times\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=c\times\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$a^2+b^2-c^2=c^2+a^2-b^2$

$b^2-c^2=0$, $(b-c)(b+c)=0$

이때 $b+c\neq0$이므로

$b=c$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 삼각형 ABC는 $\angle A=90°$인 직각이등변삼각형이다.

$\overline{AB}=4$에서 $\overline{BC}=\sqrt{2}\times\overline{AB}=4\sqrt{2}$

직각삼각형 ABC의 빗변이 삼각형 ABC의 외접원의 지름이므로

$R=\dfrac{\overline{BC}}{2}=2\sqrt{2}$

따라서 구하는 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$\pi\times(2\sqrt{2})^2=8\pi$

답 ⑤

6 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라 하자.

$\cos^2 B+\sin^2 C=1$에서

$(1-\sin^2 B)+\sin^2 C=1$

$\sin^2 B=\sin^2 C$

삼각형 ABC에서 $\sin B>0$, $\sin C>0$이므로

$\sin B=\sin C$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{b}{2R}=\dfrac{c}{2R}$이므로 $b=c$

즉, 삼각형 ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이므로 $B=C$이다.

$A+B+C=A+2B=\pi$에서

$B=C=\dfrac{\pi-A}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ …… ㉠

한편, $a=R$이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{a}{\sin A}=2R=2a$에서

$\sin A=\dfrac{1}{2}$

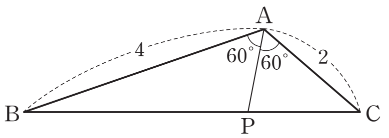
$A=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $A=\dfrac{5}{6}\pi$

이때 삼각형 ABC는 둔각삼각형이므로 $A=\dfrac{5}{6}\pi$

㉠에서 $B=C=\dfrac{\pi}{12}$

답 ②

7



삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin 120^\circ$

$=\frac{1}{2}\times4\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=2\sqrt{3}$

삼각형 ABP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AP}\times\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times4\times\overline{AP}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sqrt{3}\times\overline{AP}$

삼각형 APC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{AC}\times\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{AP}$

삼각형 ABC의 넓이는 두 삼각형 ABP, APC의 넓이의 합과 같으므로

$2\sqrt{3}=\sqrt{3}\times\overline{AP}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{AP}$

$2\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\overline{AP}$

따라서 $\overline{AP}=\frac{4}{3}$

답 ④

8 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{CA}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BC}}$

$=\frac{2^2+3^2-(\sqrt{7})^2}{2\times2\times3}=\frac{1}{2}$

$0<B<\frac{\pi}{2}$이므로 $B=\frac{\pi}{3}$

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B=\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{1}{2}\times2\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

점 P는 선분 BC를 3 : 2로 내분하는 점이므로

$\overline{BP}=\frac{3}{5}\overline{BC}$

따라서 삼각형 ABP의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{3}{5}$이므로 구하는 삼각형 ABP의 넓이는

$\frac{3}{5}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{10}$

답 ⑤

Level 1 기초 연습 본문 58~59쪽

1 ④	**2** ⑤	**3** ⑤	**4** ③	**5** ④	**6** ②
7 ④	**8** 30				

1 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면

$\pi R^2=6\pi$에서

$R=\sqrt{6}$

$\cos A=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$0<A<\pi$이므로 $\sin A>0$

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=2R$이므로

$\overline{BC}=2R\sin A$

$=2\times\sqrt{6}\times\sin A$

$=2\times\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=4$

답 ④

2 삼각형 ABC에서 $\cos A=\frac{2}{3}$

$0<A<\pi$이므로 $\sin A>0$

$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{AC}}{\sin B}$이므로

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{6}{\frac{\sqrt{5}}{4}}$$

따라서 $\overline{\mathrm{BC}}=8$

답 ⑤

3 삼각형 ABC의 세 내각의 크기의 합은 π이므로

$A+C=\pi-B$에서

$\cos(A+C)=\cos(\pi-B)=-\cos B$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CA}}\times\cos A$$
$$=3^2+7^2-2\times3\times7\times\frac{11}{14}$$
$$=25$$

$\overline{\mathrm{BC}}>0$이므로 $\overline{\mathrm{BC}}=5$

$$\cos B=\frac{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-\overline{\mathrm{CA}}^2}{2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}}$$
$$=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}=-\frac{1}{2}$$

따라서 $\cos(A+C)=-\cos B=\frac{1}{2}$

답 ⑤

4 삼각형 ABP에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2-2\times\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{BP}}\times\cos(\angle\mathrm{APB})$$
$$=3^2+(\sqrt{2})^2-2\times3\times\sqrt{2}\times\cos\frac{3}{4}\pi$$
$$=11-6\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=17$$

$\overline{\mathrm{AB}}>0$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{17}$

부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 R이라 하면 R은 삼각형 ABP의 외접원의 반지름의 길이와 같다.

삼각형 ABP에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin(\angle\mathrm{APB})}=2R$에서

$$R=\frac{1}{2}\times\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin(\angle\mathrm{APB})}$$
$$=\frac{\sqrt{17}}{2\times\sin\frac{3}{4}\pi}$$
$$=\frac{\sqrt{17}}{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

답 ③

5 삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}=c$, $\overline{\mathrm{BC}}=a$, $\overline{\mathrm{CA}}=b$라 하자.

$\overline{\mathrm{AC}}\cos A+\overline{\mathrm{BC}}\cos B=\overline{\mathrm{AC}}=2\overline{\mathrm{BC}}$, 즉

$b\cos A+a\cos B=b=2a$에서

코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$이므로

$$b\cos A+a\cos B$$
$$=b\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+a\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$
$$=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2c}$$
$$=\frac{2c^2}{2c}=c$$

따라서 $c=b=2a$이므로

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$=\frac{(2a)^2+(2a)^2-a^2}{2\times2a\times2a}$$
$$=\frac{7}{8}$$

답 ④

6 삼각형 ABC에서 $A+B+C=\pi$이므로

$$\cos(B+C)=\cos(\pi-A)$$
$$=-\cos A=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$\cos A=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

이때 $\frac{\pi}{2}<A<\pi$이므로 $\sin A>0$

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$$
$$=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\sin A$$
$$=\frac{1}{2}\times5\times3\times\frac{2}{3}=5$$

답 ②

7 $\angle\mathrm{BAD}=\theta$라 하자.
삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BD}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AD}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\cos\theta$

$(\sqrt{57})^2=6^2+\overline{\mathrm{AD}}^2-2\times 6\times\overline{\mathrm{AD}}\times\left(-\frac{1}{3}\right)$

$\overline{\mathrm{AD}}^2+4\times\overline{\mathrm{AD}}-21=0$

$(\overline{\mathrm{AD}}+7)(\overline{\mathrm{AD}}-3)=0$

$\overline{\mathrm{AD}}>0$이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=3$

$0<\theta<\pi$이므로 $\sin\theta>0$

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

평행사변형 ABCD의 넓이는 삼각형 ABD의 넓이의 2배이므로

$2\times\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\sin\theta$

$=6\times 3\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=12\sqrt{2}$

답 ④

8 삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}=c$, $\overline{\mathrm{BC}}=a$, $\overline{\mathrm{CA}}=b$라 하고
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

$\frac{\sin A}{5}=\frac{\sin B}{6}=\frac{\sin C}{4}$에서

$\sin A : \sin B : \sin C=5 : 6 : 4$

$=\frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} : \frac{c}{2R}$

$=a : b : c$

양수 k에 대하여 $a=5k$, $b=6k$, $c=4k$라 하면
코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$=\frac{(5k)^2+(6k)^2-(4k)^2}{2\times 5k\times 6k}$

$=\frac{45k^2}{60k^2}=\frac{3}{4}$

이때 $0<C<\pi$이므로 $\sin C>0$

$\sin C=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

삼각형 ABC의 넓이가 $15\sqrt{7}$이므로

$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 5k\times 6k\times\frac{\sqrt{7}}{4}$

$=\frac{15\sqrt{7}}{4}k^2=15\sqrt{7}$

$k^2=4$에서 $k>0$이므로

$k=2$

따라서 $a=10$, $b=12$, $c=8$이므로 구하는 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$10+12+8=30$

답 30

Level 2 기본 연습					본문 60~62쪽
1 ③	**2** 125	**3** ⑤	**4** 9	**5** ④	**6** ②
7 ③	**8** 25	**9** ③			

1 두 삼각형 AOD, BOD는 서로 합동이므로

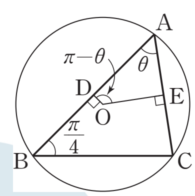
$\angle\mathrm{ADO}=\frac{\pi}{2}$

두 삼각형 AOE, COE는 서로 합동이므로

$\angle\mathrm{AEO}=\frac{\pi}{2}$

따라서 사각형 ADOE에서 $\angle\mathrm{DAE}=\theta$라 하면

$\angle\mathrm{DOE}=\pi-\theta$



삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin A}=\frac{\overline{\mathrm{CA}}}{\sin B}$

$\sin A=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{CA}}}\times\sin B$

$=\frac{6}{4\sqrt{2}}\times\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{6}{4\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{3}{4}$

즉, $\sin\theta=\sin A=\frac{3}{4}$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로

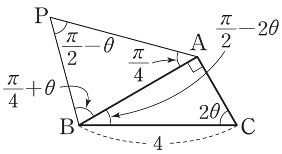
$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

따라서

$$\cos(\angle\mathrm{DOE})=\cos(\pi-\theta)$$
$$=-\cos\theta$$
$$=-\frac{\sqrt{7}}{4}$$

답 ③

2



직각삼각형 ABC에서 $\angle\mathrm{ACB}=2\theta$라 하면 $\overline{\mathrm{BC}}=4$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}\sin(\angle\mathrm{ACB})=4\sin 2\theta$

$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}\cos(\angle\mathrm{ACB})=4\cos 2\theta$

$\angle\mathrm{A}=\frac{\pi}{2}$에서 각 A의 외각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$이므로

$\angle\mathrm{PAB}=\frac{\pi}{4}$

$\angle\mathrm{B}=\frac{\pi}{2}-2\theta$에서 각 B의 외각의 크기는 $\frac{\pi}{2}+2\theta$이므로

$\angle\mathrm{PBA}=\frac{\pi}{4}+\theta$

삼각형 APB에서

$\angle\mathrm{APB}=\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin(\angle\mathrm{APB})}=\frac{\overline{\mathrm{PB}}}{\sin(\angle\mathrm{PAB})}$$

$$\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{AB}}\times\frac{\sin(\angle\mathrm{PAB})}{\sin(\angle\mathrm{APB})}$$
$$=4\sin 2\theta\times\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$
$$=4\sin 2\theta\times\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos\theta}$$
$$=2\sqrt{2}\times\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}\quad\cdots\cdots ㉠$$

$$\overline{\mathrm{PB}}\times\cos\left(\frac{1}{2}\angle\mathrm{ACB}\right)=\sqrt{10}$$

즉, $\overline{\mathrm{PB}}\times\cos\theta=\sqrt{10}$이므로

㉠에서

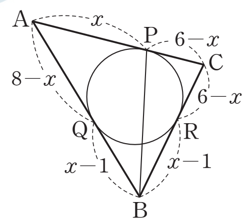
$$\left(2\sqrt{2}\times\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}\right)\times\cos\theta=\sqrt{10}$$

따라서 $\sin 2\theta=\sin(\angle\mathrm{ACB})=\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$이므로

$$100\times\sin^2(\angle\mathrm{ACB})=100\times\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=125$$

답 125

3



삼각형 ABC에 내접하는 원이 두 선분 AB, BC와 만나는 점을 각각 Q, R이라 하자.

$\overline{\mathrm{AP}}=x$라 하면

$\overline{\mathrm{PC}}=6-x$

$\overline{\mathrm{CR}}=\overline{\mathrm{PC}}=6-x$이므로

$\overline{\mathrm{BR}}=5-(6-x)=x-1$

$\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{BR}}=x-1$이므로

$\overline{\mathrm{AQ}}=7-(x-1)=8-x$

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}$에서 $x=8-x$

$2x=8,\ x=4$

한편, 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2-\overline{\mathrm{BC}}^2}{2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CA}}}$$
$$=\frac{7^2+6^2-5^2}{2\times7\times6}$$
$$=\frac{5}{7}$$

삼각형 ABP에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BP}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AP}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AP}}\times\cos A$$
$$=7^2+4^2-2\times7\times4\times\frac{5}{7}$$
$$=25$$

$\overline{\mathrm{BP}}>0$이므로 $\overline{\mathrm{BP}}=5$

따라서 구하는 삼각형 ABP의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{PA}}=7+5+4=16$

답 ⑤

4 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-\overline{BC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{CA}}$

$=\frac{2^2+3^2-2^2}{2\times2\times3}$

$=\frac{3}{4}$

점 P는 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$\overline{AP}=\frac{1}{3}\overline{AC}=\frac{1}{3}\times3=1$

삼각형 ABP에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BP}^2=\overline{AB}^2+\overline{AP}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AP}\times\cos A$

$=2^2+1^2-2\times2\times1\times\frac{3}{4}$

$=2$

$\overline{BP}>0$이므로 $\overline{BP}=\sqrt{2}$

한편, 삼각형 CBQ와 삼각형 ABP는 서로 합동이므로

$\overline{BQ}=\overline{BP}=\sqrt{2}$

$\overline{PQ}=\frac{1}{3}\overline{AC}=1$이므로 $\angle PBQ=\theta$라 하면

삼각형 PBQ에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{\overline{BP}^2+\overline{BQ}^2-\overline{PQ}^2}{2\times\overline{BP}\times\overline{BQ}}$

$=\frac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-1^2}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

$=\frac{3}{4}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta>0$

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{7}}{4}$

삼각형 PBQ의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면

사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{PQ}}{\sin\theta}=2R$에서

$R=\frac{1}{2}\times\frac{\overline{PQ}}{\sin\theta}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{4}}$

$=\frac{2}{7}\sqrt{7}$

따라서 $p=7$, $q=2$이므로

$p+q=7+2=9$

답 9

5 $\overline{AB}=n+1$, $\overline{BC}=n+4$, $\overline{CA}=n+7$에서

(i) 세 선분 AB, BC, CA가 삼각형 ABC의 세 변이므로

$(n+1)+(n+4)>n+7$

$n>2$

(ii) $90^\circ<B<120^\circ$에서 $-\frac{1}{2}<\cos B<0$이므로

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{(n+1)^2+(n+4)^2-(n+7)^2}{2\times(n+1)\times(n+4)}$

$=\frac{(n+4)(n-8)}{2(n+1)(n+4)}$

$=\frac{n-8}{2(n+1)}$

$-\frac{1}{2}<\frac{n-8}{2(n+1)}<0$에서 $2(n+1)>0$이므로

$-(n+1)<n-8<0$

$\frac{7}{2}<n<8$

(i), (ii)에서 $\frac{7}{2}<n<8$이므로 구하는 자연수 n은 4, 5, 6, 7로 그 개수는 4이다.

답 ④

6 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면

$\pi R^2=\frac{64}{15}\pi$에서 $R=\frac{8\sqrt{15}}{15}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{CA}}{\sin B}=2R$이므로

$\sin B=\frac{\overline{CA}}{2R}=\frac{4}{2\times\frac{8\sqrt{15}}{15}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{CA}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos B$

$4^2=2^2+\overline{BC}^2-2\times2\times\overline{BC}\times\cos B$

$\overline{BC}^2-4\overline{BC}\times\cos B-12=0$ …… ㉠

$0<B<\pi$이므로

$\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}$ 또는 $\cos B=-\sqrt{1-\sin^2 B}$

(i) $\cos B=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}=\frac{1}{4}$일 때

㉠에서 $\overline{BC}^2-4\overline{BC}\times\frac{1}{4}-12=0$

$(\overline{BC}+3)(\overline{BC}-4)=0$

$\overline{BC}>0$이므로 $\overline{BC}=4$

삼각형 ABC는 이등변삼각형이 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\cos B=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}=-\frac{1}{4}$일 때

㉠에서 $\overline{BC}^2-4\overline{BC}\times\left(-\frac{1}{4}\right)-12=0$

$(\overline{BC}+4)(\overline{BC}-3)=0$

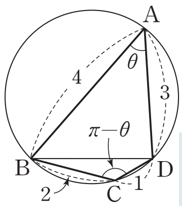
$\overline{BC}>0$이므로 $\overline{BC}=3$

(i), (ii)에 의하여

$\overline{BC}\cos B=3\times\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{4}$

답 ②

7 사각형 ABCD는 원에 내접하므로



$\angle BAD=\theta$라 하면

$\angle BCD=\pi-\theta$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\cos\theta$

$=4^2+3^2-2\times4\times3\times\cos\theta$

$=25-24\cos\theta$ ...... ㉠

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{BC}\times\overline{CD}\times\cos(\pi-\theta)$

$=2^2+1^2+2\times2\times1\times\cos\theta$

$=5+4\cos\theta$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$25-24\cos\theta=5+4\cos\theta$

$28\cos\theta=20$

$\cos\theta=\frac{20}{28}=\frac{5}{7}$

$0<\theta<\pi$이므로 $\sin\theta>0$

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}$

$=\frac{2\sqrt{6}}{7}$

사각형 ABCD의 넓이는 두 삼각형 ABD, BCD의 넓이의 합과 같으므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{DA}\times\sin\theta+\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CD}\times\sin(\pi-\theta)$

$=\frac{1}{2}\times4\times3\times\sin\theta+\frac{1}{2}\times2\times1\times\sin\theta$

$=7\times\sin\theta$

$=7\times\frac{2\sqrt{6}}{7}$

$=2\sqrt{6}$

답 ③

8 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-\overline{BC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{CA}}$

$=\frac{4^2+3^2-(\sqrt{13})^2}{2\times4\times3}$

$=\frac{1}{2}$

$0<A<\pi$이므로 $A=\frac{\pi}{3}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=2R$에서

$R=\frac{1}{2}\times\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$=\frac{\sqrt{39}}{3}$

$\angle BAC$는 호 BC의 원주각이고 $\angle BOC$는 호 BC의 중심각이므로

$\angle BOC=2\angle BAC=2\times\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$

또한, $\overline{OB}=\overline{OC}=R=\frac{\sqrt{39}}{3}$이므로

삼각형 OBC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{OC}\times\sin(\angle BOC)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{39}}{3}\times\frac{\sqrt{39}}{3}\times\sin\frac{2}{3}\pi$

$=\frac{13}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{13}{12}\sqrt{3}$

따라서 $p=12$, $q=13$이므로

$p+q=12+13=25$

답 25

9 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R, $\overline{\mathrm{AB}}=c$, $\overline{\mathrm{BC}}=a$, $\overline{\mathrm{CA}}=b$라 하자.

사인법칙에 의하여

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$$

조건 (가)의 $2\sin B=3\sin C$에서

$$2\times\frac{b}{2R}=3\times\frac{c}{2R}$$

$$2b=3c$$

이때 $b=\overline{\mathrm{CA}}=6$이므로

$$c=\frac{2}{3}b=4$$

조건 (나)의 $\sin A+\sin C=2\sin B$에서

$$\frac{a}{2R}+\frac{c}{2R}=2\times\frac{b}{2R}$$

$$a=2b-c=2\times6-4=8$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{6^2+4^2-8^2}{2\times6\times4}=-\frac{1}{4}$$

$\frac{\pi}{2}<A<\pi$이므로 $\sin A>0$

$$\sin A=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times6\times4\times\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$=3\sqrt{15}$$

답 ③

Level 3 실력 완성 본문 63쪽

1 ③ **2** ① **3** ③

1 직각삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{BC}}=2$이므로

$$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}\cos B$$

$$=2\cos 60^\circ=1$$

$$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}\sin B$$

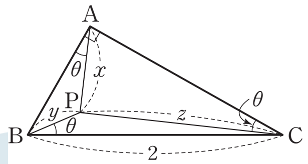
$$=2\sin 60^\circ=\sqrt{3}$$

직각삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\angle\mathrm{PAB}=\angle\mathrm{PBC}=\angle\mathrm{PCA}=\theta$라 하고, $\overline{\mathrm{AP}}=x$, $\overline{\mathrm{BP}}=y$, $\overline{\mathrm{CP}}=z$라 하자.



삼각형 ABC의 넓이 S는 세 삼각형 APB, BPC, CPA의 넓이의 합과 같으므로

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AP}}\times\sin\theta+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{BP}}\times\sin\theta$$

$$+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CA}}\times\overline{\mathrm{CP}}\times\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times x\times\sin\theta+\frac{1}{2}\times2\times y\times\sin\theta$$

$$+\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times z\times\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}(x+2y+\sqrt{3}z)\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서

$(x+2y+\sqrt{3}z)\sin\theta=\sqrt{3}$ …… ㉠

$\angle A=\angle\mathrm{PAC}+\theta=90^\circ$이므로

$$\angle\mathrm{APC}=180^\circ-(\angle\mathrm{PAC}+\theta)$$

$$=180^\circ-90^\circ=90^\circ$$

직각삼각형 APC에서

$$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AC}}\sin\theta$$

$x=\sqrt{3}\sin\theta$ …… ㉡

$\angle B=\angle\mathrm{ABP}+\theta=60^\circ$이므로

$$\angle\mathrm{APB}=180^\circ-(\angle\mathrm{ABP}+\theta)$$

$$=180^\circ-60^\circ=120^\circ$$

삼각형 APB에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BP}}}{\sin\theta}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin(\angle\mathrm{APB})}$$

$$\frac{y}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin 120^\circ}$$

$y=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta$ …… ㉢

$\angle C=\angle\mathrm{BCP}+\theta=30^\circ$이므로

$$\angle\mathrm{BPC}=180^\circ-(\angle\mathrm{BCP}+\theta)$$

$$=180^\circ-30^\circ=150^\circ$$

삼각형 BPC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{CP}}}{\sin\theta}=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\angle\mathrm{BPC})}$$

$$\frac{z}{\sin\theta}=\frac{2}{\sin 150^\circ}$$

$z=\dfrac{2}{\frac{1}{2}}\sin\theta=4\sin\theta$ …… ㉣

㉡, ㉢, ㉣을 ㉠에 대입하면

$(x+2y+\sqrt{3}z)\sin\theta$

$=\left(\sqrt{3}\sin\theta+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\sin\theta+4\sqrt{3}\sin\theta\right)\sin\theta$

$=\left(1+\dfrac{4}{3}+4\right)\sqrt{3}\sin^2\theta$

$=\dfrac{19}{3}\sqrt{3}\sin^2\theta=\sqrt{3}$

따라서 $\sin^2\theta=\dfrac{3}{19}$

㉡, ㉢에서

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=x^2+y^2$

$=(\sqrt{3}\sin\theta)^2+\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right)^2$

$=\dfrac{13}{3}\sin^2\theta$

$=\dfrac{13}{3}\times\dfrac{3}{19}$

$=\dfrac{13}{19}$

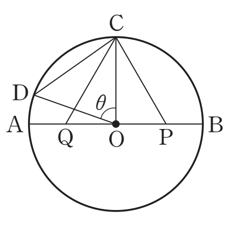
답 ③

2 $\overline{AB}=2$이므로 주어진 원의 반지름의 길이는 1이다.

점 C는 호 AB를 이등분하는 점이므로

$\angle COA=\angle COB=\dfrac{\pi}{2}$

$\angle COD=\theta$라 하자.



삼각형 COD에서 코사인법칙에 의하여

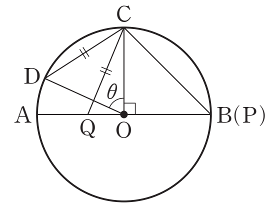
$\cos\theta=\dfrac{\overline{DO}^2+\overline{CO}^2-\overline{CD}^2}{2\times\overline{DO}\times\overline{CO}}$

$=\dfrac{1^2+1^2-\overline{CD}^2}{2\times1\times1}$

$=1-\dfrac{\overline{CD}^2}{2}$ ...... ㉠

$\cos(\angle COD)$, 즉 $\cos\theta$의 값은 $\overline{CD}$의 값이 최소일 때 최대이고 $\overline{CD}$의 값이 최대일 때 최소이다.

점 P가 점 O에서 점 B로 다가갈수록 점 Q는 점 A에서 중심인 O쪽으로 다가가고 $\overline{CQ}$(즉, $\overline{CD}$)의 값이 작아지므로 $\cos\theta$의 값이 점점 커진다. 따라서 다음과 같이 점 P가 점 B와 같을 때 $\cos\theta$는 최댓값을 갖는다.



직각삼각형 COP에서

$\overline{CP}^2=\overline{CO}^2+\overline{OP}^2=\overline{CO}^2+\overline{OB}^2=1^2+1^2=2$

$\overline{CP}>0$이므로 $\overline{CP}=\sqrt{2}$

$\overline{CP}=\overline{PQ}$이므로

$\overline{OQ}=\overline{PQ}-\overline{OP}=\sqrt{2}-1$

직각삼각형 COQ에서

$\overline{CQ}^2=\overline{CO}^2+\overline{OQ}^2$

$=1^2+(\sqrt{2}-1)^2$

$=4-2\sqrt{2}$

$\overline{CD}=\overline{CQ}$이므로 ㉠에서

$\cos\theta=1-\dfrac{4-2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}-1$

한편, 점 P가 점 O와 같을 때 점 Q는 점 A(D)와 일치하므로 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$가 되어 $\cos\theta$는 최솟값 0을 갖는다.

따라서 $\cos\theta$의 최댓값은 $\sqrt{2}-1$이고 최솟값은 0이므로 구하는 합은

$(\sqrt{2}-1)+0=\sqrt{2}-1$

답 ①

참고

점 O를 원점으로 하고 직선 AB를 x축, 직선 OC를 y축으로 하는 좌표평면에서 점 P의 좌표를 $(x, 0)$ $(0\le x\le1)$이라 하면 점 Q의 좌표는 $\left(x-\sqrt{1+x^2}, 0\right)$이다.

$\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=1$(일정)에서 x의 값이 증가할 때 $\sqrt{1+x^2}+x$의 값이 증가하므로 $\sqrt{1+x^2}-x$의 값은 감소한다.

따라서 점 P의 x좌표인 x의 값이 증가할 때 점 Q의 x좌표인 $x-\sqrt{1+x^2}$의 값이 증가하므로 점 P가 점 O에서 점 B로 다가갈수록 점 Q는 점 A에서 원의 중심인 O쪽으로 다가감을 알 수 있다.

3 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라 하자.

코사인법칙에 의하여

$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ ...... ㉠

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$ …… ㉡

$\cos B \sin B=\cos C \sin C$에 ㉠, ㉡을 대입하면

$\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\times\frac{b}{2R}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\times\frac{c}{2R}$

$b^2(c^2+a^2-b^2)=c^2(a^2+b^2-c^2)$

$a^2(b^2-c^2)-(b^2-c^2)(b^2+c^2)=0$

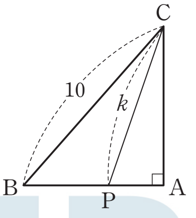
$(b-c)(b+c)(b^2+c^2-a^2)=0$

$b+c>0$이므로

$b-c=0$ 또는 $b^2+c^2-a^2=0$

삼각형 ABC는 이등변삼각형이 아니므로 $b\neq c$

따라서 $b^2+c^2=a^2$이므로 삼각형 ABC는 $\angle A=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.



선분 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{CP}=k$ $(k>0)$이라 하자.
삼각형 APC의 외접원의 반지름의 길이를 R_1이라 하면
삼각형 APC는 직각삼각형이므로 삼각형 APC의 외접원의 지름은 빗변 CP이다.

즉, $\overline{CP}=2R_1=k$, $R_1=\frac{k}{2}$

따라서 삼각형 APC의 외접원의 넓이 S_1은

$S_1=\pi R_1^{\,2}=\pi\left(\frac{k}{2}\right)^2=\frac{k^2}{4}\pi$ …… ㉢

삼각형 BPC의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하면
삼각형 BPC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{CP}}{\sin B}=\frac{k}{\sin B}=2R_2$

$R_2=\frac{k}{2\sin B}$

따라서 삼각형 BPC의 외접원의 넓이 S_2는

$S_2=\pi R_2^{\,2}=\pi\left(\frac{k}{2\sin B}\right)^2=\frac{k^2}{4\sin^2 B}\pi$ …… ㉣

$16S_1=9S_2$에 ㉢, ㉣을 대입하면

$16\times\frac{k^2}{4}\pi=9\times\frac{k^2}{4\sin^2 B}\pi$

$\sin^2 B=\frac{9}{16}$

$\sin B>0$이므로 $\sin B=\frac{3}{4}$

이때 $0<B<\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

따라서

$\overline{AB}=\overline{BC}\cos B$

$=10\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{5\sqrt{7}}{2}$

답 ③

05 등차수열과 등비수열

유제					본문 65~71쪽
1 ①	2 ②	3 ③	4 ④	5 ②	6 ④
7 ①	8 ⑤				

1 (i) 두 수 -2, 4의 등차중항이 a일 때

$\frac{-2+4}{2}=a$이므로

$a=1$

(ii) 두 수 -2, a의 등차중항이 4일 때

$\frac{-2+a}{2}=4$

즉, $-2+a=8$이므로

$a=10$

(iii) 두 수 a, 4의 등차중항이 -2일 때

$\frac{a+4}{2}=-2$

즉, $a+4=-4$이므로

$a=-8$

(i), (ii), (iii)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$1+10+(-8)=3$

답 ①

2 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_9-a_1=8d<0$에서

$d<0$

이때 $a_1>a_9$이므로 $|a_1|=|a_9|=10$에서

$a_1=10$, $a_9=-10$

$a_9=a_1+8d$에서

$-10=10+8d$

$d=-\frac{5}{2}$

따라서

$$\begin{aligned}a_{15}&=a_1+14d\\&=10+14\times\left(-\frac{5}{2}\right)\\&=-25\end{aligned}$$

답 ②

3 첫째항이 -10이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제12항까지의 합은

$\frac{12\{2\times(-10)+(12-1)\times d\}}{2}=78$

$11d-20=13$

따라서 $d=3$

답 ③

4 수열의 합과 일반항 사이의 관계에 의하여

$a_1=S_1=-50$

이때

$S_2=a_1+a_2=-50+a_2=-94$

이므로

$a_2=-44$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$d=a_2-a_1=-44-(-50)=6$

이므로

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{n\{2\times(-50)+(n-1)\times 6\}}{2}\\&=n(3n-53)\end{aligned}$$

이때

$S_n=n(3n-53)>100n$

에서 $n>0$이므로

$3n-53>100$

$n>\frac{153}{3}=51$

따라서 자연수 n의 최솟값은 52이다.

답 ④

5 세 수 2^{-3}, a, $2^{\frac{5}{2}}$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로 등비중항의 성질에 의하여

$a^2=2^{-3}\times 2^{\frac{5}{2}}=2^{-3+\frac{5}{2}}=2^{-\frac{1}{2}}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$2^{-\frac{1}{2}}=k$라 하면 ㉠에서

$a=\sqrt{k}$ 또는 $a=-\sqrt{k}$

이므로 모든 실수 a의 값의 곱은

$$\begin{aligned}\sqrt{k}\times(-\sqrt{k})&=-k\\&=-2^{-\frac{1}{2}}\\&=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\&=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

답 ②

다른 풀이

세 수 2^{-3}, a, $2^{\frac{5}{2}}$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로 등비중항의 성질에 의하여

$$a^2=2^{-3}\times 2^{\frac{5}{2}}=2^{-3+\frac{5}{2}}=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 곱은 a에 대한 이차방정식

$$a^2-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

의 두 실근의 곱과 같으므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

6 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하자.

모든 항이 음수이므로

$a_1<0$, $r>0$ …… ㉠

$a_2=-2$에서

$a_1r=-2$ …… ㉡

$a_3a_5=36$에서

$(a_1r^2)\times(a_1r^4)=a_1{}^2r^6=36$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

$$a_1{}^2r^6=(a_1r)^2\times r^4$$
$$=(-2)^2r^4=36$$

이므로 $r^4=9$

즉, $r^2=3$

㉠에서

$r=\sqrt{3}$

따라서 ㉡에서

$a_1\times\sqrt{3}=-2$

이므로

$$a_1=-\frac{2}{\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

답 ④

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$a_1<0$, $r>0$ …… ㉠

$a_2=-2$에서

$a_1r=-2$ …… ㉡

등비중항의 성질에 의하여

$a_3a_5=a_4{}^2$

이므로 $a_3a_5=36$에서

$a_4{}^2=36$

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 음수이므로

$a_4=-6$

즉, $a_1r^3=-6$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

$r^2=3$

이므로 ㉠에서

$r=\sqrt{3}$

따라서 ㉡에서

$a_1\times\sqrt{3}=-2$

이므로

$$a_1=-\frac{2}{\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

7 첫째항이 1, 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=1\times(\sqrt{2})^{n-1}=2^{\frac{n-1}{2}}$$

이므로

$$\frac{1}{a_{2n-1}}=(a_{2n-1})^{-1}$$
$$=\left\{2^{\frac{(2n-1)-1}{2}}\right\}^{-1}$$
$$=(2^{n-1})^{-1}$$
$$=(2^{-1})^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

그러므로 수열 $\left\{\frac{1}{a_{2n-1}}\right\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

이때 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_5}+\frac{1}{a_7}+\frac{1}{a_9}+\frac{1}{a_{11}}$의 값은 수열 $\left\{\frac{1}{a_{2n-1}}\right\}$의 첫째항부터 제6항까지의 합과 같으므로

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_5}+\frac{1}{a_7}+\frac{1}{a_9}+\frac{1}{a_{11}}=\frac{1\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}$$
$$=\frac{2(2^6-1)}{2^6}$$
$$=\frac{63}{32}$$

답 ①

8 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하자.

$S_{10}=200$에서 $a_1\neq 0$이고, $|a_1|\neq|a_2|$이므로 $|r|\neq 1$이다.

$S_{10}=\dfrac{a_1(1-r^{10})}{1-r}=200$ …… ㉠

이때 수열 $\{(-1)^n a_n\}$은 첫째항이 $-a_1$, 공비가 $-r$인 등비수열이므로

$$T_{10}=\frac{-a_1\{1-(-r)^{10}\}}{1-(-r)}$$
$$=\frac{-a_1(1-r^{10})}{1+r}=40 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{S_{10}}{T_{10}}=\frac{\frac{a_1(1-r^{10})}{1-r}}{\frac{-a_1(1-r^{10})}{1+r}}=\frac{200}{40}$$

$$\frac{-1-r}{1-r}=5$$

$-1-r=5-5r$

$r=\frac{3}{2}$

따라서 $\frac{a_3}{a_1}=\frac{a_1r^2}{a_1}=r^2=\frac{9}{4}$

답 ⑤

다른 풀이

$S_{10}=a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}=200 \quad \cdots\cdots ㉠$

$T_{10}=-a_1+a_2-\cdots-a_9+a_{10}=40 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠에서 ㉡을 변끼리 빼면

$2(a_1+a_3+\cdots+a_9)=160$

즉, $a_1+a_3+\cdots+a_9=80 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉠, ㉡을 변끼리 더하면

$2(a_2+a_4+\cdots+a_{10})=240$

즉, $a_2+a_4+\cdots+a_{10}=120 \quad \cdots\cdots ㉣$

이때 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면 ㉢, ㉣에서

$a_2+a_4+\cdots+a_{10}=r(a_1+a_3+\cdots+a_9)=80r=120$

이므로

$r=\frac{3}{2}$

따라서 $\frac{a_3}{a_1}=\frac{a_1r^2}{a_1}=r^2=\frac{9}{4}$

Level 1 기초 연습 본문 72~73쪽

1 ②	**2** ①	**3** ⑤	**4** ④	**5** 120	**6** ③
7 ③	**8** 129				

1 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_5=a_1+4d=10 \quad \cdots\cdots ㉠$

$a_6=a_1+5d=14 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$d=4,\ a_1=-6$

따라서

$a_{11}=a_1+10d$

$=-6+10\times4=34$

답 ②

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_6-a_5=d$이므로

$d=14-10=4$

따라서

$a_{11}=a_6+(11-6)d$

$=14+5\times4=34$

2 공차가 $\frac{2}{3}$이므로

$a_3=a_1+2\times\frac{2}{3}=a_1+\frac{4}{3}$,

$a_{23}=a_1+22\times\frac{2}{3}=a_1+\frac{44}{3}$

이때

$3a_3+6a_{23}=3\left(a_1+\frac{4}{3}\right)+6\left(a_1+\frac{44}{3}\right)$

$=9a_1+92=83$

이므로

$a_1=-1$

답 ①

3 등차중항의 성질에 의하여

$2a=\frac{1}{\log_2 3}+\log_3\frac{9}{2}$

$=\log_3 2+\log_3\frac{9}{2}$

$=\log_3\left(2\times\frac{9}{2}\right)$

$=\log_3 9$

$=2$

따라서 $a=1$

답 ⑤

4 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_3=a_1+2d,\ a_7=a_1+6d$이므로

$a_3=3a_7$에서

$a_1+2d=3(a_1+6d)$

즉,

$a_1+8d=0$ ...... ㉠

한편,

$S_k=\dfrac{k\{2a_1+(k-1)d\}}{2}$

이므로 $S_k=0$에서

$2a_1+(k-1)d=0$

㉠에서 $a_1=-8d$이므로

$(k-17)d=0$

$d\neq0$이므로

$k=17$

답 ④

5 $S_n=3n^2-n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$에서

$a_1=S_1=3-1=2$

이고, $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(3n^2-n)-\{3(n-1)^2-(n-1)\}$

$=(3n^2-n)-(3n^2-7n+4)$

$=6n-4$

이므로 $a_n=6n-4$ $(n\geq1)$

이때

$a_{n+2}-a_n=\{6(n+2)-4\}-(6n-4)$

$=12$

이므로 수열 $\{a_{n+2}-a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$10\times12=120$

답 120

6 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$\dfrac{a_6}{a_3}=r^3$이므로

$\dfrac{a_6}{a_3}=\dfrac{1}{8}$에서

$r^3=\dfrac{1}{8}$

r은 실수이므로

$r=\dfrac{1}{2}$

이때 $a_2\times a_5=2$에서

$(a_1r)\times(a_1r^4)=a_1^{\ 2}r^5$

$=a_1^{\ 2}\times\dfrac{1}{32}=2$

$a_1^{\ 2}=64$

$a_1>0$이므로

$a_1=8$

답 ③

7 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$\log_2\dfrac{a_5}{a_6a_7}=\log_2\dfrac{a_1r^4}{(a_1r^5)(a_1r^6)}$

$=\log_2\dfrac{1}{a_1r^7}=3$

에서 $\dfrac{1}{a_1r^7}=2^3$이므로

$a_1r^7=\dfrac{1}{8}$

$a_1=\sqrt{2}$이므로

$r^7=\dfrac{1}{8\sqrt{2}}=2^{-\frac{7}{2}}$

$r=2^{-\frac{1}{2}}$

이때 $a_m=a_1r^{m-1}=\sqrt{2}\times2^{-\frac{m-1}{2}}=2^{-\frac{m-2}{2}}$이므로

$a_m=\dfrac{1}{4}=2^{-2}$에서

$-\dfrac{m-2}{2}=-2$

따라서 $m=6$

답 ③

8 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{a_1+a_2}{a_1}$

$=1+\dfrac{a_2}{a_1}$

$=1+r=-1$

이므로

$r=-2$

이때

$S_3=a_1+a_2+a_3$

$=a_1(1+r+r^2)$

$=3a_1=9$

이므로

$a_1=3$

따라서

$S_7=\dfrac{3\{1-(-2)^7\}}{1-(-2)}$

$=1+128=129$

답 129

Level 2 기본 연습 본문 74~76쪽

1 ⑤	2 ③	3 40	4 ④	5 ①	6 ②
7 ④	8 ②	9 ③	10 ②	11 25	

1 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{10}-a_8=2d$

이므로 $a_{10}-a_8=-6$에서

$2d=-6$, $d=-3$

한편, $a_{10}=a_8-6$이므로

$|a_8|=|a_{10}|+2$에서

$|a_8|=|a_8-6|+2$ …… ㉠

(ⅰ) $a_8\le 0$인 경우

$a_8-6<0$이므로 ㉠에서

$-a_8=-a_8+6+2$

그러므로 등식이 성립하지 않는다.

(ⅱ) $0<a_8<6$인 경우

$a_8-6<0$이므로 ㉠에서

$a_8=-a_8+6+2$

즉, $a_8=4$

(ⅲ) $a_8\ge 6$인 경우

$a_8-6\ge 0$이므로 ㉠에서

$a_8=a_8-6+2$

그러므로 등식이 성립하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $a_8=4$

따라서

$a_1=a_8-7d$

$=4-7\times(-3)$

$=4+21=25$

답 ⑤

2 수열 $\{a_n\}$은 공차가 9인 등차수열이므로

$a_{n+1}=a_n+9$

에서

$\dfrac{a_m}{a_{m+1}}=\dfrac{a_m}{a_m+9}=\dfrac{97}{100}$

$a_m=291$ …… ㉠

등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=a_1+(n-1)\times 9$

$=9n+a_1-9$

이므로 ㉠에서

$a_m=9m+a_1-9=291$

$m=\dfrac{300-a_1}{9}$ …… ㉡

이때 $a_1+m=\dfrac{300+8a_1}{9}$이고 a_1은 자연수이므로 a_1+m은 a_1이 최소일 때 최솟값을 갖는다.

㉡에서 m이 자연수가 되도록 하는 a_1의 최솟값은 3이므로 a_1+m의 최솟값은 $a_1=3$일 때

$\dfrac{300+8\times 3}{9}=\dfrac{324}{9}=36$

답 ③

3 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 등차중항의 성질에 의하여

$a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}$ …… ㉠

첫째항이 -6, 공차가 4인 등차수열 $\{a_n+a_{n+2}\}$의 일반항은

$-6+(n-1)\times 4=4n-10$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$2a_{n+1}=4n-10$

즉, $a_{n+1}=2n-5$

이때 수열 $\{a_{n+1}\}$은 공차가 2인 등차수열이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차도 2이다.

$a_n=a_{n+1}-2=2n-7$

이므로

$a_1=2-7=-5$,

$a_{10}=20-7=13$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\dfrac{10(a_1+a_{10})}{2}=5\times(-5+13)$

$=40$

답 40

4 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 조건 (가)에서 d는 정수이다.

$a_2-a_5=-3d$이므로 조건 (나)에서 $-10<-3d<20$, 즉

$-\dfrac{20}{3}<d<\dfrac{10}{3}$

d는 정수이므로

$-6\le d\le 3$ …… ㉠

조건 (가)와 조건 (나)에서

$-9\le a_1\le 9$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 수열 $\{|a_n|\}$의 첫째항부터 제n항 $(n>1)$까지의 합은

$a_1=-9$, $d=-6$

일 때 최대이다.

이때 수열 $\{|a_n|\}$은 첫째항이 9이고 공차가 6인 등차수열이므로

$|a_8|=9+7\times6=51$

따라서 수열 $\{|a_n|\}$의 첫째항부터 제8항까지의 합의 최댓값은

$$\frac{8(|a_1|+|a_8|)}{2}=4\times(9+51)$$
$$=240$$

답 ④

5 $n=1$일 때

$b_1=T_1=S_1+2\times1+1=a_1+3=4$

$n\geq2$일 때

$$b_n=T_n-T_{n-1}$$
$$=(S_n+2n+1)-\{S_{n-1}+2(n-1)+1\}$$
$$=S_n-S_{n-1}+2$$
$$=a_n+2$$

즉, $a_n=b_n-2$ $(n\geq2)$이므로

$a_5=b_5-2=8$

따라서 $b_1+a_5=4+8=12$

답 ①

6 $n=1$일 때

$a_1=S_1=p$

$2\leq n<p$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}=p-p=0$

$n=p$일 때

$a_p=S_p-S_{p-1}=qp-p$

$n\geq p+1$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}=qn-q(n-1)=q$

이때 $q=5$이면 $n\geq p+1$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=5$이므로 $a_m=5$를 만족시키는 자연수 m은 무수히 많다.

즉, $q\neq5$이다.

그러므로 $a_m=5$를 만족시키는 자연수 m의 개수가 2이려면

$a_1=a_p=5$

즉, $p=5$이고 $qp-p=5$이다.

이때 $q=2$이므로

$p+q=5+2=7$

답 ②

7 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$$\frac{a_{n+2}}{a_n}=r^2=1$$

에서

$r=-1$ 또는 $r=1$

이때

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}=\frac{1}{r}\neq1$$

즉, $r\neq1$이므로

$r=-1$

따라서

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{21}$$
$$=a_1-a_1+a_1-a_1+\cdots-a_1+a_1$$
$$=a_1=10$$

이므로

$a_1+a_{10}+a_{21}=a_1-a_1+a_1=10$

답 ④

8 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 8이고 공비가 4이므로

$a_n=8\times4^{n-1}=2^{3+2(n-1)}=2^{2n+1}$

$\sqrt{a_n}=\sqrt{2^{2n+1}}=\sqrt{2}\times2^n$

따라서 수열 $\{\sqrt{a_n}\}$은 첫째항이 $2\sqrt{2}$, 공비가 2인 등비수열이므로 수열 $\{\sqrt{a_n}\}$의 첫째항부터 제8항까지의 합은

$$\frac{2\sqrt{2}(2^8-1)}{2-1}=2\sqrt{2}\times255$$
$$=510\sqrt{2}$$

답 ②

9 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 r인 등비수열이므로 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $a_2=r$, 공비가 r^2인 등비수열이다.

$r=1$이면 $S=10$, $T=5$이고, $r=-1$이면 $S=0$, $T=-5$이므로 $\frac{S}{T}=5$를 만족시키지 않는다.

그러므로 $r\neq1$, $r\neq-1$이다.

이때

$$S=\frac{1(r^{10}-1)}{r-1},$$

$$T=\frac{r\{(r^2)^5-1\}}{r^2-1}=\frac{r(r^{10}-1)}{(r-1)(r+1)}$$

이므로

$$\frac{S}{T}=\frac{\frac{r^{10}-1}{r-1}}{\frac{r(r^{10}-1)}{(r-1)(r+1)}}=\frac{r+1}{r}$$

따라서 $\frac{S}{T}=\frac{r+1}{r}=5$

즉, $r+1=5r$에서

$r=\frac{1}{4}$

답 ③

다른 풀이

$S=a_1+a_2+\cdots+a_{10}$

$=(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)+(a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10})$

$=\frac{T}{r}+T$

이므로

$\frac{S}{T}=\frac{1}{r}+1=5$

에서 $r=\frac{1}{4}$

10 직선 $y=a_n$과 곡선 $y=4^x$의 교점의 x좌표가 b_n이므로

$a_n=4^{b_n}$ …… ㉠

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열이므로 일반항은

$b_n=1+(n-1)\times\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a_n=4^{\frac{n+1}{2}}=2^{n+1}$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $2^{1+1}=4$, 공비가 2인 등비수열이므로 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제7항까지의 합은

$\frac{4(2^7-1)}{2-1}=4\times127=508$

답 ②

11 집합 $A\cap B$의 원소는 수열 $\left\{2^{\frac{2n-9}{3}}\right\}$의 항 중 자연수인 것이다.

$2^{\frac{2n-9}{3}}$의 값이 자연수이려면 $\frac{2n-9}{3}=\frac{2}{3}n-3$의 값이 0 이상인 정수이어야 하므로

$n=6, 9, 12, \cdots$

이어야 한다.

이때 집합 $A\cap B$의 모든 원소를 작은 수부터 크기순으로 나열하면

$2^1, 2^3, 2^5, \cdots$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 $2^2=4$인 등비수열이다.

이때

$S_n=\frac{2(4^n-1)}{4-1}=\frac{2}{3}(4^n-1)>\frac{2^{50}}{3}$

에서

$4^n>2^{49}+1=2\times4^{24}+1$

이므로 자연수 n의 최솟값은 25이다.

답 25

Level 3 실력 완성

본문 77쪽

1 16 **2** ④ **3** ⑤

1 $a_1=0$ 또는 $a_m\le0$이면

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_m|=|a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m|$

이므로 두 조건 (나), (다)를 동시에 만족시킬 수 없다.

따라서 $a_1\ne0$이고 $a_m>0$이므로 조건 (가)에서 $1<k<m$이다.

이때 공차 2가 양수이므로

$a_l<0\ (l=1, 2, 3, \cdots, k-1)$ …… ㉠

이어야 한다.

$a_n=a_1+(n-1)\times2=2n-2+a_1$

이므로 조건 (가)에서

$a_k=2k-2+a_1=0$ …… ㉡

조건 (나)에서

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m=60$ …… ㉢

두 조건 (가), (다)와 ㉠에서

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_m|$

$=(-a_1)+(-a_2)+\cdots+(-a_{k-1})+a_k+a_{k+1}+\cdots+a_m=84$ …… ㉣

$a_k=0$이므로

㉢에서 ㉣을 변끼리 빼면

$2(a_1+a_2+\cdots+a_{k-1})=60-84$

$a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}=-12$

$\frac{(k-1)(a_1+a_{k-1})}{2}=-12$ …… ㉤

㉡에서 $a_1=2-2k$, $a_{k-1}=-2$이므로 ㉤에서

$(k-1)(-k)=-12$

$k^2-k-12=0$

$(k-4)(k+3)=0$

k는 자연수이므로

$k=4$, $a_1=-6$

ⓒ에서

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m$

$=\dfrac{m\{2a_1+(m-1)\times 2\}}{2}$

$=m(-6+m-1)=60$

$m^2-7m-60=0$

$(m-12)(m+5)=0$

m은 자연수이므로

$m=12$

따라서 $k+m=4+12=16$

답 16

2 수열 $\{a_n\}$이 등비수열일 때, $1<p\le q$인 임의의 두 자연수 p, q에 대하여

$a_p\times a_q=a_{p-1}\times a_{q+1}$ …… ㉠

조건 (가)에서 $m>1$이고

$a_m a_m=10\times 10=100$

이므로 ㉠과 조건 (나)에서

$a_m a_m=a_{m-1}a_{m+1}=a_{m-2}a_{m+2}$

$=a_{m-3}a_{m+3}=a_{m-4}a_{m+4}=100$

이고 $m-4=1$, 즉 $m=5$

이때 $a_1=\dfrac{1}{5}$이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0)$이라 하면

$a_m=a_5=a_1r^4=\dfrac{r^4}{5}=10$

$r^4=50$

$r>0$이므로

$r=(2\times 5^2)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{4}}\times 5^{\frac{1}{2}}$

따라서

$a_{m-1}=a_4=a_1\times r^3=\dfrac{1}{5}\times 2^{\frac{3}{4}}\times 5^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{3}{4}}\times 5^{\frac{1}{2}}$

답 ④

3 $\overline{AB}=a$ $(a>0)$이라 하고 주어진 등비수열의 공비를 r $(r>0)$이라 하면 $\overline{CD}=ar^4$이므로

$\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}}=r^4=4$

$r>0$이므로

$r=\sqrt{2}$

이때 $\overline{BC}=ar=\sqrt{2}a$, $\overline{CA}=ar^2=2a$이므로 삼각형 ABC에서 $\angle ABC=\theta$라 하면 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{CA}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BC}}$

$=\dfrac{a^2+(\sqrt{2}a)^2-(2a)^2}{2\times a\times\sqrt{2}a}$

$=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$

삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times a\times\sqrt{2}a\times\dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{7}}{4}a^2$

이므로 $\dfrac{\sqrt{7}}{4}a^2=\sqrt{7}$

$a>0$이므로

$a=2$

그러므로 $\overline{CA}=ar^2=2\times 2=4$

한편, $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{CA}}=r^2=2$이므로

삼각형 ABC와 삼각형 CAD는 닮음비가

$\overline{AB}:\overline{CA}=1:r^2=1:2$

인 닮은 도형이고 넓이의 비는 $1^2:2^2=1:4$이다.

즉, 삼각형 ACD의 넓이 S는 $4\sqrt{7}$이다.

따라서 $\overline{CA}\times S=4\times 4\sqrt{7}=16\sqrt{7}$

답 ⑤

06 수열의 합과 수학적 귀납법

유제 본문 79~87쪽

1 ②	**2** ①	**3** ④	**4** ①	**5** ③	**6** ①
7 124	**8** ③	**9** 5			

1 $\sum_{k=1}^{15}(2a_k+1)=\sum_{k=1}^{15}2a_k+\sum_{k=1}^{15}1$

$=2\sum_{k=1}^{15}a_k+\sum_{k=1}^{15}1$

$=2\sum_{k=1}^{15}a_k+1\times15=25$

에서

$\sum_{k=1}^{15}a_k=5$

이때

$\sum_{k=1}^{15}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{15}a_k+\sum_{k=1}^{15}b_k$

$=5+\sum_{k=1}^{15}b_k=30$

이므로

$\sum_{k=1}^{15}b_k=25$

답 ②

2 $\sum_{k=1}^{10}(2a_k-1)=\sum_{k=1}^{10}2a_k-\sum_{k=1}^{10}1$

$=2\sum_{k=1}^{10}a_k-1\times10=100$

에서

$\sum_{k=1}^{10}a_k=55$

이때 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로

$\sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=5(20+a_{10})=55$

$20+a_{10}=11$

따라서 $a_{10}=-9$

답 ①

다른 풀이

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이면 수열 $\{2a_n-1\}$도 등차수열이므로

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-1)=\frac{10\{(2a_1-1)+(2a_{10}-1)\}}{2}$

$=\frac{10\{(2\times20-1)+(2a_{10}-1)\}}{2}$

$=5(38+2a_{10})=100$

에서

$a_{10}=-9$

3 $\sum_{k=5}^{15}(k-5)=0+1+2+3+\cdots+10$

$=\sum_{k=1}^{10}k$

$=\frac{10\times11}{2}=55$

답 ④

4 $\sum_{k=1}^{n}(3k^2+k)=3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$

$=3\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{n(n+1)}{2}\times(2n+1+1)$

$=n(n+1)^2$

이고,

$\sum_{k=1}^{n}(n^2+15)=(n^2+15)n$

이므로

$n(n+1)^2=n(n^2+15)$

n은 자연수이므로

$(n+1)^2=n^2+15$

$n^2+2n+1=n^2+15$

따라서 $n=7$

답 ①

5 $\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}}$

$=\frac{2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1})}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1})}$

$=\frac{2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1})}{(k+1)-(k-1)}$

$=\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}$

이므로

$\sum_{k=1}^{15}\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}}$

$=\sum_{k=1}^{15}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1})$

$=(\sqrt{2}-\sqrt{0})+(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+\cdots$
$+(\sqrt{15}-\sqrt{13})+(\sqrt{16}-\sqrt{14})$

$=-\sqrt{0}-\sqrt{1}+\sqrt{15}+\sqrt{16}$

$=-0-1+\sqrt{15}+4$

$=3+\sqrt{15}$

답 ③

6 $\frac{2k+1}{k+1}+\frac{k+1}{k}$

$=\frac{2(k+1)-1}{k+1}+\frac{k+1}{k}$

$=\left(2-\frac{1}{k+1}\right)+\left(1+\frac{1}{k}\right)$

$=3+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

이므로

$\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{2k+1}{k+1}+\frac{k+1}{k}\right)$

$=\sum_{k=1}^{10}\left\{3+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right\}$

$=\sum_{k=1}^{10}3+\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=3\times10+\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)\right.$
$\left.+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$

$=30+1-\frac{1}{11}$

$=\frac{340}{11}$

답 ①

다른 풀이

$\frac{2k+1}{k+1}+\frac{k+1}{k}=\frac{3(k+1)-(k+2)}{k+1}+\frac{k+1}{k}$

$=3+\left(\frac{k+1}{k}-\frac{k+2}{k+1}\right)$

이므로

$\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{2k+1}{k+1}+\frac{k+1}{k}\right)$

$=\sum_{k=1}^{10}3+\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{k+1}{k}-\frac{k+2}{k+1}\right)$

$=3\times10+\left\{\left(\frac{2}{1}-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{10}{9}-\frac{11}{10}\right)\right.$
$\left.+\left(\frac{11}{10}-\frac{12}{11}\right)\right\}$

$=30+2-\frac{12}{11}$

$=\frac{340}{11}$

7 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n=4$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 4인 등차수열이다.

따라서

$a_{20}=a_1+19\times4=200$

이므로

$a_1=200-76=124$

답 124

8 $a_1=1$이므로

$a_2=1+\sum_{k=1}^{1}(-1)^k a_k$

$=1-a_1$

$=1-1=0$

$a_2-a_1=-1$

$a_3=2+\sum_{k=1}^{2}(-1)^k a_k$

$=2-a_1+a_2$

$=2-1+0=1$

$a_3-a_2=1$

$a_4=3+\sum_{k=1}^{3}(-1)^k a_k$

$=3-a_1+a_2-a_3$

$=3-1+0-1=1$

$a_4-a_3=0$

$a_5=4+\sum_{k=1}^{4}(-1)^k a_k$

$=4-a_1+a_2-a_3+a_4$

$=4-1+0-1+1=3$

$a_5-a_4=2$

$a_6=5+\sum_{k=1}^{5}(-1)^k a_k$

$=5-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5$

$=5-1+0-1+1-3=1$

$a_6-a_5=-2$

따라서 $a_{n+1}-a_n<-1$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 5이다.

답 ③

9 (i) $n=1$일 때, (좌변)$=a_1=1$, (우변)$=\frac{1+1}{2^1}=1$이므로

(∗)이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 (∗)이 성립한다고 가정하면

$a_k=\frac{k+1}{2^k}$이므로

$$a_{k+1}=\frac{a_k}{2}+2^{-k-1}$$
$$=\frac{\frac{k+1}{2^k}}{2}+2^{-(k+1)}$$
$$=\boxed{\frac{k+1}{2^{k+1}}}+\frac{1}{2^{k+1}}$$
$$=\frac{\boxed{(k+1)+1}}{2^{k+1}}$$

이므로 $n=k+1$일 때도 (∗)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (∗)이 성립한다.

따라서 $f(k)=\frac{k+1}{2^{k+1}}$, $g(k)=k+2$이므로

$f(4)\times g(30)=\frac{5}{2^5}\times 32=5$

답 5

Level 1 기초 연습					본문 88~89쪽
1 ②	**2** ①	**3** 20	**4** 204	**5** 13	**6** 54
7 ③	**8** 48	**9** ④			

1 $2^{1-k}=(2^{-1})^{k-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$이므로 $\sum_{k=1}^{9}2^{1-k}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제9항까지의 합과 같다.

따라서

$$\sum_{k=1}^{9}2^{1-k}=\frac{1\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^9\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^9\right\}$$
$$=\frac{2^9-1}{2^8}=\frac{511}{256}$$

답 ②

2 $\sum_{k=1}^{n}k^4-\sum_{k=2}^{n-1}k^4$

$=\{1^4+2^4+3^4+\cdots+(n-1)^4+n^4\}$
$\qquad-\{2^4+3^4+\cdots+(n-1)^4\}$

$=1+n^4$

이므로

$1+n^4=82$

즉, $n^4=81$

n은 자연수이므로

$n=3$

답 ①

3 $\sum_{k=1}^{10}(5-2k)a_k=\sum_{k=1}^{10}(5a_k-2ka_k)$

$=\sum_{k=1}^{10}5a_k-\sum_{k=1}^{10}2ka_k$

$=5\sum_{k=1}^{10}a_k-2\sum_{k=1}^{10}ka_k$

$=5\sum_{k=1}^{10}a_k-2\times 55=-10$

이므로

$\sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{1}{5}\times(-10+110)=20$

답 20

4 $\sum_{k=1}^{9}k^2+\sum_{k=1}^{9}(-2k+1)$

$=\sum_{k=1}^{9}k^2-2\sum_{k=1}^{9}k+\sum_{k=1}^{9}1$

$=\frac{9\times 10\times 19}{6}-2\times\frac{9\times 10}{2}+1\times 9$

$=285-90+9$

$=204$

답 204

다른 풀이

$\sum_{k=1}^{9}k^2+\sum_{k=1}^{9}(-2k+1)$

$=\sum_{k=1}^{9}(k^2-2k+1)$

$=\sum_{k=1}^{9}(k-1)^2$

$=0^2+1^2+2^2+\cdots+8^2$

$=\sum_{k=1}^{8}k^2$

$=\frac{8\times 9\times 17}{6}=204$

5 $\dfrac{2}{k(k+2)}=\dfrac{2}{2}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+2)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

이때

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{n(n+2)}\sum_{k=1}^{n}1=\frac{1}{n(n+2)}\times n=\frac{1}{n+2}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+2)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n(n+2)}$$
$$=\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\frac{1}{n+2}$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}=\frac{10}{7}$$

따라서 $\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{10}{7}=\dfrac{1}{14}$이므로

$n=13$

답 13

6 $a_1=5$이므로

$a_2=2a_1-1$
$=2\times5-1=9$

$a_3=2a_2-2$
$=2\times9-2=16$

$a_4=2a_3-3$
$=2\times16-3=29$

$a_5=2a_4-4$
$=2\times29-4=54$

답 54

7 모든 자연수 n에 대하여 ${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

이때 공비를 r이라 하면 $a_1=2$, $a_4=-54$에서

$a_4=2\times r^3=-54$

이므로

$r^3=-27$

r은 실수이므로 $r=-3$

이때 $a_n=2\times(-3)^{n-1}$이므로

$a_k=2\times(-3)^{k-1}<-500$

에서

$(-3)^{k-1}<-250$

따라서 $k-1$은 7 이상의 홀수이어야 하므로 $k-1$의 최솟값은 7, 즉 k의 최솟값은 8이다.

답 ③

8 $\dfrac{2^{a_{n+1}}}{2^{a_n}}=16$에서

$2^{a_{n+1}-a_n}=2^4$

즉, $a_{n+1}-a_n=4$

따라서

$$\sum_{k=1}^{12}a_{k+1}-\sum_{k=1}^{12}a_k=\sum_{k=1}^{12}(a_{k+1}-a_k)=\sum_{k=1}^{12}4=4\times12=48$$

답 48

9 모든 자연수 k에 대하여

$2k-1$은 홀수이므로

$a_{2k-1}=2(2k-1)-1$
$=4k-3$

$2k$는 짝수이므로

$a_{2k}=a_{2k-1}+1$
$=(4k-3)+1$
$=4k-2$

따라서

$a_{2k-1}+a_{2k}=(4k-3)+(4k-2)$
$=8k-5$

이므로

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{5}(a_{2k-1}+a_{2k})=\sum_{k=1}^{5}(8k-5)$$

$=8\sum_{k=1}^{5}k-\sum_{k=1}^{5}5$

$=8\times\frac{5\times 6}{2}-5\times 5$

$=120-25$

$=95$

답 ④

Level 2 기본 연습					본문 90~92쪽
1 ③	**2** ⑤	**3** ①	**4** ⑤	**5** 41	**6** ②
7 ④	**8** ④	**9** ②	**10** ③		

1 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\sum_{k=1}^{7}a_k=\frac{7(a_1+a_7)}{2}=\frac{7(1+a_7)}{2}=98$

즉, $1+a_7=28$이므로

$a_7=b_7=27$

등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r이라 하면

$\frac{b_7}{b_1}=r^6=27$

이므로

$r^2=27^{\frac{1}{3}}=3$

따라서 수열 $\{b_{2n-1}\}$은 첫째항이 $b_1=1$이고 공비가 $r^2=3$인 등비수열이므로

$\sum_{k=1}^{5}b_{2k-1}=\frac{1(3^5-1)}{3-1}$

$=\frac{242}{2}=121$

답 ③

2 $\sum_{k=1}^{2n-1}a_k=n^2+n$ …… ㉠

㉠에 $n=1$을 대입하면

$\sum_{k=1}^{1}a_k=1^2+1$

즉, $a_1=2$

㉠에 $n=6$을 대입하면

$\sum_{k=1}^{11}a_k=6^2+6=42$

㉠에 $n=5$를 대입하면

$\sum_{k=1}^{9}a_k=5^2+5=30$

$\sum_{k=1}^{11}a_k-\sum_{k=1}^{9}a_k=42-30$

즉, $a_{10}+a_{11}=12$

$a_{10}=5$이므로 $a_{11}=7$

따라서 $a_1+a_{11}=2+7=9$

답 ⑤

3 $\sum_{k=1}^{15}(a_k-b_{k+1})=\sum_{k=1}^{15}a_k-\sum_{k=1}^{15}b_{k+1}$

$=\sum_{k=1}^{15}a_k-\sum_{k=2}^{16}b_k$

$=\sum_{k=1}^{15}a_k-\left(\sum_{k=1}^{15}b_k-b_1+b_{16}\right)$

$=\sum_{k=1}^{15}a_k-\sum_{k=1}^{15}b_k+b_1-b_{16}=20$

에서

$\sum_{k=1}^{15}a_k-\sum_{k=1}^{15}b_k=20+b_{16}-b_1$ …… ㉠

한편, $a_{16}=10+b_{16}$이므로

$\sum_{k=1}^{15}(a_{k+1}+b_k)=\sum_{k=1}^{15}a_{k+1}+\sum_{k=1}^{15}b_k$

$=\sum_{k=2}^{16}a_k+\sum_{k=1}^{15}b_k$

$=\left(\sum_{k=1}^{15}a_k-a_1+a_{16}\right)+\sum_{k=1}^{15}b_k$

$=\sum_{k=1}^{15}a_k-a_1+10+b_{16}+\sum_{k=1}^{15}b_k=30$

즉,

$\sum_{k=1}^{15}a_k+\sum_{k=1}^{15}b_k=20-b_{16}+a_1$ …… ㉡

$a_1=b_1$이므로 ㉠, ㉡을 변끼리 더하면

$2\sum_{k=1}^{15}a_k=40-b_1+a_1=40$

따라서 $\sum_{k=1}^{15}a_k=20$

답 ①

다른 풀이

$\sum_{k=1}^{15}(a_k-b_{k+1})=\sum_{k=1}^{15}a_k-\sum_{k=1}^{15}b_k+b_1-b_{16}=20$

$\sum_{k=1}^{15}(a_{k+1}+b_k)=\sum_{k=1}^{15}a_k+\sum_{k=1}^{15}b_k-a_1+a_{16}=30$

위의 두 등식을 변끼리 더하면

$2\sum_{k=1}^{15}a_k+b_1-a_1-b_{16}+a_{16}=50$

$a_1=b_1$이고 $a_{16}-b_{16}=10$이므로

$2\sum_{k=1}^{15} a_k=50-10=40$

따라서 $\sum_{k=1}^{15} a_k=20$

4 $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)$

$=a_{n+1}-a_1$

이고,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2-k}{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)$$
$$=\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k\right)$$
$$=\frac{1}{n+1}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$
$$=\frac{n(2n+1)}{6}-\frac{n}{2}$$
$$=\frac{n}{6}(2n+1-3)$$
$$=\frac{n(n-1)}{3}$$

이므로 $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2-k}{n+1}$에서

$a_{n+1}-a_1=\frac{n(n-1)}{3}$ ······ ㉠

㉠에 $n=19$를 대입하면

$a_{20}-a_1=\frac{19(19-1)}{3}=114$

$200-a_1=114$

따라서 $a_1=86$

답 ⑤

5 $b_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$

$$=\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right)+\left(\frac{1}{3\times4}-\frac{1}{4\times5}\right)+\cdots+\left\{\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right\}$$
$$=\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}$$
$$=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{12}b_k=\sum_{k=1}^{12}\left\{\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{6}-\sum_{k=1}^{12}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$$
$$=\frac{1}{6}\times12-\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{14}\right)+\left(\frac{1}{14}-\frac{1}{15}\right)\right\}$$
$$=2-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{15}\right)$$
$$=2-\frac{4}{15}=\frac{26}{15}$$

따라서 $p=15$, $q=26$이므로

$p+q=15+26=41$

답 41

6 $S_1=a_1=2$

이고, 모든 자연수 n에 대하여 $S_{n+2}=\sqrt{2}S_n$이므로

$S_3=\sqrt{2}S_1=2\sqrt{2}$

$S_5=\sqrt{2}S_3=4$

$S_7=\sqrt{2}S_5=4\sqrt{2}$

$S_9=\sqrt{2}S_7=8$

또한

$S_2=a_1+a_2=2-1=1$

이고, 모든 자연수 n에 대하여 $S_{n+2}=\sqrt{2}S_n$이므로

$S_4=\sqrt{2}S_2=\sqrt{2}$

$S_6=\sqrt{2}S_4=2$

따라서

$a_7+a_8+a_9=S_9-S_6$

$=8-2=6$

답 ②

7 $a_5=0$이고 5는 홀수이므로

$a_6=10-a_5=10-0=10$

6은 짝수이므로

$a_7=a_6+6=10+6=16$

한편, $a_5=0$이고 4는 짝수이므로 $a_5=a_4+4$에서

$a_4=a_5-4=0-4=-4$

3은 홀수이므로 $a_4=10-a_3$에서

$a_3=10-a_4=10-(-4)=14$

2는 짝수이므로 $a_3=a_2+2$에서

$a_2=a_3-2=14-2=12$

1은 홀수이므로 $a_2=10-a_1$에서

$a_1=10-a_2=10-12=-2$

따라서

$$\sum_{k=1}^{7} a_k=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7$$
$$=(-2)+12+14+(-4)+0+10+16$$
$$=46$$

답 ④

다른 풀이

5는 홀수이므로

$a_6=10-a_5=10-0=10$

6은 짝수이므로

$a_7=a_6+6=10+6=16$

한편, n이 홀수일 때 $a_{n+1}=10-a_n$, 즉

$a_n+a_{n+1}=10$

이므로

$a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=10$

따라서

$$\sum_{k=1}^{7} a_k=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+a_7$$
$$=10+10+10+16$$
$$=46$$

8 $a_1\le 0$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}\le a_n$이므로 a_n의 최댓값은 a_1이다.

이는 a_n의 최댓값이 81이라는 조건에 모순이므로

$a_1>0$

이때

$$a_{n+1}=\begin{cases}\sqrt{3}a_n & (1\le n\le 6)\\ a_n-3 & (n\ge 7)\end{cases}$$

이므로

$a_1<a_2<\cdots<a_7$이고, $a_7>a_8>a_9>\cdots$

그러므로 a_n의 최댓값은 a_7이다.

$a_7=a_1\times(\sqrt{3})^6=27a_1=81$에서

$a_1=3$

$a_1=a_m\ (m>1)$

즉, $a_m=3$을 만족시키는 자연수 m은 7보다 크다.

$m\ge 7$이면 $a_{m+1}-a_m=-3$이므로

$a_m-a_7=(m-7)\times(-3)$

즉, $3-81=-3(m-7)$에서

$m-7=26$

따라서 $m=33$

답 ④

9 $a_3=-2$, $b_4=4$이므로

$b_4=a_3+b_3=-2+b_3=4$

$b_3=6$

이때

$a_3=a_2-b_2=-2$

$b_3=a_2+b_2=6$

이므로 위의 두 등식을 연립하여 풀면

$a_2=2$, $b_2=4$

이때

$a_2=a_1-b_1=2$

$b_2=a_1+b_1=4$

이므로 위의 두 등식을 연립하여 풀면

$a_1=3$, $b_1=1$

한편,

$a_4=a_3-b_3=-2-6=-8$

이므로

$a_5=a_4-b_4=-8-4=-12$

$b_5=a_4+b_4=-8+4=-4$

따라서

$b_6=a_5+b_5=-12-4=-16$

이므로

$a_1+b_6=3+(-16)=-13$

답 ②

다른 풀이

$a_1=a$, $b_1=b$라 하고 a_n, b_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$을 표로 나타내면 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
a_n	a	$a-b$	$-2b$	$-2(a+b)$	$-4a$	$-4(a-b)$	$\cdots$
b_n	b	$a+b$	$2a$	$2(a-b)$	$-4b$	$-4(a+b)$	$\cdots$

$a_3=-2b=-2$이고 $b_4=2(a-b)=4$이므로

$a=3$, $b=1$

즉, $a_1=3$

이때

$b_6=-4(a+b)=-4(3+1)=-16$

이므로

$a_1+b_6=3+(-16)=-13$

참고

모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=a_n-b_n$, $b_{n+1}=a_n+b_n$

이므로

$a_{n+2}=a_{n+1}-b_{n+1}=-2b_n$,

$b_{n+2}=a_{n+1}+b_{n+1}=2a_n$

이고

$a_{n+3}=a_{n+2}-b_{n+2}=-2b_{n+1}=-2(a_n+b_n)$,
$b_{n+3}=a_{n+2}+b_{n+2}=2a_{n+1}=2(a_n-b_n)$
이다.
같은 방법으로
$a_{n+4}=a_{n+3}-b_{n+3}=-4a_n$,
$b_{n+4}=a_{n+3}+b_{n+3}=-4b_n$
이므로 모든 자연수 n에 대하여
$a_{n+4}=-4a_n$, $b_{n+4}=-4b_n$
이 성립한다.

10 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}(2n-2k+1)a_k$이므로

$a_2=\sum_{k=1}^{1}(2\times1-2k+1)a_k=a_1=1$

이고,

$$\begin{aligned}a_{n+2}&=\sum_{k=1}^{n+1}\{2(n+1)-2k+1\}a_k\\&=\sum_{k=1}^{n+1}(2n-2k+1+2)a_k\\&=\sum_{k=1}^{n+1}(2n-2k+1)a_k+2\sum_{k=1}^{n+1}a_k\\&=\sum_{k=1}^{n}(2n-2k+1)a_k+\{2n-2(n+1)+1\}a_{n+1}\\&\qquad+2\sum_{k=1}^{n+1}a_k\\&=\sum_{k=1}^{n}(2n-2k+1)a_k+\boxed{-1}\times a_{n+1}+2\sum_{k=1}^{n+1}a_k\\&=a_{n+1}-a_{n+1}+2\sum_{k=1}^{n+1}a_k\\&=2\sum_{k=1}^{n+1}a_k\end{aligned}$$

즉, 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=2\sum_{k=1}^{n}a_k$ …… ㉠

이므로

$$\begin{aligned}a_{n+2}&=2\sum_{k=1}^{n+1}a_k\\&=2\left(\sum_{k=1}^{n}a_k+a_{n+1}\right)\\&=2\sum_{k=1}^{n}a_k+2a_{n+1}\\&=a_{n+1}+2a_{n+1}\\&=\boxed{3}\times a_{n+1}\end{aligned}$$

따라서 3 이상의 모든 자연수 n에 대하여
$a_{n+1}=\boxed{3}\times a_n$
이고, ㉠에서

$a_3=2\sum_{k=1}^{2}a_k=2(a_1+a_2)=2(1+1)=\boxed{4}$

이므로 $n\geq3$일 때

$a_n=a_3\times3^{n-3}=\boxed{4\times3^{n-3}}$

이상에서 $p=-1$, $q=3$, $r=4$, $f(n)=4\times3^{n-3}$이므로
$f(p+q+r)=f(6)=4\times3^{6-3}=108$

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 93쪽

1 ④ **2** ⑤ **3** 86

1 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 -3이므로
$a_{n+1}-a_n=-3$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$
이때

$b_n=1-\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{a_n}$

이므로

$$\begin{aligned}b_nb_{n+1}&=\frac{3}{a_n}\times\frac{3}{a_{n+1}}\\&=\frac{9}{a_{n+1}-a_n}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\\&=\frac{9}{-3}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\\&=-3\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}b_kb_{k+1}&=-3\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)\\&=-3\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{1}{a_{10}}-\frac{1}{a_{11}}\right)\right\}\\&=-3\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{11}}\right)\end{aligned}$$

이때
$a_{11}=a_1+(11-1)\times(-3)=a_1-30$
이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}b_kb_{k+1}&=-3\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{11}}\right)\\&=-3\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1-30}\right)=-\frac{45}{28}\end{aligned}$$

$\dfrac{2}{a_1(a_1-30)}=-\dfrac{1}{28}$

$56=-a_1^2+30a_1$

$a_1^2-30a_1+56=0$

$(a_1-2)(a_1-28)=0$

$a_1=2$ 또는 $a_1=28$

따라서 모든 a_1의 값의 합은

$2+28=30$

답 ④

2 $q>0$이고 함수 $f(x)=p\sin q(x-r)$의 주기가 4이므로

$\dfrac{2\pi}{q}=4$

즉, $q=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$f(x)=p\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x-\dfrac{r}{2}\pi\right)$

$f(1)=1$에서

$p\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{r}{2}\pi\right)=1$이므로

$\cos\dfrac{r}{2}\pi=\dfrac{1}{p}$ …… ㉠

$f(2)=1$에서

$p\sin\left(\pi-\dfrac{r}{2}\pi\right)=1$이므로

$\sin\dfrac{r}{2}\pi=\dfrac{1}{p}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\sin^2\dfrac{r}{2}\pi+\cos^2\dfrac{r}{2}\pi=\left(\dfrac{1}{p}\right)^2+\left(\dfrac{1}{p}\right)^2=\dfrac{2}{p^2}=1$

이므로

$p^2=2$

$p>0$이므로

$p=\sqrt{2}$

㉠, ㉡에서

$\cos\dfrac{r}{2}\pi=\sin\dfrac{r}{2}\pi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ …… ㉢

이때

$f(3)=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi-\dfrac{r}{2}\pi\right)$

$=\sqrt{2}\left(-\cos\dfrac{r}{2}\pi\right)$

$=\sqrt{2}\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1$

$f(4)=\sqrt{2}\sin\left(2\pi-\dfrac{r}{2}\pi\right)$

$=\sqrt{2}\left(-\sin\dfrac{r}{2}\pi\right)$

$=\sqrt{2}\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1$

이고, 함수 $f(x)$의 주기가 4이므로

$f(5)=f(1)=1$, $f(6)=f(2)=1$

따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}f(k)=1+1-1-1+1+1=2$ …… ㉣

한편, $f(1)=f(2)=1$을 만족시키는 양수 r의 값은 ㉢을 만족시키는 양수 r의 값과 같고, ㉢을 만족시키는 양수 $\dfrac{r}{2}\pi$의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면

$\dfrac{\pi}{4}$, $2\pi+\dfrac{\pi}{4}$, $4\pi+\dfrac{\pi}{4}$, $6\pi+\dfrac{\pi}{4}$, $\cdots$

이므로 r의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하여 만든 수열 $\{a_n\}$은

$\dfrac{1}{2}$, $4+\dfrac{1}{2}$, $8+\dfrac{1}{2}$, $12+\dfrac{1}{2}$, $\cdots$

이다.

따라서

$\displaystyle\sum_{k=1}^{6}a_k=\dfrac{1}{2}+\left(4+\dfrac{1}{2}\right)+\left(8+\dfrac{1}{2}\right)+\left(12+\dfrac{1}{2}\right)+\left(16+\dfrac{1}{2}\right)+\left(20+\dfrac{1}{2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times6+(4+8+12+16+20)$

$=3+60=63$ …… ㉤

이므로 ㉣, ㉤에서

$\displaystyle\sum_{k=1}^{6}f(k)+\sum_{k=1}^{6}a_k=2+63=65$

답 ⑤

3 정수 전체의 집합의 부분집합 $A=\{4k\,|\,k$는 자연수$\}$에 대하여

$a_{n+1}\in A$이면

$a_n=-\dfrac{a_{n+1}}{4}$ (단, $a_n<0$) 또는 $a_n=a_{n+1}+n$ (단, $a_n\geq0$) …… ㉠

이고, $a_{n+1}\in A^C$이면

$a_{n+1}=a_n-n$에서

$a_n=a_{n+1}+n$ (단, $a_n\geq0$) …… ㉡

이다.

$a_{10}=20$이므로 ㉠에서

$a_9=-\dfrac{a_{10}}{4}=-5$ 또는 $a_9=a_{10}+9=29$

(ⅰ) $a_9=-5$인 경우

㉡에서

$a_8=a_9+8=3$

㉡에서

$a_7=a_8+7=10$

㉡에서

$a_6=a_7+6=16$

㉠에서

$a_5=-\frac{a_6}{4}=-4$ 또는 $a_5=a_6+5=21$

(ⅰ)-① $a_5=-4$인 경우

㉡에서

$a_4=a_5+4=0$

㉡에서

$a_3=a_4+3=3$

㉡에서

$a_2=a_3+2=5$

㉡에서

$a_1=a_2+1=6$

(ⅰ)-② $a_5=21$인 경우

㉡에서

$a_4=a_5+4=25$

㉡에서

$a_3=a_4+3=28$

㉠에서

$a_2=-\frac{a_3}{4}=-7$ 또는 $a_2=a_3+2=30$

이때 $a_2=-7$이면 ㉡에서

$a_1=a_2+1=-6$

이어야 하는데, 이는 $a_1\geq 0$을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a_2=30$이므로 ㉡에서

$a_1=a_2+1=31$

(ⅱ) $a_9=29$인 경우

㉡에서

$a_8=a_9+8=37$

㉡에서

$a_7=a_8+7=44$

㉠에서

$a_6=-\frac{a_7}{4}=-11$ 또는 $a_6=a_7+6=50$

이때 $a_6=-11$이면 ㉡에서

$a_5=a_6+5=-6$

이어야 하는데, 이는 $a_5\geq 0$을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a_6=50$

㉡에서

$a_5=a_6+5=55$

㉡에서

$a_4=a_5+4=59$

㉡에서

$a_3=a_4+3=62$

㉡에서

$a_2=a_3+2=64$

㉠에서

$a_1=-\frac{a_2}{4}=-16$ 또는 $a_1=a_2+1=65$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 a_1의 값의 합은

$6+31+(-16)+65=86$

답 86