수능특강

수학영역 | **확률과 통계**

정답과 풀이

01 여러 가지 순열

유제 본문 5~9쪽

1 30 **2** ① **3** 196 **4** 76 **5** 180 **6** ②

1 서로 다른 5가지 색 중에서 정사각형에 칠할 1가지 색을 택하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_1=5$

나머지 4가지 색으로 4개의 정삼각형을 칠하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\times6=30$

답 30

2 1학년 학생 1명과 2학년 학생 2명을 묶어 한 명으로 생각하고, 이와 3학년 학생 3명이 원형으로 앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

2학년 학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times2=12$

답 ①

3 (i) 0을 한 개 포함하는 경우

0을 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리 중 한 곳에 놓는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1=3$

나머지 세 자리에 들어갈 숫자를 택하는 경우의 수는 4개 중에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_4\Pi_3=4^3=64$

즉, 0을 한 개 포함하고 있는 네 자리의 자연수의 개수는

$3\times64=192$

(ii) 0을 세 개 포함하는 경우

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리가 모두 0이어야 하므로 천의 자리에 들어갈 숫자를 택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1=4$

즉, 0을 세 개 포함하고 있는 네 자리의 자연수의 개수는 4이다.

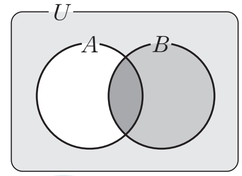
(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$192+4=196$

답 196

4 $n(A\cap B^C)=1$이므로 집합 $A\cap B^C$의 원소를 정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1=4$



집합 $U-(A\cap B^C)$의 세 원소는 각각 세 집합 $A\cap B$, $A^C\cap B$, $(A\cup B)^C$ 중 하나의 원소이므로 그 집합을 정하는 경우의 수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

이 중에서 $A\cap B=\varnothing$인 경우의 수는 집합 $U-(A\cap B^C)$의 세 원소가 각각 두 집합 $A^C\cap B$, $(A\cup B)^C$ 중 하나의 원소인 경우의 수이므로

${}_2\Pi_3=2^3=8$

따라서 구하는 모든 순서쌍 (A, B)의 개수는

$4\times(27-8)=76$

답 76

5 4의 약수인 1, 2, 4가 적혀 있는 모든 카드는 5가 적혀 있는 카드보다 왼쪽에 놓이도록 나열하여야 하므로

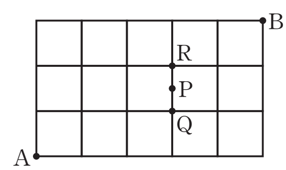
구하는 경우의 수는 1, 2, 4, 5가 적혀 있는 4장의 카드를 모두 같은 것으로 보고 6장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수와 1, 2, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수의 곱과 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{4!}\times3!=30\times6=180$

답 180

6 A지점에서 B지점까지 최단 거리로 갈 때 P지점을 지나려면 Q지점과 R지점을 모두 지나야 한다.



A지점에서 B지점까지 최단 거리로 가려면 오른쪽으로 5칸, 위쪽으로 3칸 이동해야 하므로 이 경우의 수는

$\dfrac{8!}{5!\times3!}=56$

A지점에서 Q지점과 R지점을 모두 지나 B지점까지 최단 거리로 가려면 오른쪽으로 3칸, 위쪽으로 1칸 이동한 후, 위쪽으로 1칸 이동하고, 오른쪽으로 2칸, 위쪽으로 1칸 이동해야 하므로 이 경우의 수는

$\dfrac{4!}{3!}\times1\times\dfrac{3!}{2!}=4\times1\times3=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$56-12=44$

답 ②

Level 1 기초 연습 본문 10~11쪽

1 ③	**2** ④	**3** ⑤	**4** 4	**5** ④	**6** ①
7 750	**8** 90				

1 ${}_2\Pi_{2n}=2^{2n}=4^n$, ${}_4\Pi_n=4^n$이므로

${}_2\Pi_{2n}+{}_4\Pi_n=128$에서

$4^n+4^n=128$, $2\times 4^n=128$

$4^n=64$

따라서 $n=3$

답 ③

2 M을 양 끝에 나열하는 경우의 수는 1

나머지 6개의 문자 R, E, E, B, E, R을 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!\times 3!}=60$

따라서 구하는 경우의 수는

$1\times 60=60$

답 ④

3 7명의 학생 중에서 4명의 학생을 선택하는 경우의 수는

${}_7C_4={}_7C_3=35$

4명의 학생이 일정한 간격으로 원 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$35\times 6=210$

답 ⑤

4 축구공 1개, 농구공 2개, 배구공 n개를 $(n+3)$명의 학생에게 1개씩 나누어 주는 경우의 수는 축구공 1개, 농구공 2개, 배구공 n개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{(n+3)!}{2!\times n!}=\dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)}{2}$

이 경우의 수가 $15n+45$이므로

$\dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)}{2}=15n+45$

$(n+3)(n+2)(n+1)=30(n+3)$

n은 자연수이므로

$(n+2)(n+1)=30$

$n^2+3n-28=0$, $(n+7)(n-4)=0$

따라서 $n=4$

답 4

5 교사 2명을 묶어 한 명으로 생각하면 6명이 원 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

교사 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\times 2=240$

답 ④

6 서로 다른 공책 5권을 3명의 학생 A, B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

${}_3\Pi_5=3^5=243$

서로 다른 공책 5권을 2명의 학생 B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

${}_2\Pi_5=2^5=32$

따라서 구하는 경우의 수는

$243-32=211$

답 ①

7 만의 자리에 들어갈 수 있는 숫자는 1, 2, 3이므로 만의 자리에 들어갈 숫자를 택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

일의 자리에 들어갈 수 있는 숫자는 2, 4이므로 일의 자리에 들어갈 숫자를 택하는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

나머지 세 자리에 들어갈 숫자를 택하는 경우의 수는 서로 다른 5개 중에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_5\Pi_3=5^3=125$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$3\times 2\times 125=750$

답 750

8 양 끝에 소문자를 먼저 나열하는 경우는

$a\square\square\square\square\square a$, $a\square\square\square\square\square b$, $b\square\square\square\square\square a$

이므로 경우의 수는 3이다.

위에서 나열하지 않은 소문자 1개와 X, X, Y, Y를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!\times 2!}=30$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times 30=90$

답 90

Level 2 기본 연습 본문 12~13쪽

1 ⑤ **2** ② **3** ⑤ **4** ③ **5** ④ **6** ①
7 ⑤ **8** 96

1 n이 홀수이려면 일의 자리의 수가 홀수이어야 하므로 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 5개를 택해 일렬로 나열하여 만든 다섯 자리의 자연수 중에서 홀수인 것의 개수는

$_4\Pi_4\times2=4^4\times2=512$

이 중에서 각 자리의 수의 곱이 홀수인 것은 각 자리의 수가 1 또는 3이므로 그 개수는

$_2\Pi_5=2^5=32$

따라서 구하는 자연수 n의 개수는

$512-32=480$

답 ⑤

2 숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 택한 네 수의 합이 4인 경우는

0, 0, 2, 2 또는 0, 1, 1, 2 또는 1, 1, 1, 1이다.

(i) 0, 0, 2, 2의 경우

0, 0, 2, 2를 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수는 천의 자리의 수가 항상 2이어야 하므로 그 개수는 나머지 숫자 0, 0, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

즉, $\dfrac{3!}{2!}=3$

(ii) 0, 1, 1, 2의 경우

0, 1, 1, 2를 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는 0, 1, 1, 2를 일렬로 나열하는 모든 경우의 수에서 천의 자리의 수가 0인 경우의 수, 즉 1, 1, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로

$\dfrac{4!}{2!}-\dfrac{3!}{2!}=12-3=9$

(iii) 1, 1, 1, 1의 경우

1, 1, 1, 1을 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수는 1111이므로 그 개수는 1이다.

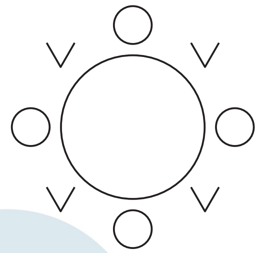
(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$3+9+1=13$

답 ②

3 1학년 학생 2명을 묶어 한 명으로 생각하고, 이와 2학년 학생 3명이 원형으로 앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$



이때 그림의 ∨ 표시된 4곳 중 3곳에 3학년 학생 3명이 앉는 경우의 수는

$_4P_3=24$

1학년 학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times24\times2=288$

답 ⑤

4 8장의 카드 중에서 1이 적혀 있는 카드가 3장, 3이 적혀 있는 카드가 2장 있으므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) 홀수 번째 자리에 1이 적혀 있는 카드 3장과 3이 적혀 있는 카드 1장이 놓이도록 나열하는 경우

1이 적혀 있는 카드 3장과 3이 적혀 있는 카드 1장을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{3!}=4$

나머지 2가 적혀 있는 카드 3장과 3이 적혀 있는 카드 1장을 일렬로 나열하여 왼쪽부터 짝수 번째 자리에 놓으면 되므로 그 경우의 수는

$\dfrac{4!}{3!}=4$

즉, 홀수 번째 자리에 1이 적혀 있는 카드 3장과 3이 적혀 있는 카드 1장이 놓이도록 8장의 카드를 나열하는 경우의 수는

$4\times4=16$

(ii) 홀수 번째 자리에 1이 적혀 있는 카드 2장과 3이 적혀 있는 카드 2장이 놓이도록 나열하는 경우

1이 적혀 있는 카드 2장과 3이 적혀 있는 카드 2장을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$

나머지 1이 적혀 있는 카드 1장과 2가 적혀 있는 카드 3장을 일렬로 나열하여 왼쪽부터 짝수 번째 자리에 놓으면 되므로 그 경우의 수는

$\dfrac{4!}{3!}=4$

즉, 홀수 번째 자리에 1이 적혀 있는 카드 2장과 3이 적혀 있는 카드 2장이 놓이도록 8장의 카드를 나열하는 경우의 수는

$6\times4=24$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$16+24=40$

답 ③

5 집합 X의 원소 중에서 4의 약수는 2, 4이고 6의 약수는 2, 3, 6이다.

조건 (가)에서 $f(2)\le2$, 조건 (나)에서 $f(2)\ge2$이므로 $f(2)=2$이다.

$f(4)\le2$이므로 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 2

$f(3)\ge2$, $f(6)\ge2$이므로 $f(3)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 공역의 원소 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 2개를 택해 정의역의 원소 3, 6에 각각 대응하도록 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_2=4^2=16$

$f(5)$, $f(7)$은 공역의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 2개를 택해 정의역의 원소 5, 7에 각각 대응하도록 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$2\times16\times25=800$

답 ④

6 노란 구슬이 2개, 파란 구슬이 5개이므로 $a>b$를 만족시키는 경우는

$a=1$, $b=0$ 또는 $a=2$, $b=0$ 또는 $a=2$, $b=1$

이다.

(i) $a=1$, $b=0$인 경우

빨간 구슬보다 왼쪽에 노란 구슬 1개와 파란 구슬 5개를 나열하고, 빨간 구슬보다 오른쪽에 노란 구슬 1개를 나열하여야 하므로 이 경우의 수는

$\dfrac{6!}{5!}\times1=6\times1=6$

(ii) $a=2$, $b=0$인 경우

빨간 구슬보다 왼쪽에 노란 구슬 2개와 파란 구슬 5개를 나열하고, 빨간 구슬보다 오른쪽에는 구슬을 나열하지 않아야 하므로 이 경우의 수는

$\dfrac{7!}{2!\times5!}=21$

(iii) $a=2$, $b=1$인 경우

빨간 구슬보다 왼쪽에 노란 구슬 2개와 파란 구슬 4개를 나열하고, 빨간 구슬보다 오른쪽에 파란 구슬 1개를 나열하여야 하므로 이 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!\times4!}\times1=15\times1=15$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$6+21+15=42$

답 ①

7 상자 A에 들어 있는 공의 개수를 a, 상자 B에 들어 있는 공의 개수를 b라 하면 조건 (가)에 의하여 $a+b=2$이므로 두 수 a, b는

$a=0$, $b=2$ 또는 $a=1$, $b=1$ 또는 $a=2$, $b=0$

이다.

(i) $a=0$, $b=2$인 경우

2개의 공을 택해 상자 B에 넣는 경우의 수는

${}_6C_2=15$

조건 (나)에 의하여 나머지 4개의 공은 두 상자 C, D에 남김없이 나누어 넣어야 하고, 이때 두 상자 C, D에는 각각 적어도 1개의 공을 넣어야 하므로 이 경우의 수는

${}_2\Pi_4-2=2^4-2=14$

즉, $a=0$, $b=2$인 경우 조건을 만족시키도록 나누어 넣는 경우의 수는

$15\times14=210$

(ii) $a=1$, $b=1$인 경우

2개의 공을 택해 상자 A와 상자 B에 각각 1개씩 넣는 경우의 수는

${}_6C_2\times2!=30$

조건 (나)에 의하여 나머지 4개의 공은 두 상자 C, D 중에서 1개의 상자에만 공을 넣어야 하므로 이 경우의 수는

${}_2C_1=2$

즉, $a=1$, $b=1$인 경우 조건을 만족시키도록 나누어 넣는 경우의 수는

$30\times2=60$

(iii) $a=2$, $b=0$인 경우

(i)과 마찬가지로 경우의 수는 210

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$210+60+210=480$

답 ⑤

8 두 홀수의 곱은 홀수이므로 조건을 만족시키려면 각 변에 놓인 두 개의 접시에는 홀수가 적혀 있는 공 한 개와 짝수가 적혀 있는 공 한 개를 담아야 한다.

1부터 6까지의 자연수를 홀수 한 개와 짝수 한 개씩 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

$3!=6$

예를 들어 1부터 6까지의 자연수를 1과 2, 3과 4, 5와 6의 세 묶음으로 나누었다고 하면, 각 변에 놓인 두 개의 접시에 1과 2, 3과 4, 5와 6이 적혀 있는 공을 담으면 된다.

이때 1과 2, 3과 4, 5와 6이 적혀 있는 공을 담은 접시를 각각 하나로 생각하여 서로 다른 3개를 정삼각형의 각 변에 배열하는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

각 변에 놓인 두 개의 접시에 담은 공의 위치를 서로 바꾸는 경우의 수는

$2!\times2!\times2!=8$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times2\times8=96$

답 96

Level 3 실력 완성 본문 14쪽

1 ① **2** ② **3** 756

1 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 합이 모두 6 이상이려면 1이 적혀 있는 의자의 양 옆에는 5 또는 6 또는 7이 적혀 있는 의자를 배열해야 하고, 2가 적혀 있는 의자와 3이 적혀 있는 의자를 이웃하지 않도록 배열해야 한다.

1이 적혀 있는 의자의 양 옆에 배열할 의자 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2=3$ …… ㉠

예를 들어 1이 적혀 있는 의자의 양 옆에 5가 적혀 있는 의자와 6이 적혀 있는 의자를 배열한다고 하자.

1이 적혀 있는 의자와 5가 적혀 있는 의자와 6이 적혀 있는 의자를 묶어 1개의 의자로 생각하고, 이와 나머지 4개의 의자를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

각각의 경우에 대하여 5가 적혀 있는 의자와 6이 적혀 있는 의자를 배열하는 경우의 수는

$2!=2$

즉, 1이 적혀 있는 의자의 양 옆에 5가 적혀 있는 의자와 6이 적혀 있는 의자를 배열하는 경우의 수는

$24\times2=48$ …… ㉡

한편, 1이 적혀 있는 의자와 5가 적혀 있는 의자와 6이 적혀 있는 의자를 묶어 1개의 의자로 생각하고, 2가 적혀 있는 의자와 3이 적혀 있는 의자를 묶어 1개의 의자로 생각하여 이와 나머지 2개의 의자를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

각각의 경우에 대하여 5가 적혀 있는 의자와 6이 적혀 있는 의자를 배열하는 경우의 수는

$2!=2$

이고, 2가 적혀 있는 의자와 3이 적혀 있는 의자를 배열하는 경우의 수도

$2!=2$

이다.

즉, 1이 적혀 있는 의자의 양 옆에 5가 적혀 있는 의자와 6이 적혀 있는 의자를 배열하고, 동시에 2가 적혀 있는 의자와 3이 적혀 있는 의자를 이웃하게 배열하는 경우의 수는

$6\times2\times2=24$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 1이 적혀 있는 의자의 양 옆에 5가 적혀 있는 의자와 6이 적혀 있는 의자를 배열하고, 동시에 2가 적혀 있는 의자와 3이 적혀 있는 의자를 이웃하지 않도록 배열하는 경우의 수는

$48-24=24$ …… ㉣

따라서 ㉠, ㉣에서 구하는 경우의 수는

$3\times24=72$

답 ①

2 일의 자리의 수가 반드시 홀수이어야 하므로 일의 자리의 수는 3 또는 5이다.

(i) 일의 자리의 수가 3인 경우

조건 (가)에 의하여 3을 3번 이상 선택하여야 하므로 5는 선택할 수 없다.

ⓐ 3을 3번 선택하는 경우

나머지 두 수는 짝수 2, 4, 6 중에서 중복을 허락하여 두 개를 선택할 수 있다. 그러나 조건 (나)에 의하여 2는 1번 이하 선택하여야 한다.

선택한 두 짝수가 같은 경우는 $\{4, 4\}$, $\{6, 6\}$이므로 경우의 수는 2이다.

각각의 경우에 대하여 일의 자리의 수는 3이어야 하므로 나머지 숫자 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$

선택한 두 짝수가 다른 경우는 $\{2, 4\}$, $\{2, 6\}$, $\{4, 6\}$이므로 경우의 수는 3이다.

각각의 경우에 대하여 일의 자리의 수는 3이어야 하므로 나머지 숫자 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

즉, 이 경우의 홀수의 개수는

$2\times6+3\times12=48$

ⓑ 3을 4번 선택하는 경우

나머지 하나는 짝수 2, 4, 6 중에서 하나를 선택하므로 그 경우의 수는

${}_3C_1=3$

각각의 경우에 대하여 일의 자리의 수는 3이어야 하므로 나머지 숫자 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

즉, 이 경우의 홀수의 개수는

$3\times4=12$

ⓒ 3을 5번 선택하는 경우

홀수는 33333이므로 그 개수는 1이다.

(ii) 일의 자리의 수가 5인 경우

조건 (가)에 의하여 5를 5번 이상 선택하므로 만들 수 있는 홀수는 55555뿐이다.

(i), (ii)에서 구하는 홀수의 개수는

$(48+12+1)+1=62$

답 ②

3 $f(2)=a$, $f(3)=b$라 하자.

(i) $f(2)\neq f(3)$인 경우

조건 (가)를 만족시키도록 하는 집합 $\{a, b\}$는

$\{2, 3\}$, $\{2, 6\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 6\}$, $\{4, 6\}$, $\{5, 6\}$

이므로 a와 b의 값을 정하는 경우의 수는

$6\times2!=12$

조건 (나)에서 함수 f의 치역의 원소의 개수가 3이므로 함수 f의 치역을 집합 $\{a, b, c\}$라 하자. c의 값을 정하는 경우의 수는 집합 $X-\{a, b\}$의 원소 중 1개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_3C_1=3$

이때 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값으로 가능한 것은 a, b, c이고 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값 중에서 반드시 c가 적어도 한 개 있어야 하므로 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3\Pi_3-{}_2\Pi_3=3^3-2^3=19$

즉, $f(2)\neq f(3)$인 경우 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$12\times3\times19=684$

(ii) $f(2)=f(3)$인 경우

조건 (가)를 만족시키려면 $a=b=6$이어야 하므로 a와 b의 값을 정하는 경우의 수는

1

조건 (나)에서 함수 f의 치역의 원소의 개수가 3이므로 함수 f의 치역을 집합 $\{d, e, 6\}$이라 하자. d와 e의 값을 정하는 경우의 수는 집합 $X-\{6\}$의 원소 중 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_2=6$

ⓐ $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$ 중 6이 있는 경우

함수 f의 치역의 집합이 $\{d, e, 6\}$이어야 하므로 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값이 서로 다르고 $\{f(4), f(5), f(6)\}=\{d, e, 6\}$이어야 한다.

즉, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는

$3!=6$

ⓑ $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$ 중 어느 것도 6이 아닌 경우

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값 중 2개는 d이고 나머지 1개는 e이거나, 2개는 e이고 나머지 1개는 d이어야 한다.

즉, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3C_2\times2=3\times2=6$

ⓐ, ⓑ에서 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는

$6+6=12$

즉, $f(2)=f(3)$인 경우 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$1\times6\times12=72$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$684+72=756$

답 756

참고

(ii)에서 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 다음과 같이 구할 수도 있다.

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값으로 가능한 것은 d, e, 6이고 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값 중에서 반드시 d와 e가 적어도 한 개씩 있어야 한다.

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값이 d 또는 e 또는 6인 함수 f의 개수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

이때 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값 중에서 어느 것도 d가 아닌 함수 f의 개수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값 중에서 어느 것도 e가 아닌 함수 f의 개수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값 중에서 어느 것도 d가 아니고 동시에 어느 것도 e가 아닌 함수 f의 개수는

${}_1\Pi_3=1^3=1$

이므로 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는

$27-(8+8-1)=12$

02 중복조합과 이항정리

유제					본문 16~22쪽
1 210	**2** 435	**3** ④	**4** 40	**5** 720	**6** ⑤
7 ②	**8** ④				

1 3명의 학생에게 흰색 마스크를 1개씩 먼저 나누어 준 후 남은 3개의 흰색 마스크를 3명에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

3명의 학생에게 검은색 마스크를 1개씩 먼저 나누어 준 후 남은 5개의 검은색 마스크를 3명에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times21=210$

답 210

2 (i) A가 흰 공 1개를 받는 경우

나머지 흰 공 4개를 B, C, D에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

검은 공 4개를 B, C, D에게 나누어 주는 경우의 수도

$_3H_4=15$

즉, A가 흰 공 1개를 받도록 나누어 주는 경우의 수는

$15\times15=225$

(ii) A가 검은 공 1개를 받는 경우

흰 공 5개를 B, C, D에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

나머지 검은 공 3개를 B, C, D에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

즉, A가 검은 공 1개를 받도록 나누어 주는 경우의 수는

$21\times10=210$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$225+210=435$

답 435

3 각 자리의 수가 0이 아닌 다섯 자리의 자연수에서 만의 자리의 수부터 일의 자리의 수까지 차례로 a, b, c, d, e라 하면 각 자리의 수의 합이 10인 자연수의 개수는 방정식 $a+b+c+d+e=10$을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수와 같다.

음이 아닌 정수 a', b', c', d', e'에 대하여

$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$, $e=e'+1$이라 하면

$(a'+1)+(b'+1)+(c'+1)+(d'+1)+(e'+1)=10$

에서

$a'+b'+c'+d'+e'=5$

따라서 구하는 자연수의 개수는 방정식 $a'+b'+c'+d'+e'=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d', e'의 모든 순서쌍 (a', b', c', d', e')의 개수와 같으므로

$_5H_5={}_{5+5-1}C_5={}_9C_5={}_9C_4=\dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$

답 ④

4 a, b, c, d 중 한 개를 택하여 4로 정하는 경우의 수는

$_4C_1=4$

예를 들어 $a=4$라 하면

$a+b+c+d=7$에서 $b+c+d=3$ …… ㉠

이때 ㉠을 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c, d는 모두 3 이하이고, ㉠을 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c, d의 순서쌍 (b, c, d)의 개수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

따라서 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$4\times10=40$

답 40

5 다항식 $(3x+2y)^5$의 전개식의 일반항은

$_5C_r(3x)^{5-r}(2y)^r={}_5C_r\times3^{5-r}\times2^r\times x^{5-r}\times y^r$

(단, $r=0$, 1, 2, 3, 4, 5)

x^2y^3의 계수는 $r=3$일 때

$_5C_3\times3^{5-3}\times2^3=10\times9\times8=720$

답 720

6 $_5C_0\times2^5-{}_5C_1\times\dfrac{2^4}{3}+{}_5C_2\times\dfrac{2^3}{3^2}-{}_5C_3\times\dfrac{2^2}{3^3}$

$+{}_5C_4\times\dfrac{2}{3^4}-{}_5C_5\times\dfrac{1}{3^5}$

$$={}_5C_0\times2^{5-0}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^0+{}_5C_1\times2^{5-1}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^1$$
$$+{}_5C_2\times2^{5-2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2+{}_5C_3\times2^{5-3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^3$$
$$+{}_5C_4\times2^{5-4}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^4+{}_5C_5\times2^{5-5}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^5$$
$$=\left\{2+\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}^5$$
$$=\frac{5^5}{3^5}$$

답 ⑤

7 ${}_{13}C_1+{}_{13}C_3+{}_{13}C_5+\cdots+{}_{13}C_{13}=2^{13-1}=2^{12}$이므로

$\log_4({}_{13}C_1+{}_{13}C_3+{}_{13}C_5+\cdots+{}_{13}C_{13})=\log_4 2^{12}=\log_4 4^6$

$=6\log_4 4=6$

답 ②

8 원소의 개수가 10인 집합 A에 대하여 집합 A의 부분집합 중에서 원소의 개수가 5 이하인 부분집합의 개수는

${}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+{}_{10}C_3+{}_{10}C_4+{}_{10}C_5$

이때

${}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_{10}=2^{10}=1024$이고

${}_{10}C_0={}_{10}C_{10}$, ${}_{10}C_1={}_{10}C_9$, ${}_{10}C_2={}_{10}C_8$, ${}_{10}C_3={}_{10}C_7$, ${}_{10}C_4={}_{10}C_6$

이므로

$2({}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+{}_{10}C_3+{}_{10}C_4)+{}_{10}C_5=1024$

따라서

${}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+{}_{10}C_3+{}_{10}C_4+{}_{10}C_5$

$=\dfrac{1024+{}_{10}C_5}{2}$

$=\dfrac{1024+252}{2}$

$=638$

답 ④

Level 1 기초 연습

본문 23~24쪽

1 ① **2** ④ **3** ⑤ **4** ④ **5** ③ **6** ②
7 70 **8** ③

1 ${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

${}_4H_5={}_{4+5-1}C_5={}_8C_5={}_8C_3=56$

따라서 ${}_3H_4+{}_4H_5=15+56=71$

답 ①

2 다항식 $(x-4)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r x^{5-r}(-4)^r$ (단, $r=0, 1, 2, 3, 4, 5$)

x^3의 계수는 $r=2$일 때

${}_5C_2\times(-4)^2=10\times16=160$

답 ④

3 a, b, c가 홀수인 자연수이므로 방정식 $a+b+c=13$에서

$a=2a'+1$, $b=2b'+1$, $c=2c'+1$ (a', b', c'은 음이 아닌 정수)라 하면

$(2a'+1)+(2b'+1)+(2c'+1)=13$

$a'+b'+c'=5$ …… ㉠

따라서 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 방정식 ㉠을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c'의 모든 순서쌍 (a', b', c')의 개수와 같으므로

${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

답 ⑤

4 ${}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_4+\cdots+{}_{2n}C_{2n}=2^{2n-1}$

이므로 주어진 부등식은

$100<2^{2n-1}<1000$

이때 $2^6<100<2^7$, $2^9<1000<2^{10}$에서

$6.\times\times<2n-1<9.\times\times$이고 $2n-1$은 홀수이므로

$2n-1=7$ 또는 $2n-1=9$

$n=4$ 또는 $n=5$

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$4+5=9$

답 ④

5 $(3a^2+4b)(2a-b)^5=3a^2(2a-b)^5+4b(2a-b)^5$

이때 다항식 $(2a-b)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(2a)^{5-r}(-b)^r={}_5C_r\times2^{5-r}\times(-1)^r\times a^{5-r}\times b^r$

(단, $r=0, 1, 2, 3, 4, 5$)

이므로 $4b$와 다항식 $(2a-b)^5$의 전개식의 곱에서 a^3b^4항은 존재하지 않는다.

즉, 다항식 $(3a^2+4b)(2a-b)^5$의 전개식에서 a^3b^4의 계수는 $3a^2$에서 a^2의 계수인 3과 다항식 $(2a-b)^5$의 전개식에서 ab^4의 계수를 곱한 값이다.

ab^4의 계수는 $r=4$일 때

${}_5C_4\times2^{5-4}\times(-1)^4=5\times2\times1=10$

따라서 다항식 $(3a^2+4b)(2a-b)^5$의 전개식에서 a^3b^4의 계수는

$3\times10=30$

답 ③

6 $1\le a\le b\le c\le d\le 6$을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 1부터 6까지의 6개의 자연수 중에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_6\mathrm{H}_4={}_{6+4-1}\mathrm{C}_4={}_9\mathrm{C}_4=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$$

$1\le a\le b=c\le d\le 6$을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 $1\le a\le b\le d\le 6$을 만족시키는 자연수 a, b, d의 모든 순서쌍 (a, b, d)의 개수와 같고, 이는 1부터 6까지의 6개의 자연수 중에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_6\mathrm{H}_3={}_{6+3-1}\mathrm{C}_3={}_8\mathrm{C}_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

따라서 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$126-56=70$

답 ②

7 (i) $a=0$인 경우

$5a+b+c+d=9$에서 $b+c+d=9$

방정식 $b+c+d=9$를 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c, d의 순서쌍 (b, c, d)의 개수는

${}_3\mathrm{H}_9={}_{3+9-1}\mathrm{C}_9={}_{11}\mathrm{C}_9={}_{11}\mathrm{C}_2=55$

(ii) $a=1$인 경우

$5a+b+c+d=9$에서 $b+c+d=4$

방정식 $b+c+d=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c, d의 순서쌍 (b, c, d)의 개수는

${}_3\mathrm{H}_4={}_{3+4-1}\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$

(i), (ii)에서 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$55+15=70$

답 70

8 다항식 $(1+x)^n$의 전개식의 일반항은

${}_n\mathrm{C}_r\times1^{n-r}\times x^r={}_n\mathrm{C}_r x^r$ (단, $r=0, 1, 2, \cdots, n$)

이므로 $n\ge4$일 때 다항식 $(1+x)^n$의 전개식에서 x^4의 계수는 ${}_n\mathrm{C}_4$이다.

$(1+x)^4+(1+x)^5+(1+x)^6+(1+x)^7+(1+x)^8$의 전개식에서 x^4의 계수는

${}_4\mathrm{C}_4+{}_5\mathrm{C}_4+{}_6\mathrm{C}_4+{}_7\mathrm{C}_4+{}_8\mathrm{C}_4$

$={}_4\mathrm{C}_0+{}_5\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_2+{}_7\mathrm{C}_3+{}_8\mathrm{C}_4$

$={}_5\mathrm{C}_0+{}_5\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_2+{}_7\mathrm{C}_3+{}_8\mathrm{C}_4$

$={}_6\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_2+{}_7\mathrm{C}_3+{}_8\mathrm{C}_4$

$={}_7\mathrm{C}_2+{}_7\mathrm{C}_3+{}_8\mathrm{C}_4$

$={}_8\mathrm{C}_3+{}_8\mathrm{C}_4$

$={}_9\mathrm{C}_4$

$=126$

답 ③

참고

$1\le r\le n-1$인 두 자연수 n, r에 대하여

${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_r$

Level 2 기본 연습 본문 25~26쪽

1 ②	**2** ①	**3** ③	**4** ③	**5** ④	**6** 153
7 656	**8** ④				

1 $a\times b\times c$가 홀수이면 a, b, c가 모두 홀수이다.

그러므로 $a+b+c$도 홀수이고

$d=11-(a+b+c)$에서 d는 짝수이다.

$a+b+c+d=11$에서 음이 아닌 정수 a', b', c', d'에 대하여

$a=2a'+1$, $b=2b'+1$, $c=2c'+1$, $d=2d'+2$라 하면

$(2a'+1)+(2b'+1)+(2c'+1)+(2d'+2)=11$

$a'+b'+c'+d'=3$

따라서 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 방정식 $a'+b'+c'+d'=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 모든 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_3={}_{4+3-1}\mathrm{C}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$

답 ②

2 다항식 $(ax-2)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6\mathrm{C}_r(ax)^{6-r}(-2)^r={}_6\mathrm{C}_r\times a^{6-r}\times(-2)^r\times x^{6-r}$

(단, $r=0, 1, 2, \cdots, 6$)

x의 계수는 $r=5$일 때

${}_6\mathrm{C}_5\times a\times(-2)^5=-192a$

x의 계수가 양수이므로

$-192a>0$에서 $a<0$

x^2의 계수는 $r=4$일 때

${}_6\mathrm{C}_4\times a^2\times(-2)^4=240a^2$이고

x^3의 계수는 $r=3$일 때

${}_6\mathrm{C}_3\times a^3\times(-2)^3=-160a^3$이므로

$240a^2+(-160a^3)=80$에서

$2a^3-3a^2+1=0$

$(2a+1)(a-1)^2=0$

$a<0$이므로 $a=-\dfrac{1}{2}$

답 ①

3 같은 종류의 공책 13권을 A, B, C, D에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 13개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_{13}={}_{4+13-1}C_{13}={}_{16}C_{13}={}_{16}C_3=\frac{16\times15\times14}{3\times2\times1}=560$$

이 중에서 4명의 학생 모두 공책을 3권 이상 받으려면 한 명이 4권, 나머지 3명이 3권씩 받아야 하므로 그 경우의 수는

${}_4C_1=4$

따라서 구하는 경우의 수는

$560-4=556$

답 ③

4 ${}_{11}C_n=\dfrac{11!}{n!\times(11-n)!}$이므로

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{10!}{n!\times(11-n)!}$$
$$=\frac{1}{11}\times\sum_{n=1}^{10}\frac{11!}{n!\times(11-n)!}$$
$$=\frac{1}{11}\times\sum_{n=1}^{10}{}_{11}C_n$$
$$=\frac{1}{11}\times({}_{11}C_1+{}_{11}C_2+{}_{11}C_3+\cdots+{}_{11}C_{10})$$

이때

${}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+\cdots+{}_{11}C_{11}=2^{11}=2048$

이고 ${}_{11}C_0={}_{11}C_{11}=1$이므로

${}_{11}C_1+{}_{11}C_2+{}_{11}C_3+\cdots+{}_{11}C_{10}=2048-2=2046$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\frac{10!}{n!\times(11-n)!}=\frac{1}{11}\times2046=186$

답 ③

5 $\left(x^4+\dfrac{1}{2x^6}\right)^n$의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r(x^4)^{n-r}\left(\frac{1}{2x^6}\right)^r={}_nC_r\times\frac{1}{2^r}\times x^{4n-10r}$$

(단, $r=0, 1, 2, \cdots, n$)

상수항이 존재하려면 $4n-10r=0$에서 $n=\dfrac{5}{2}r$이므로 자연수 n의 최솟값은 5이다.

즉, $m=5$이므로

$\left(x^4+\dfrac{1}{2x^6}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r(x^4)^{5-r}\left(\frac{1}{2x^6}\right)^r={}_5C_r\times\frac{1}{2^r}\times x^{20-10r}$$

(단, $r=0, 1, 2, 3, 4, 5$)

상수항 a는 $r=2$일 때

$$a={}_5C_2\times\frac{1}{2^2}=10\times\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$$

따라서 $m\times a=5\times\dfrac{5}{2}=\dfrac{25}{2}$

답 ④

6 조건 (가)에서 $f(1)\times f(6)=12$이고 조건 (나)에 의하여 $f(1)\le f(6)$이므로

$f(1)=2$, $f(6)=6$ 또는 $f(1)=3$, $f(6)=4$이다.

마찬가지로 $f(2)=2$, $f(5)=6$ 또는 $f(2)=3$, $f(5)=4$이다.

(i) $f(1)=2$, $f(6)=6$이고 $f(2)=2$, $f(5)=6$인 경우

조건 (나)에 의하여

$2\le f(3)\le f(4)\le 6\le f(7)\le f(8)\le 8$

$f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같고, $f(7)$, $f(8)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 구하는 함수의 개수는

$${}_5H_2\times{}_3H_2={}_{5+2-1}C_2\times{}_{3+2-1}C_2={}_6C_2\times{}_4C_2$$
$$=15\times6=90$$

(ii) $f(1)=2$, $f(6)=6$이고 $f(2)=3$, $f(5)=4$인 경우

조건 (나)에 의하여

$3\le f(3)\le f(4)\le 4$, $6\le f(7)\le f(8)\le 8$

$f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같고, $f(7)$, $f(8)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 구하는 함수의 개수는

$${}_2H_2\times{}_3H_2={}_{2+2-1}C_2\times{}_{3+2-1}C_2={}_3C_2\times{}_4C_2$$
$$=3\times6=18$$

(iii) $f(1)=3$, $f(6)=4$이고 $f(2)=2$, $f(5)=6$인 경우

$f(1)>f(2)$, $f(5)>f(6)$이 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iv) $f(1)=3$, $f(6)=4$이고 $f(2)=3$, $f(5)=4$인 경우

조건 (나)에 의하여

$3\le f(3)\le f(4)\le 4\le f(7)\le f(8)\le 8$

$f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같고, $f(7)$, $f(8)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 구하는 함수의 개수는

$${}_2H_2\times{}_5H_2={}_{2+2-1}C_2\times{}_{5+2-1}C_2={}_3C_2\times{}_6C_2$$
$$=3\times15=45$$

(i)~(iv)에서 구하는 함수의 개수는

$90+18+45=153$

답 153

7 조건 (가)에서 $5\le n(B)\le 9$이고, 조건 (다)에서 $n(B)$는 홀수이므로 $n(B)$의 값은 5 또는 7 또는 9이다.

또한 조건 (나)에서 $n(A)\le n(B)$이고 조건 (다)에서 $n(A)$도 홀수이다.

(ⅰ) $n(B)=5$인 경우

$B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로 집합 B를 정하는 경우의 수는 1

이때 $n(A)$의 값은 1 또는 3 또는 5이므로 집합 A를 정하는 경우의 수는

${}_5C_1+{}_5C_3+{}_5C_5=2^{5-1}=2^4=16$

즉, $n(B)=5$일 때 두 부분집합 A, B의 순서쌍 (A, B)의 개수는

$1\times16=16$

(ⅱ) $n(B)=7$인 경우

$\{1, 2, 3, 4, 5\}\subset B$이므로 집합 B를 정하는 경우의 수는 6, 7, 8, 9 중에서 서로 다른 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_2=6$

이때 $n(A)$의 값은 1 또는 3 또는 5 또는 7이므로 집합 A를 정하는 경우의 수는

${}_7C_1+{}_7C_3+{}_7C_5+{}_7C_7=2^{7-1}=2^6=64$

즉, $n(B)=7$일 때 두 부분집합 A, B의 순서쌍 (A, B)의 개수는

$6\times64=384$

(ⅲ) $n(B)=9$인 경우

$B=U$이므로 집합 B를 정하는 경우의 수는 1

이때 $n(A)$의 값은 1 또는 3 또는 5 또는 7 또는 9이므로 집합 A를 정하는 경우의 수는

${}_9C_1+{}_9C_3+{}_9C_5+{}_9C_7+{}_9C_9=2^{9-1}=2^8=256$

즉, $n(B)=9$일 때 두 부분집합 A, B의 순서쌍 (A, B)의 개수는

$1\times256=256$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 모든 순서쌍 (A, B)의 개수는

$16+384+256=656$

답 656

8 조건 (나)에서 ab는 4의 배수이므로 a, b 중에서 적어도 하나는 짝수이다.

(ⅰ) a와 b가 모두 짝수인 경우

a, b가 짝수이고 c가 홀수이므로

$d=14-(a+b+c)$에서 d는 홀수이다.

방정식 $a+b+c+d=14$에서

$a=2a'+2$, $b=2b'+2$, $c=2c'+1$, $d=2d'+1$ (a', b', c', d'은 음이 아닌 정수)라 하면

$(2a'+2)+(2b'+2)+(2c'+1)+(2d'+1)=14$

$a'+b'+c'+d'=4$ …… ㉠

a와 b가 짝수인 경우 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 방정식 ㉠을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수와 같으므로

${}_4H_4={}_{4+4-1}C_4={}_7C_4={}_7C_3=35$

(ⅱ) a, b 중에서 한 개만 짝수인 경우

a, b 중에서 한 개만 짝수이면 그 짝수는 4의 배수이고 나머지 한 개는 홀수이다.

a, b 중 짝수가 될 한 개를 택하는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

예를 들어 a가 짝수라고 하자.

a는 4의 배수이고 $a=14-(b+c+d)\le11$이므로

$a=4$ 또는 $a=8$

ⓐ $a=4$인 경우

$a+b+c+d=14$에서 $b+c+d=10$

b, c가 홀수이므로

$d=10-(b+c)$에서 d는 짝수이다.

방정식 $b+c+d=10$에서

$b=2b'+1$, $c=2c'+1$, $d=2d'+2$ (b', c', d'은 음이 아닌 정수)라 하면

$(2b'+1)+(2c'+1)+(2d'+2)=10$

$b'+c'+d'=3$ …… ㉡

$a=4$이고 b가 홀수인 경우 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 방정식 ㉡을 만족시키는 음이 아닌 정수 b', c', d'의 순서쌍 (b', c', d')의 개수와 같으므로

${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

ⓑ $a=8$인 경우

$a+b+c+d=14$에서 $b+c+d=6$

b, c가 홀수이므로

$d=6-(b+c)$에서 d는 짝수이다.

방정식 $b+c+d=6$에서

$b=2b'+1$, $c=2c'+1$, $d=2d'+2$ (b', c', d'은 음이 아닌 정수)라 하면

$(2b'+1)+(2c'+1)+(2d'+2)=6$

$b'+c'+d'=1$ …… ㉢

$a=8$이고 b가 홀수인 경우 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 방정식 ㉢을 만족시키는 음이 아닌 정수 b', c', d'의 순서쌍 (b', c', d')의 개수와 같으므로

${}_3H_1={}_{3+1-1}C_1={}_3C_1=3$

따라서 a, b 중에서 한 개만 짝수인 경우 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$2\times(10+3)=26$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$35+26=61$

답 ④

Level 3 실력 완성 본문 27쪽

1 ④ **2** 35 **3** ①

1 조건 (나)에서 $abc \neq 0$이므로 a, b, c는 자연수이다.
조건 (가), (다)에서 $a+b=3$ 또는 $a+b=6$이다.
$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$이라 하자.
(i) $a+b=3$일 때
$a+b=3$이면 $c+d+e=6$이다.
방정식 $a+b=3$을 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 방정식
$(a'+1)+(b'+1)=3$, 즉 $a'+b'=1$
을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b'의 순서쌍 (a', b')의 개수와 같으므로
${}_2H_1={}_{2+1-1}C_1={}_2C_1=2$
방정식 $c+d+e=6$을 만족시키는 자연수 c와 음이 아닌 정수 d, e의 순서쌍 (c, d, e)의 개수는 방정식
$(c'+1)+d+e=6$, 즉 $c'+d+e=5$
를 만족시키는 음이 아닌 정수 c', d, e의 순서쌍 (c', d, e)의 개수와 같으므로
${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$
즉, $a+b=3$일 때 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e의 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는
$2\times21=42$
(ii) $a+b=6$일 때
$a+b=6$이면 $c+d+e=3$이다.
방정식 $a+b=6$을 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 방정식
$(a'+1)+(b'+1)=6$, 즉 $a'+b'=4$
를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b'의 순서쌍 (a', b')의 개수와 같으므로
${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=5$
방정식 $c+d+e=3$을 만족시키는 자연수 c와 음이 아닌 정수 d, e의 순서쌍 (c, d, e)의 개수는 방정식
$(c'+1)+d+e=3$, 즉 $c'+d+e=2$
를 만족시키는 음이 아닌 정수 c', d, e의 순서쌍 (c', d, e)의 개수와 같으므로
${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$
즉, $a+b=6$일 때 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e의 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는
$5\times6=30$
(i), (ii)에서 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는
$42+30=72$

답 ④

2 다항식 $(a+b+c)^n$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 세 문자 a, b, c 중에서 n개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_n={}_{3+n-1}C_n={}_{n+2}C_n={}_{n+2}C_2$
${}_{n+2}C_2=28$에서
$\frac{(n+2)(n+1)}{2\times1}=28$, $(n+2)(n+1)=56$
$n^2+3n-54=0$, $(n+9)(n-6)=0$
n은 자연수이므로 $n=6$
다항식 $(a+b)(a+b+c)^6$의 전개식에서 각 항은 a, b 중에서 1개, a, b, c 중에서 중복을 허락하여 6개를 택한 후 곱하여 얻으므로 각 항은
$a^pb^qc^r$ (단, $p+q+r=7$이고, p, q, r은 각각 $0\le p\le7$, $0\le q\le7$, $0\le r\le6$인 정수)
와 계수의 곱의 형태이다.
즉, 다항식 $(a+b)(a+b+c)^6$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는
$p+q+r=7$, $0\le p\le7$, $0\le q\le7$, $0\le r\le6$
을 만족시키는 정수 p, q, r의 모든 순서쌍 (p, q, r)의 개수와 같다.
이는 방정식 $p+q+r=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 p, q, r의 모든 순서쌍 (p, q, r) 중에서 $r=7$일 때의 순서쌍 $(0, 0, 7)$을 제외한 나머지 순서쌍 (p, q, r)의 개수와 같으므로
${}_3H_7-1={}_{3+7-1}C_7-1={}_9C_7-1={}_9C_2-1=36-1=35$

답 35

3 집합 X의 원소는 1부터 8까지의 자연수이므로
$1\le f(x)\le8$이다.
조건 (가)에서
$4\le f(1)+f(3)+f(5)+f(7)\le f(8)$이므로
$f(8)\ge4$ …… ㉠
조건 (나)에서
$f(8)=10-\{f(2)+f(4)+f(6)\}\le10-3=7$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $f(8)=k$라 하면 k의 값은
4 또는 5 또는 6 또는 7이다.
$f(8)=k$일 때 조건 (가)에서 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$, $f(7)$을 정하는 경우의 수는 방정식
$f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+m=k$를 만족시키는 자연수 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$, $f(7)$과 음이 아닌 정수 m의 모든 순서쌍 $(f(1), f(3), f(5), f(7), m)$의 개수와 같다. 즉,
$f(1)=a+1$, $f(3)=b+1$, $f(5)=c+1$, $f(7)=d+1$이라 하면 방정식 $a+b+c+d+m=k-4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, m의 모든 순서쌍

(a, b, c, d, m)의 개수와 같으므로

${}_5H_{k-4}={}_{5+(k-4)-1}C_{k-4}={}_kC_{k-4}={}_kC_4$

$f(8)=k$일 때 조건 (나)에서 $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$을 정하는 경우의 수는 방정식 $f(2)+f(4)+f(6)=10-k$를 만족시키는 자연수 $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$의 모든 순서쌍 $(f(2), f(4), f(6))$의 개수와 같다. 즉,

$f(2)=e+1$, $f(4)=g+1$, $f(6)=h+1$이라 하면 방정식 $e+g+h=7-k$를 만족시키는 음이 아닌 정수 e, g, h의 모든 순서쌍 (e, g, h)의 개수와 같으므로

${}_3H_{7-k}={}_{3+(7-k)-1}C_{7-k}={}_{9-k}C_{7-k}={}_{9-k}C_2$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$\sum_{k=4}^{7}({}_kC_4\times{}_{9-k}C_2)$

$={}_4C_4\times{}_5C_2+{}_5C_4\times{}_4C_2+{}_6C_4\times{}_3C_2+{}_7C_4\times{}_2C_2$

$=1\times10+5\times6+15\times3+35\times1$

$=120$

답 ①

03 확률의 뜻과 활용

유제 본문 29~35쪽

1 ④ **2** 8 **3** ① **4** ① **5** ③ **6** ② **7** ④ **8** ⑤

1 주머니에서 한 개의 공을 꺼내는 시행에서 표본공간을 S라 하면

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

사건 A는 꺼낸 공에 적힌 수가 6의 약수인 사건이므로

$A=\{1, 2, 3, 6\}$이고 $A^C=\{4, 5, 7\}$이다.

사건 B_n은 꺼낸 공에 적힌 수가 n 이하의 자연수인 사건이므로

$B_n=\{x|x$는 n 이하의 자연수$\}$

사건 A^C과 사건 B_n이 서로 배반사건이려면

$A^C\cap B_n=\varnothing$ ...... ㉠

이어야 한다.

이때 n이 7 이하의 자연수이므로 ㉠을 만족시키는 n의 값은 1, 2, 3이다.

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$1+2+3=6$

답 ④

2 한 개의 주사위를 한 번 던지는 시행에서 표본공간을 S라 하면

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

이고,

$A_1=\{1\}$, $A_2=\{2, 3, 5\}$, $A_3=\{4\}$, $A_4=\{6\}$,

$B=\{2, 4, 6\}$, $C=\{2, 3, 5\}$

이때 $B\cap C=\{2\}$이므로

$A_1\cap(B\cap C)=\varnothing$

$A_2\cap(B\cap C)=\{2\}$

$A_3\cap(B\cap C)=\varnothing$

$A_4\cap(B\cap C)=\varnothing$

즉, 세 사건 A_1, A_3, A_4는 모두 사건 $B\cap C$와 서로 배반사건이다.

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$1+3+4=8$

답 8

3 8명의 학생 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

2학년 학생 4명, 3학년 학생 2명 중에서 2학년 학생 2명, 3학년 학생 1명을 뽑는 경우의 수는

${}_4C_2 \times {}_2C_1 = 6 \times 2 = 12$

따라서 구하는 확률은

$\frac{12}{56} = \frac{3}{14}$

답 ①

4 A, A, B, B, C가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$

문자 A가 적힌 2장의 카드가 이웃하도록 일렬로 나열하는 경우의 수는 문자 A가 적힌 2장의 카드를 1장으로 생각하여 4장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{4!}{2!} = 12$

따라서 구하는 확률은

$\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

답 ①

5 확률의 덧셈정리에 의하여

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ …… ㉠

두 사건 A와 B가 서로 배반사건이므로

$P(A \cap B) = 0$

이고 $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$이므로 ㉠에서

$\frac{2}{3} = \frac{1}{4} + P(B)$

따라서 $P(B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$

답 ③

6 1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9장의 카드가 들어 있는 상자에서 2장의 카드를 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_9C_2 = 36$

꺼낸 2장의 카드에 적힌 두 수의 곱이 홀수인 사건을 A, 꺼낸 2장의 카드에 적힌 두 수가 모두 소수인 사건을 B라 하자.

사건 A는 홀수가 적혀 있는 5장의 카드 중에서 2장의 카드를 동시에 꺼내는 사건이므로

$P(A) = \frac{{}_5C_2}{{}_9C_2} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

사건 B는 숫자 2, 3, 5, 7이 적혀 있는 4장의 카드 중에서 2장의 카드를 동시에 꺼내는 사건이므로

$P(B) = \frac{{}_4C_2}{{}_9C_2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

한편, 사건 $A \cap B$는 꺼낸 2장의 카드에 적힌 두 수의 곱이 홀수이고 동시에 두 수가 모두 소수인 사건이다. 즉, 사건 $A \cap B$는 숫자 3, 5, 7이 적혀 있는 3장의 카드 중에서 2장의 카드를 동시에 꺼내는 사건이므로

$P(A \cap B) = \frac{{}_3C_2}{{}_9C_2} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

따라서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{5}{18} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12}$

$= \frac{13}{36}$

답 ②

7 10명의 학생 중에서 4명을 택하는 경우의 수는

${}_{10}C_4 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$

택한 4명의 학생 중에서 적어도 한 명이 남학생인 사건을 A라 하면 A^C은 4명의 학생이 모두 여학생인 사건이다.

여학생 6명 중에서 4명을 택하는 경우의 수는

${}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$

이므로

$P(A^C) = \frac{15}{210} = \frac{1}{14}$

따라서 구하는 확률은

$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14}$

답 ④

8 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적혀 있는 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2! \times 2!}$

양 끝에는 서로 다른 숫자가 적힌 카드가 놓이도록 7장의 카드를 일렬로 나열하는 사건을 A라 하면 A^C은 양 끝에 같은 숫자가 적힌 카드가 놓이도록 7장의 카드를 일렬로 나열하는 사건이다.

양 끝에 숫자 1이 적힌 카드가 놓이도록 7장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}$

이고, 양 끝에 숫자 2가 적힌 카드가 놓이도록 7장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}$

이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{\frac{5!}{2!}\times 2}{\frac{7!}{2!\times 2!}}=\frac{2}{21}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{21}=\frac{19}{21}$$

답 ⑤

Level 1 기초 연습 본문 36~37쪽

1 ④ **2** ① **3** ② **4** ② **5** ③ **6** ⑤
7 ④ **8** 202

1 10명의 학생 중에서 5명을 뽑는 경우의 수는

$${}_{10}\mathrm{C}_5=\frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1}=252$$

여학생 6명, 남학생 4명 중에서 여학생 3명, 남학생 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_2=20\times6=120$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{120}{252}=\frac{10}{21}$$

답 ④

2 a, b는 1부터 6까지의 자연수이므로 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는

$6^2=36$

${}_a\Pi_2=a^2$, ${}_b\mathrm{H}_2={}_{b+1}\mathrm{C}_2=\dfrac{b(b+1)}{2}$이므로

$\dfrac{{}_a\Pi_2}{{}_b\mathrm{H}_2}<\dfrac{a}{b}$에서

$$\frac{a^2}{\frac{b(b+1)}{2}}<\frac{a}{b}$$

$2a<b+1$ ...... ㉠

(i) $a=1$일 때

㉠에서 $2<b+1$, 즉 $b>1$이므로 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$

(ii) $a=2$일 때

㉠에서 $4<b+1$, 즉 $b>3$이므로 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(2, 4)$, $(2, 5)$, $(2, 6)$

(iii) $a=3$일 때

㉠에서 $6<b+1$, 즉 $b>5$이므로 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(3, 6)$

(iv) $a\geq4$일 때

$2a\geq8$이므로 ㉠을 만족시키는 6 이하의 자연수 b의 값은 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에서 ㉠을 만족시키는 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는

$5+3+1=9$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

답 ①

3 6명의 학생이 원 모양의 탁자에 일정한 간격을 두고 모두 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

2학년 학생 2명과 3학년 학생 2명을 각각 1명으로 생각하여 4명이 원 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

2학년 학생 2명이 서로 자리를 바꾸고, 3학년 학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!\times2!=2\times2=4$

그러므로 2학년 학생끼리 이웃하고 3학년 학생끼리 이웃하게 앉는 경우의 수는

$6\times4=24$

따라서 구하는 확률은

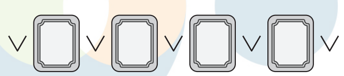
$$\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$$

답 ②

4 1부터 7까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

$7!$

짝수가 적힌 카드가 이웃하지 않게 일렬로 나열하려면 숫자 1, 3, 5, 7이 적힌 4장의 카드를 일렬로 나열한 후 이 4장의 카드 사이사이와 양 끝 중에서 세 곳을 택하여 숫자 2, 4, 6이 적힌 3장의 카드를 나열하면 된다.



숫자 1, 3, 5, 7이 적힌 4장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!$

이고, 이 각각에 대하여 나열된 4장의 카드 사이사이와 양 끝 중에서 세 곳을 택하여 숫자 2, 4, 6이 적힌 3장의 카드를 나열하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{P}_3$

따라서 구하는 확률은

$\frac{4!\times{}_5P_3}{7!}=\frac{5\times4\times3}{7\times6\times5}=\frac{2}{7}$

답 ②

5 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8장의 카드가 들어 있는 상자에서 4장의 카드를 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_8C_4=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$

꺼낸 4장의 카드에 적힌 네 수의 곱이 15의 배수이려면 3이 적힌 카드와 5가 적힌 카드를 포함하여 4장의 카드를 꺼내거나 6이 적힌 카드와 5가 적힌 카드를 포함하여 4장의 카드를 꺼내야 한다.

3이 적힌 카드와 5가 적힌 카드를 포함하여 4장의 카드를 꺼내는 사건을 A, 6이 적힌 카드와 5가 적힌 카드를 포함하여 4장의 카드를 꺼내는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(A\cup B)$이다.

$P(A)=\frac{{}_6C_2}{{}_8C_4}=\frac{15}{70}=\frac{3}{14}$

$P(B)=\frac{{}_6C_2}{{}_8C_4}=\frac{15}{70}=\frac{3}{14}$

사건 $A\cap B$는 3이 적힌 카드, 5가 적힌 카드, 6이 적힌 카드를 모두 포함하여 4장의 카드를 꺼내는 사건이므로

$P(A\cap B)=\frac{{}_5C_1}{{}_8C_4}=\frac{5}{70}=\frac{1}{14}$

따라서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=\frac{3}{14}+\frac{3}{14}-\frac{1}{14}\\&=\frac{5}{14}\end{aligned}$$

답 ③

6 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로

$A\cap B=\varnothing$

이때 $A\subset B^C$이므로

$A\cap B^C=A$

즉, $P(A\cap B^C)=P(A)=\frac{1}{3}$ …… ㉠

한편, $P(A\cap B)=0$이므로

$P(A\cup B)=\frac{11}{15}$에서

$P(A)+P(B)=\frac{11}{15}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{1}{3}+P(B)=\frac{11}{15}$

$P(B)=\frac{11}{15}-\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$

따라서 $P(B^C)=1-P(B)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

답 ⑤

7 흰 공 3개, 검은 공 3개, 노란 공 2개가 들어 있는 주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_8C_2=28$

꺼낸 2개의 공의 색이 서로 다른 사건을 A라 하면 A^C은 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 같은 사건이다.

이때 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 같으려면 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공이거나 모두 검은 공이거나 모두 노란 공이어야 한다.

흰 공 3개 중에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$,

검은 공 3개 중에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$,

노란 공 2개 중에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는 ${}_2C_2=1$

이므로

$P(A^C)=\frac{3+3+1}{28}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

답 ④

8 흰 공 6개와 검은 공 4개가 들어 있는 주머니에서 4개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_{10}C_4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$

꺼낸 4개의 공 중에서 흰 공과 검은 공이 각각 1개 이상인 사건을 A라 하면 A^C은 꺼낸 4개의 공이 모두 흰 공이거나 모두 검은 공인 사건이다.

흰 공 6개 중에서 4개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=15$

검은 공 4개 중에서 4개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_4C_4=1$

이때

$P(A^C)=\frac{15+1}{210}=\frac{8}{105}$

이므로 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{8}{105}=\frac{97}{105}$

따라서 $p=105$, $q=97$이므로

$p+q=105+97=202$

답 202

Level **2** **기본 연습** 본문 38~39쪽

1 ③ **2** ⑤ **3** ① **4** 47 **5** ② **6** ④
7 ⑤ **8** ④

1 세 학생 A, B, C를 포함한 7명의 학생이 원 모양의 탁자에 일정한 간격을 두고 모두 둘러앉는 경우의 수는

$(7-1)!=6!=720$

(i) A와 B가 이웃하는 경우

A와 B를 한 학생으로 보고 6명의 학생이 원 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

이고, 이 각각에 대하여 A와 B가 자리를 바꾸는 경우의 수는

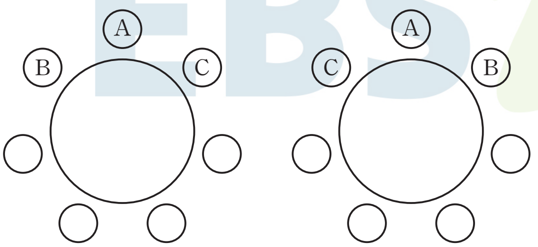
$2!=2$

이므로 7명의 학생이 원 모양의 탁자에 둘러앉을 때 A와 B가 이웃하는 경우의 수는

$120\times2=240$

(ii) A와 B가 이웃하고 A와 C가 이웃하는 경우

A와 B가 이웃하고 A와 C가 이웃하게 앉는 경우는 다음의 2가지이다.



A, B, C를 묶어 한 학생으로 보고 5명의 학생이 원 모양의 탁자에 둘러 앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

이고, 이 각각에 대하여 그림과 같이 B와 C가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

이므로 7명의 학생이 원 모양의 탁자에 둘러앉을 때 A와 B가 이웃하고 A와 C가 이웃하는 경우의 수는

$24\times2=48$

(i), (ii)에 의하여 7명의 학생이 원 모양의 탁자에 둘러앉을 때 A와 B는 이웃하고 A와 C는 이웃하지 않는 경우의 수는

$240-48=192$

따라서 구하는 확률은

$\frac{192}{720}=\frac{4}{15}$

답 ③

2 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 세 자리의 자연수의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_3=4^3=64$

숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 3개를 택할 때, 세 자리의 자연수 중 3의 배수의 개수는 다음과 같다.

(i) 3개의 수가 모두 같은 수인 경우

3개의 수를 나열하여 만든 세 자리의 자연수는 111, 222, 333, 444이고 모두 3의 배수이다.

즉, 이 경우의 3의 배수의 개수는

4

(ii) 3개의 수 중 두 수만 같은 경우

3개의 수를 나열하여 만든 세 자리의 자연수가 3의 배수이려면 3개의 수가

1, 1, 4 또는 4, 4, 1

이어야 한다.

세 수 1, 1, 4를 일렬로 나열하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는

$\frac{3!}{2!}=3$

세 수 4, 4, 1을 일렬로 나열하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는

$\frac{3!}{2!}=3$

즉, 이 경우의 3의 배수의 개수는

$3+3=6$

(iii) 3개의 수가 모두 다른 경우

3개의 수를 나열하여 만든 세 자리의 자연수가 3의 배수이려면 3개의 수가

1, 2, 3 또는 2, 3, 4

이어야 한다.

세 수 1, 2, 3을 일렬로 나열하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는

$3!=6$

세 수 2, 3, 4를 일렬로 나열하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는

$3!=6$

즉, 이 경우의 3의 배수의 개수는

$6+6=12$

(i), (ii), (iii)에서 3의 배수의 개수는

$4+6+12=22$

따라서 구하는 확률은

$\frac{22}{64}=\frac{11}{32}$

답 ⑤

3 한 개의 주사위를 네 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

6^4

조건 (가)에서 $a\times b\times c\times d^2=72$이므로

d^2은 72의 양의 약수이고, 조건 (나)에서 $2^d<20$이므로

$d=1$ 또는 $d=2$ 또는 $d=3$

(i) $d=1$인 경우

$a\times b\times c=72$

1부터 6까지의 자연수 중에서 중복을 허락하여 3개를 택해 곱한 값이 72인 경우는

6, 6, 2 또는 6, 4, 3

세 수 6, 6, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

세 수 6, 4, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

즉, $a\times b\times c=72$가 되도록 세 수 a, b, c의 값을 정하는 경우의 수는

$3+6=9$

(ii) $d=2$인 경우

$a\times b\times c=18$

1부터 6까지의 자연수 중에서 중복을 허락하여 3개를 택해 곱한 값이 18인 경우는

6, 3, 1 또는 3, 3, 2

세 수 6, 3, 1을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

세 수 3, 3, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

즉, $a\times b\times c=18$이 되도록 세 수 a, b, c의 값을 정하는 경우의 수는

$6+3=9$

(iii) $d=3$인 경우

$a\times b\times c=8$

1부터 6까지의 자연수 중에서 중복을 허락하여 3개를 택해 곱한 값이 8인 경우는

4, 2, 1 또는 2, 2, 2

세 수 4, 2, 1을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

세 수 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{3!}{3!}=1$

즉, $a\times b\times c=8$이 되도록 세 수 a, b, c의 값을 정하는 경우의 수는

$6+1=7$

(i), (ii), (iii)에서 네 수 a, b, c, d를 정하는 경우의 수는

$9+9+7=25$

따라서 구하는 확률은

$\frac{25}{6^4}$

답 ①

4 한 개의 주사위를 네 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

6^4

한 개의 주사위를 네 번 던질 때 나온 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 하자.

(i) 6의 약수의 눈이 연속하여 2번 나오는 경우

ⓐ a와 b는 6의 약수이고 c는 6의 약수가 아닐 때, 네 수 a, b, c, d를 정하는 경우의 수는

${}_4C_1\times{}_4C_1\times{}_2C_1\times{}_6C_1=4\times4\times2\times6=192$

ⓑ b와 c는 6의 약수이고 a와 d는 6의 약수가 아닐 때, 네 수 a, b, c, d를 정하는 경우의 수는

${}_2C_1\times{}_4C_1\times{}_4C_1\times{}_2C_1=2\times4\times4\times2=64$

ⓒ b는 6의 약수가 아니고 c와 d가 6의 약수일 때, 네 수 a, b, c, d를 정하는 경우의 수는

${}_6C_1\times{}_2C_1\times{}_4C_1\times{}_4C_1=6\times2\times4\times4=192$

ⓐ, ⓑ, ⓒ에서 6의 약수의 눈이 연속하여 2번 나오는 경우의 수는

$192+64+192=448$

(ii) 6의 약수의 눈이 연속하여 3번 나오는 경우

ⓐ a, b, c는 6의 약수이고 d는 6의 약수가 아닐 때, 네 수 a, b, c, d를 정하는 경우의 수는

${}_4C_1\times{}_4C_1\times{}_4C_1\times{}_2C_1=4\times4\times4\times2=128$

ⓑ a는 6의 약수가 아니고 b, c, d는 6의 약수일 때, 네 수 a, b, c, d를 정하는 경우의 수는

${}_2C_1\times{}_4C_1\times{}_4C_1\times{}_4C_1=2\times4\times4\times4=128$

ⓐ, ⓑ에서 6의 약수의 눈이 연속하여 3번 나오는 경우의 수는

$128+128=256$

(iii) 6의 약수의 눈이 연속하여 4번 나오는 경우

a, b, c, d가 6의 약수일 때, 네 수 a, b, c, d를 정하는 경우의 수는

${}_4C_1\times{}_4C_1\times{}_4C_1\times{}_4C_1=4\times4\times4\times4=256$

(i), (ii), (iii)에서 6의 약수의 눈이 연속하여 2번 이상 나오는 경우의 수는

$448+256+256=960$

이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{960}{6^4}=\frac{20}{27}$

따라서 $p=27$, $q=20$이므로

$p+q=27+20=47$

답 47

다른 풀이

한 개의 주사위를 네 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

6^4

사건 A의 여사건 A^C은 한 개의 주사위를 네 번 던질 때 6의 약수의 눈이 연속하여 나오지 않는 사건이다.

6의 약수인 눈의 수를 X, 6의 약수가 아닌 눈의 수를 Y라 하면 A^C은

XYXY, XYYX, YXYX, XYYY, YXYY,
YYXY, YYYX, YYYY

이다. 이때

XYXY, XYYX, YXYX인 경우의 수는

$3\times(4^2\times2^2)=3\times2^6$

XYYY, YXYY, YYXY, YYYX인 경우의 수는

$4\times(4\times2^3)=2^7$

YYYY인 경우의 수는

2^4

즉, $\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{3\times2^6+2^7+2^4}{6^4}=\dfrac{7}{27}$이므로

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{7}{27}=\dfrac{20}{27}$

따라서 $p=27$, $q=20$이므로

$p+q=27+20=47$

5 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8장의 카드가 들어 있는 주머니에서 2장의 카드를 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_8\mathrm{C}_2=28$

꺼낸 2장의 카드에 적힌 두 수의 곱이 홀수인 사건을 A, 두 수의 곱이 30 이상인 사건을 B라 하면 사건 $A\cap B$는 두 수의 곱이 홀수이고 30 이상인 사건이다.

꺼낸 2장의 카드에 적힌 두 수의 곱이 홀수이려면 1, 3, 5, 7이 적힌 4장의 카드 중에서 서로 다른 2장의 카드를 꺼내야 하고, 이때의 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2=6$

이므로

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{6}{28}=\dfrac{3}{14}$

꺼낸 2장의 카드에 적힌 두 수의 곱이 30 이상이려면 두 수가 4와 8, 5와 6, 5와 7, 5와 8, 6과 7, 6과 8, 7과 8

이어야 하므로

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{7}{28}=\dfrac{1}{4}$

꺼낸 2장의 카드에 적힌 두 수의 곱이 홀수이고 30 이상이려면 두 수가

5와 7

이어야 하므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{28}$

따라서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{3}{14}+\frac{1}{4}-\frac{1}{28}\\&=\frac{3}{7}\end{aligned}$$

답 ②

6 9명의 학생 중에서 4명을 택하는 경우의 수는

${}_9\mathrm{C}_4=\dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$

남학생 5명, 여학생 4명 중에서 조건 (가), (나)를 만족시키도록 4명의 학생을 택하려면 남학생 3명, 여학생 1명을 택하거나 남학생 2명, 여학생 2명을 택해야 한다.

남학생 5명, 여학생 4명 중에서 남학생 3명, 여학생 1명을 택하는 사건을 A라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_4}=\dfrac{10\times4}{126}=\dfrac{20}{63}$

남학생 5명, 여학생 4명 중에서 남학생 2명, 여학생 2명을 택하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_4}=\dfrac{10\times6}{126}=\dfrac{10}{21}$

두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\\&=\frac{20}{63}+\frac{10}{21}\\&=\frac{50}{63}\end{aligned}$$

답 ④

7 7개의 공이 들어 있는 주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_7\mathrm{C}_2=21$

이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공이 서로 같은 색인 사건을 A, 꺼낸 공에 적힌 두 수의 합이 5인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cup B)$이다.

(i) 꺼낸 2개의 공이 서로 같은 색인 경우

꺼낸 2개의 공이 서로 같은 색이려면 흰 공 4개 중에서 2개의 공을 꺼내거나 검은 공 3개 중에서 2개를 꺼내야 한다. 이때의 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2=6+3=9$

이므로

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{9}{21}=\dfrac{3}{7}$

(ii) 꺼낸 2개의 공에 적힌 두 수의 합이 5인 경우
꺼낸 2개의 공에 적힌 두 수의 합이 5이려면 꺼낸 2개의 공이
4가 적힌 흰 공과 1이 적힌 흰 공
또는 3이 적힌 흰 공과 2가 적힌 흰 공
또는 3이 적힌 검은 공과 2가 적힌 검은 공
또는 4가 적힌 흰 공과 1이 적힌 검은 공
또는 3이 적힌 흰 공과 2가 적힌 검은 공
또는 2가 적힌 흰 공과 3이 적힌 검은 공
이어야 하므로
$\mathrm{P}(B)=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$

(iii) 꺼낸 2개의 공이 서로 같은 색이고 그 공에 적힌 두 수의 합이 5인 경우
꺼낸 2개의 공이 서로 같은 색이고 그 공에 적힌 두 수의 합이 5이려면 꺼낸 2개의 공이
4가 적힌 흰 공과 1이 적힌 흰 공
또는 3이 적힌 흰 공과 2가 적힌 흰 공
또는 3이 적힌 검은 공과 2가 적힌 검은 공
이어야 하므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{3}{7}+\frac{2}{7}-\frac{1}{7}\\&=\frac{4}{7}\end{aligned}$$

답 ⑤

8 숫자 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5가 하나씩 적혀 있는 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{7!}{2!\times 3!}=420$
양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수 중 적어도 한 개가 6의 약수인 사건을 A라 하면 A^C은 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수가 모두 6의 약수가 아닌 사건이다.
(i) 양 끝에 놓인 두 수가 4, 4인 경우
숫자 2, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적힌 5장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!}=60$
(ii) 양 끝에 놓인 두 수가 4, 5인 경우
숫자 2, 2, 3, 4, 4가 하나씩 적힌 5장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!\times 2!}=30$
이고, 이 각각에 대하여 4, 5가 적힌 두 장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$2!=2$
이므로 이때의 경우의 수는
$30\times 2=60$
(i), (ii)에서 사건 A^C이 일어나는 경우의 수는
$60+60=120$
이므로
$\mathrm{P}(A^C)=\frac{120}{420}=\frac{2}{7}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$

답 ④

Level 3 실력 완성 본문 40쪽

1 ① **2** ③ **3** 17

1 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 5개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는
${}_4\Pi_5=4^5=1024$
한편, 같은 수가 이웃한 경우 이웃한 두 수의 합은 항상 짝수이다.
조건 (가), (나)를 만족시키는 자연수의 개수를 다음과 같이 구해 보자.
(i) 같은 수가 연속하여 3개만 이어지는 경우
숫자 1, 2, 3, 4 중에서 연속하여 3개가 이어지는 한 개의 숫자를 택하는 경우의 수는
${}_4C_1=4$
다섯 자리의 자연수 중 같은 수가 연속하여 3개만 이어지는 경우는 다음과 같다.
ⓐ 다섯 자리의 자연수가 □□□△○ 꼴인 경우
조건 (나)에 의하여 △의 위치에는 □의 위치에 있는 수를 제외하고 □와 △의 위치에 있는 두 수의 합이 짝수이어야 하므로 △의 위치에 나열할 수 있는 숫자는 1가지이다.
△와 ○의 위치에 있는 두 수의 합이 짝수이어야 하므로 ○의 위치에 나열할 수 있는 숫자는 △의 위치에 있는 숫자 또는 △의 위치에 있지 않은 숫자 1가지로 총 2가지이다.
즉, △와 ○의 위치에 나열할 수 있는 경우의 수는
$1\times 2=2$

ⓑ 다섯 자리의 자연수가 △□□□○ 꼴인 경우

조건 (나)에 의하여 △의 위치에는 □의 위치에 있는 수를 제외하고 □와 △의 위치에 있는 두 수의 합이 짝수이어야 하므로 △의 위치에 나열할 수 있는 숫자는 1가지이다.

○의 위치에는 □의 위치에 있는 수를 제외하고 □와 ○의 위치에 있는 두 수의 합이 짝수이어야 하므로 ○의 위치에 나열할 수 있는 숫자는 1가지이다.

즉, △와 ○의 위치에 나열할 수 있는 경우의 수는

$1\times1=1$

ⓒ 다섯 자리의 자연수가 △○□□□ 꼴인 경우

ⓐ와 마찬가지 방법으로 △와 ○의 위치에 나열할 수 있는 경우의 수는

2

따라서 같은 수가 연속하여 3개가 이어지고, 조건 (나)를 만족시키는 다섯 자리의 자연수의 개수는

$4\times(2+1+2)=20$

(ii) 같은 수가 연속하여 4개만 이어지는 경우

숫자 1, 2, 3, 4 중에서 연속하여 4개가 이어지는 한 개의 숫자를 택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1=4$

다섯 자리의 자연수 중에서 같은 수가 연속하여 4개만 이어지는 경우는 다음과 같다.

ⓐ 다섯 자리의 자연수가 □□□□△ 꼴인 경우

조건 (나)에 의하여 △의 위치에는 □의 위치에 있는 수를 제외하고 □와 △의 위치에 있는 두 수의 합이 짝수이어야 하므로 △의 위치에 나열할 수 있는 숫자는 1가지이다.

ⓑ 다섯 자리의 자연수가 △□□□□ 꼴인 경우

ⓐ와 마찬가지 방법으로 △의 위치에 나열할 수 있는 숫자는 1가지이다.

따라서 같은 수가 연속하여 4개가 이어지고, 조건 (나)를 만족시키는 다섯 자리의 자연수의 개수는

$4\times(1+1)=8$

(iii) 같은 수가 연속하여 5개가 이어지는 경우

숫자 1, 2, 3, 4 중에서 연속하여 5개가 이어지는 한 개의 숫자를 택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1=4$

이므로 조건을 만족시키는 다섯 자리의 자연수의 개수는 4이다.

(i), (ii), (iii)에서 조건 (가), (나)를 만족시키는 다섯 자리의 자연수의 개수는

$20+8+4=32$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{32}{1024}=\dfrac{1}{32}$

답 ①

2 집합 X에서 X로의 모든 함수의 개수는

${}_5\Pi_5=5^5$

(i) 조건 (가)를 만족시키는 함수의 개수는

${}_5\mathrm{H}_5={}_9\mathrm{C}_5={}_9\mathrm{C}_4=\dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$

(ii) 조건 (가)를 만족시키고 $f(2)f(3)=4$인 함수의 개수를 구해 보자.

$f(2)f(3)=4$이고 $f(2)\le f(3)$이므로

$f(2)=1,\ f(3)=4$ 또는 $f(2)=f(3)=2$

ⓐ $f(2)=1,\ f(3)=4$인 경우

$f(1)\le f(2)$, 즉 $f(1)\le 1$이므로

$f(1)=1$

$f(3)\le f(4)\le f(5)$, 즉 $4\le f(4)\le f(5)$이므로

$f(4),\ f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 두 수 4, 5 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

즉, 이때의 경우의 수는

$1\times{}_2\mathrm{H}_2=1\times{}_3\mathrm{C}_2=1\times3=3$

ⓑ $f(2)=f(3)=2$인 경우

$f(1)\le f(2)$, 즉 $f(1)\le 2$이므로

$f(1)=1$ 또는 $f(1)=2$

$f(3)\le f(4)\le f(5)$, 즉 $2\le f(4)\le f(5)$이므로

$f(4),\ f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 네 수 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

즉, 이때의 경우의 수는

$2\times{}_4\mathrm{H}_2=2\times{}_5\mathrm{C}_2=2\times10=20$

ⓐ, ⓑ에서 조건 (가)를 만족시키고 $f(2)f(3)=4$인 함수의 개수는

$3+20=23$

(i), (ii)에서 조건 (가), (나)를 만족시키는 함수의 개수는

$126-23=103$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{103}{5^5}$

답 ③

3 흰 공 6개, 검은 공 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{10!}{6!\times4!}=210$

사건 A는 검은 공 4개를 일렬로 나열한 후 양 끝과 검은 공 사이사이에 다음 (i)~(iv)와 같이 흰 공을 놓으면 된다.

∨●∨●∨●∨●∨

(i) 흰 공 6개를 2개, 2개, 2개로 묶고 각각을 1개의 공으로 생각하여 양 끝과 검은 공 사이사이의 5곳 중에서 3개를 택한 후 택한 3곳에 1개씩 놓는 경우
이때의 경우의 수는
$_5C_3=10$

(ii) 흰 공 6개를 3개, 3개로 묶고 각각을 1개의 공으로 생각하여 양 끝과 검은 공 사이사이의 5곳 중에서 2개를 택한 후 택한 2곳에 1개씩 놓는 경우
이때의 경우의 수는
$_5C_2=10$

(iii) 흰 공 6개를 4개, 2개로 묶고 각각을 1개의 공으로 생각하여 양 끝과 검은 공 사이사이의 5곳 중에서 2개를 택한 후 택한 2곳에 1개씩 놓는 경우
이때의 경우의 수는
$_5C_2\times 2!=10\times 2=20$

(iv) 흰 공 6개를 1개의 공으로 생각하여 양 끝과 검은 공 사이사이의 5곳 중에서 1개를 택한 후 택한 1곳에 놓는 경우
이때의 경우의 수는
$_5C_1=5$

(i)~(iv)에서 사건 A가 일어나는 경우의 수는
$10+10+20+5=45$
이므로
$\mathrm{P}(A)=\frac{45}{210}=\frac{3}{14}$
따라서 $p=14$, $q=3$이므로
$p+q=14+3=17$

답 17

04 조건부확률

유제 본문 42~48쪽

1 ② **2** 9 **3** ④ **4** ② **5** ④ **6** ⑤
7 ③

1 이 조사에 참여한 학생 240명 중에서 임의로 선택한 한 명이 공연 관람을 선택한 학생인 사건을 A, 3학년 학생인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.
이때
$\mathrm{P}(A)=\frac{142}{240}=\frac{71}{120}$
이고, 사건 $A\cap B$는 선택한 한 명이 공연 관람을 선택한 3학년 학생인 사건이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{68}{240}=\frac{17}{60}$
따라서 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{17}{60}}{\frac{71}{120}}=\frac{34}{71}$$

답 ②

2 한 개의 주사위를 세 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는
6^3
한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 세 눈의 수의 합이 3의 배수인 사건을 A, 세 눈의 수의 곱이 홀수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.
$X_1=\{1, 4\}$, $X_2=\{2, 5\}$, $X_3=\{3, 6\}$이라 하자.
세 눈의 수의 합이 3의 배수가 되는 경우의 수는 세 집합 X_1, X_2, X_3에서 각각 한 원소를 택한 후 택한 세 수를 일렬로 나열하는 경우의 수와 세 집합 X_1, X_2, X_3 중 어느 하나의 집합을 택한 후 택한 집합의 두 원소 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복순열의 수의 합과 같으므로
$$_2C_1\times{}_2C_1\times{}_2C_1\times 3!+{}_3C_1\times{}_2\Pi_3=2\times 2\times 2\times 6+3\times 2^3$$
$$=48+24=72$$
그러므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{72}{6^3}=\frac{1}{3}$
세 눈의 수의 합이 3의 배수이고 세 눈의 수의 곱이 홀수인 경우의 수는 세 수 1, 5, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 세 수가 1, 1, 1 또는 5, 5, 5 또는 3, 3, 3인 경우의 수의 합과 같으므로
$3!+3=9$
그러므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{9}{6^3}=\frac{1}{24}$

즉, 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{8}$$

따라서 $p=8$, $q=1$이므로

$p+q=8+1=9$

답 9

3 갑은 2의 배수가 적힌 카드를 꺼내야 하므로 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수는 2 또는 4 또는 6 또는 8 또는 10이다.

(i) 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 2 또는 4 또는 8 또는 10인 경우

이 상자에서 갑이 카드를 한 장 꺼낼 때, 꺼낸 카드에 적힌 수가 2 또는 4 또는 8 또는 10일 확률은

$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

이고, 상자에 남은 9장의 카드 중에서 을이 카드를 한 장 꺼낼 때, 꺼낸 카드에 적힌 수가 3의 배수일 확률은

$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

이므로 이때의 확률은 확률의 곱셈정리에 의하여

$\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{15}$

(ii) 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 6인 경우

이 상자에서 갑이 카드를 한 장 꺼낼 때, 꺼낸 카드에 적힌 수가 6일 확률은

$\frac{1}{10}$

이고, 상자에 남은 9장의 카드 중에서 을이 카드를 한 장 꺼낼 때, 꺼낸 카드에 적힌 수가 3의 배수일 확률은

$\frac{2}{9}$

이므로 이때의 확률은 확률의 곱셈정리에 의하여

$\frac{1}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{45}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{2}{15}+\frac{1}{45}=\frac{7}{45}$

답 ④

4 두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

이때

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\end{aligned}$$

이므로

$\frac{3}{5}=\frac{1}{4}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{4}\mathrm{P}(B)$

$\frac{3}{4}\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}-\frac{1}{4}=\frac{7}{20}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{7}{15}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}\times\frac{7}{15}=\frac{7}{60}$

답 ②

5 두 주머니 A, B에서 각각 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 주머니 A에서 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수인 사건을 X, 주머니 B에서 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수인 사건을 Y라 하면

$\mathrm{P}(X)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(Y)=\frac{3}{5}$이므로

$\mathrm{P}(X^C)=1-\mathrm{P}(X)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$\mathrm{P}(Y^C)=1-\mathrm{P}(Y)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

한편, 두 사건 X와 Y가 서로 독립이므로 두 사건 X와 Y^C도 서로 독립이고 두 사건 X^C과 Y도 서로 독립이다.

$\mathrm{P}(X\cap Y^C)=\mathrm{P}(X)\mathrm{P}(Y^C)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$

$\mathrm{P}(X^C\cap Y)=\mathrm{P}(X^C)\mathrm{P}(Y)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

이때 사건 $X\cap Y^C$과 사건 $X^C\cap Y$는 서로 배반사건이다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X\cap Y^C)+\mathrm{P}(X^C\cap Y)=\frac{2}{15}+\frac{2}{5}=\frac{8}{15}$

답 ④

6 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 3의 배수의 눈이 나올 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

한 개의 주사위를 5번 던질 때, 3의 배수의 눈이 2번 이상 나오는 사건을 A라 하면 A^C은 3의 배수의 눈이 한 번도 나오지 않거나 한 번만 나오는 사건이다.

한 개의 주사위를 5번 던질 때,

3의 배수의 눈이 한 번도 나오지 않을 확률은

${}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$

이고, 3의 배수의 눈이 한 번만 나올 확률은

${}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{243}$

이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{32}{243}+\frac{80}{243}=\frac{112}{243}$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{112}{243}=\frac{131}{243}$$

답 ⑤

7 흰 공 3개와 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 흰 공이 나올 확률은 $\frac{3}{5}$이고 검은 공이 나올 확률은 $\frac{2}{5}$이다.

이 시행을 3번 반복할 때, 흰 공이 나온 횟수가 검은 공이 나온 횟수보다 큰 경우는 흰 공이 2번, 검은 공이 1번 나오거나 흰 공이 3번 나올 때이다.

이때 흰 공이 2번, 검은 공이 1번 나올 확률은

$${}_3C_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^1=\frac{54}{125}$$

이고, 흰 공이 3번 나올 확률은

$${}_3C_3\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{54}{125}+\frac{27}{125}=\frac{81}{125}$$

답 ③

Level 1 기초 연습

본문 49~50쪽

1 ③ **2** ④ **3** ② **4** ① **5** ④ **6** ⑤
7 ⑤ **8** 121

1 $P(A^C)=\frac{3}{4}$이므로

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$P(B|A)=P(A|B)$에서

$\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(B\cap A)}{P(B)}$이므로

$P(A)=P(B)$

즉, $P(B)=\frac{1}{4}$

또 $\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{2}{5}$에서

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=P(A)\times\frac{2}{5}\\&=\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}\\&=\frac{1}{10}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{10}\\&=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

답 ③

2 이 학교의 3학년 학생 140명 중에서 임의로 선택한 한 명이 활동 X를 선택한 학생인 사건을 A, 여학생인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$이다.

이 학교의 3학년 여학생 64명 중에서 활동 Y를 선택한 학생이 44명이므로 활동 X를 선택한 여학생의 수는

$64-44=20$

또한 이 학교의 3학년 남학생 중에서 활동 X를 선택한 학생이 42명이므로 이 학교의 3학년 학생 중에서 활동 X를 선택한 학생의 수는

$20+42=62$

(단위: 명)

구분	활동 X	활동 Y	합계
남학생	42	34	76
여학생	20	44	64
합계	62	78	140

따라서

$$P(A)=\frac{62}{140}=\frac{31}{70},\ P(A\cap B)=\frac{20}{140}=\frac{1}{7}$$

이므로 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{7}}{\frac{31}{70}}=\frac{10}{31}$$

답 ④

3 꺼낸 3개의 공에 적힌 세 수 중에서 가장 큰 수가 8인 사건을 A, 세 수의 합이 홀수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$이다.

이 주머니에 들어 있는 10개의 공 중에서 동시에 3개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_{10}C_3=120$

꺼낸 3개의 공에 적힌 세 수 중에서 가장 큰 수가 8이려면 8이 적힌 공과 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 적힌 7개의 공 중에서 2개를 꺼내면 되므로 이때의 경우의 수는

${}_1C_1\times{}_7C_2=1\times21=21$

그러므로 $P(A)=\frac{21}{120}=\frac{7}{40}$

꺼낸 3개의 공에 적힌 세 수 중에서 가장 큰 수가 8이고 세 수의 합이 홀수이려면 8이 적힌 공과 숫자 1, 3, 5, 7이 적힌 4개의 공 중에서 1개 및 숫자 2, 4, 6이 적힌 3개의 공 중에서 1개를 꺼내면 되므로 이때의 경우의 수는

${}_{1}C_{1}\times{}_{4}C_{1}\times{}_{3}C_{1}=1\times4\times3=12$

그러므로 $P(A\cap B)=\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{7}{40}}=\frac{4}{7}$$

답 ②

4 이 상자에서 갑이 A 맛 사탕 2개를 동시에 꺼내는 경우와 B 맛 사탕 2개를 동시에 꺼내는 경우로 나누어서 확률을 구해 보자.

(i) 갑이 A 맛 사탕 2개를 동시에 꺼내는 경우

갑이 A 맛 사탕 2개를 동시에 꺼내고, 을이 A 맛 사탕 2개 또는 B 맛 사탕 2개를 동시에 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_{5}C_{2}}{{}_{7}C_{2}}\times\left(\frac{{}_{3}C_{2}}{{}_{5}C_{2}}+\frac{{}_{2}C_{2}}{{}_{5}C_{2}}\right)=\frac{10}{21}\times\left(\frac{3}{10}+\frac{1}{10}\right)=\frac{4}{21}$$

(ii) 갑이 B 맛 사탕 2개를 동시에 꺼내는 경우

갑이 B 맛 사탕 2개를 동시에 꺼내고, 을이 A 맛 사탕 2개를 동시에 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_{2}C_{2}}{{}_{7}C_{2}}\times\frac{{}_{5}C_{2}}{{}_{5}C_{2}}=\frac{1}{21}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{4}{21}+\frac{1}{21}=\frac{5}{21}$$

답 ①

5 이 주머니에서 첫 번째 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 A, 두 번째 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(A|B)$이다.

첫 번째 꺼낸 공이 흰 공이고 두 번째 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$P(A\cap B)=\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{7}$ …… ㉠

첫 번째 꺼낸 공이 검은 공이고 두 번째 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$P(A^C\cap B)=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{2}{7}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)\\&=\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3}{7}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}}=\frac{1}{3}$$

답 ④

6 두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

$P(A|B)=P(A)=\frac{5}{6}$ …… ㉠

한편, 두 사건 A와 B^C도 서로 독립이므로

$P(A\cap B^C)=P(A)P(B^C)=\frac{3}{8}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{5}{6}\times P(B^C)=\frac{3}{8}$

$P(B^C)=\frac{3}{8}\times\frac{6}{5}=\frac{9}{20}$

따라서 $P(B)=1-P(B^C)=1-\frac{9}{20}=\frac{11}{20}$

답 ⑤

7 한 개의 주사위를 한 번 던지는 시행에서 3의 배수의 눈 또는 짝수의 눈이 나올 확률은

$P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

이 시행을 5번 반복할 때 사건 A가 2번 이상 일어나는 사건을 X라 하면 X^C은 이 시행을 5번 반복할 때 사건 A가 1번 이하 일어나는 사건이다.

이 시행을 5번 반복할 때,

사건 A가 일어나지 않을 확률은

${}_{5}C_{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{243}$

이고, 사건 A가 1번 일어날 확률은

${}_{5}C_{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{10}{243}$

이므로

$P(X^C)=\frac{1}{243}+\frac{10}{243}=\frac{11}{243}$

따라서 구하는 확률은

$P(X)=1-P(X^C)=1-\frac{11}{243}=\frac{232}{243}$

답 ⑤

8 이 정육면체 모양의 상자를 한 번 던질 때, 바닥에 닿은 면에 적힌 수가 홀수일 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이고 짝수일 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이다.

$a+b+c+d$가 홀수이려면 a, b, c, d 중 홀수가 1개이거나 3개이어야 한다.

(i) a, b, c, d 중 홀수가 1개인 경우

상자를 네 번 던질 때, 바닥에 닿은 면에 적힌 수가 홀수인 경우가 한 번일 확률은

$${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{81}$$

(ii) a, b, c, d 중 홀수가 3개인 경우

상자를 네 번 던질 때, 바닥에 닿은 면에 적힌 수가 홀수인 경우가 세 번일 확률은

$${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{32}{81}$$

(i), (ii)에서 $a+b+c+d$가 홀수일 확률은

$$\frac{8}{81}+\frac{32}{81}=\frac{40}{81}$$

따라서 $p=81$, $q=40$이므로

$p+q=81+40=121$

답 121

Level 2 기본 연습 본문 51~52쪽

1 ④ **2** ⑤ **3** 261 **4** ④ **5** ⑤ **6** 8
7 ③ **8** 5

1 두 여학생 A, B가 서로 이웃하는 사건을 X, 두 남학생 C, D가 서로 이웃하지 않는 사건을 Y라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(Y|X)$이다.

8명의 학생이 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉는 경우의 수는

$(8-1)!=7!$

두 여학생 A, B를 한 명으로 생각하여 7명이 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉는 경우의 수는

$(7-1)!=6!$

이고, 이 각각에 대하여 두 여학생 A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!$

이므로

$$\mathrm{P}(X)=\frac{6!\times 2!}{7!}=\frac{2}{7}$$

두 여학생 A, B를 한 명으로 생각하고 두 남학생 C, D를 제외한 4명을 포함하여 5명이 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!$

이고, 이 각각에 대하여 A와 B 사이를 제외한 나머지 학생 사이사이 5곳 중에서 2곳에 두 남학생 C, D가 앉는 방법의 수는

${}_5\mathrm{P}_2$

이고, 이 각각에 대하여 두 여학생 A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!$

이므로

$$\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{4!\times {}_5\mathrm{P}_2\times 2!}{7!}=\frac{4}{21}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{4}{21}}{\frac{2}{7}}=\frac{2}{3}$$

답 ④

2 이 자전거 동호회 회원 중에서 임의로 선택한 한 명이 30대 미만인 사건을 A, 남성인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

이 자전거 동호회의 전체 회원 수를 a라 하면 전체 회원의 60 %가 30대 이상이므로 30대 이상인 회원 수는

$$a\times\frac{60}{100}=\frac{3}{5}a$$

이고, 30대 미만인 회원 수는

$$a-\frac{3}{5}a=\frac{2}{5}a$$

30대 이상의 회원 중 남성이 70 %이므로 30대 이상인 남성 회원 수는

$$\frac{3}{5}a\times\frac{70}{100}=\frac{21}{50}a$$

이고, 30대 이상인 여성 회원 수는

$$\frac{3}{5}a-\frac{21}{50}a=\frac{9}{50}a$$

이 자전거 동호회 회원 중 30대 미만인 여성 회원 수를 b라 하면 여성 회원 수는 $b+\frac{9}{50}a$이고, 30대 미만인 남성 회원 수는 $\frac{2}{5}a-b$이다.

(단위: 명)

	30대 미만(A)	30대 이상(A^C)	합계
남성 회원(B)	$\frac{2}{5}a-b$	$\frac{21}{50}a$	$\frac{41}{50}a-b$
여성 회원(B^C)	b	$\frac{9}{50}a$	$\frac{9}{50}a+b$
합계	$\frac{2}{5}a$	$\frac{3}{5}a$	a

이 자전거 동호회 회원 중에서 임의로 선택한 한 명이 여성일 때, 이 회원이 30대 이상일 확률이 $\frac{12}{17}$이므로

$\mathrm{P}(A^C|B^C)=\frac{12}{17}$

이때 표에서

$$\mathrm{P}(A^C|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\frac{\frac{\frac{9}{50}a}{a}}{\frac{\frac{9}{50}a+b}{a}}=\frac{9a}{9a+50b}$$

이므로 $\frac{9a}{9a+50b}=\frac{12}{17}$에서

$51a=36a+200b$

$200b=15a$

$b=\frac{3}{40}a$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{\frac{2}{5}a-\frac{3}{40}a}{a}}{\frac{\frac{2}{5}a}{a}}=\frac{13}{16}$$

답 ⑤

3 $f(2)\times f(4)$의 값이 홀수인 사건을 A, 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

$f(2)\times f(4)$의 값이 홀수이려면 $f(2)$, $f(4)$의 값이 모두 홀수이어야 한다.

이때 $f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 3, 5 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같고, $f(3)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 $f(2)\times f(4)$의 값이 홀수인 함수 f의 개수는

$n(A)={}_2\Pi_2\times{}_5\Pi_3=2^2\times5^3=500$

한편, $f(2)\times f(4)$의 값이 홀수이고 주어진 조건을 만족시키려면 $f(2)$, $f(4)$의 값은

$f(2)=f(4)=3$ 또는 $f(2)=3$, $f(4)=5$

또는 $f(2)=f(4)=5$

이어야 한다.

(i) $f(2)=f(4)=3$일 때

$f(3)=3$이고,

$f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 네 수 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 이때의 함수 f의 개수는

$1\times{}_4\mathrm{H}_2=1\times{}_5\mathrm{C}_2=1\times10=10$

(ii) $f(2)=3$, $f(4)=5$일 때

$f(3)$의 값은 3, 4, 5 중 하나이고,

$f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 두 수 5, 6 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 이때의 함수 f의 개수는

$3\times{}_2\mathrm{H}_2=3\times{}_3\mathrm{C}_2=3\times3=9$

(iii) $f(2)=f(4)=5$일 때

$f(3)=5$이고,

$f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 두 수 5, 6 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 이때의 함수 f의 개수는

$1\times{}_2\mathrm{H}_2=1\times{}_3\mathrm{C}_2=1\times3=3$

(i), (ii), (iii)에서

$n(A\cap B)=10+9+3=22$

이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{22}{500}=\frac{11}{250}$

따라서 $p=250$, $q=11$이므로

$p+q=250+11=261$

답 261

4 1부터 7까지의 자연수 중에서 소수는 2, 3, 5, 7이다.

2개의 동전을 동시에 던질 때 앞면이 나오는 동전의 개수가 1 이상인 사건을 A, 꺼낸 공에 적힌 수가 모두 소수인 사건을 B라 하자.

(i) 2개의 동전을 동시에 던질 때 앞면이 나오는 동전의 개수가 1 이상인 경우

2개의 동전을 동시에 던질 때 앞면이 나오는 동전의 개수가 1 이상일 확률은

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{4}$

이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 모든 수가 소수일 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{4}{35}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{4}\times\frac{4}{35}=\frac{3}{35}$

(ii) 2개의 동전을 동시에 던질 때 앞면이 나오는 동전의 개수가 0인 경우

2개의 동전을 동시에 던질 때 앞면이 나오는 동전의 개수가 0일 확률은

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{4}$

이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 모든 수가 소수일 확률은

$\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{2}{7}$

따라서 $\mathrm{P}(A^C \cap B) = \mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{1}{14}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A^C \cap B)$

$= \frac{3}{35} + \frac{1}{14} = \frac{11}{70}$

답 ④

5 주머니 A에서 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 X, 주머니 B에서 꺼낸 2개의 공이 서로 같은 색인 사건을 Y라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(X|Y)$이다.

(i) 주머니 A에서 꺼낸 공이 흰 공인 경우

주머니 A에서 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$\mathrm{P}(X) = \frac{2}{3}$

주머니 A에서 꺼낸 흰 공 1개를 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공이 서로 같은 색일 확률은

$\mathrm{P}(Y|X) = \frac{{}_4\mathrm{C}_2 + {}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2} = \frac{6+1}{15} = \frac{7}{15}$

따라서 $\mathrm{P}(X \cap Y) = \mathrm{P}(X)\mathrm{P}(Y|X) = \frac{2}{3} \times \frac{7}{15} = \frac{14}{45}$

(ii) 주머니 A에서 꺼낸 공이 검은 공인 경우

주머니 A에서 꺼낸 공이 검은 공일 확률은

$\mathrm{P}(X^C) = \frac{1}{3}$

주머니 A에서 꺼낸 검은 공 1개를 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공이 서로 같은 색일 확률은

$\mathrm{P}(Y|X^C) = \frac{{}_3\mathrm{C}_2 + {}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2} = \frac{3+3}{15} = \frac{2}{5}$

따라서 $\mathrm{P}(X^C \cap Y) = \mathrm{P}(X^C)\mathrm{P}(Y|X^C) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$

(i), (ii)에서

$\mathrm{P}(Y) = \mathrm{P}(X \cap Y) + \mathrm{P}(X^C \cap Y) = \frac{14}{45} + \frac{2}{15} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(X|Y) = \frac{\mathrm{P}(X \cap Y)}{\mathrm{P}(Y)} = \frac{\frac{14}{45}}{\frac{4}{9}} = \frac{7}{10}$$

답 ⑤

6 독서 토론 행사에 모인 n명의 학생 중에서 한 명을 선택할 때, 이 학생이 3학년 학생인 사건이 A, 남학생인 사건이 B이므로

$\mathrm{P}(A) = \frac{10}{n}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{12}{n}$

사건 $A \cap B$는 3학년 남학생인 사건이므로 독서 토론 행사에 모인 3학년 남학생의 수가 a $(1 \leq a \leq 10)$이므로

$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{a}{n}$

두 사건 A와 B가 서로 독립이려면

$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

이어야 한다.

즉, $\frac{a}{n} = \frac{10}{n} \times \frac{12}{n}$에서

$an = 120$ …… ㉠

㉠에서 a는 1 이상 10 이하의 자연수이므로 두 사건 A와 B가 서로 독립이 되도록 하는 두 자연수 n, a의 순서쌍 (n, a)는

$(12, 10)$, $(15, 8)$, $(20, 6)$, $(24, 5)$,

$(30, 4)$, $(40, 3)$, $(60, 2)$, $(120, 1)$

이고, 그 개수는 8이다.

답 8

7 이 시행을 한 번 할 때, 점 P의 좌표는 (a, b)이다.

(단, $a+b=5$)

$\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{a^2+b^2} \leq 4$에서

$a^2+b^2 \leq 16$

이므로 이 부등식과 $a+b=5$를 만족시키는 5 이하의 음이 아닌 두 정수 a, b는

$a=3$, $b=2$ 또는 $a=2$, $b=3$

$a=3$, $b=2$일 확률은

${}_5\mathrm{C}_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}$

$a=2$, $b=3$일 확률은

${}_5\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{5}{16} + \frac{5}{16} = \frac{5}{8}$

답 ③

8 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 6의 약수인 사건을 A, 동전의 앞면이 3번 나오는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A^C \cap B)$이다.

(i) 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 6의 약수인 경우

한 개의 주사위를 한 번 던질 때 나온 눈의 수가 6의 약수일 확률은

$\mathrm{P}(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

한 개의 동전을 5번 던질 때 동전의 앞면이 3번 나올 확률은

$\mathrm{P}(B|A)={}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{3}\times\frac{5}{16}=\frac{5}{24}$

(ii) 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 6의 약수가 아닌 경우

한 개의 주사위를 한 번 던질 때 나온 눈의 수가 6의 약수가 아닐 확률은

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

한 개의 동전을 3번 던질 때 동전의 앞면이 3번 나올 확률은

$\mathrm{P}(B|A^C)={}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

따라서 $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{24}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{5}{24}+\frac{1}{24}=\frac{1}{4}$

따라서 $p=4$, $q=1$이므로

$p+q=4+1=5$

답 5

Level 3 실력 완성 본문 53쪽

1 113 **2** ② **3** 32

1 이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 6점 이상인 사건을 X, 동전의 앞면이 나온 횟수가 3 미만인 사건을 Y라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(Y|X)$이다.

(i) 동전의 앞면이 나온 횟수가 3 미만인 경우

1개의 동전을 4번 던져 앞면이 나온 횟수가 3 미만일 확률은

$$\mathrm{P}(Y)={}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{6}{16}$$
$$=\frac{11}{16}$$

주머니 A에서 동시에 꺼낸 2개의 공에 적힌 모든 수의 합이 6 이상이려면 꺼낸 두 공에 적힌 수가

4, 3 또는 4, 2 또는 3, 3

이어야 한다.

따라서

$$\mathrm{P}(X\cap Y)=\mathrm{P}(Y)\mathrm{P}(X|Y)$$
$$=\frac{11}{16}\times\left(\frac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}+\frac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}+\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}\right)$$
$$=\frac{11}{16}\times\left(\frac{2}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\right)$$
$$=\frac{11}{40}$$

(ii) 동전의 앞면이 나온 횟수가 3 이상인 경우

1개의 동전을 4번 던져 앞면이 나온 횟수가 3 이상일 확률은

$\mathrm{P}(Y^C)=1-\mathrm{P}(Y)=1-\frac{11}{16}=\frac{5}{16}$

주머니 B에서 동시에 꺼낸 3개의 공에 적힌 모든 수의 합이 6 이상이려면 꺼낸 세 공에 적힌 수가

3, 2, 2 또는 3, 2, 1

이어야 한다.

따라서

$$\mathrm{P}(X\cap Y^C)=\mathrm{P}(Y^C)\mathrm{P}(X|Y^C)$$
$$=\frac{5}{16}\times\left(\frac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3}+\frac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_3}\right)$$
$$=\frac{5}{16}\times\left(\frac{1}{10}+\frac{4}{10}\right)$$
$$=\frac{5}{32}$$

(i), (ii)에서

$$\mathrm{P}(X)=\mathrm{P}(X\cap Y)+\mathrm{P}(X\cap Y^C)$$
$$=\frac{11}{40}+\frac{5}{32}$$
$$=\frac{69}{160}$$

이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{11}{40}}{\frac{69}{160}}=\frac{44}{69}$$

따라서 $p=69$, $q=44$이므로

$p+q=69+44=113$

답 113

2 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 숫자가 2인 사건을 X라 하면 X^C은 꺼낸 공에 적힌 숫자가 2가 아닌 사건, 즉 꺼낸 공에 적힌 숫자가 3인 사건이다.

주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 주머니 B에서 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 세 수의 합이 3의 배수인 사건을 Y라 하자.

두 사건 $X\cap Y$와 $X^C\cap Y$는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은 $\mathrm{P}(Y)=\mathrm{P}(X\cap Y)+\mathrm{P}(X^C\cap Y)$이다.

(ⅰ) 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 숫자가 2인 경우

주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 숫자가 2일 확률은

$\mathrm{P}(X)=\frac{2}{3}$

주머니 A에서 꺼낸 숫자 2가 적힌 공 1개를 주머니 B에 넣으면 주머니 B에는 숫자 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 7개의 공이 들어 있다.

이 7개의 공이 들어 있는 주머니 B에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 세 수의 합이 3의 배수인 경우는

숫자 1이 적힌 3개의 공 중에서 3개를 꺼내거나

숫자 2가 적힌 3개의 공 중에서 3개를 꺼내거나

숫자 1이 적힌 3개의 공 중에서 1개, 숫자 2가 적힌 3개의 공 중에서 1개, 숫자 3이 적힌 공 1개를 꺼낼 때이므로

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3+{}_3\mathrm{C}_3+{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}$$
$$=\frac{1+1+3\times3\times1}{35}=\frac{11}{35}$$

따라서

$$\mathrm{P}(X\cap Y)=\mathrm{P}(X)\mathrm{P}(Y|X)=\frac{2}{3}\times\frac{11}{35}=\frac{22}{105}$$

(ⅱ) 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 숫자가 3인 경우

주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 숫자가 3일 확률은

$\mathrm{P}(X^C)=\frac{1}{3}$

주머니 A에서 꺼낸 숫자 3이 적힌 공 1개를 주머니 B에 넣으면 주머니 B에는 숫자 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3이 하나씩 적혀 있는 7개의 공이 들어 있다.

이 7개의 공이 들어 있는 주머니 B에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 세 수의 합이 3의 배수인 경우는

숫자 1이 적힌 3개의 공 중에서 3개를 꺼내거나

숫자 1이 적힌 3개의 공 중에서 1개, 숫자 2가 적힌 2개의 공 중에서 1개, 숫자 3이 적힌 2개의 공 중에서 1개를 꺼낼 때이므로

$$\mathrm{P}(Y|X^C)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3+{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}$$
$$=\frac{1+3\times2\times2}{35}=\frac{13}{35}$$

따라서

$$\mathrm{P}(X^C\cap Y)=\mathrm{P}(X^C)\mathrm{P}(Y|X^C)=\frac{1}{3}\times\frac{13}{35}=\frac{13}{105}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(Y)=\mathrm{P}(X\cap Y)+\mathrm{P}(X^C\cap Y)$$
$$=\frac{22}{105}+\frac{13}{105}$$
$$=\frac{1}{3}$$

답 ②

3 사건 $A\cap B$는 6의 배수가 적힌 공이 나오는 사건이다.

(ⅰ) $n=6m$ (m은 16 이하의 자연수)일 때

$\mathrm{P}(A)=\frac{3m}{6m}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{2m}{6m}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{m}{6m}=\frac{1}{6}$

이때

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

이므로 $n=6m$이면 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

(ⅱ) $n=6m+1$ (m은 16 이하의 자연수)일 때

$\mathrm{P}(A)=\frac{3m}{6m+1}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{2m}{6m+1}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{m}{6m+1}$

두 사건 A와 B가 서로 독립이려면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

이어야 한다.

즉, $\frac{m}{6m+1}=\frac{3m}{6m+1}\times\frac{2m}{6m+1}$에서

$1=\frac{6m}{6m+1}$

$6m+1=6m$

이 방정식을 만족시키는 16 이하의 자연수 m은 존재하지 않는다.

따라서 $n=6m+1$이면 두 사건 A와 B는 서로 독립이 아니다.

(ⅲ) $n=6m+2$ (m은 16 이하의 자연수)일 때

$\mathrm{P}(A)=\frac{3m+1}{6m+2}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{2m}{6m+2}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{m}{6m+2}$

이때

$$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{3m+1}{6m+2}\times\frac{2m}{6m+2}$$
$$=\frac{m}{6m+2}=\mathrm{P}(A\cap B)$$

이므로 $n=6m+2$이면 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

(iv) $n=6m+3$ (m은 16 이하의 자연수)일 때

$\mathrm{P}(A)=\frac{3m+1}{6m+3}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{2m+1}{6m+3}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{m}{6m+3}$

두 사건 A와 B가 서로 독립이려면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

이어야 한다.

즉, $\frac{m}{6m+3}=\frac{3m+1}{6m+3}\times\frac{2m+1}{6m+3}$에서

$m=\frac{3m+1}{3}$

$3m=3m+1$

이 방정식을 만족시키는 16 이하의 자연수 m은 존재하지 않는다.

따라서 $n=6m+3$이면 두 사건 A와 B는 서로 독립이 아니다.

(v) $n=6m+4$ (m은 16 이하의 자연수)일 때

$\mathrm{P}(A)=\frac{3m+2}{6m+4}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{2m+1}{6m+4}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{m}{6m+4}$

두 사건 A와 B가 서로 독립이려면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

이어야 한다.

즉, $\frac{m}{6m+4}=\frac{3m+2}{6m+4}\times\frac{2m+1}{6m+4}$에서

$m=\frac{2m+1}{2}$

$2m=2m+1$

이 방정식을 만족시키는 16 이하의 자연수 m은 존재하지 않는다.

따라서 $n=6m+4$이면 두 사건 A와 B는 서로 독립이 아니다.

(vi) $n=6m+5$ (m은 15 이하의 자연수)일 때

$\mathrm{P}(A)=\frac{3m+2}{6m+5}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{2m+1}{6m+5}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{m}{6m+5}$

두 사건 A와 B가 서로 독립이려면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

이어야 한다.

즉, $\frac{m}{6m+5}=\frac{3m+2}{6m+5}\times\frac{2m+1}{6m+5}$에서

$m=\frac{(3m+2)(2m+1)}{6m+5}$

$2m+2=0$

이 방정식을 만족시키는 15 이하의 자연수 m은 존재하지 않는다.

따라서 $n=6m+5$이면 두 사건 A와 B는 서로 독립이 아니다.

(i)~(vi)에서 두 사건 A와 B가 서로 독립이 되도록 하는 n의 값은

$n=6m$ (m은 16 이하의 자연수) 또는

$n=6m+2$ (m은 16 이하의 자연수)

이다.

따라서 구하는 자연수 n의 개수는

$2\times16=32$

답 32

05 이산확률변수의 확률분포

유제 본문 55~63쪽

1 ⑤	2 ①	3 ②	4 426	5 ①	6 ④
7 ④	8 166	9 ④			

1 $\mathrm{P}(X=4)=\frac{4a}{28}=\frac{1}{7}$이므로

$a=1$

따라서

$$\mathrm{P}(X=2)-\mathrm{P}(X=1)=\frac{2a}{28}-\frac{a}{28}=\frac{a}{28}=\frac{1}{28}$$

답 ⑤

2 확률분포를 나타낸 표에서 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\frac{1}{4}+a+b+c=1$

$a+b+c=\frac{3}{4}$ …… ㉠

또한 $\mathrm{P}(X=1)=\mathrm{P}(X>2)$이므로

$\frac{1}{4}=b+c$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, $a=\frac{1}{2}$

즉, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{2}$

답 ①

3 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}=\frac{2}{a}=1$

$a=2$

따라서

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$$

답 ②

4 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$a\log_3 3+a\log_3 3^2+a\log_3 3^3+a\log_3 3^4$

$=a+2a+3a+4a$

$=10a=1$

$a=\frac{1}{10}$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=3\times\frac{1}{10}\log_3 3+3^2\times\frac{1}{10}\log_3 3^2+3^3\times\frac{1}{10}\log_3 3^3\\&\quad+3^4\times\frac{1}{10}\log_3 3^4\\&=3\times\frac{1}{10}+9\times\frac{1}{10}\times2+27\times\frac{1}{10}\times3\\&\quad+81\times\frac{1}{10}\times4\\&=\frac{3}{10}+\frac{18}{10}+\frac{81}{10}+\frac{324}{10}\\&=\frac{426}{10}\end{aligned}$$

이므로

$10\times\mathrm{E}(X)=10\times\frac{426}{10}=426$

답 426

5 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\frac{1}{4}+a+b=1$

$a+b=\frac{3}{4}$ …… ㉠

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times a+3\times b=\frac{1}{4}+2a+3b=\frac{9}{4}$에서

$2a+3b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{2}$

따라서

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{2}=\frac{23}{4}$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{23}{4}-\left(\frac{9}{4}\right)^2=\frac{23}{4}-\frac{81}{16}=\frac{11}{16}$$

답 ①

참고

위의 풀이에서 $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{2}$일 때, $\mathrm{V}(X)$의 값은 다음과 같이 구할 수도 있다.

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}\left(\left(X-\frac{9}{4}\right)^2\right)$$
$$=\left(1-\frac{9}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}+\left(2-\frac{9}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}+\left(3-\frac{9}{4}\right)^2\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{25}{16}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\times\frac{1}{4}+\frac{9}{16}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{25}{64}+\frac{1}{64}+\frac{9}{32}$$
$$=\frac{11}{16}$$

6 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\frac{a}{3}+a^2+\frac{1}{3}=1$

$3a^2+a-2=0$

$(3a-2)(a+1)=0$

이때 $a>0$이므로 $a=\frac{2}{3}$

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{a}{3}+2\times a^2+3\times\frac{1}{3}$$
$$=\frac{a}{3}+2a^2+1$$
$$=\frac{2}{9}+\frac{8}{9}+1$$
$$=\frac{19}{9}$$
$$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{a}{3}+2^2\times a^2+3^2\times\frac{1}{3}$$
$$=\frac{a}{3}+4a^2+3$$
$$=\frac{2}{9}+\frac{16}{9}+3$$
$$=5$$

따라서

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=5-\left(\frac{19}{9}\right)^2$$
$$=5-\frac{361}{81}$$
$$=\frac{44}{81}$$

이므로

$\mathrm{V}(9X-1)=81\mathrm{V}(X)=81\times\frac{44}{81}=44$

답 ④

7 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{2}{7}+4\times\frac{1}{7}=\frac{12}{7}$$
$$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{4}{7}+2^2\times\frac{2}{7}+4^2\times\frac{1}{7}=4$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=4-\left(\frac{12}{7}\right)^2$$
$$=4-\frac{144}{49}$$
$$=\frac{52}{49}$$
$$\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$$
$$=\frac{12}{7}a+b=2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또한 $\sigma(aX+b)=2\sqrt{13}$이므로

$\mathrm{V}(aX+b)=(2\sqrt{13})^2=52$

즉, $a^2\mathrm{V}(X)=52$에서

$a^2\times\frac{52}{49}=52$

$a^2=49$

$a=-7$ 또는 $a=7$

이 값을 ㉠에 대입하면

$a=-7$일 때 $b=14$, $a=7$일 때 $b=-10$

따라서 $a+b$의 최댓값은

$a=-7$, $b=14$일 때 $a+b=7$이다.

답 ④

8 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=np=15 \quad \cdots\cdots ㉠$

$\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{15(1-p)}=\frac{\sqrt{15}}{2}$에서

$\sqrt{1-p}=\frac{1}{2}$

양변을 제곱하면

$1-p=\frac{1}{4}$, $p=\frac{3}{4}$

이 값을 ㉠에 대입하면 $n=20$

따라서 $8(n+p)=8\left(20+\frac{3}{4}\right)=160+6=166$

답 166

9 동전 3개를 동시에 던질 때 앞면이 2개, 뒷면이 1개 나올 확률은

${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=3\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(64, \frac{3}{8}\right)$을 따른다.

따라서

$E(X)=64\times\frac{3}{8}=24$

$V(X)=64\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{8}=15$

이므로

$E(X)+V(X)=24+15=39$

답 ④

Level 1 기초 연습 본문 64~65쪽

1 ③	2 ③	3 ④	4 ⑤	5 ⑤	6 ②
7 ①	8 ④				

1 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$

$=\frac{k\times{}_3C_3}{{}_3C_1}+\frac{k\times{}_3C_2}{{}_3C_2}+\frac{k\times{}_3C_1}{{}_3C_3}$

$=\frac{k}{3}+\frac{3k}{3}+3k$

$=\frac{13}{3}k=1$

따라서 $k=\frac{3}{13}$

답 ③

2 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\frac{1}{9}+a+\frac{1}{3}+b=1$

$a+b=\frac{5}{9}$ …… ㉠

$P(X\ge3)=P(X=3)+P(X=4)=\frac{1}{3}+b$

$P(X\le2)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{9}+a$

이므로

$P(X\ge3)-P(X\le2)=\left(\frac{1}{3}+b\right)-\left(\frac{1}{9}+a\right)$

$=\frac{2}{9}+b-a=\frac{1}{3}$

에서 $-a+b=\frac{1}{9}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{2}{9}$, $b=\frac{1}{3}$이므로

$\frac{b}{a}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{9}}=\frac{3}{2}$

답 ③

3 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4이므로

$P(X=2)=\frac{{}_1C_1\times{}_1C_1}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}$

$P(X=3)=\frac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_4C_2}=\frac{1}{3}$

$P(X=4)=\frac{{}_3C_1\times{}_1C_1}{{}_4C_2}=\frac{1}{2}$

따라서 $E(X)=2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{2}=\frac{10}{3}$

답 ④

4 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 100, 200, 300이므로

$P(X=0)={}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

$P(X=100)={}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$

$P(X=200)={}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$

$P(X=300)={}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{8}$

따라서

$E(X)=0\times\frac{1}{8}+100\times\frac{3}{8}+200\times\frac{3}{8}+300\times\frac{1}{8}$

$=150$

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{8}+100^2\times\frac{3}{8}+200^2\times\frac{3}{8}+300^2\times\frac{1}{8}$

$=30000$

이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=30000-150^2$

$=30000-22500$

$=7500$

답 ⑤

5 1은 양의 약수가 1개, 2, 3, 5는 양의 약수가 2개, 4는 양의 약수가 3개, 6은 양의 약수가 4개이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이다.

이때

$P(X=1)=\frac{1}{6}$, $P(X=2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,

$P(X=3)=\frac{1}{6}$, $P(X=4)=\frac{1}{6}$

따라서

$E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}=\frac{7}{3}$

이므로

$E(3X-2)=3E(X)-2=3\times\frac{7}{3}-2=5$

답 ⑤

6 $E(3X+1)=3E(X)+1=16$에서

$E(X)=5$

$V(2X-1)=4V(X)=8$에서

$V(X)=2$

따라서

$$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$$
$$=2+5^2=27$$

답 ②

7 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$$
$$=\frac{a-1}{b}+\frac{a-2}{b}+\frac{a-3}{b}+\frac{a-4}{b}$$
$$=\frac{4a-10}{b}=1$$

$4a-b=10$ …… ㉠

또한 $P(X=2)=\frac{a-2}{b}=\frac{3}{10}$에서

$10a-20=3b$

$10a-3b=20$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=10$

즉, $P(X=x)=\frac{5-x}{10}$ $(x=1, 2, 3, 4)$이므로

$$E(X)=1\times\frac{4}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{2}{10}+4\times\frac{1}{10}$$
$$=2$$

$$E(X^2)=1^2\times\frac{4}{10}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{2}{10}+4^2\times\frac{1}{10}$$
$$=5$$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=5-2^2=1$$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=1$이므로

$\sigma(-2X+1)=|-2|\sigma(X)=2\times1=2$

답 ①

8 서로 다른 두 개의 주사위를 던져서 나온 두 눈의 수가 서로 같을 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$, 서로 다를 확률은 $\frac{5}{6}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{6}\right)$을 따르고, 확률변수 Y는 이항분포 $B\left(n, \frac{5}{6}\right)$를 따른다.

이때

$$E(X)=n\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}n$$

$$V(Y)=n\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{36}n$$

이므로 $E(X)>V(Y)+1$에서

$$\frac{1}{6}n>\frac{5}{36}n+1$$

$6n>5n+36$

$n>36$

따라서 자연수 n의 최솟값은 37이다.

답 ④

Level 2 기본 연습

본문 66~67쪽

1 ⑤	**2** ③	**3** ②	**4** ④	**5** ④	**6** ⑤
7 300	**8** 10				

1 1부터 7까지의 자연수 중에서 소수는 2, 3, 5, 7이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4이다.

따라서

$$P(2\le X\le3)=P(X=2)+P(X=3)$$
$$=1-P(X=4)$$
$$=1-\frac{{}_4C_4\times{}_3C_1}{{}_7C_5}$$
$$=1-\frac{1\times3}{21}$$
$$=1-\frac{1}{7}$$
$$=\frac{6}{7}$$

답 ⑤

2 3번의 시행에서 확률변수 X가 양수인 경우는

$X=3+3+3=9$, $X=3+3+(-2)=4$일 때이므로

$P(X>0)=P(X=9)+P(X=4)$이다.

이때 두 수의 곱이 홀수이려면 두 수가 모두 홀수이어야 하므로 1번의 시행에서 두 수의 곱이 홀수일 확률은

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

이고, 두 수의 곱이 짝수일 확률은

$$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

따라서

$$P(X=9)={}_3C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{64}$$

$$P(X=4)={}_3C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{9}{64}$$

이므로

$\mathrm{P}(X>0)=\frac{1}{64}+\frac{9}{64}=\frac{5}{32}$

답 ③

3 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$a+b+c+c+b+a=2a+2b+2c=1$

$a+b+c=\frac{1}{2}$

또한 $\mathrm{P}(X=4c)=a$이므로

$4c=1$ 또는 $4c=6$

즉, $c=\frac{1}{4}$ 또는 $c=\frac{3}{2}$

이때 $0<c\le 1$이므로 $c=\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=1\times a+2\times b+3\times c+4\times c+5\times b+6\times a\\&=7a+7b+7c\\&=7(a+b+c)\\&=7\times\frac{1}{2}\\&=\frac{7}{2}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=\frac{85}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2\\&=\frac{85}{6}-\frac{49}{4}\\&=\frac{23}{12}\end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{c}\times\mathrm{V}(X)=4\times\frac{23}{12}=\frac{23}{3}$

답 ②

4 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(X=-2)+\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)\\&\qquad+\mathrm{P}(X=3)\\&=\frac{|-2|}{a}+\frac{|-1|}{a}+\frac{|1|}{a}+\frac{|2|}{a}+\frac{|3|}{a}\\&=\frac{2}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{2}{a}+\frac{3}{a}\\&=\frac{9}{a}=1\end{aligned}$$

$a=9$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=(-2)\times\frac{2}{9}+(-1)\times\frac{1}{9}+1\times\frac{1}{9}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{3}{9}\\&=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2)&=(-2)^2\times\frac{2}{9}+(-1)^2\times\frac{1}{9}+1^2\times\frac{1}{9}+2^2\times\frac{2}{9}\\&\qquad+3^2\times\frac{3}{9}\\&=5\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}((X-1)^2)&=\mathrm{V}(X)\\&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=5-1^2\\&=4\end{aligned}$$

답 ④

참고

$a=9$일 때, $\mathrm{E}((X-1)^2)$의 값은 다음과 같이 구할 수도 있다.

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}((X-1)^2)\\&=(-2-1)^2\times\frac{2}{9}+(-1-1)^2\times\frac{1}{9}+(1-1)^2\times\frac{1}{9}\\&\qquad+(2-1)^2\times\frac{2}{9}+(3-1)^2\times\frac{3}{9}\\&=2+\frac{4}{9}+0+\frac{2}{9}+\frac{12}{9}\\&=4\end{aligned}$$

5 세 집합 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{3, 4, 5, 6\}$, $C=\{3, 7\}$에서 각각 1개의 원소를 선택하는 경우의 수는

$3\times 4\times 2=24$

(i) $X=3$인 경우는 세 집합 A, B, C에서 선택한 원소가 모두 3일 때이므로

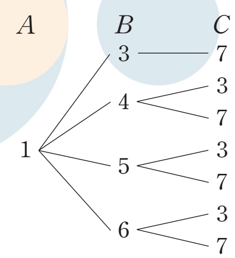
$\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{24}$

(ii) $X=2$인 경우는 세 집합 A, B, C에서 선택한 원소가 $(1, 3, 3)$, $(2, 3, 3)$, $(3, 3, 7)$, $(3, 4, 3)$, $(3, 5, 3)$, $(3, 6, 3)$일 때이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$

(iii) $X=0$인 경우는 세 집합 A, B, C에서 선택한 원소가 서로 다를 때이다.

이때 집합 A에서 1을 선택한 경우는



이므로 경우의 수는 7이다.

같은 방법으로 집합 A에서 2를 선택한 경우의 수도 7이다.

한편, 집합 A에서 3을 선택한 경우는 집합 B에서 선택한 원소가 4, 5, 6의 3가지이고 집합 C에서 선택한 원소가 7일 때이므로 경우의 수는 3이다.

즉, $\mathrm{P}(X=0)=\dfrac{7+7+3}{24}=\dfrac{17}{24}$

따라서

$\mathrm{E}(X)=3\times\dfrac{1}{24}+2\times\dfrac{1}{4}+0\times\dfrac{17}{24}=\dfrac{5}{8}$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(8X+4)&=8\mathrm{E}(X)+4\\&=8\times\frac{5}{8}+4\\&=9\end{aligned}$$

답 ④

6 남학생 3명과 여학생 3명이 2인용 의자와 4인용 의자에 앉는 경우의 수는

$6!=720$

또한 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_3\times4!\times2!}{720}=\dfrac{1}{5}$

$\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2\times4!\times2!}{720}=\dfrac{3}{5}$

$\mathrm{P}(X=3)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_1\times4!\times2!}{720}=\dfrac{1}{5}$

따라서

$\mathrm{E}(X)=1\times\dfrac{1}{5}+2\times\dfrac{3}{5}+3\times\dfrac{1}{5}=2$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\dfrac{1}{5}+2^2\times\dfrac{3}{5}+3^2\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{22}{5}$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\dfrac{22}{5}-2^2=\dfrac{2}{5}$

$\mathrm{V}(5X)=5^2\mathrm{V}(X)=25\times\dfrac{2}{5}=10$

답 ⑤

7 조건 (가)에서

$\mathrm{E}(X)=np=25$ …… ㉠

또한 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르는 확률변수 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{n-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=1)&={}_n\mathrm{C}_1 p(1-p)^{n-1}\\&=np(1-p)^{n-1}\\&=25(1-p)^{n-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=2)&={}_n\mathrm{C}_2 p^2(1-p)^{n-2}\\&=\frac{n(n-1)}{2}\times p^2(1-p)^{n-2}\\&=\frac{n^2p^2-np^2}{2}\times(1-p)^{n-2}\\&=\frac{25^2-25p}{2}\times(1-p)^{n-2}\\&=\frac{25(25-p)}{2}\times(1-p)^{n-2}\end{aligned}$$

조건 (나)에서

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{P}(X=1)}{\mathrm{P}(X=2)}&=\frac{25(1-p)^{n-1}}{\frac{25(25-p)}{2}\times(1-p)^{n-2}}\\&=\frac{2(1-p)}{25-p}=\frac{2}{33}\end{aligned}$$

$33(1-p)=25-p$

$32p=8$

$p=\dfrac{1}{4}$

이 값을 ㉠에 대입하면

$n=100$

따라서

$\mathrm{V}(X)=100\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{75}{4}$

이므로

$\mathrm{V}(4X)=16\mathrm{V}(X)=16\times\dfrac{75}{4}=300$

답 300

8 주사위를 120번 던져서 3의 배수의 눈이 나온 횟수를 Y라 하면 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(120,\ \dfrac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(Y)=120\times\dfrac{1}{3}=40$

또한 원점에 있던 점 P가 이동된 점의 좌표는

$3Y-(120-Y)=4Y-120$

이므로

$X=4Y-120$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\mathrm{E}(4Y-120)\\&=4\mathrm{E}(Y)-120\\&=4\times40-120\\&=40\end{aligned}$$

이므로

$\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{4}X\right)=\dfrac{1}{4}\mathrm{E}(X)=\dfrac{1}{4}\times40=10$

답 10

Level 3 실력 완성

본문 68쪽

1 611 **2** ② **3** ④

1 두 개의 동전을 동시에 던질 때 두 개의 동전이 모두 앞면이 나올 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

이므로 그 이외의 경우가 나올 확률은

$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

또한 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 3, 4, 5이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=3)&={}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^0+{}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^3\\&=\frac{1}{64}+\frac{27}{64}\\&=\frac{7}{16}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=4)&={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1\times\frac{1}{4}+{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{3}{4}\\&=\frac{9}{256}+\frac{81}{256}\\&=\frac{45}{128}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=5)&={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}+{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{3}{4}\\&=\frac{54}{1024}+\frac{162}{1024}\\&=\frac{27}{128}\end{aligned}$$

그러므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=3\times\frac{7}{16}+4\times\frac{45}{128}+5\times\frac{27}{128}\\&=\frac{483}{128}\end{aligned}$$

따라서 $p=128$, $q=483$이므로

$p+q=128+483=611$

답 611

2 (ⅰ) 첫 번째 시행에서 꺼낸 공이 검은 공이고 두 번째 시행에서 꺼낸 공도 검은 공일 확률은

$\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{3}$

(ⅱ) 첫 번째 시행에서 꺼낸 공이 검은 공이고 두 번째 시행에서 꺼낸 공은 흰 공일 확률은

$\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{3}$

(ⅲ) 첫 번째 시행에서 꺼낸 공이 흰 공이고 두 번째 시행에서 꺼낸 공이 검은 공일 확률은

$\frac{2}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{18}$

(ⅳ) 첫 번째 시행에서 꺼낸 공이 흰 공이고 두 번째 시행에서 꺼낸 공도 흰 공일 확률은

$\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$

2번의 시행 후 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)의 각 경우에서 주머니에 남은 검은 공의 개수는 각각 2, 4, 4, 6이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{3}+\frac{5}{18}=\frac{11}{18}$

$\mathrm{P}(X=6)=\frac{1}{18}$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=2\times\frac{1}{3}+4\times\frac{11}{18}+6\times\frac{1}{18}\\&=\frac{31}{9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2)&=2^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{11}{18}+6^2\times\frac{1}{18}\\&=\frac{118}{9}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=\frac{118}{9}-\left(\frac{31}{9}\right)^2\\&=\frac{101}{81}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(9X+1)&=81\mathrm{V}(X)\\&=81\times\frac{101}{81}\\&=101\end{aligned}$$

답 ②

3 7번의 시행에서 이웃하는 왼쪽 상자의 바둑돌과 같은 색의 바둑돌을 넣게 되는 사건은 서로 독립이며 그 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(7,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

따라서

$\sigma(X)=\sqrt{7\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

이므로

$\sigma(-8X+3)=|-8|\sigma(X)=8\times\frac{\sqrt{7}}{2}=4\sqrt{7}$

답 ④

참고1

4개의 빈 상자로 같은 시행을 하면 각 상자에 넣은 바둑돌의 색과 그 때의 확률은 다음과 같다.

(i) 흰흰흰흰: $P(X=0)=\frac{1}{8}$

(ii) 흰검검검, 흰흰검검, 흰흰흰검: $P(X=1)=\frac{3}{8}$

(iii) 흰검흰흰, 흰흰검흰, 흰검검흰: $P(X=2)=\frac{3}{8}$

(iv) 흰검흰검: $P(X=3)=\frac{1}{8}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(3, \frac{1}{2}\right)$을 따름을 알 수 있다.

참고2

확률변수 X는 8개의 상자의 사이사이의 7군데 중 칸막이를 세울 수 있는 자리의 개수와 같다.

예를 들어 그림과 같이 7군데 중 2군데에 칸막이를 세운 후 이 칸막이의 좌우에서 바둑돌의 색이 바뀐다고 하면 상자 안에 바둑돌은 다음과 같이 넣어진다.

흰 흰 흰 | 검 검 검 | 흰 흰

즉, 7개의 자리 중 2개의 칸막이를 세우는 경우의 수는 ${}_7C_2$이고, 한 개의 주사위를 던져서 짝수가 나올 확률과 홀수가 나올 확률은 모두 $\frac{1}{2}$이므로

$P(X=2)={}_7C_2\left(\frac{1}{2}\right)^7={}_7C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^5$

06 연속확률변수의 확률분포

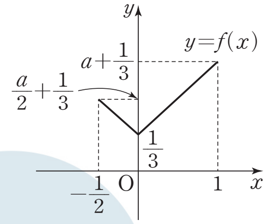
유제 본문 70~76쪽

1 ④ **2** ② **3** ④ **4** ② **5** ⑤ **6** ③ **7** ③

1 $f(x)=a|x|+\frac{1}{3}$에 대하여

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{a}{2}+\frac{1}{3}$, $f(0)=\frac{1}{3}$, $f(1)=a+\frac{1}{3}$

이므로 $-\frac{1}{2}\le x\le 1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-\frac{1}{2}$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

즉,

$\frac{1}{2}\times\left\{\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\right\}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left\{\frac{1}{3}+\left(a+\frac{1}{3}\right)\right\}\times 1$

$=\frac{1}{8}a+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}$

$=\frac{5}{8}a+\frac{1}{2}=1$

$\frac{5}{8}a=\frac{1}{2}$, $a=\frac{4}{5}$

따라서

$P(0\le X\le 1)=\frac{1}{2}\times\left\{\frac{1}{3}+\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\right)\right\}\times 1$

$=\frac{1}{2}\times\frac{22}{15}=\frac{11}{15}$

답 ④

2 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고, $P(X\le 5)=P(X\ge 15)$이므로

$m=\frac{5+15}{2}=10$

또한 $V(2X)=4V(X)=16$이므로

$V(X)=4$

따라서 $\sigma=\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{4}=2$이므로

$m+\sigma=10+2=12$

답 ②

3 조건 (가)에 의하여

$m-2=2m-10$

이므로 $m=8$

이때 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=8$에 대하여 대칭이므로 조건 (나)에서

$P(7\le X\le 9)=2P(8\le X\le 9)=0.1$

따라서 $P(8\le X\le 9)=0.05$이므로

$m\times P(8\le X\le 9)=8\times 0.05=0.4$

답 ④

4 이 인터넷 동영상 사이트에 등록된 동영상 한 개의 영상시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(50, 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-50}{4}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$P(48\le X\le 52)=P\left(\frac{48-50}{4}\le Z\le \frac{52-50}{4}\right)$$
$$=P(-0.5\le Z\le 0.5)$$
$$=2P(0\le Z\le 0.5)$$
$$=2\times 0.1915$$
$$=0.3830$$

답 ②

5 확률변수 X가 정규분포 $N(20, 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-20}{5}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(X\le a)\le 0.8413$에서

$$P(X\le a)=P\left(Z\le \frac{a-20}{5}\right)$$
$$=P(Z\le 0)+P\left(0\le Z\le \frac{a-20}{5}\right)$$
$$=0.5+P\left(0\le Z\le \frac{a-20}{5}\right)$$

이므로

$$0.5+P\left(0\le Z\le \frac{a-20}{5}\right)\le 0.8413$$

$$P\left(0\le Z\le \frac{a-20}{5}\right)\le 0.3413$$

이때 표준정규분포표에서 $P(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\frac{a-20}{5}\le 1$, $a\le 25$

따라서 실수 a의 최댓값은 25이다.

답 ⑤

6 두 개의 동전을 동시에 던질 때 모두 뒷면이 나올 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(4800, \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

$E(X)=4800\times\frac{1}{4}=1200$

$V(X)=4800\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=900$

이때 4800은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(1200, 30^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-1200}{30}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서

$$P(X\ge 1230)=P\left(Z\ge \frac{1230-1200}{30}\right)$$
$$=P(Z\ge 1)$$
$$=0.5-P(0\le Z\le 1)$$
$$=0.5-0.3413$$
$$=0.1587$$

답 ③

7 두 수의 곱이 소수가 되는 경우는 1과 소수인 2, 3, 5를 곱할 때이다.

주머니에서 임의로 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 곱이 소수일 확률은

$\frac{1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(2100, \frac{3}{10}\right)$을 따른다.

$E(X)=2100\times\frac{3}{10}=630$

$V(X)=2100\times\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}=441$

이때 2100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(630, 21^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-630}{21}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서

$$P(609\le X\le 672)$$
$$=P\left(\frac{609-630}{21}\le Z\le \frac{672-630}{21}\right)$$
$$=P(-1\le Z\le 2)$$
$$=P(-1\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 2)$$
$$=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 2)$$
$$=0.3413+0.4772$$
$$=0.8185$$

답 ③

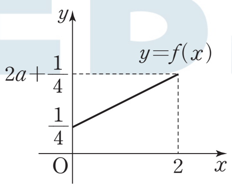
Level **1** **기초 연습** 본문 77~78쪽

1 ③ **2** ④ **3** ③ **4** ③ **5** ③ **6** ④
7 ⑤ **8** ③

1 함수 $f(x)=ax+\frac{1}{4}$에 대하여

$f(0)=\frac{1}{4}$, $f(2)=2a+\frac{1}{4}$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다. 즉,

$\frac{1}{2}\times\left\{\frac{1}{4}+\left(2a+\frac{1}{4}\right)\right\}\times 2=2a+\frac{1}{2}=1$

$2a=\frac{1}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{4}$

답 ③

2 $f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=-1$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다. 즉,

$\{a-(-1)\}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times(3-a)\times\frac{1}{3}$

$=(a+1)\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times(3-a)$

$=\frac{1}{6}a+\frac{5}{6}=1$

$\frac{1}{6}a=\frac{1}{6}$, $a=1$

따라서

$\mathrm{P}(-a\le X\le a)=\mathrm{P}(-1\le X\le 1)$

$=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

답 ④

3 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(m-2\le X\le m+2)=2\mathrm{P}(m-2\le X\le m)$

$=2\{0.5-\mathrm{P}(X\le m-2)\}$

$=1-2\mathrm{P}(X\le m-2)=0.34$

에서 $2\mathrm{P}(X\le m-2)=0.66$

$\mathrm{P}(X\le m-2)=0.33$

또한 $\mathrm{P}(m\le X\le m+1)=0.13$이므로

$\mathrm{P}(X\ge m+1)=0.5-\mathrm{P}(m\le X\le m+1)$

$=0.5-0.13$

$=0.37$

따라서

$\mathrm{P}(X\le m-2)+\mathrm{P}(X\ge m+1)=0.33+0.37$

$=0.70$

답 ③

4 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(10, \sigma^2)$을 따르므로

$Z_1=\frac{X-10}{\sigma}$이라 하면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge 9)=\mathrm{P}\left(Z_1\ge\frac{9-10}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z_1\ge-\frac{1}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\frac{1}{\sigma}\le Z_1\le 0\right)+0.5=0.73$

에서 $\mathrm{P}\left(-\frac{1}{\sigma}\le Z_1\le 0\right)=0.23$

확률변수 Y가 정규분포 $\mathrm{N}(20, \sigma^2)$을 따르므로

$Z_2=\frac{Y-20}{\sigma}$이라 하면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(19\le Y\le 21)=\mathrm{P}\left(\frac{19-20}{\sigma}\le Z_2\le\frac{21-20}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\frac{1}{\sigma}\le Z_2\le\frac{1}{\sigma}\right)$

$=2\mathrm{P}\left(-\frac{1}{\sigma}\le Z_2\le 0\right)$

이때 두 확률변수 Z_1, Z_2가 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}\left(-\frac{1}{\sigma}\le Z_2\le 0\right)=\mathrm{P}\left(-\frac{1}{\sigma}\le Z_1\le 0\right)=0.23$

따라서 $\mathrm{P}(19\le Y\le 21)=2\times 0.23=0.46$

답 ③

다른 풀이

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(10, \sigma^2)$을 따르고 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(20, \sigma^2)$을 따르므로 두 확률변수 X, Y의 표준편차가 서로 같다.

따라서 $\mathrm{P}(X\ge 9)=\mathrm{P}(Y\ge 19)=0.73$

이때 $\mathrm{P}(Y\ge 20)=0.5$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(19\le Y\le 21)&=2\mathrm{P}(19\le Y\le 20)\\&=2\{\mathrm{P}(Y\ge 19)-\mathrm{P}(Y\ge 20)\}\\&=2\times(0.73-0.5)\\&=0.46\end{aligned}$$

5 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따르므로

$Z_1=\dfrac{X-m}{2}$이라 하면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(m\le X\le 10)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{m-m}{2}\le Z_1\le\dfrac{10-m}{2}\right)$

$=\mathrm{P}\left(0\le Z_1\le\dfrac{10-m}{2}\right)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

확률변수 Y가 정규분포 $\mathrm{N}(2m-1,\ 3^2)$을 따르므로

$Z_2=\dfrac{Y-(2m-1)}{3}$이라 하면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(12\le Y\le 2m-1)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{12-(2m-1)}{3}\le Z_2\le\dfrac{(2m-1)-(2m-1)}{3}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{13-2m}{3}\le Z_2\le 0\right)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

$\mathrm{P}(m\le X\le 10)=\mathrm{P}(12\le Y\le 2m-1)$이므로 ㉠, ㉡에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(0\le Z_1\le\frac{10-m}{2}\right)&=\mathrm{P}\left(\frac{13-2m}{3}\le Z_2\le 0\right)\\&=\mathrm{P}\left(0\le Z_2\le\frac{2m-13}{3}\right)\end{aligned}$$

이때 두 확률변수 Z_1, Z_2가 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\dfrac{10-m}{2}=\dfrac{2m-13}{3}$

$3(10-m)=2(2m-13)$

$7m=56$

따라서 $m=8$

답 ③

6 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-20}{4}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 16)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{16-20}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le -1)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$

답 ④

7 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(180,\ \dfrac{5}{6}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=180\times\dfrac{5}{6}=150$

$\mathrm{V}(X)=180\times\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{6}=25$

이때 180은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(150,\ 5^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-150}{5}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(140\le X\le 155)&=\mathrm{P}\left(\frac{140-150}{5}\le Z\le\frac{155-150}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 1)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.4772+0.3413\\&=0.8185\end{aligned}$$

답 ⑤

8 이 지역의 고등학교 3학년 학생 중에서 임의로 한 명을 선택하는 시행을 150번 반복할 때, 3월 전국연합학력평가의 수학선택과목 중 확률과 통계를 선택한 학생 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(150,\ \dfrac{3}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=150\times\dfrac{3}{5}=90$

$\mathrm{V}(X)=150\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}=36$

이때 150은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(90,\ 6^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-90}{6}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 99)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{99-90}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.4332\\&=0.0668\end{aligned}$$

답 ③

Level 2 기본 연습

본문 79~80쪽

1 ② **2** ① **3** ⑤ **4** ④ **5** ② **6** ③
7 ④ **8** ①

1 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\mathrm{H}(a, 0)$이다.
또한 $f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=a$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.
즉, 두 삼각형 AOB, BOH의 넓이의 합이 1이므로

$\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times a\times b=1$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}ab=1$

$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}$

따라서 $ab=1$

답 ②

2 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 $0\le x\le 3$인 모든 실수 x에 대하여 $f(3-x)=f(3+x)$를 만족시키므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다.
즉, $\mathrm{P}(a\le X\le 3)=\mathrm{P}(3\le X\le 6-a)$이고

$\mathrm{P}(a\le X\le 3)=\frac{1}{2}\times\mathrm{P}(a\le X\le 2a)$이므로

$2a=6-a$, $a=2$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\frac{a}{2}\le X\le a+1\right)&=\mathrm{P}(1\le X\le 3)\\&=\mathrm{P}(3\le X\le 5)\\&=0.5-\mathrm{P}(5\le X\le 6)\\&=0.5-0.27\\&=0.23\end{aligned}$$

답 ①

3 정규분포를 따르는 확률변수 X의 평균을 m이라 하면 $a=6$일 때 $\mathrm{P}(6\le X\le 10)$이 최댓값이고 정규분포를 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 종 모양이므로

$m=\frac{6+10}{2}=8$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 6)+\mathrm{P}(8\le X\le 10)&=\mathrm{P}(X\le 6)+\mathrm{P}(6\le X\le 8)\\&=\mathrm{P}(X\le 8)=0.5\end{aligned}$$

답 ⑤

4 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로 조건 (가)에 의하여

$m=\frac{8+20}{2}=14$

이때

$\mathrm{P}(8\le X\le 14)=\mathrm{P}(14\le X\le 20)$

이므로 조건 (나)에서

$$\begin{aligned}&2\mathrm{P}(a\le X\le a+2)+2\mathrm{P}(10\le X\le 14)\\&=2\mathrm{P}(8\le X\le 14)\\&=2\mathrm{P}(14\le X\le 20)\qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

조건 (다)와 ㉠에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(b\le X\le b+8)&=2\mathrm{P}(10\le X\le 14)\\&=\mathrm{P}(10\le X\le 18)\end{aligned}$$

이므로 $b=10$

조건 (나)에서

$\mathrm{P}(a\le X\le a+2)+\mathrm{P}(10\le X\le 14)=\mathrm{P}(8\le X\le 14)$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(a\le X\le a+2)&=\mathrm{P}(8\le X\le 14)-\mathrm{P}(10\le X\le 14)\\&=\mathrm{P}(8\le X\le 10)\end{aligned}$$

또한

$\mathrm{P}(8\le X\le 10)=\mathrm{P}(18\le X\le 20)$

이므로 $a=8$ 또는 $a=18$

따라서 $a+b$의 최댓값은 $a=18$, $b=10$일 때이므로

$18+10=28$

답 ④

5 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르므로

$Z_1=\frac{X-m}{\sigma}$이라 하면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|X-m|\ge 1)&=\mathrm{P}\left(\left|\frac{X-m}{\sigma}\right|\ge\frac{1}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(|Z_1|\ge\frac{1}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(2m, 4\sigma^2)$을 따르므로

$Z_2=\frac{Y-2m}{2\sigma}$이라 하면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|Y-2m|\le k)&=\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y-2m}{2\sigma}\right|\le\frac{k}{2\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(|Z_2|\le\frac{k}{2\sigma}\right)\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(|X-m|\ge 1)+\mathrm{P}(|Y-2m|\le k)=1$에서

$\mathrm{P}\left(|Z_1|\ge\frac{1}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(|Z_2|\le\frac{k}{2\sigma}\right)=1\qquad \cdots\cdots ㉠$

이때 두 확률변수 Z_1, Z_2가 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 ㉠이 성립하려면

$\frac{1}{\sigma}=\frac{k}{2\sigma}$

따라서 $k=2$

답 ②

6 이 지역의 고등학교 학생 1명의 키를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 12^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{12}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때 이 지역의 고등학교 학생 중에서 임의로 선택한 학생 1명의 키가 163 cm 이하일 확률이 0.1587이므로

$\mathrm{P}(X\le 163)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{163-m}{12}\right)=0.1587$

즉, $\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{m-163}{12}\right)=0.1587$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{m-163}{12}\right)&=0.5-\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{m-163}{12}\right)\\&=0.5-0.1587\\&=0.3413\end{aligned}$$

이때 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\frac{m-163}{12}=1$

따라서 $m=175$

답 ③

7 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 5 이상의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이다.

162번의 시행 중 5 이상의 눈이 나온 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(162,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=162\times\frac{1}{3}=54$

$\mathrm{V}(X)=162\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=36$

이때 162는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(54,\ 6^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-54}{6}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

또한 162번의 시행에서 얻을 수 있는 점수를 확률변수 Y라 하면

$Y=3X-(162-X)=4X-162$

이므로 얻는 점수가 18점 이상일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\ge 18)&=\mathrm{P}(4X-162\ge 18)\\&=\mathrm{P}(X\ge 45)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{45-54}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge -1.5)\\&=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(Z\ge 0)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)+0.5\\&=0.4332+0.5\\&=0.9332\end{aligned}$$

답 ④

8 주머니에서 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 다를 확률은

$\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{9+12+12}{45}=\frac{11}{15}$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(9900,\ \frac{11}{15}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(X)=9900\times\frac{11}{15}=7260$

$\mathrm{V}(X)=9900\times\frac{11}{15}\times\frac{4}{15}=1936=44^2$

이때 9900은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(7260,\ 44^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-7260}{44}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 7348)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{7348-7260}{44}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 2)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.4772\\&=0.0228\end{aligned}$$

답 ①

Level 3 실력 완성 본문 81쪽

1 ①	**2** 16	**3** ②

1 조건 (가), (나)에 의하여

$f(10)=g(8)=g(10)$

이고 확률변수 Y는 정규분포를 따르므로

$\mathrm{E}(Y)=\frac{8+10}{2}=9$

같은 방법으로 생각하면

$g(10)=f(12)=f(10)$

이고 확률변수 X는 정규분포를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=\frac{12+10}{2}=11$

또한 조건 (나)에 의하여 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(Y)$이다.

이때 $\mathrm{P}(8\le X\le 11)=\mathrm{P}(6\le Y\le 9)=a$이므로
$\mathrm{P}(9\le Y\le 12)=a$
$\mathrm{P}(8\le Y\le 12)=\mathrm{P}(8\le Y\le 9)+\mathrm{P}(9\le Y\le 12)$
$=\mathrm{P}(8\le Y\le 9)+a=b$
에서 $\mathrm{P}(8\le Y\le 9)=b-a$
이때 $\mathrm{P}(10\le X\le 11)=\mathrm{P}(8\le Y\le 9)=b-a$이므로
$\mathrm{P}(12\le X\le 14)=\mathrm{P}(8\le X\le 10)$
$=\mathrm{P}(8\le X\le 11)-\mathrm{P}(10\le X\le 11)$
$=a-(b-a)$
$=2a-b$

답 ①

2 두 온라인 게임 A, B의 일주일 동안 유저 1명의 이용시간을 각각 확률변수 X, Y라 하자.
확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로
$Z_1=\dfrac{X-m}{\sigma}$이라 하면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
이때 온라인 게임 A를 $(m+2)$시간 이상 이용할 확률은
$\mathrm{P}(X\ge m+2)=\mathrm{P}\left(Z_1\ge\dfrac{(m+2)-m}{\sigma}\right)$
$=\mathrm{P}\left(Z_1\ge\dfrac{2}{\sigma}\right)$ …… ㉠
또한 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}\left(\dfrac{m}{2},\ (4\sigma)^2\right)$을 따르므로
$Z_2=\dfrac{Y-\dfrac{m}{2}}{4\sigma}$이라 하면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
이때 온라인 게임 B를 $\dfrac{m}{4}$시간 이하 이용할 확률은
$\mathrm{P}\left(Y\le\dfrac{m}{4}\right)=\mathrm{P}\left(Z_2\le\dfrac{\dfrac{m}{4}-\dfrac{m}{2}}{4\sigma}\right)$
$=\mathrm{P}\left(Z_2\le-\dfrac{m}{16\sigma}\right)$ …… ㉡
㉠, ㉡의 값이 서로 같으므로
$\mathrm{P}\left(Z_1\ge\dfrac{2}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z_2\le-\dfrac{m}{16\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z_2\ge\dfrac{m}{16\sigma}\right)$
두 확률변수 Z_1, Z_2가 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로
$\dfrac{2}{\sigma}=\dfrac{m}{16\sigma}$
$m=32$
이때 $m+\sigma=\dfrac{65}{2}$이므로 $\sigma=\dfrac{1}{2}$
따라서 $m\times\sigma=32\times\dfrac{1}{2}=16$

답 16

3 x가 가질 수 있는 값은 3, 4, 5이고 y가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4이므로 $\sqrt{x^2+y^2}$의 값이 자연수가 되는 경우는
$x=3$, $y=4$ 또는 $x=4$, $y=3$
일 때이다.
한 번의 시행에서 $\sqrt{x^2+y^2}$의 값이 자연수일 확률은
$\dfrac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1+{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}=\dfrac{1+4}{16}=\dfrac{5}{16}$
이므로 880번의 시행에서 $\sqrt{x^2+y^2}$의 값이 자연수가 되는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(880,\ \dfrac{5}{16}\right)$를 따른다.
$\mathrm{E}(X)=880\times\dfrac{5}{16}=275$
$\mathrm{V}(X)=880\times\dfrac{5}{16}\times\dfrac{11}{16}=\dfrac{3025}{16}=\left(\dfrac{55}{4}\right)^2$
이때 880은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(275,\ \left(\dfrac{55}{4}\right)^2\right)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-275}{\dfrac{55}{4}}$라 하면
확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(X\ge 286)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{286-275}{\dfrac{55}{4}}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\ge 0.8)$
$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.8)$
$=0.5-0.29$
$=0.21$

답 ②

07 통계적 추정

유제 본문 83~89쪽

1 ③ **2** ② **3** ② **4** 5 **5** 472 **6** 16
7 25 **8** 37

1 표본평균 $\overline{X}$가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5, 6이므로
$P(\overline{X}\le 4)=1-\{P(\overline{X}=5)+P(\overline{X}=6)\}$
이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 (X_1, X_2)라 하면 $\overline{X}=5$ 또는 $\overline{X}=6$인 경우는
$(4, 6), (6, 4), (6, 6)$
이므로
$P(\overline{X}=5)+P(\overline{X}=6)=2\times\left(\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$
따라서
$P(\overline{X}\le 4)=1-\{P(\overline{X}=5)+P(\overline{X}=6)\}$
$=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$

답 ③

2 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로
$\frac{1}{2}+a+b+a=1$
$2a+b=\frac{1}{2}$ …… ㉠
이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 (X_1, X_2)라 하면 $\overline{X}=4$인 경우는
$(1, 7), (7, 1), (3, 5), (5, 3)$
이므로
$P(\overline{X}=4)=2\times\left(\frac{1}{2}\times a\right)+2\times(a\times b)=\frac{3}{16}$에서
$a+2ab=\frac{3}{16}$ …… ㉡
㉠에서 $b=\frac{1}{2}-2a$이고 이를 ㉡에 대입하면
$a+2a\left(\frac{1}{2}-2a\right)=\frac{3}{16}$
$64a^2-32a+3=0$
$(8a-1)(8a-3)=0$
$a=\frac{1}{8}$ 또는 $a=\frac{3}{8}$
이때 $a=\frac{3}{8}$이면 $b=\frac{1}{2}-2a=-\frac{1}{4}$이므로
이는 확률이 0 이상이라는 것에 모순이다.
따라서 $a=\frac{1}{8}$이고 $b=\frac{1}{2}-2a=\frac{1}{4}$이므로
$a-b=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{8}$

답 ②

3 $E(X)=(-2)\times\frac{1}{9}+(-1)\times\frac{2}{9}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}$
$=-\frac{1}{9}$
$E(X^2)=(-2)^2\times\frac{1}{9}+(-1)^2\times\frac{2}{9}+0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{1}{3}$
$=1$
이므로
$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=1-\left(-\frac{1}{9}\right)^2=\frac{80}{81}$
$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{4\sqrt{5}}{9}$
따라서 크기가 16인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여
$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{5}}{9}$

답 ②

4 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로
$a+b+\frac{2}{7}=1$
$a+b=\frac{5}{7}$ …… ㉠
$E(X)=1\times a+2\times b+3\times\frac{2}{7}=\frac{15}{7}$에서
$a+2b=\frac{9}{7}$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{7}$, $b=\frac{4}{7}$
확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{7}+2^2\times\frac{4}{7}+3^2\times\frac{2}{7}=5$
$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=5-\left(\frac{15}{7}\right)^2=\frac{20}{49}$
따라서 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여
$V(\overline{X})=\frac{V(X)}{n}=\frac{20}{49n}=\frac{4}{49}$에서
$n=5$

답 5

5 이 제과점에서 판매하는 식빵 한 봉지의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(480,\ 20^2)$을 따른다.

이때 크기가 25인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=480,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{25}=\frac{20^2}{25}=4^2$$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(480,\ 4^2)$을 따르고,

$Z=\dfrac{\overline{X}-480}{4}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge a)=0.9772$에서 $a<480$이고

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge a)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a-480}{4}\right)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{a-480}{4}\le Z\le 0\right)+\mathrm{P}(Z\ge 0)\\&=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{480-a}{4}\right)+0.5\end{aligned}$$

이므로

$$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{480-a}{4}\right)+0.5=0.9772$$

$$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{480-a}{4}\right)=0.4772$$

이때 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$$\frac{480-a}{4}=2$$

따라서 $a=472$

답 472

6 이 가게에서 판매하는 음료 한 병의 용량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(240,\ 8^2)$을 따른다.

이때 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=240,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{n}=\frac{8^2}{n}$$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(240,\ \left(\frac{8}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르고,

$Z=\dfrac{\overline{X}-240}{\frac{8}{\sqrt{n}}}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge 237)\ge 0.9332$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge 237)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{237-240}{\frac{8}{\sqrt{n}}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge-\frac{3\sqrt{n}}{8}\right)\\&=\mathrm{P}\left(-\frac{3\sqrt{n}}{8}\le Z\le 0\right)+\mathrm{P}(Z\ge 0)\\&=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{3\sqrt{n}}{8}\right)+0.5\end{aligned}$$

이므로

$$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{3\sqrt{n}}{8}\right)+0.5\ge 0.9332$$

$$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{3\sqrt{n}}{8}\right)\ge 0.4332$$

이때 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$$\frac{3\sqrt{n}}{8}\ge 1.5$$

$n\ge 16$

따라서 자연수 n의 최솟값은 16이다.

답 16

7 크기가 n인 표본으로부터 구한 표본평균이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\times\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{n}}$$

$$\overline{x}-1.96\times\frac{1}{2\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

이때 $a\le m\le b$이므로

$$a=\overline{x}-1.96\times\frac{1}{2\sqrt{n}},\ b=\overline{x}+1.96\times\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$\begin{aligned}b-a&=\left(\overline{x}+1.96\times\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)-\left(\overline{x}-1.96\times\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)\\&=2\times 1.96\times\frac{1}{2\sqrt{n}}=0.392\end{aligned}$$

에서 $\sqrt{n}=5$

따라서 $n=25$

답 25

8 크기가 36인 표본으로부터 구한 표본평균이 $\overline{x}$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{36}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{36}}$$

$$\overline{x}-2.58\times\frac{\sigma}{6}\le m\le\overline{x}+2.58\times\frac{\sigma}{6}$$

이때 $68.84\le m\le 79.16$이므로

$$\overline{x}-2.58\times\frac{\sigma}{6}=68.84,\ \overline{x}+2.58\times\frac{\sigma}{6}=79.16$$

두 식을 변끼리 더하면

$2\overline{x}=68.84+79.16=148$, $\overline{x}=74$

$74+2.58\times\dfrac{\sigma}{6}=79.16$에서

$2.58\times\dfrac{\sigma}{6}=79.16-74=5.16$, $\sigma=12$

따라서 $6\times\dfrac{\overline{x}}{\sigma}=6\times\dfrac{74}{12}=37$

답 37

Level 1 기초 연습 본문 90~91쪽

1 ②	**2** ④	**3** ①	**4** 54	**5** ②	**6** ③
7 329	**8** 64				

1 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$a+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=1$

$a=\frac{1}{2}$

모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 $(X_1,\ X_2)$라 하면

$\overline{X}\le 6a$, 즉 $\overline{X}\le 3$에서

$\frac{X_1+X_2}{2}\le 3$

이므로 이때의 경우는

$(2,\ 2),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2)$

이다.

따라서

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\le 6a)&=P(\overline{X}\le 3)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{5}{12}\end{aligned}$$

답 ②

2 정규분포 $N(25,\ 6^2)$을 따르는 모집단의 확률변수를 X라 하면 크기가 4인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$E(\overline{X})=E(X)=25$

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{4}}=\frac{6}{2}=3$

따라서 $E(\overline{X})+\sigma(\overline{X})=25+3=28$

답 ④

3 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$a+b+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=1$

$a+b=\frac{5}{8}$ …… ㉠

$E(X)=1\times a+2\times b+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{8}=\frac{9}{4}$에서

$a+2b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{4},\ b=\frac{3}{8}$

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{3}{8}+3^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{1}{8}=6$

$$\begin{aligned}V(X)&=E(X^2)-\{E(X)\}^2\\&=6-\left(\frac{9}{4}\right)^2=\frac{15}{16}\end{aligned}$$

따라서 크기가 6인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$V(\overline{X})=\frac{V(X)}{6}=\frac{\frac{15}{16}}{6}=\frac{5}{32}$

답 ①

4 정규분포 $N(64,\ 12^2)$을 따르는 모집단의 확률변수를 X라 하면 크기가 9인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$E(\overline{X})=E(X)=64$

$V(\overline{X})=\frac{V(X)}{9}=\frac{12^2}{9}=4^2$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N(64,\ 4^2)$을 따르고,

$Z_1=\frac{\overline{X}-64}{4}$라 하면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\ge 60)&=P\left(Z_1\ge\frac{60-64}{4}\right)\\&=P(Z_1\ge -1) \quad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

정규분포 $N(52,\ 8^2)$을 따르는 모집단의 확률변수를 Y라 하면 크기가 16인 표본의 표본평균 $\overline{Y}$에 대하여

$E(\overline{Y})=E(Y)=52$

$V(\overline{Y})=\frac{V(Y)}{16}=\frac{8^2}{16}=2^2$

이므로 확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포 $N(52,\ 2^2)$을 따르고,

$Z_2=\frac{\overline{Y}-52}{2}$라 하면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(\overline{Y}\ge a)=P\left(Z_2\ge\frac{a-52}{2}\right)$ …… ㉡

$P(\overline{X}\ge 60)+P(\overline{Y}\ge a)=1$에 ㉠, ㉡을 대입하면

$P(Z_1\ge -1)+P\left(Z_2\ge\frac{a-52}{2}\right)=1$

$$\begin{aligned}P\left(Z_2\ge\frac{a-52}{2}\right)&=1-P(Z_1\ge -1)\\&=P(Z_1\le -1)\\&=P(Z_1\ge 1)\end{aligned}$$

이때 두 확률변수 $Z_1,\ Z_2$가 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$\frac{a-52}{2}=1$

따라서 $a=54$

답 54

5 이 고등학교 학생 1명의 하루 물 섭취량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{6}{5}, \left(\frac{1}{5}\right)^2\right)$을 따른다.

이때 크기가 16인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=\frac{6}{5}$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{16}=\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2}{16}=\left(\frac{1}{20}\right)^2$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{6}{5}, \left(\frac{1}{20}\right)^2\right)$을 따르고,

$Z=\frac{\overline{X}-\frac{6}{5}}{\frac{1}{20}}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\overline{X}\geq\frac{5}{4}\right)&=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{\frac{5}{4}-\frac{6}{5}}{\frac{1}{20}}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq1)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq1)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$

답 ②

6 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단의 확률변수를 X라 하면 크기가 25인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=m$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{25}=\frac{\sigma^2}{25}$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{\sigma}{5}\right)^2\right)$을 따르고,

$Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{5}}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\leq256)=\frac{1}{2}$에서

$\mathrm{P}(\overline{X}\leq256)=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{256-m}{\frac{\sigma}{5}}\right)=\frac{1}{2}$이고

$\mathrm{P}(Z\leq0)=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{256-m}{\frac{\sigma}{5}}=0$

$m=256$

$\mathrm{P}(\overline{X}\geq259)=0.0668$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\geq259)&=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{259-256}{\frac{\sigma}{5}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{15}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq0)-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{15}{\sigma}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{15}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

이므로

$0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{15}{\sigma}\right)=0.0668$

$\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{15}{\sigma}\right)=0.5-0.0668=0.4332$

이때 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq1.5)=0.4332$이므로

$\frac{15}{\sigma}=1.5$, $\sigma=10$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(251\leq\overline{X}\leq258)&=\mathrm{P}\left(\frac{251-256}{2}\leq Z\leq\frac{258-256}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(-2.5\leq Z\leq1)\\&=\mathrm{P}(-2.5\leq Z\leq0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq1)\\&=\mathrm{P}(0\leq Z\leq2.5)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq1)\\&=0.4938+0.3413\\&=0.8351\end{aligned}$$

답 ③

7 크기가 16인 표본으로부터 구한 표본평균이 $\overline{x}$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\frac{0.1}{\sqrt{16}}\leq m\leq\overline{x}+1.96\times\frac{0.1}{\sqrt{16}}$

$\overline{x}-0.049\leq m\leq\overline{x}+0.049$

이때 $2.591\leq m\leq a$이므로

$\overline{x}-0.049=2.591$에서

$\overline{x}=2.591+0.049=2.64$

따라서 $a=\overline{x}+0.049=2.64+0.049=2.689$이므로

$1000\times(\overline{x}+a-5)=1000\times(2.64+2.689-5)=329$

답 329

8 크기가 n인 표본으로부터 구한 표본평균이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-2.58\times\frac{0.48}{\sqrt{n}}\leq m\leq\overline{x}+2.58\times\frac{0.48}{\sqrt{n}}$

이때 $a\leq m\leq b$이므로

$a=\overline{x}-2.58\times\frac{0.48}{\sqrt{n}}$, $b=\overline{x}+2.58\times\frac{0.48}{\sqrt{n}}$

$$b-a=\left(\bar{x}+2.58\times\frac{0.48}{\sqrt{n}}\right)-\left(\bar{x}-2.58\times\frac{0.48}{\sqrt{n}}\right)$$
$$=2\times2.58\times\frac{0.48}{\sqrt{n}}$$

이므로 $b-a\le0.3096$에서

$$2\times2.58\times\frac{0.48}{\sqrt{n}}\le0.3096$$

$\sqrt{n}\ge8$

$n\ge64$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 64이다.

답 64

Level 2 기본 연습

본문 92~93쪽

1 ① **2** ④ **3** ③ **4** ③ **5** ④ **6** ①
7 593 **8** 11

1 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 확인한 공에 적힌 수를 확률변수 X라 하자. 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{n}{10}$	$\frac{8-n}{10}$	1

이 모집단에서 임의추출한 크기가 3인 표본을

(X_1, X_2, X_3)이라 하면 $\bar{X}=\frac{4}{3}$인 경우는

$(1, 1, 2)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$이므로

$$P\left(\bar{X}=\frac{4}{3}\right)=3\times\left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{n}{10}\right)=\frac{3}{250}n=\frac{3}{50}$$에서

$n=5$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	1

따라서

$$E(\bar{X})=E(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{3}{10}=\frac{21}{10}$$

답 ①

2 확률변수 X가 정규분포 $N(m, 6^2)$을 따르므로

$Z_1=\frac{X-m}{6}$이라 하면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$P(X\ge m+6)=P\left(Z_1\ge\frac{(m+6)-m}{6}\right)=P(Z_1\ge1)$$

이므로 $P(\bar{X}\ge24)+P(X\ge m+6)=1$에서

$P(\bar{X}\ge24)+P(Z_1\ge1)=1$

$$P(\bar{X}\ge24)=1-P(Z_1\ge1)$$
$$=P(Z_1\le1)$$
$$=P(Z_1\ge-1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편, 크기가 4인 표본의 표본평균 $\bar{X}$에 대하여

$$E(\bar{X})=E(X)=m,\ V(\bar{X})=\frac{V(X)}{4}=\frac{6^2}{4}=9$$

이므로 확률변수 $\bar{X}$는 정규분포 $N(m, 3^2)$을 따르고,

$Z_2=\frac{\bar{X}-m}{3}$이라 하면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$P(\bar{X}\ge24)=P\left(Z_2\ge\frac{24-m}{3}\right) \quad \cdots\cdots ㉡$$

이때 두 확률변수 Z_1, Z_2가 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 ㉠, ㉡에서

$$\frac{24-m}{3}=-1$$

따라서 $m=27$

답 ④

3 이 공장에서 생산하는 김치 1포기의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(3, 0.5^2)$을 따른다.

이때 크기가 4인 표본의 표본평균을 $\bar{X}$라 하면

$E(\bar{X})=E(X)=3$

$$V(\bar{X})=\frac{V(X)}{4}=\frac{0.5^2}{4}=0.25^2$$

이므로 확률변수 $\bar{X}$는 정규분포 $N(3, 0.25^2)$을 따르고,

$Z=\frac{\bar{X}-3}{0.25}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$P(13\le4\bar{X}\le14)=P(3.25\le\bar{X}\le3.5)$$
$$=P\left(\frac{3.25-3}{0.25}\le Z\le\frac{3.5-3}{0.25}\right)$$
$$=P(1\le Z\le2)$$
$$=P(0\le Z\le2)-P(0\le Z\le1)$$
$$=0.4772-0.3413$$
$$=0.1359$$

답 ③

4 크기가 49인 표본으로부터 구한 표본평균이 $\overline{x_1}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{49}}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{49}}$

이때 $178.32\le m\le 181.68$이므로

$\overline{x_1}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{49}}=178.32$, $\overline{x_1}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{49}}=181.68$

$\left(\overline{x_1}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{49}}\right)-\left(\overline{x_1}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{49}}\right)=181.68-178.32$

$2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{49}}=3.36$

$\sigma=6$

크기가 n인 표본으로부터 구한 표본평균이 $\overline{x_2}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x_2}-1.96\times\frac{6}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x_2}+1.96\times\frac{6}{\sqrt{n}}$

이때 $a\le m\le b$이므로

$b-a=\left(\overline{x_2}+1.96\times\frac{6}{\sqrt{n}}\right)-\left(\overline{x_2}-1.96\times\frac{6}{\sqrt{n}}\right)$

$\quad=2\times1.96\times\frac{6}{\sqrt{n}}$

$b-a\le\frac{14}{5}$에서

$2\times1.96\times\frac{6}{\sqrt{n}}\le\frac{14}{5}$

$\sqrt{n}\ge8.4$

$n\ge8.4^2=70.56$

따라서 자연수 n의 최솟값은 71이다.

답 ③

5 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$a+b+\frac{1}{2}=1$

$a+b=\frac{1}{2}$ …… ㉠

이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 (X_1, X_2)라 하면 $\overline{X}=2$인 경우는

(0, 4), (4, 0), (2, 2)

이므로

$P(\overline{X}=2)=2\times\left(a\times\frac{1}{2}\right)+b\times b=a+b^2$

$P(\overline{X}=2)=\frac{5}{6}P(X=2)$에서

$a+b^2=\frac{5}{6}b$ …… ㉡

㉠에서 $a=\frac{1}{2}-b$이므로 이를 ㉡에 대입하면

$\frac{1}{2}-b+b^2=\frac{5}{6}b$

$6b^2-11b+3=0$

$(3b-1)(2b-3)=0$

$b=\frac{1}{3}$ 또는 $b=\frac{3}{2}$

㉠에서 $0\le b\le\frac{1}{2}$이므로 $b=\frac{1}{3}$

$a=\frac{1}{2}-b=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

한편, 이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본 (X_1, X_2)에 대하여 $\overline{X}=1$인 경우는

(0, 2), (2, 0)

이므로

$P(\overline{X}=1)=2\times(a\times b)=2\times\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}$

답 ④

6 정규분포 $N(m, 10^2)$을 따르는 모집단의 확률변수를 X라 하면 크기가 5인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$E(\overline{X})=E(X)=m$

$V(\overline{X})=\frac{V(X)}{5}=\frac{10^2}{5}=20$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N(m, (2\sqrt{5})^2)$을 따른다.

$P(\overline{X}\ge36)=\frac{1}{2}$에서 $m=36$

정규분포 $N(2m, 24^2)$을 따르는 모집단의 확률변수를 Y라 하면 크기가 9인 표본의 표본평균 $\overline{Y}$에 대하여

$E(\overline{Y})=E(Y)=2m=72$

$V(\overline{Y})=\frac{V(Y)}{9}=\frac{24^2}{9}=8^2$

즉, 확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포 $N(72, 8^2)$을 따르므로

$Z=\frac{\overline{Y}-72}{8}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서

$P(\overline{Y}\le m+V(\overline{X}))=P(\overline{Y}\le36+20)$

$=P(\overline{Y}\le56)$

$=P\left(Z\le\frac{56-72}{8}\right)$

$=P(Z\le-2)$

$=P(Z\ge2)$

$=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le2)$

$=0.5-0.4772$

$=0.0228$

답 ①

7 크기가 9인 표본으로부터 구한 표본평균이 $\overline{x_1}$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{9}}\le m\le\overline{x_1}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{9}}$

이때 $45.7\le m\le 54.3$이므로

$\overline{x_1}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{9}}=45.7$, $\overline{x_1}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{9}}=54.3$

두 식을 연립하여 풀면 $\overline{x_1}=50$, $\sigma=5$

크기가 36인 표본으로부터 구한 표본평균이 $\overline{x_2}$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x_2}-2.58\times\frac{5}{\sqrt{36}}\le m\le\overline{x_2}+2.58\times\frac{5}{\sqrt{36}}$

이때 $\frac{11}{10}\overline{x_1}\le m\le a$이므로

$\overline{x_2}-2.58\times\frac{5}{\sqrt{36}}=\frac{11}{10}\overline{x_1}=55$에서

$\overline{x_2}=55+2.58\times\frac{5}{6}=57.15$

$a=\overline{x_2}+2.58\times\frac{5}{\sqrt{36}}$

$=57.15+2.58\times\frac{5}{6}$

$=59.3$

따라서 $10a=593$

답 593

8 확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$a+\frac{1}{4}+b=1$

$a+b=\frac{3}{4}$ …… ㉠

이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 (X_1, X_2)라 하면

$\overline{X}=-\frac{1}{2}$인 경우는 $(-1, 0)$, $(0, -1)$이므로

$P\left(\overline{X}=-\frac{1}{2}\right)=2\times\left(a\times\frac{1}{4}\right)=\frac{a}{2}$

$\overline{X}=\frac{1}{2}$인 경우는 $(0, 1)$, $(1, 0)$이므로

$P\left(\overline{X}=\frac{1}{2}\right)=2\times\left(\frac{1}{4}\times b\right)=\frac{b}{2}$

조건 (가)에서 $P\left(\overline{X}=-\frac{1}{2}\right)<P\left(\overline{X}=\frac{1}{2}\right)$이므로

$\frac{a}{2}<\frac{b}{2}$, 즉 $a<b$ …… ㉡

한편,

$E(X)=(-1)\times a+0\times\frac{1}{4}+1\times b=b-a$

$E(X^2)=(-1)^2\times a+0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times b=a+b=\frac{3}{4}$

이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{3}{4}-(b-a)^2$

조건 (나)에서 $V(\overline{X})=\frac{V(X)}{2}=\frac{1}{4}$이므로

$V(X)=\frac{1}{2}$

즉, $\frac{3}{4}-(b-a)^2=\frac{1}{2}$이므로

$(b-a)^2=\frac{1}{4}$

$b-a=\frac{1}{2}$ 또는 $b-a=-\frac{1}{2}$

㉡에서 $b-a>0$이므로

$b-a=\frac{1}{2}$ …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{8}$, $b=\frac{5}{8}$

따라서 $8(a+2b)=8\times\left(\frac{1}{8}+2\times\frac{5}{8}\right)=11$

답 11

Level 3 실력 완성 본문 94쪽

1 12 **2** 3 **3** ④

1 주머니에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 확률변수 X라 하면 X가 갖는 값은 2, 4, 6, 8이고, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	6	8	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	1

$E(X)=2\times\frac{1}{12}+4\times\frac{1}{12}+6\times\frac{1}{6}+8\times\frac{2}{3}$

$=\frac{41}{6}$

$E(X^2)=2^2\times\frac{1}{12}+4^2\times\frac{1}{12}+6^2\times\frac{1}{6}+8^2\times\frac{2}{3}$

$=\frac{151}{3}$

이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{151}{3}-\left(\frac{41}{6}\right)^2$

$=\frac{131}{36}$

이때 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$E(\overline{X})=E(X)=\frac{41}{6}$이고 $Y=n\overline{X}$이므로

$$\begin{aligned}V(Y)&=V(n\overline{X})\\&=n^2V(\overline{X})\\&=n^2\times\frac{V(X)}{n}\\&=nV(X)\\&=\frac{131}{36}n\end{aligned}$$

$E(\overline{X})+V(Y)=\frac{41}{6}+\frac{131}{36}n=\frac{101}{2}$에서

$\frac{131}{36}n=\frac{101}{2}-\frac{41}{6}=\frac{131}{3}$

따라서 $n=\frac{131}{3}\times\frac{36}{131}=12$

답 12

2 확률변수 X는 정규분포 $N(m,\ 16^2)$을 따르므로

$Z_1=\frac{X-m}{16}$이라 하면 확률변수 Z_1은 표준정규분포

$N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}f(k)&=P\left(\frac{0-m}{16}\le Z_1\le\frac{(m+k^2)-m}{16}\right)\\&=P\left(-\frac{m}{16}\le Z_1\le\frac{k^2}{16}\right)\end{aligned}$$

또한 크기가 256인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$E(\overline{X})=E(X)=m$

$V(\overline{X})=\frac{V(X)}{256}=\frac{16^2}{256}=1$

이므로 표본평균 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포 $N(m,\ 1)$을 따르고, $Z_2=\frac{\overline{X}-m}{1}$이라 하면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}g(k)&=P\left(\frac{15}{16}m\le\overline{X}\le m+\frac{3}{16}k\right)\\&=P\left(\frac{\frac{15}{16}m-m}{1}\le Z_2\le\frac{\left(m+\frac{3}{16}k\right)-m}{1}\right)\\&=P\left(-\frac{m}{16}\le Z_2\le\frac{3}{16}k\right)\end{aligned}$$

$f(k)=g(k)$에서

$P\left(-\frac{m}{16}\le Z_1\le\frac{k^2}{16}\right)=P\left(-\frac{m}{16}\le Z_2\le\frac{3}{16}k\right)$

이때 두 확률변수 Z_1, Z_2가 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $f(k)=g(k)$를 만족시키려면

$\frac{k^2}{16}=\frac{3}{16}k$

$k(k-3)=0$

이때 k가 자연수이므로 $k=3$

답 3

3 크기가 8인 표본으로부터 구한 표본평균을 $\overline{x}$라 하면

$\overline{x}=\frac{3+(-1)+4+5+(-2)+6+3+(-2)}{8}=2$

이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$2-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{8}}\le m\le 2+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{8}}$

이때 $1.02\le m\le 2.98$이므로

$2-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{8}}=1.02,\ 2+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{8}}=2.98$

$\left(2+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{8}}\right)-\left(2-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{8}}\right)=2.98-1.02$

$2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{8}}=1.96$

$\sigma=\sqrt{2}$

따라서 $V(2X)=4V(X)=4\times(\sqrt{2})^2=8$

답 ④

memo

memo