수능특강

수학영역 | **미적분**

정답과 풀이

01 수열의 극한

유제 본문 5~9쪽

1 ⑤ **2** ② **3** ③ **4** 50 **5** ① **6** 4

1 $\dfrac{a_n+2}{3a_n-4}=b_n$이라 하면 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=1$이고,

$a_n+2=b_n(3a_n-4)=3a_nb_n-4b_n$

$a_n(3b_n-1)=4b_n+2$

즉, $a_n=\dfrac{4b_n+2}{3b_n-1}$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4b_n+2}{3b_n-1}=\frac{4\lim\limits_{n\to\infty}b_n+2}{3\lim\limits_{n\to\infty}b_n-1}$$

$$=\frac{4\times1+2}{3\times1-1}=3$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}(2a_n-1)=2\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}1=2\times3-1=5$$

답 ⑤

2 모든 자연수 n에 대하여 $(nb_n)^2>0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n^{\,2}-4b_n^{\,2}}{9n^2b_n^{\,2}+6na_nb_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2a_n^{\,2}-4b_n^{\,2}}{(nb_n)^2}}{\dfrac{9n^2b_n^{\,2}+6na_nb_n}{(nb_n)^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\dfrac{a_n}{nb_n}\right)^2-\dfrac{4}{n^2}}{9+6\times\dfrac{a_n}{nb_n}}$$

$$=\frac{2\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{nb_n}\right)^2-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n^2}}{9+6\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{nb_n}}$$

$$=\frac{2\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-0}{9+6\times\dfrac{3}{2}}=\frac{1}{4}$$

답 ②

3 $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_n}{\sqrt{9n^2+4}-3n}\times(\sqrt{9n^2+4}-3n)\times\frac{1}{(2n+1)b_n}\times(2n+1)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_n}{\sqrt{9n^2+4}-3n}\times\frac{1}{(2n+1)b_n}\times(\sqrt{9n^2+4}-3n)\times(2n+1)\right\}$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\{(\sqrt{9n^2+4}-3n)\times(2n+1)\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{9n^2+4}-3n)\times(\sqrt{9n^2+4}+3n)\times(2n+1)}{\sqrt{9n^2+4}+3n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times(2n+1)}{\sqrt{9n^2+4}+3n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{9+\dfrac{4}{n^2}}+3}$$

$$=\frac{4\times2}{3+3}=\frac{4}{3}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_n}{\sqrt{9n^2+4}-3n}\times\frac{1}{(2n+1)b_n}\times(\sqrt{9n^2+4}-3n)\times(2n+1)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{9n^2+4}-3n}\times\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)b_n}\times\lim_{n\to\infty}\{(\sqrt{9n^2+4}-3n)\times(2n+1)\}$$

$$=3\times\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}=1$$

답 ③

4 $$|x|=\begin{cases}-x & (x<0)\\ x & (x\ge0)\end{cases}$$

이므로 점 A_n은 두 직선 $3x-4y+7n=0$, $y=-x$의 교점이고 점 B_n은 두 직선 $3x-4y+7n=0$, $y=x$의 교점이다.

두 직선 $3x-4y+7n=0$, $y=-x$의 교점의 x좌표는

$3x+4x+7n=0$에서 $x=-n$

두 직선 $3x-4y+7n=0$, $y=x$의 교점의 x좌표는

$3x-4x+7n=0$에서 $x=7n$

즉, 두 점 A_n, B_n의 좌표는 각각 $(-n, n)$, $(7n, 7n)$이고 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 중점을 C_n이라 하면 점 C_n의 좌표는

$\left(\dfrac{-n+7n}{2}, \dfrac{n+7n}{2}\right)$, 즉 $(3n, 4n)$이다.

점 $\mathrm{C}_n(3n, 4n)$을 중심으로 하고 점 $\mathrm{A}_n(-n, n)$을 지나는 원 C_n의 반지름의 길이는

$\sqrt{\{3n-(-n)\}^2+(4n-n)^2}=5n$

또 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$이 원 C_n의 지름이고, 원점 O에 대하여

$\angle\mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n=\dfrac{\pi}{2}$이므로 원점 O는 항상 원 C_n 위의 점이다.

이때 점 $(-2, 0)$을 P라 하면 점 P는 원 C_n 밖의 점이므로 점 P와 원 C_n 위의 점 사이의 거리의 최솟값 a_n은

$a_n=\overline{\mathrm{PC}_n}-5n$

$\quad=\sqrt{\{3n-(-2)\}^2+(4n-0)^2}-5n$

$=\sqrt{25n^2+12n+4}-5n$

따라서

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{25n^2+12n+4}-5n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25n^2+12n+4}+5n}{(\sqrt{25n^2+12n+4}-5n)(\sqrt{25n^2+12n+4}+5n)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25n^2+12n+4}+5n}{12n+4}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25+\frac{12}{n}+\frac{4}{n^2}}+5}{12+\frac{4}{n}}$

$=\frac{5+5}{12}=\frac{5}{6}$

이므로

$60\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=60\times\frac{5}{6}=50$

답 50

5 $|-4|>|2|$이므로 분모, 분자를 $(-4)^n$으로 나누고

$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{(-4)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$임을 이용하면

$\lim_{n\to\infty}\frac{a\times(-4)^n+3\times2^n}{2^{n+1}+(-4)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n-4}=-\frac{a}{4}$

$-\frac{a}{4}=\frac{3}{2}$에서 $a=-6$

답 ①

6 (i) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^{2n}=\lim_{n\to\infty}r^{2n+2}=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a\times r^{2n+2}}{r^{2n}+1}=\frac{a\times1}{1+1}=\frac{a}{2}$

$\frac{a}{2}=36$에서 $a=72$

(ii) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^{2n}}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a\times r^{2n+2}}{r^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\times r^2}{1+\frac{1}{r^{2n}}}=\frac{ar^2}{1+0}=ar^2$

$ar^2=36$에서 두 자연수 a, r의 모든 순서쌍 (a, r)은 $(9, 2)$, $(4, 3)$, $(1, 6)$이다.

(i), (ii)에서 두 자연수 a, r의 모든 순서쌍 (a, r)은 $(72, 1)$, $(9, 2)$, $(4, 3)$, $(1, 6)$이므로 그 개수는 4이다.

답 4

Level 1 기초 연습

본문 10쪽

1 ① **2** ④ **3** ④ **4** ② **5** ③

1 $\lim_{n\to\infty}(3-2a_n)=6$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\{3-(3-2a_n)\}=\frac{1}{2}(3-6)=-\frac{3}{2}$

따라서

$\lim_{n\to\infty}a_n(a_n-2)=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}(a_n-2)$

$=\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}-2\right)=\frac{21}{4}$

답 ①

2 모든 자연수 n에 대하여

$a_n(2n+1)<a_{n+1}(4n+2)<a_n(2n+3)$

이 성립하므로

$a_n(2n+1)<a_n(2n+3)$에서

$(2n+3)a_n-(2n+1)a_n>0$

$2a_n>0$, 즉 $a_n>0$

$a_n(2n+1)<a_{n+1}(4n+2)$에서

$\frac{a_{n+1}}{a_n}>\frac{2n+1}{4n+2}$ …… ㉠

$a_{n+1}(4n+2)<a_n(2n+3)$에서

$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{2n+3}{4n+2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{2n+1}{4n+2}<\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{2n+3}{4n+2}$

이때

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{4n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{4+\frac{2}{n}}=\frac{1}{2}$,

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{4n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{4+\frac{2}{n}}=\frac{1}{2}$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$

답 ④

3 이차방정식 $x^2+nx-2n=0$의 서로 다른 두 실근이 α_n, β_n이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=-n$, $\alpha_n\beta_n=-2n$

$$\alpha_n{}^2+\beta_n{}^2=(\alpha_n+\beta_n)^2-2\alpha_n\beta_n$$
$$=(-n)^2-2\times(-2n)=n^2+4n$$
따라서
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{\alpha_n{}^2+\beta_n{}^2}-n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n}-n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+4n}-n)(\sqrt{n^2+4n}+n)}{\sqrt{n^2+4n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1}=\frac{4}{1+1}=2$$

답 ④

4 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(nk+n^2)=n\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}n^2$
$$=n\times\frac{n(n+1)}{2}+n^2\times n=\frac{3}{2}n^3+\frac{1}{2}n^2$$
$$\sum_{k=1}^{n}(k^2+n^2)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}n^2$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+n^2\times n$$
$$=\frac{4}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$
따라서
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(nk+n^2)}{\sum_{k=1}^{n}(k^2+n^2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2}n^3+\frac{1}{2}n^2}{\frac{4}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2n}}{\frac{4}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}}$$
$$=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{3}}=\frac{9}{8}$$

답 ②

5 수열 $\{r^n\}$이 수렴하려면 $-1<r\le1$이어야 하므로 수열 $\left\{\left(\frac{x^2+2x+3}{11}\right)^n\right\}$이 수렴하려면 $-1<\frac{x^2+2x+3}{11}\le1$이어야 한다.

이때 $x^2+2x+3=(x+1)^2+2>0$이므로 $\frac{x^2+2x+3}{11}\le1$이면 수열 $\left\{\left(\frac{x^2+2x+3}{11}\right)^n\right\}$이 수렴한다.

$\frac{x^2+2x+3}{11}\le1$에서 $x^2+2x+3\le11$

$x^2+2x-8\le0$, $(x+4)(x-2)\le0$

$-4\le x\le2$

따라서 수열 $\left\{\left(\frac{x^2+2x+3}{11}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 정수 x의 값은 -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2이므로 그 개수는 7이다.

답 ③

Level 2 기본 연습 본문 11~12쪽

1 ③ **2** ⑤ **3** ⑤ **4** ① **5** 10 **6** ③
7 11 **8** 15

1 $a_n=\frac{3n^2+1}{(2n-1)^2}$, $b_n=\sqrt{n^2+2kn}-n$에서
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{(2n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{4n^2-4n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n^2}}{4-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{3}{4}$$
$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2kn}-n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2kn}-n)(\sqrt{n^2+2kn}+n)}{\sqrt{n^2+2kn}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2kn}{\sqrt{n^2+2kn}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2k}{\sqrt{1+\frac{2k}{n}}+1}$$
$$=\frac{2k}{1+1}=k$$
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-kb_n}{a_nb_n}=-\frac{4}{3}$에서 $a_n\ne0$, $b_n\ne0$, $k>0$이므로
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-kb_n}{a_nb_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n-k\lim_{n\to\infty}b_n}{\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n}$$
$$=\frac{\frac{3}{4}-k^2}{\frac{3}{4}k}=-\frac{4}{3}$$
이므로
$$\frac{3}{4}-k^2=-\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}k=-k$$
$$3-4k^2=-4k,\ 4k^2-4k-3=0$$
$$(2k+1)(2k-3)=0$$
$k>0$이므로 $k=\frac{3}{2}$

답 ③

2 $\sum_{k=1}^{n} a_k = 3(3^{n-1}+1)$에서 $n \geq 2$이면

$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = 3(3^{n-1}+1) - 3(3^{n-2}+1)$

$\quad = 3^n - 3^{n-1} = 2 \times 3^{n-1}$

또 $a_1 = 3 \times (1+1) = 6$

따라서 $n \geq 2$일 때

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1(a_n-1)^2}{\sum_{k=1}^{2n} a_k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6 \times (2 \times 3^{n-1}-1)^2}{3(3^{2n-1}+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{24 \times 3^{2n-2} - 24 \times 3^{n-1} + 6}{3^{2n}+3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{24 \times \frac{1}{3^2} - 24 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6}{3^{2n}}}{1 + \frac{3}{3^{2n}}}$$

$$= \frac{24 \times \frac{1}{3^2}}{1}$$

$$= \frac{8}{3}$$

답 ⑤

3 $2a_n + b_n = c_n$으로 놓으면 $\lim_{n\to\infty}(2a_n+b_n) = 3$이므로

$\lim_{n\to\infty} c_n = 3$이고,

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$이므로 $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{a_n} = 0$이다.

$b_n = c_n - 2a_n$이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4a_n - 3b_n + 1}{3a_n + b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4a_n - 3(c_n - 2a_n) + 1}{3a_n + (c_n - 2a_n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{10a_n - 3c_n + 1}{a_n + c_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{10 - 3 \times \frac{c_n}{a_n} + \frac{1}{a_n}}{1 + \frac{c_n}{a_n}}$$

$$= \frac{10 - 3 \times 0 + 0}{1+0} = 10$$

답 ⑤

4 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d $(d \neq 0)$이라 하면

$a_n = a_1 + d(n-1) = dn + a_1 - d$

$S_n = \frac{n\{2a_1 + d(n-1)\}}{2} = \frac{d}{2}n^2 + \frac{2a_1 - d}{2}n$

$\lim_{n\to\infty} \frac{{a_n}^2}{S_n} = 3$에서

$$\lim_{n\to\infty} \frac{{a_n}^2}{S_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(dn + a_1 - d)^2}{\frac{d}{2}n^2 + \frac{2a_1 - d}{2}n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{d^2n^2 + 2d(a_1 - d)n + (a_1 - d)^2}{\frac{d}{2}n^2 + \frac{2a_1 - d}{2}n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{d^2 + \frac{2d(a_1 - d)}{n} + \frac{(a_1 - d)^2}{n^2}}{\frac{d}{2} + \frac{2a_1 - d}{2n}}$$

$$= \frac{d^2}{\frac{d}{2}} = 2d = 3$$

이므로 $d = \frac{3}{2}$

이때 $a_2 = 1$이므로

$a_{10} = a_2 + 8d = 1 + 8 \times \frac{3}{2} = 13$

답 ①

5 $\frac{2^{n-1} \times k^n + 1}{2^{3n+1} + k^n} = \frac{\frac{1}{2} \times (2k)^n + 1}{2 \times 8^n + k^n}$

이므로 자연수 k를 다음의 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $1 \leq k \leq 3$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k}{4}\right)^n = 0$, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k}{8}\right)^n = 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-1} \times k^n + 1}{2^{3n+1} + k^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2} \times (2k)^n + 1}{2 \times 8^n + k^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{k}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{8}\right)^n}{2 + \left(\frac{k}{8}\right)^n} = \frac{0}{2} = 0$$

(ii) $k = 4$인 경우

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-1} \times k^n + 1}{2^{3n+1} + k^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2} \times 8^n + 1}{2 \times 8^n + 4^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{8}\right)^n}{2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

(iii) $5 \leq k \leq 8$인 경우

$\frac{5}{8} \leq \frac{k}{8} \leq 1$에서 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k}{8}\right)^n = 0$ 또는 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k}{8}\right)^n = 1$,

$\frac{5}{4} \leq \frac{k}{4} \leq 2$에서 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k}{4}\right)^n = \infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-1} \times k^n + 1}{2^{3n+1} + k^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{k}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{8}\right)^n}{2 + \left(\frac{k}{8}\right)^n} = \infty$$

(iv) $k\ge9$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{k}\right)^n=0$, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}\times k^n+1}{2^{3n+1}+k^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\times2^n+\left(\frac{1}{k}\right)^n}{2\times\left(\frac{8}{k}\right)^n+1}=\infty$$

(i)~(iv)에서 수열 $\left\{\frac{2^{n-1}\times k^n+1}{2^{3n+1}+k^n}\right\}$이 수렴하도록 하는 모든 자연수 k의 값은 1, 2, 3, 4이므로 그 합은

$1+2+3+4=10$

답 10

6 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^a}{\sqrt{n^3+2n^2}-\sqrt{n^3+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^a(\sqrt{n^3+2n^2}+\sqrt{n^3+1})}{(\sqrt{n^3+2n^2}-\sqrt{n^3+1})(\sqrt{n^3+2n^2}+\sqrt{n^3+1})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^a\sqrt{n^3+2n^2}+n^a\sqrt{n^3+1}}{(n^3+2n^2)-(n^3+1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^{2a+3}+2n^{2a+2}}+\sqrt{n^{2a+3}+n^{2a}}}{2n^2-1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^{2a-1}+2n^{2a-2}}+\sqrt{n^{2a-1}+n^{2a-4}}}{2-\frac{1}{n^2}}$ …… ㉠

이때 $2a-1>0$이면 $\lim_{n\to\infty}n^{2a-1}=\infty$이므로 ㉠은 양의 무한대로 발산하고, $2a-1<0$이면 $\lim_{n\to\infty}n^{2a-1}=0$이고 $2a-2<0$, $2a-4<0$에서 $\lim_{n\to\infty}n^{2a-2}=0$, $\lim_{n\to\infty}n^{2a-4}=0$이므로 ㉠은 0으로 수렴한다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^a}{\sqrt{n^3+2n^2}-\sqrt{n^3+1}}=b$에서 $b\ne0$이므로

$2a-1=0$, 즉 $a=\frac{1}{2}$

이어야 하고

$b=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^{2a-1}+2n^{2a-2}}+\sqrt{n^{2a-1}+n^{2a-4}}}{2-\frac{1}{n^2}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}}{2-\frac{1}{n^2}}=\frac{1+1}{2}=1$

따라서 $a+b=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

답 ③

7 조건 (가)에서

$(3b_n\sqrt{a_n}-2\sqrt{n})^2<4$

$-2<3b_n\sqrt{a_n}-2\sqrt{n}<2$

$2\sqrt{n}-2<3b_n\sqrt{a_n}<2\sqrt{n}+2$

$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{n}{a_n}}-\frac{2}{3\sqrt{a_n}}<b_n<\frac{2}{3}\sqrt{\frac{n}{a_n}}+\frac{2}{3\sqrt{a_n}}$ …… ㉠

조건 (나)에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3n-1}=3$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{3n-1}\times\frac{3n-1}{n}\right)$

$=3\times3=9$

에서 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{a_n}}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$

한편,

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_n}{3n-1}\times(3n-1)\right\}=\infty$

이므로 ㉠에서

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{n}{a_n}}-\frac{2}{3\sqrt{a_n}}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}-0=\frac{2}{9}$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{n}{a_n}}+\frac{2}{3\sqrt{a_n}}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+0=\frac{2}{9}$

그러므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{2}{9}$

따라서 $p=9$, $q=2$이므로

$p+q=9+2=11$

답 11

8 $y=x^2$에서 $y'=2x$

곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{A}_n(n, n^2)$에서의 접선의 기울기가 $2n$이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2n}$이다.

그러므로 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{A}_n(n, n^2)$에서의 접선에 수직이고 점 A_n을 지나는 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2n}(x-n)+n^2$

즉, $y=-\frac{1}{2n}x+n^2+\frac{1}{2}$ …… ㉠

점 B_n의 x좌표를 b_n이라 하면 직선 ㉠이 점 $\mathrm{B}_n(b_n, 0)$을 지나므로

$0=-\frac{1}{2n}b_n+n^2+\frac{1}{2}$

$b_n=2n^3+n$

한편,

$\overline{\mathrm{OA}_n}=\sqrt{n^2+(n^2)^2}=\sqrt{n^4+n^2}$

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=\sqrt{\{(2n^3+n)-n\}^2+(0-n^2)^2}=\sqrt{4n^6+n^4}$

삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n$에서 $\angle\mathrm{OA}_n\mathrm{C}_n=\angle\mathrm{C}_n\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$이므로

$\overline{\mathrm{OA}_n}:\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=\overline{\mathrm{OC}_n}:\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}$에서

$\frac{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}}{\overline{\mathrm{OA}_n}}=\frac{\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}}{\overline{\mathrm{OC}_n}}$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left\{n\times\left(\frac{\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}}{\overline{\mathrm{OC}_n}}-\frac{2n^3}{\overline{\mathrm{OA}_n}}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{n\times\left(\frac{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}}{\overline{\mathrm{OA}_n}}-\frac{2n^3}{\overline{\mathrm{OA}_n}}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(n\times\frac{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}-2n^3}{\overline{\mathrm{OA}_n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{\sqrt{n^4+n^2}}\times\left(\sqrt{4n^6+n^4}-2n^3\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^4+n^2}}\times\frac{n^4}{\sqrt{4n^6+n^4}+2n^3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\times\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+2}\right)$$

$$=\frac{1}{1}\times\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

이므로

$$60\times\lim_{n\to\infty}\left\{n\times\left(\frac{\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}}{\overline{\mathrm{OC}_n}}-\frac{2n^3}{\overline{\mathrm{OA}_n}}\right)\right\}=60\times\frac{1}{4}=15$$

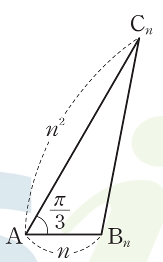
답 15

Level 3 실력 완성

본문 13쪽

1 ④ **2** ③ **3** ③

1 $\angle\mathrm{B}_n\mathrm{AC}_n=\frac{\pi}{3}$, $\overline{\mathrm{AB}_n}=n$, $\overline{\mathrm{AC}_n}=n^2$이므로 삼각형 $\mathrm{AB}_n\mathrm{C}_n$에서 코사인법칙에 의하여



$$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}^2=\overline{\mathrm{AB}_n}^2+\overline{\mathrm{AC}_n}^2$$

$$-2\times\overline{\mathrm{AB}_n}\times\overline{\mathrm{AC}_n}\times\cos A$$

$$=n^2+n^4-2\times n\times n^2\times\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=n^4-n^3+n^2$$

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}>0$이므로 $\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}=\sqrt{n^4-n^3+n^2}$

이때 삼각형 $\mathrm{AB}_n\mathrm{C}_n$의 내접원의 반지름의 길이가 r_n이므로 삼각형 $\mathrm{AB}_n\mathrm{C}_n$의 넓이를 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{1}{2}\times r_n\times\left(\overline{\mathrm{AB}_n}+\overline{\mathrm{AC}_n}+\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times r_n\times\left\{n+n^2+\sqrt{n^4-n^3+n^2}\right\}$$

$$=\frac{r_n}{2}\left(n^2+n+\sqrt{n^4-n^3+n^2}\right)\quad\cdots\cdots ㉠$$

또한

$$S_n=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}_n}\times\overline{\mathrm{AC}_n}\times\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{1}{2}\times n\times n^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}n^3\quad\cdots\cdots ㉡$$

이므로 ㉠, ㉡에서

$$\frac{r_n}{2}\left(n^2+n+\sqrt{n^4-n^3+n^2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}n^3$$

$$r_n=\frac{\sqrt{3}n^3}{2\left(n^2+n+\sqrt{n^4-n^3+n^2}\right)}$$

한편, 삼각형 $\mathrm{AB}_n\mathrm{C}_n$의 외접원의 반지름의 길이가 R_n이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}}{\sin A}=2R_n$$

$$R_n=\frac{\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}}{2\sin A}=\frac{\sqrt{n^4-n^3+n^2}}{2\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{n^4-n^3+n^2}}{\sqrt{3}}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_n}{n\times r_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{n^4-n^3+n^2}}{\sqrt{3}}}{\dfrac{\sqrt{3}n^4}{2\left(n^2+n+\sqrt{n^4-n^3+n^2}\right)}}$$

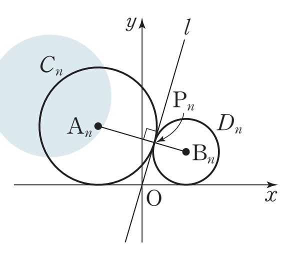
$$=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4-n^3+n^2}\times\left(n^2+n+\sqrt{n^4-n^3+n^2}\right)}{n^4}$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\times\left(1+\frac{1}{n}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\times\{1\times(1+1)\}=\frac{4}{3}$$

답 ④

2 점 $\mathrm{P}_n(n,\ 2n)$을 지나고 직선 l : $y=2x$에 수직인 직선, 즉 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 방정식은



$$y=-\frac{1}{2}(x-n)+2n$$

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{5n}{2}\quad\cdots\cdots ㉠$$

직선 l과 점 P_n에서 접하고 x축에 접하는 원의 중심의 좌표를 $(a_n,\ b_n)$이라 하면 이 원의 반지름의 길이는 b_n이다.

원의 중심 $(a_n,\ b_n)$은 직선 ㉠ 위의 점이므로

$$b_n=-\frac{1}{2}a_n+\frac{5n}{2}\quad\cdots\cdots ㉡$$

원의 중심 (a_n, b_n)에서 x축에 내린 수선의 발을 H_n이라 하면

$\overline{\mathrm{OH}_n}=\overline{\mathrm{OP}_n}$

이때 $\overline{\mathrm{OH}_n}=|a_n|$, $\overline{\mathrm{OP}_n}=\sqrt{n^2+(2n)^2}=\sqrt{5}n$이므로

$|a_n|=\sqrt{5}n$

$a_n=-\sqrt{5}n$ 또는 $a_n=\sqrt{5}n$

$a_n=-\sqrt{5}n$이면 $b_n=-\frac{1}{2}\times(-\sqrt{5}n)+\frac{5n}{2}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}n$

$a_n=\sqrt{5}n$이면 $b_n=-\frac{1}{2}\times\sqrt{5}n+\frac{5n}{2}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}n$

이때 원 C_n의 중심인 점 A_n의 x좌표가 원 D_n의 중심인 점 B_n의 x좌표보다 작으므로

$\mathrm{A}_n\left(-\sqrt{5}n, \frac{5+\sqrt{5}}{2}n\right)$, $\mathrm{B}_n\left(\sqrt{5}n, \frac{5-\sqrt{5}}{2}n\right)$

이고

$$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=\sqrt{\{\sqrt{5}n-(-\sqrt{5}n)\}^2+\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}n-\frac{5+\sqrt{5}}{2}n\right)^2}$$
$$=5n$$

한편, 두 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$, $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}$은 모두 직선 l에 수직이므로 네 점 A_n, A_{n+1}, B_n, B_{n+1}을 꼭짓점으로 하는 사각형은 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}\,/\!/\,\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}$인 사다리꼴이다.

두 점 $\mathrm{P}_n(n, 2n)$, $\mathrm{P}_{n+1}(n+1, 2n+2)$에 대하여

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\sqrt{\{(n+1)-n\}^2+\{(2n+2)-2n\}^2}=\sqrt{5}$

이므로 사다리꼴 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}$의 넓이 S_n은

$$S_n=\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}+\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}})\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$$
$$=\frac{1}{2}\times\{5n+5(n+1)\}\times\sqrt{5}$$
$$=5\sqrt{5}\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\sqrt{5}\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n}$$
$$=5\sqrt{5}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$
$$=5\sqrt{5}\times1=5\sqrt{5}$$

답 ③

3 $\lim_{n\to\infty}a(\sqrt{n^2+bn}-n)=3$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a(\sqrt{n^2+bn}-n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a(\sqrt{n^2+bn}-n)(\sqrt{n^2+bn}+n)}{\sqrt{n^2+bn}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{abn}{\sqrt{n^2+bn}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{ab}{\sqrt{1+\frac{b}{n}}+1}=\frac{ab}{2}=3$$

에서 $ab=6$ ⋯⋯ ㉠

㉠을 만족시키는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)는 $(1, 6)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(6, 1)$이다.

이때 a, b의 값에 따라 $\lim_{n\to\infty}\frac{(ab)^{n+1}+a^{n+1}}{(ab)^n+b^n}$의 값은 다음과 같다.

(i) $a=1$, $b=6$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(ab)^{n+1}+a^{n+1}}{(ab)^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6^{n+1}+1}{6^n+6^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6^{n+1}+1}{2\times6^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\left(\frac{1}{6}\right)^n}{2}=3$$

(ii) $a=2$, $b=3$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(ab)^{n+1}+a^{n+1}}{(ab)^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6^{n+1}+2^{n+1}}{6^n+3^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=6$$

(iii) $a=3$, $b=2$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(ab)^{n+1}+a^{n+1}}{(ab)^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6^{n+1}+3^{n+1}}{6^n+2^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}=6$$

(iv) $a=6$, $b=1$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(ab)^{n+1}+a^{n+1}}{(ab)^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6^{n+1}+6^{n+1}}{6^n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times6^{n+1}}{6^n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12}{1+\left(\frac{1}{6}\right)^n}=12$$

(i)~(iv)에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{(ab)^{n+1}+a^{n+1}}{(ab)^n+b^n}$의 최댓값과 최솟값은 각각 12, 3이다.

따라서 $M=12$, $m=3$이므로

$M+m=12+3=15$

답 ③

02 급수

유제					본문 15~19쪽
1 ②	**2** ③	**3** ③	**4** ③	**5** ④	**6** 29

1 $\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\frac{1}{(2n+1)-(2n-1)}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$

답 ②

2 이차방정식 $x^2-(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})x+\sqrt{n^2+n}=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$a_n=\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$, $b_n=\sqrt{n^2+n}$

이므로

$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2-\frac{4}{b_n}=\frac{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2-4\sqrt{n(n+1)}}{n^2+n}$

$=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2}{n(n+1)}$

$=\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}\right)^2$

$=\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^2$

즉, $\sqrt{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2-\frac{4}{b_n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

따라서

$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2-\frac{4}{b_n}}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1$

답 ③

3 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\{(a_n-b_n)+(2a_n+b_n)\}$

$=\frac{1}{3}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)+\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)\right\}$

$=\frac{1}{3}\times(3+3)=2$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n-(a_n-b_n)\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$

$=2-3=-1$

이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+2\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=2+2\times(-1)=0$

답 ③

다른 풀이

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\{(2a_n+b_n)-(a_n-b_n)\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)-\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$

$=3-3=0$

4 급수 $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-1)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=0$

이때

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\{(a_n-1)+1\}$

$=\lim_{n\to\infty}(a_n-1)+\lim_{n\to\infty}1$

$=0+1=1$

한편,

$S_{n-1}-n=S_n-a_n-n$

$=\sum_{k=1}^{n}a_k-a_n-\sum_{k=1}^{n}1$

$=\sum_{k=1}^{n}(a_k-1)-a_n$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}(S_{n-1}-n)=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}(a_k-1)-a_n\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k-1)-\lim_{n\to\infty}a_n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1)-\lim_{n\to\infty}a_n$$
$$=4-1=3$$

답 ③

5 수열 $\{a_n\}$은 다음과 같다.

$\{a_n\}$: 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, $\cdots$

즉, 모든 자연수 n에 대하여

$a_{3n-2}=1$, $a_{3n-1}=2$, $a_{3n}=0$

이므로 $b_n=4^n$으로 놓으면

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{3n-2}}{b_{3n-2}}+\frac{a_{3n-1}}{b_{3n-1}}+\frac{a_{3n}}{b_{3n}}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^{3n-2}}+\frac{2}{4^{3n-1}}+\frac{0}{4^{3n}}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{16}{64^n}+\frac{8}{64^n}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{8}\times\left(\frac{1}{64}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{\frac{3}{8}}{1-\frac{1}{64}}=\frac{8}{21}$$

답 ④

6 $\dfrac{5^n+a^n}{2^{3n}}=\left(\dfrac{5}{8}\right)^n+\left(\dfrac{a}{8}\right)^n$이고

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{8}\right)^n=\frac{\frac{5}{8}}{1-\frac{5}{8}}=\frac{5}{3}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{8}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{5^n+a^n}{2^{3n}}-\left(\frac{5}{8}\right)^n\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+a^n}{2^{3n}}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{8}\right)^n=a-\frac{5}{3}$$

등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{8}\right)^n$이 수렴하므로

$-1<\dfrac{a}{8}<1$, 즉 $-8<a<8$

이다. 이때

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{8}\right)^n=\frac{\frac{a}{8}}{1-\frac{a}{8}}=\frac{a}{8-a}$$

이므로 $\dfrac{a}{8-a}=a-\dfrac{5}{3}$에서

$$a=\left(a-\frac{5}{3}\right)(8-a)$$
$$3a^2-26a+40=0$$
$$(a-2)(3a-20)=0$$

$a=2$ 또는 $a=\dfrac{20}{3}$

이때 $-8<2<8$, $-8<\dfrac{20}{3}<8$이므로 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은

$$2+\frac{20}{3}=\frac{26}{3}$$

따라서 $p=3$, $q=26$이므로

$p+q=3+26=29$

답 29

Level 1 기초 연습

본문 20쪽

1 ② **2** ③ **3** ① **4** ②

1 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차를 모두 d $(d>0)$이라 하면

$$S_n=\frac{n\{2d+(n-1)d\}}{2}=\frac{dn(n+1)}{2}$$
$$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{dn(n+1)}$$
$$=\frac{2}{d}\left\{\frac{1}{(n+1)-n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{2}{d}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

이때

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{d}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{2}{d}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{2}{d}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

이므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}=S_1$에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{d}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{2}{d}(1-0)$$
$$=\frac{2}{d}=S_1$$

즉, $dS_1=2$

$S_1=a_1$이고 $a_1=d$이므로

$a_1^2=2$

$a_1>0$이므로

$a_1=\sqrt{2}$

답 ②

2 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-a}{n}-\frac{an}{n+a}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-a}{n}-\frac{an}{n+a}\right)=0$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-a}{n}-\frac{an}{n+a}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n-a}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{an}{n+a}$$
$$=1-a=0$$

에서 $a=1$

이때

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}-\frac{n}{n+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{k}-\frac{k}{k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(0-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}-\frac{n}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{n+1}\right)=-1$$

따라서 $a+S=1+(-1)=0$

답 ③

3 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(x-5)\left(\frac{x-2}{2}\right)^n$이 수렴하려면

$(x-5)\times\frac{x-2}{2}=0$ 또는 $-1<\frac{x-2}{2}<1$

이어야 한다.

$(x-5)\times\frac{x-2}{2}=0$에서

$x=5$ 또는 $x=2$ …… ㉠

$-1<\frac{x-2}{2}<1$에서

$-2<x-2<2$

$0<x<4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 조건을 만족시키는 정수 x의 값은

1, 2, 3, 5

이므로 그 합은

$1+2+3+5=11$

답 ①

4 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2b_n-2)=2$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n-5)=-4$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2b_n-2)-\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n-5)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n+2b_n-2)-(a_n-b_n-5)\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(3b_n+3)=2-(-4)=6$$

이고

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}(3b_n+3)$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(3b_n+3)$$
$$=\frac{1}{3}\times6=2$$

한편, 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2b_n-2)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n-5)$가 각각 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n-2)=0$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n-5)=0$

이고

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n-2)+2\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n-5)$$
$$=\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n-2)+\lim_{n\to\infty}(2a_n-2b_n-10)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+2b_n-2)+(2a_n-2b_n-10)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(3a_n-12)=0$$

에서

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{3}(3a_n-12)+4\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(3a_n-12)+\lim_{n\to\infty}4$$
$$=\frac{1}{3}\times0+4=4$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left\{a_n+\sum_{k=1}^{n}(b_k+1)\right\}=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(b_k+1)$$
$$=\lim_{n\to\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+1)$$
$$=4+2=6$$

답 ②

Level 2 기본 연습 본문 21~22쪽

1 ① **2** ⑤ **3** ③ **4** ② **5** ① **6** ⑤
7 19

1 $a_1+a_2+a_3=19$에서

$a_1+a_1r+a_1r^2=a_1(1+r+r^2)=19$ …… ㉠

㉠에서 $a_1\neq0$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면 $-1<r<1$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=27$에서 $\frac{a_1}{1-r}=27$

$a_1=27(1-r)$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$27(1-r)(1+r+r^2)=19$, $27(1-r^3)=19$

$27r^3=8$, $r^3=\frac{8}{27}$, $r=\frac{2}{3}$

㉡에서 $a_1=27\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=9$

따라서 $a_4=a_1r^3=9\times\frac{8}{27}=\frac{8}{3}$

답 ①

2 이차방정식 $9x^2-mx+1=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이차방정식 $9x^2-mx+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-m)^2-4\times9\times1=m^2-36>0$

m은 양수이므로 $m>6$ …… ㉠

이때 이차방정식 $9x^2-mx+1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{m}{9}>0$, $\alpha\beta=\frac{1}{9}>0$

이므로 두 근 α, β는 양수이고, $\alpha<\beta$라 하면

$0<\alpha<1$

이다. 즉, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n$은 수렴하고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha^n+\beta^n)$이 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\beta^n=\sum_{n=1}^{\infty}\{(\alpha^n+\beta^n)-\alpha^n\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha^n+\beta^n)-\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n$$

에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\beta^n$은 수렴한다.

즉, $0<\beta<1$

$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha^n+\beta^n)=3$에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha^n+\beta^n)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n+\sum_{n=1}^{\infty}\beta^n$$
$$=\frac{\alpha}{1-\alpha}+\frac{\beta}{1-\beta}$$
$$=\frac{\alpha(1-\beta)+\beta(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-\beta)}$$
$$=\frac{\alpha+\beta-2\alpha\beta}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$$
$$=\frac{\frac{m}{9}-2\times\frac{1}{9}}{1-\frac{m}{9}+\frac{1}{9}}$$
$$=\frac{m-2}{10-m}=3$$

이므로 $m-2=3(10-m)$, $m=8$

이때 $m=8$은 ㉠을 만족시킨다.

따라서

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{8}{9}}=\frac{1}{8}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^n$$
$$=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{1}{7}$$

답 ⑤

3 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하자.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 $|r|<1$이고, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=1$에서

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{a_1}{1-r}=1$이므로

$a_1=1-r$ …… ㉠

한편,

$$\frac{1}{4^n\times a_n}=\frac{1}{4^n\times a_1\times r^{n-1}}$$
$$=\frac{1}{4a_1}\times\left(\frac{1}{4r}\right)^{n-1}$$

이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n\times a_n}$이 수렴하므로

$\left|\frac{1}{4r}\right|<1$에서 $r<-\frac{1}{4}$ 또는 $r>\frac{1}{4}$ …… ㉡

또 $|r|<1$에서 $-1<r<1$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

$-1<r<-\frac{1}{4}$ 또는 $\frac{1}{4}<r<1$ …… ㉣

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n\times a_n}=1$에서

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n\times a_n}=\frac{\frac{1}{4a_1}}{1-\frac{1}{4r}}=1$ …… ㉤

㉠을 ㉤에 대입하면

$$\frac{\frac{1}{4(1-r)}}{1-\frac{1}{4r}}=1$$

$\frac{1}{4(1-r)}=1-\frac{1}{4r}=\frac{4r-1}{4r}$

$(1-r)(4r-1)=r$

$4r^2-4r+1=0$

$(2r-1)^2=0,\ r=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}<\frac{1}{2}<1$이므로 ㉣을 만족시킨다.

㉠에서 $a_1=1-r=\frac{1}{2}$

따라서

$a_2=a_1\times r$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

답 ③

4 $a_n=pn-1$에서

$a_{2n+2}-a_{2n}=\{p(2n+2)-1\}-(2pn-1)$

$=2p$

이므로

$\frac{1}{a_{2n}a_{2n+2}}=\frac{1}{a_{2n+2}-a_{2n}}\left(\frac{1}{a_{2n}}-\frac{1}{a_{2n+2}}\right)$

$=\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{a_{2n}}-\frac{1}{a_{2n+2}}\right)$

이고

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_{2k}a_{2k+2}}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{a_{2k}}-\frac{1}{a_{2k+2}}\right)$

$=\frac{1}{2p}\left\{\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_4}\right)+\left(\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_6}\right)+\left(\frac{1}{a_6}-\frac{1}{a_8}\right)+\cdots\right.$

$\left.+\left(\frac{1}{a_{2n}}-\frac{1}{a_{2n+2}}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{2n+2}}\right)$

$=\frac{1}{2p}\left\{\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{p(2n+2)-1}\right\}$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n}a_{2n+2}}=\frac{1}{30}$에서

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n}a_{2n+2}}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_{2k}a_{2k+2}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2p}\left\{\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{p(2n+2)-1}\right\}$

$=\frac{1}{2p}\times\frac{1}{2p-1}=\frac{1}{30}$

이므로 $2p(2p-1)=30$

$2p^2-p-15=0$

$(2p+5)(p-3)=0$

$p>1$이므로 $p=3$

따라서 $a_n=3n-1$이고 $a_{n+2}-a_n=6$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+2}}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+2}}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{a_{k+2}-a_k}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)\right\}$

$=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_4}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_5}\right)+\cdots\right.$

$\left.+\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)\right\}$

$=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$

$=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{3(n+1)-1}-\frac{1}{3(n+2)-1}\right\}$

$=\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)$

$=\frac{7}{60}$

답 ②

5 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\ (r\neq0)$이라 하면

$a_n=a_1r^{n-1}$

조건 (가)에서 모든 자연수 n에 대하여 $\frac{b_n}{a_n}=2$이므로

$b_n=2a_n=2a_1r^{n-1}$

이때

$a_nb_n=a_1r^{n-1}\times2a_1r^{n-1}$

$=2a_1^{\,2}\times(r^2)^{n-1}$

조건 (나)에서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=4$이므로 $-1<r^2<1$이고

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\frac{2a_1^{\,2}}{1-r^2}=4$ …… ㉠

한편, $a_2b_2=1$이므로

$a_1r\times b_1r=2a_1^{\,2}\times r^2=1$

$2a_1^{\,2}=\frac{1}{r^2}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\frac{\frac{1}{r^2}}{1-r^2}=4,\ 4r^4-4r^2+1=0$

$(2r^2-1)^2=0,\ r^2=\frac{1}{2}$

$r^2=\frac{1}{2}$을 ㉡에 대입하면

$a_1^{\,2}=\frac{1}{2r^2}=1$

따라서

$$a_3\times b_5=(a_1\times r^2)\times(2a_1\times r^4)$$
$$=2\times a_1{}^2\times(r^2)^3$$
$$=2\times 1\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$$

답 ①

6 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{n^2}{16n^2-4}\right)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{n^2}{16n^2-4}\right)=0$$

$b_n=a_n-\dfrac{n^2}{16n^2-4}$으로 놓으면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=0$이고

$$a_n=b_n+\frac{n^2}{16n^2-4}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(b_n+\frac{n^2}{16n^2-4}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}b_n+\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{16n^2-4}$$
$$=0+\frac{1}{16}=\frac{1}{16}$$

한편, $a_n=b_n+\dfrac{n^2}{16n^2-4}$에서

$$a_n-\frac{1}{16}=b_n+\frac{n^2}{16n^2-4}-\frac{1}{16}$$
$$=b_n+\frac{n^2}{16n^2-4}-\frac{n^2-\frac{1}{4}}{16n^2-4}$$
$$=b_n+\frac{\frac{1}{4}}{16n^2-4}$$
$$=b_n+\frac{1}{16(4n^2-1)}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{n^2}{16n^2-4}\right)=\frac{3}{8}$에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{3}{8}$$

이고

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16(4n^2-1)}$$
$$=\frac{1}{16}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$=\frac{1}{16}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{32}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{32}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{32}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left\{a_n+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k-\frac{1}{16}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k-\frac{1}{16}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{b_k+\frac{1}{16(4k^2-1)}\right\}$$
$$=\frac{1}{16}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16(4n^2-1)}$$
$$=\frac{1}{16}+\frac{3}{8}+\frac{1}{32}$$
$$=\frac{15}{32}$$

답 ⑤

7 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 원 C_1 위의 점이므로

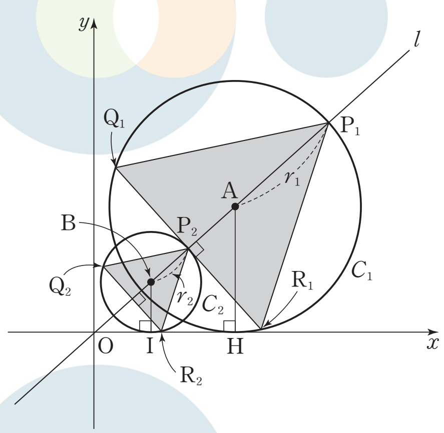
$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AP_1}}$

삼각형 $\mathrm{P_1Q_1R_1}$이 정삼각형이므로

$\overline{\mathrm{Q_1R_1}}\perp l$

점 A는 정삼각형 $\mathrm{P_1Q_1R_1}$의 무게중심이므로

$\overline{\mathrm{AP_2}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AP_1}}$



자연수 n에 대하여 두 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n$, $\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{R}_{n+1}$은 모두 정삼각형이므로 서로 닮은 도형이며, 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, 두 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n$, $\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{R}_{n+1}$의 닮음비는 $r_n : r_{n+1}$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$r_n : r_{n+1}=r_1 : r_2$이다.

한편, 원 C_2의 중심을 B, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 I라 하면 두 삼각형 OAH, OBI는 서로 닮은 도형이고

$$r_1 : r_2=\overline{\mathrm{AH}} : \overline{\mathrm{BI}}$$
$$=\overline{\mathrm{OA}} : \overline{\mathrm{OB}}$$
$$=(\overline{\mathrm{OA}}+r_1) : (\overline{\mathrm{OB}}+r_2)$$
$$=\overline{\mathrm{OP_1}} : \overline{\mathrm{OP_2}}$$

이다. 이때 $\overline{AH}=\overline{AP_1}=r_1$이고 $\sin\theta=\frac{2}{3}$이므로

$$\overline{OA}=\frac{\overline{AH}}{\sin\theta}=\frac{r_1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}r_1$$

$$\overline{OP_1}=\overline{OA}+\overline{AP_1}$$
$$=\frac{3}{2}r_1+r_1=\frac{5}{2}r_1$$

$$\overline{OP_2}=\overline{OA}-\overline{AP_2}$$
$$=\overline{OA}-\frac{1}{2}\overline{AP_1}$$
$$=\frac{3}{2}r_1-\frac{1}{2}r_1=r_1$$

이므로

$$r_1:r_2=\overline{OP_1}:\overline{OP_2}$$
$$=\frac{5}{2}r_1:r_1$$
$$=\frac{5}{2}:1$$

자연수 n에 대하여 두 삼각형 $P_nQ_nR_n$, $P_{n+1}Q_{n+1}R_{n+1}$의 닮음비가 $\frac{5}{2}:1$, 즉 $1:\frac{2}{5}$이다.

그러므로 $S_n:S_{n+1}=1^2:\left(\frac{2}{5}\right)^2$이므로 수열 $\{S_n\}$은 공비가 $\left(\frac{2}{5}\right)^2$인 등비수열이다.

한편, 정삼각형 $P_1Q_1R_1$에서

$$\overline{P_1Q_1}=2\times\overline{AP_1}\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}r_1$$

이므로 정삼각형 $P_1Q_1R_1$의 넓이 S_1은

$$S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\overline{P_1Q_1}^2$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{3}r_1)^2$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{4}r_1^2$$

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=7\sqrt{3}$에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}r_1^2}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{4}r_1^2\times\frac{25}{21}$$
$$=7\sqrt{3}$$

$$r_1^2=7\sqrt{3}\times\frac{21}{25}\times\frac{4}{3\sqrt{3}}=\left(\frac{14}{5}\right)^2$$

$r_1>0$이므로 $r_1=\frac{14}{5}$

따라서 $p=5$, $q=14$이므로

$p+q=5+14=19$

답 19

Level 3 실력 완성 본문 23쪽

1 ① **2** 15 **3** 73

1 곡선 $y=\sqrt{3x-1}$과 직선 $y=\sqrt{2n}$의 교점 A_n의 x좌표는 $\sqrt{3x-1}=\sqrt{2n}$에서

$$x=\frac{2n+1}{3}$$

점 A_n의 좌표가 $\left(\frac{2n+1}{3},\ \sqrt{2n}\right)$이므로 직선 OA_n의 방정식은

$$y=\frac{\sqrt{2n}}{\frac{2n+1}{3}}x,\ 즉\ y=\frac{3\sqrt{2n}}{2n+1}x$$

$y=\sqrt{3x-1}$과 $y=\frac{3\sqrt{2n}}{2n+1}x$를 연립하면

$$\sqrt{3x-1}=\frac{3\sqrt{2n}}{2n+1}x$$

$$3x-1=\frac{18n}{(2n+1)^2}x^2$$

$$x^2-\frac{(2n+1)^2}{6n}x+\frac{(2n+1)^2}{18n}=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

직선 OA_n과 곡선 $y=\sqrt{3x-1}$은 점 A_n에서 만나므로 이차방정식 ㉠은 점 A_n의 x좌표를 근으로 갖는다. 점 B_n의 x좌표를 β_n이라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\beta_n\times\frac{2n+1}{3}=\frac{(2n+1)^2}{18n}$$

$$\beta_n=\frac{(2n+1)^2}{18n}\times\frac{3}{2n+1}=\frac{2n+1}{6n}$$

두 점 A_n, B_n의 x좌표의 차 a_n은

$$a_n=\frac{2n+1}{3}-\frac{2n+1}{6n}$$
$$=\frac{2n(2n+1)-(2n+1)}{6n}$$
$$=\frac{(2n+1)(2n-1)}{6n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{a_n}-p\right)=q$에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{a_n}-p\right)$가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{a_n}-p\right)=0$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{6n^2}{(2n+1)(2n-1)}-p\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n^2}{4n^2-1}-p\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2}{4n^2-1}-\lim_{n\to\infty}p$$
$$=\frac{3}{2}-p=0$$

에서 $p=\frac{3}{2}$

따라서

$$q=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n^2}{4n^2-1}-\frac{3}{2}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12n^2-3(4n^2-1)}{2(4n^2-1)}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2(4n^2-1)}$$
$$=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$=\frac{3}{4}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{3}{4}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{3}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{3}{4}$$

따라서 $p+q=\frac{3}{2}+\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$

답 ①

2 곡선 $y=\log_a x$와 직선 $y=n$의 교점 P_n의 x좌표는

$\log_a x=n$에서

$x=a^n$

또 곡선 $y=\log_a x$와 직선 $y=2n$의 교점 Q_n의 x좌표는

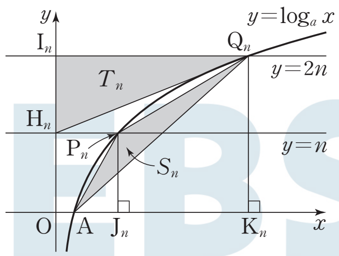
$\log_a x=2n$에서

$x=a^{2n}$

따라서 두 점 P_n, Q_n의 좌표는 각각

$\mathrm{P}_n(a^n,\ n)$, $\mathrm{Q}_n(a^{2n},\ 2n)$

한편, $\log_a x=0$에서 $x=1$이므로 점 A의 좌표는 $(1,\ 0)$이다.



두 점 P_n, Q_n에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 J_n, K_n이라 하면 삼각형 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n\mathrm{A}$의 넓이는 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{A}\mathrm{J}_n$의 넓이와 사다리꼴 $\mathrm{P}_n\mathrm{J}_n\mathrm{K}_n\mathrm{Q}_n$의 넓이의 합에서 삼각형 $\mathrm{Q}_n\mathrm{A}\mathrm{K}_n$의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$S_n=\frac{1}{2}\times(a^n-1)\times n+\frac{1}{2}\times(n+2n)\times(a^{2n}-a^n)-\frac{1}{2}\times(a^{2n}-1)\times 2n$$
$$=\frac{1}{2}\{(na^n-n)+(3na^{2n}-3na^n)-(2na^{2n}-2n)\}$$
$$=\frac{1}{2}(na^{2n}-2na^n+n)$$

한편, 삼각형 $\mathrm{Q}_n\mathrm{I}_n\mathrm{H}_n$의 넓이 T_n은

$$T_n=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{I}_n}\times\overline{\mathrm{I}_n\mathrm{H}_n}$$
$$=\frac{1}{2}\times a^{2n}\times(2n-n)$$
$$=\frac{1}{2}na^{2n}$$

이므로

$$\frac{S_n}{T_n}=\frac{\frac{1}{2}(na^{2n}-2na^n+n)}{\frac{1}{2}na^{2n}}$$
$$=1-2\times\left(\frac{1}{a}\right)^n+\left(\frac{1}{a^2}\right)^n$$

이고, $a>1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n}=\lim_{n\to\infty}\left\{1-2\times\left(\frac{1}{a}\right)^n+\left(\frac{1}{a^2}\right)^n\right\}$$
$$=1-2\times0+0$$
$$=1$$

이때 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(k-\frac{S_n}{T_n}\right)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(k-\frac{S_n}{T_n}\right)=0$$

즉,

$$\lim_{n\to\infty}\left(k-\frac{S_n}{T_n}\right)=\lim_{n\to\infty}k-\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n}$$
$$=k-1=0$$

에서 $k=1$

그러므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{S_n}{T_n}\right)=\frac{3}{5}$에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{S_n}{T_n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2\times\left(\frac{1}{a}\right)^n-\left(\frac{1}{a^2}\right)^n\right\}$$
$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a^2}\right)^n$$
$$=2\times\frac{\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}}-\frac{\frac{1}{a^2}}{1-\frac{1}{a^2}}$$
$$=\frac{2}{a-1}-\frac{1}{a^2-1}$$
$$=\frac{2a+1}{a^2-1}$$
$$=\frac{3}{5}$$

$5(2a+1)=3(a^2-1)$

$3a^2-10a-8=0$

$(3a+2)(a-4)=0$

$a>1$이므로 $a=4$

따라서 $60\times\frac{k}{a}=60\times\frac{1}{4}=15$

답 15

3 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\ (a\neq0)$, 공비를 $r\ (r\neq0)$이라 하자. 조건 (가)에서

$b_3=|a_3+1|-1=|ar^2+1|-1$

이고 조건 (나)에서 $b_3=0$이므로

$|ar^2+1|-1=0$, $|ar^2+1|=1$

$ar^2=-2$ 또는 $ar^2=0$

이때 $a\neq0$, $r\neq0$이므로 $ar^2=-2$에서

$a=-\frac{2}{r^2}$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

이고 $a<0$이다.

조건 (가)에서

$b_5=|a_5+1|-1=|ar^4+1|-1$

이고 조건 (나)에서 $a_5=b_5$이므로

$ar^4=|ar^4+1|-1$

$|ar^4+1|=ar^4+1$

즉, $ar^4+1\geq0$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-\frac{2}{r^2}\times r^4+1=-2r^2+1\geq0$

$r^2\leq\frac{1}{2}$

즉, $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq r<0$ 또는 $0<r\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$

이므로 등비수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

$b_n=|a_n+1|-1$

$=|ar^{n-1}+1|-1$

$=\begin{cases}ar^{n-1} & (ar^{n-1}+1\geq0)\\ -ar^{n-1}-2 & (ar^{n-1}+1<0)\end{cases}$

이고 $ar^4+1\geq0$, $r^2\leq\frac{1}{2}$이므로 r의 부호에 관계없이 4 이상의 자연수 m에 대하여 $ar^m+1\geq0$이다.

따라서 $n\geq5$일 때, $b_n=ar^{n-1}$

(i) $0<r\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때

$r^2<r<1$이고 $a<0$이므로

$a<ar<ar^2=-2$

즉, $a+1<ar+1<ar^2+1<0$이므로

$b_1=-a-2=\frac{2}{r^2}-2$

$b_2=-ar-2=\frac{2}{r}-2$

$b_1+b_2=\frac{11}{2}$에서

$\left(\frac{2}{r^2}-2\right)+\left(\frac{2}{r}-2\right)=\frac{11}{2}$

$19r^2-4r-4=0$

이때 $0<r\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$r=\frac{2+4\sqrt{5}}{19}$

이는 r이 유리수라는 조건에 모순이다.

(ii) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq r<0$일 때

$a<0$이므로 $ar>0$

즉, $ar+1>0$이므로

$b_2=ar=-\frac{2}{r}$

한편, $a+1=-\frac{2}{r^2}+1<0$이므로

$b_1=-a-2=\frac{2}{r^2}-2$

$b_1+b_2=\frac{11}{2}$에서

$\left(\frac{2}{r^2}-2\right)+\left(-\frac{2}{r}\right)=\frac{11}{2}$

$15r^2+4r-4=0$

$(5r-2)(3r+2)=0$

이때 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq r<0$이므로

$r=-\frac{2}{3}$

(i), (ii)에서 $r=-\frac{2}{3}$이므로

$ar^{n-1}=-\frac{2}{r^2}\times r^{n-1}$

$=-2r^{n-3}$

$=-2\times\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-3}$

이고, $ar^2+1<0$, $ar^3+1=-2r+1>0$이므로

$b_n=\begin{cases}-2\times\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-3} & (n\neq1,\ n\neq3)\\ 2\times\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-3}-2 & (n=1 \text{ 또는 } n=3)\end{cases}$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=(b_1+b_2)+b_3+\sum_{n=4}^{\infty}b_n$

$=\frac{11}{2}+0+\frac{-2\times\left(-\frac{2}{3}\right)}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}$

$=\frac{11}{2}+\frac{4}{5}=\frac{63}{10}$

따라서 $p=10$, $q=63$이므로

$p+q=10+63=73$

답 73

03 여러 가지 함수의 미분

유제 본문 25~33쪽

1 ④ 2 ① 3 ① 4 ④ 5 ② 6 ②
7 15 8 ④ 9 ④

1 $\lim_{x\to-\infty}\frac{2^{x+1}+3^{x-1}}{2^x+3^x}$에서 $-x=t$라 하면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^{x+1}+3^{x-1}}{2^x+3^x}=\lim_{t\to\infty}\frac{2^{-t+1}+3^{-t-1}}{2^{-t}+3^{-t}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{1}{2}\right)^t+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^t}{\left(\frac{1}{2}\right)^t+\left(\frac{1}{3}\right)^t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2+\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^t}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^t}$$

$$=\frac{2+\frac{1}{3}\times 0}{1+0}=2$$

답 ④

2 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로 $f(1)=0$이다.

극한 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{\ln(ax+b)}$가 0이 아닌 값으로 수렴하고

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}\ln(ax+b)=\ln(a+b)=0$

$a+b=1$ ⋯⋯ ㉠

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 0)$에서 직선 $y=3x-3$에 접하므로 $f'(1)=3$이다.

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{\ln(ax+b)}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{\ln\{a(x-1)+1\}}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\frac{\ln\{a(x-1)+1\}}{x-1}}$$

이때 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3$이고

$\lim_{x\to1}\frac{\ln\{a(x-1)+1\}}{x-1}$에서 $x-1=t$로 놓으면

$x\to1$일 때 $t\to0$이고

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln\{a(x-1)+1\}}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+at)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\left\{\frac{\ln(1+at)}{at}\times a\right\}=a$$

이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{\ln(ax+b)}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\frac{\ln\{a(x-1)+1\}}{x-1}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\lim_{x\to1}\frac{\ln\{a(x-1)+1\}}{x-1}}$$

$$=\frac{3}{a}=\frac{1}{2}$$

에서 $a=6$

㉠에서 $b=1-a=1-6=-5$

따라서 $|a-b|=|6-(-5)|=11$

답 ①

3 $f(x)=x^2\log_2 x+ax$에서

$$f'(x)=2x\log_2 x+x^2\times\frac{1}{x\ln 2}+a$$

$$=2x\log_2 x+\frac{x}{\ln 2}+a$$

$\ln 2=\frac{\log_2 2}{\log_2 e}=\frac{1}{\log_2 e}$이므로

$$f'(2)=2\times2\times\log_2 2+\frac{2}{\ln 2}+a$$

$$=(4+a)+2\log_2 e$$

$f'(2)=b\log_2 e$이고 $\log_2 e$가 무리수이므로

$4+a=0,\ 2=b$

따라서 $a=-4,\ b=2$이므로

$a+b=-4+2=-2$

답 ①

4 곡선 $y=f(x)$가 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$을 지나므로

$$f(1)=\frac{1}{2}(1^2\times\ln a-1)=0$$

$\ln a=1,\ a=e$

그러므로

$$f(x)=\frac{1}{2}\{x^2\ln(ex)-1\}$$

$$=\frac{1}{2}\{x^2(1+\ln x)-1\}$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+x^2\ln x-1)$$

$$=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}$$

점 B의 좌표가 $(t,\ f(t))$이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=t-1,\ \overline{\mathrm{BD}}=f(t)$이다. 그러므로 사각형 ADBC의 넓이 $S(t)$는

$S(t)=\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{BD}}=(t-1)f(t)$

한편, 선분 AD를 지름으로 하는 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AD}}=\frac{t-1}{2}$

이므로 이 원의 내부와 사각형 ADBC의 외부의 공통부분의 넓이 $T(t)$는

$T(t)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{t-1}{2}\right)^2\pi=\frac{(t-1)^2}{8}\pi$

그러므로

$$\lim_{t\to1+}\frac{S(t)}{T(t)}=\lim_{t\to1+}\frac{(t-1)f(t)}{\frac{(t-1)^2}{8}\pi}=\frac{8}{\pi}\lim_{t\to1+}\frac{f(t)}{t-1}$$

이때 $f(1)=0$이므로

$$\lim_{t\to1+}\frac{f(t)}{t-1}=\lim_{t\to1+}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}=f'(1)$$

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}$에서

$$f'(x)=\frac{1}{2}\times2x+\frac{1}{2}\left(2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}\right)$$
$$=\frac{3}{2}x+x\ln x$$

이므로

$$\lim_{t\to1+}\frac{f(t)}{t-1}=f'(1)=\frac{3}{2}\times1+1\times\ln 1=\frac{3}{2}$$

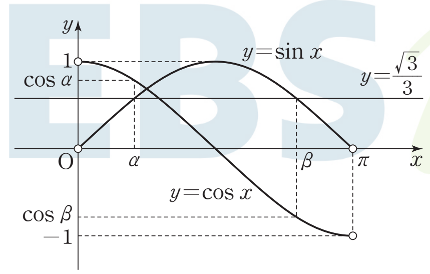
따라서

$$\lim_{t\to1+}\frac{S(t)}{T(t)}=\frac{8}{\pi}\lim_{t\to1+}\frac{f(t)}{t-1}=\frac{8}{\pi}\times\frac{3}{2}=\frac{12}{\pi}$$

답 ④

5 $0<x<\pi$일 때, 방정식 $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{3}$의 해는 곡선 $y=\sin x\ (0<x<\pi)$와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$의 교점의 x좌표와 같다.

이때 $\sin\alpha=\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}$이고 $0<\alpha<\beta<\pi$이므로 곡선 $y=\sin x\ (0<x<\pi)$와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$은 그림과 같다.



$\cos^2 x=1-\sin^2 x$이고 $\cos\alpha>0$, $\cos\beta<0$이므로

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}$$
$$=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$$

따라서

$$\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha$$
$$=\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\times\frac{\sqrt{6}}{3}+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$$
$$=-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$$
$$=-\frac{1}{3}$$

답 ②

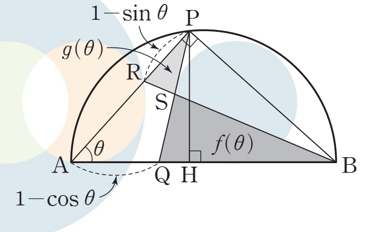
6 $x-\frac{1}{2}=t$로 놓으면 $x\to\frac{1}{2}$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\cos(\pi x)}{4x^2-1}=\lim_{t\to0}\frac{\cos\left\{\pi\left(t+\frac{1}{2}\right)\right\}}{4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-1}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{2}\right)}{4t(t+1)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{-\sin(\pi t)}{4t(t+1)}$$
$$=-\lim_{t\to0}\left\{\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\times\pi\times\frac{1}{4(t+1)}\right\}$$
$$=-\left\{1\times\pi\times\frac{1}{4\times(0+1)}\right\}$$
$$=-\frac{\pi}{4}$$

답 ②

7 점 P가 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점이므로 선분 PB를 그으면

$\angle\mathrm{APB}=\frac{\pi}{2}$



삼각형 PSB의 넓이를 $S(\theta)$라 하면

$f(\theta)-g(\theta)=\{f(\theta)+S(\theta)\}-\{g(\theta)+S(\theta)\}$

$\overline{\mathrm{AQ}}=1-\cos\theta$이므로

$\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{AQ}}=1-(1-\cos\theta)=\cos\theta$

이고, 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{AP}}\sin\theta=(\overline{\mathrm{AB}}\cos\theta)\sin\theta=\cos\theta\sin\theta$

이므로 삼각형 PQB의 넓이 $f(\theta)+S(\theta)$는

$$f(\theta)+S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{BQ}\times\overline{PH}$$
$$=\frac{1}{2}\times\cos\theta\times\cos\theta\sin\theta$$
$$=\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{2}$$

또 $\overline{PB}=\overline{AB}\sin\theta=\sin\theta$이고 $\overline{PR}=1-\sin\theta$이므로 삼각형 PRB의 넓이 $g(\theta)+S(\theta)$는

$$g(\theta)+S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PB}\times\overline{PR}$$
$$=\frac{1}{2}\times\sin\theta\times(1-\sin\theta)$$
$$=\frac{\sin\theta(1-\sin\theta)}{2}$$

그러므로

$$f(\theta)-g(\theta)=\{f(\theta)+S(\theta)\}-\{g(\theta)+S(\theta)\}$$
$$=\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{2}-\frac{\sin\theta(1-\sin\theta)}{2}$$

한편, $\frac{\pi}{2}-\theta=t$로 놓으면 $\theta\to\frac{\pi}{2}-$일 때 $t\to0+$이고,

$\sin\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t$,

$\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t$

이므로

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)^2}$$
$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\left[\frac{1}{\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)^2}\times\left\{\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{2}-\frac{\sin\theta(1-\sin\theta)}{2}\right\}\right]$$
$$=\lim_{t\to0+}\left[\frac{1}{t^2}\times\left\{\frac{\sin^2t\cos t}{2}-\frac{\cos t(1-\cos t)}{2}\right\}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to0+}\frac{\sin^2t\cos t-\cos t(1-\cos t)}{t^2}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to0+}\left(\frac{\sin^2t}{t^2}\times\cos t-\frac{1-\cos t}{t^2}\times\cos t\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\lim_{t\to0+}\left(\frac{\sin^2t}{t^2}\times\cos t\right)-\lim_{t\to0+}\left(\frac{1-\cos t}{t^2}\times\cos t\right)\right\}$$

이때

$$\lim_{t\to0+}\frac{1-\cos t}{t^2}=\lim_{t\to0+}\frac{(1-\cos t)(1+\cos t)}{t^2(1+\cos t)}$$
$$=\lim_{t\to0+}\left(\frac{\sin^2t}{t^2}\times\frac{1}{1+\cos t}\right)$$
$$=1^2\times\frac{1}{1+1}$$
$$=\frac{1}{2}$$

이므로

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\lim_{t\to0+}\left(\frac{\sin^2t}{t^2}\times\cos t\right)-\lim_{t\to0+}\left(\frac{1-\cos t}{t^2}\times\cos t\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(1^2\times1-\frac{1}{2}\times1\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

따라서

$$60\times\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)^2}=60\times\frac{1}{4}=15$$

답 15

8 극한 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x\sin x-a}{x-\frac{\pi}{2}}$가 수렴하고 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=0$이므로 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(2x\sin x-a)=0$이다.

즉, $2\times\frac{\pi}{2}\times\sin\frac{\pi}{2}-a=0$에서 $a=\pi$

한편, $f(x)=2x\sin x$로 놓으면

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\times\frac{\pi}{2}\times\sin\frac{\pi}{2}=\pi$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x\sin x-a}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

이때 $f'(x)=2\sin x+2x\cos x$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x\sin x-a}{x-\frac{\pi}{2}}=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=2\times\sin\frac{\pi}{2}+2\times\frac{\pi}{2}\times\cos\frac{\pi}{2}$$
$$=2$$

따라서 $a=\pi$, $b=2$이므로

$a\times b=2\pi$

답 ④

9 $f(x)=0$에서

$x\sin x+kx^2-k\pi x=0$

$x\{\sin x+k(x-\pi)\}=0$

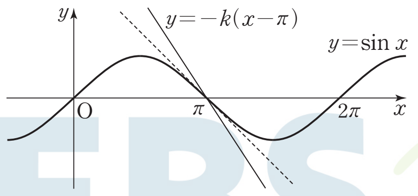
$x=0$ 또는 $\sin x+k(x-\pi)=0$

방정식 $\sin x+k(x-\pi)=0$의 실근은 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=-k(x-\pi)$의 교점의 x좌표와 같다.

곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=-k(x-\pi)$는 모두 점 $(\pi, 0)$을 지나므로 방정식 $\sin x+k(x-\pi)=0$은 $x=\pi$를 실근으로 갖는다.

따라서 $a=0$, $b=\pi$이다.

이때 곡선 $y=f(x)$가 x축과 두 점 $(0,\ 0)$, $(\pi,\ 0)$에서만 만나야 하므로 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=-k(x-\pi)$는 점 $(\pi,\ 0)$에서만 만나야 한다.



함수 $y=\sin x$의 그래프는 그림과 같고, $y=\sin x$에서 $y'=\cos x$이므로 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $(\pi,\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$\cos \pi=-1$

이다. 이때 $k>0$에서 $-k<0$이므로 직선 $y=-k(x-\pi)$의 기울기는 음수이고, 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=-k(x-\pi)$가 점 $(\pi,\ 0)$에서만 만나려면

$-k\le -1$, 즉 $k\ge 1$

이어야 하므로 $m=1$이다.

$g(x)=x\sin x+x^2-\pi x$에서

$g'(x)=\sin x+x\cos x+2x-\pi$이므로

$$g'\left(\frac{b}{2}\right)=g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}+2\times\frac{\pi}{2}-\pi=1$$

따라서

$$m+g'\left(\frac{b}{2}\right)=1+1=2$$

답 ④

참고

$\frac{\pi}{2}<x<\pi$ 또는 $\pi<x<\frac{3}{2}\pi$일 때, $-1<\cos x<0$이므로 열린구간 $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\right)$에서 곡선 $y=\sin x$ 위의 점에서의 접선의 기울기의 절댓값은 $x=\pi$일 때 최대이고, 따라서 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=-(x-\pi)$는 한 점 $(\pi,\ 0)$에서만 만난다.

Level 1 기초 연습					본문 34~35쪽
1 ④	**2** ③	**3** ③	**4** ⑤	**5** ⑤	**6** 16
7 11					

1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x+4x^2)}{2x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)^2}{x(x+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\ln|1+2x|}{x(x+2)}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+2x)}{2x}\times\frac{4}{x+2}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}\times\lim_{x\to 0}\frac{4}{x+2}=1\times\frac{4}{2}=2$$

답 ④

다른 풀이

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x+4x^2)}{2x+x^2}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+4x+4x^2)}{4x+4x^2}\times\frac{4x+4x^2}{2x+x^2}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x+4x^2)}{4x+4x^2}\times\lim_{x\to 0}\frac{4+4x}{2+x}=1\times\frac{4}{2}=2$$

2

$$\lim_{x\to 0}\frac{(a^x-1)(a^x+a)}{x^2+(a+1)x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}\times\frac{a^x+a}{x+a+1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{a^x+a}{x+a+1}=\ln a\times\frac{1+a}{a+1}=\ln a$$

따라서 $\ln a=2\ln 3=\ln 9$에서

$a=9$

답 ③

3 극한 $\lim_{x\to a}\frac{x^2-4x+4}{\cos(x-a)-1}$가 수렴하고, 함수 $y=\cos(x-a)-1$이 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to a}\{\cos(x-a)-1\}=\cos 0-1=0$

이고, 따라서

$\lim_{x\to a}(x^2-4x+4)=0$

이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to a}(x^2-4x+4)=a^2-4a+4=(a-2)^2=0$

이므로 $a=2$

이때 $x-2=t$라 하면 $x\to 2$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-4x+4}{\cos(x-a)-1}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{\cos(x-2)-1}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{\cos t-1}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{t^2(\cos t+1)}{(\cos t-1)(\cos t+1)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{t^2}{\sin^2 t}\times(-\cos t-1)\right\}$$
$$=1^2\times(-1-1)$$
$$=-2$$

따라서 $b=-2$이므로

$a+b=2+(-2)=0$

답 ③

4 $3\sin\alpha=\tan\alpha$에서

$3\sin\alpha-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=0$

$\left(3-\frac{1}{\cos\alpha}\right)\sin\alpha=0$ …… ㉠

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\alpha\neq 0$

즉, ㉠에서

$3-\frac{1}{\cos\alpha}=0$, $\cos\alpha=\frac{1}{3}$

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

따라서

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{6}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1+2\sqrt{6}}{6}$$

답 ⑤

5 $f(x)=0$에서 $2\sin x-\cos x=0$

$2\sin x=\cos x$, $\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{2}$

$\tan x=\frac{1}{2}$

즉, 점 A의 좌표를 $(a, 0)$이라 하면 $\tan a=\frac{1}{2}$이다.

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$에서 $\tan^2 x+1=\frac{1}{\cos^2 x}$이고

$0<a<\frac{\pi}{2}$이므로

$$\cos a=\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 a}}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin a=\sqrt{1-\cos^2 a}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$f'(x)=2\cos x+\sin x$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a, 0)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(a)=2\cos a+\sin a$$
$$=2\times\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

답 ⑤

6 $g(x)=|f(x)|$라 하면

$$\lim_{h\to 0+}\frac{|f(a+h)|-|f(a-h)|}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{g(a+h)-g(a-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{\{g(a+h)-g(a)\}-\{g(a-h)-g(a)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\left\{\frac{g(a+h)-g(a)}{h}+\frac{g(a-h)-g(a)}{-h}\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}+\lim_{h\to 0+}\frac{g(a-h)-g(a)}{-h}$$

이때 $\lim_{h\to 0+}\frac{g(a-h)-g(a)}{-h}$에서 $-h=t$로 놓으면

$h\to 0+$일 때 $t\to 0-$이고

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(a-h)-g(a)}{-h}=\lim_{t\to 0-}\frac{g(a+t)-g(a)}{t}$$

이므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{|f(a+h)|-|f(a-h)|}{h}=0$$

에서

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}+\lim_{t\to 0-}\frac{g(a+t)-g(a)}{t}=0$$
…… ㉠

이때 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능한 경우와 미분가능하지 않은 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $x=a$에서 미분가능한 경우

$f'(x)=2^x\ln 2$에서 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)>0$이므로 $f'(a)>0$이고 $g'(a)\neq 0$이다.

이때

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}+\lim_{t\to 0-}\frac{g(a+t)-g(a)}{t}$$
$=g'(a)+g'(a)=2g'(a)\neq 0$

이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $x=a$에서 미분가능하지 않은 경우

$f(x)=0$에서 $2^x-4=0$, $x=2$

이고, $f'(2)\neq 0$이므로 함수 $g(x)=|f(x)|$는 $x=2$에서만 미분가능하지 않다.

즉, $a=2$라 가정하면

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2^{2+h}-4}{h}=4\ln 2,$$
$$\lim_{t\to 0-}\frac{g(a+t)-g(a)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-2^{2+t}+4}{t}=-4\ln 2$$

이므로 ㉠을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=2$이고,

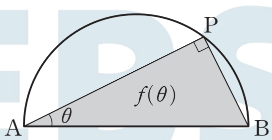
$f'(a)=f'(2)=2^2\times\ln 2=4\ln 2$

$=\ln 2^4=\ln 16$

이므로 $e^{f'(a)}=e^{\ln 16}=16^{\ln e}=16$

답 16

7



점 P가 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점이므로

$\angle APB=\frac{\pi}{2}$

$\overline{AB}=2$이므로

$\overline{AP}=\overline{AB}\cos\theta=2\cos\theta$

$\overline{BP}=\overline{AB}\sin\theta=2\sin\theta$

그러므로 삼각형 PAB의 넓이 $f(\theta)$는

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{BP}$

$=\frac{1}{2}\times 2\cos\theta\times 2\sin\theta$

$=2\sin\theta\cos\theta$

이고

$f'(\theta)=2\cos\theta\cos\theta-2\sin\theta\sin\theta$

$=2\cos^2\theta-2\sin^2\theta$

한편, $\theta=a$일 때 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$이므로

$2\cos a:2\sin a=2:1$에서

$2\sin a=\cos a$ ...... ㉠

㉠을 $\sin^2 a+\cos^2 a=1$에 대입하면

$\sin^2 a+(2\sin a)^2=1$

$\sin^2 a=\frac{1}{5}$

$0<a<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin a=\frac{1}{\sqrt{5}}$

㉠에서 $\cos a=2\sin a=\frac{2}{\sqrt{5}}$이므로

$f'(a)=2\cos^2 a-2\sin^2 a$

$=2\times\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2-2\times\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2$

$=\frac{6}{5}$

따라서 $p=5$, $q=6$이므로

$p+q=5+6=11$

답 11

Level 2 기본 연습 본문 36~37쪽

1 ① **2** 11 **3** ④ **4** 5 **5** ④ **6** 71 **7** ①

1 $\log_a(x+1)=1$에서

$x+1=a$, $x=a-1$

이므로 점 A의 좌표는 $(a-1, 1)$이다.

점 H는 점 A에서 x축에 내린 수선의 발이므로 두 점 A, H의 x좌표는 서로 같다.

즉, $\overline{OH}=a-1$

점 B는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로 $\overline{OB}=1$이고

$\angle BOH=\theta$이므로 $\frac{\overline{OH}}{\overline{OB}}=\cos\theta$에서

$a-1=\cos\theta$, $a=\cos\theta+1$

즉, $f(\theta)=\cos\theta+1$이므로

$f'(\theta)=-\sin\theta$

따라서

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 ①

2 극한 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$가 수렴하고 $\lim_{x\to 0}x=0$이므로 $\lim_{x\to 0}f(x)=0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(e^{2x}-e^{-2x}-e^{ax}+b)$

$=1-1-1+b$

$=-1+b=0$

이므로 $b=1$

$a=0$이면

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{-2x}(e^{4x}-1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}e^{-2x}\times\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{4x}-1}{4x}\times4\right)$$
$$=1\times(1\times4)=4$$

이므로 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$이라는 조건에 모순이다.

즉, $a\neq0$이고

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$에서

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}-e^{ax}+1}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{-2x}(e^{4x}-1)-(e^{ax}-1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{e^{-2x}(e^{4x}-1)}{x}-\frac{e^{ax}-1}{x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}e^{-2x}\times\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{4x}-1}{4x}\times4\right)-\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{ax}-1}{ax}\times a\right)$$
$$=1\times(1\times4)-(1\times a)$$
$$=4-a=0$$

이므로 $a=4$

그러므로

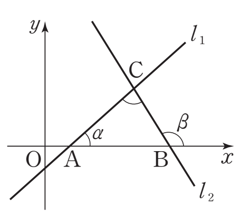
$$c=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}-e^{4x}+1}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{-2x}(e^{4x}-1)-(e^{4x}-1)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(e^{-2x}-1)(e^{4x}-1)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{-2x}-1}{x}\times\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{e^{-2x}-1}{-2x}\times(-2)\right\}\times\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{4x}-1}{4x}\times4\right)$$
$$=\{1\times(-2)\}\times(1\times4)$$
$$=-8$$

따라서

$a-b-c=4-1-(-8)=11$

답 11

3



기울기가 m인 직선을 l_1, 기울기가 $-2m$인 직선을 l_2라 하자. 직선 l_1이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α라 하고 직선 l_2가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 β라 하면

$\tan\alpha=m$, $\tan\beta=-2m$

이때 $\alpha+\angle\mathrm{ACB}=\beta$이므로 $\tan(\angle\mathrm{ACB})=18$에서

$$\tan(\angle\mathrm{ACB})=\tan(\beta-\alpha)$$
$$=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$
$$=\frac{-2m-m}{1+(-2m)\times m}$$
$$=\frac{3m}{2m^2-1}=18$$

이므로 $\frac{m}{2m^2-1}=6$

$12m^2-m-6=0$

$(4m-3)(3m+2)=0$

$m>0$이므로 $m=\frac{3}{4}$

답 ④

4 조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$가 점 $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{6},\ 0\right)$을 지나므로

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=a\times\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6}+b\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}a+\frac{\pi}{6}b=0$

$a+2b=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f(x)=ax\sin x+bx$에서

$f'(x)=a\sin x+ax\cos x+b$

조건 (나)에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{B}\left(\frac{\pi}{2},\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$에서의 접선의 기울기가 1이므로 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$에서

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\sin\frac{\pi}{2}+a\times\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}+b$$
$$=a+b=1 \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-1$

즉, $f'(x)=2\sin x+2x\cos x-1$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{6},\ 0\right)$에서의 접선의 기울기는

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{\pi}{6}+2\times\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}-1$$
$$=2\times\frac{1}{2}+2\times\frac{\pi}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-1=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

따라서 $k=\frac{\sqrt{3}}{6}$이므로

$60\times k^2=60\times\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2=5$

답 5

5 $f(x)=(x^2-ax+2a)e^x$에서

$f'(x)=(2x-a)e^x+(x^2-ax+2a)e^x$

$=\{x^2+(2-a)x+a\}e^x$

이므로

$f(x)f'(x)=(x^2-ax+2a)\{x^2+(2-a)x+a\}e^{2x}$

$n(A)=1$이 되려면 x에 대한 부등식 $f(x)f'(x)\le 0$의 해의 개수가 1이어야 한다. 이 부등식의 해를 $x=k$라 하면 $f(k)f'(k)=0$ 또는 $f(k)f'(k)<0$이다.

그런데 함수 $f(x)f'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고

$\lim_{x\to\infty} f(x)f'(x)$

$=\lim_{x\to\infty}(x^2-ax+2a)\{x^2+(2-a)x+a\}e^{2x}=\infty$

이므로 만약 $f(k)f'(k)<0$이면 사잇값의 정리에 의해 $f(\alpha)f'(\alpha)=0$인 실수 α가 구간 $(k,\ \infty)$에 반드시 존재하고, $k\le x\le \alpha$인 어떤 실수 x에 대하여 $f(x)f'(x)\le 0$이 되어 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $f(k)f'(k)=0$이다.

즉, 방정식 $f(x)f'(x)=0$의 해는 $x=k$뿐이고, $x\ne k$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)f'(x)>0$이다.

방정식 $f(x)f'(x)=0$, 즉

$(x^2-ax+2a)\{x^2+(2-a)x+a\}e^{2x}=0$ …… ㉠

에서 모든 실수 x에 대하여 $e^{2x}>0$이므로 ㉠의 해는 방정식

$(x^2-ax+2a)\{x^2+(2-a)x+a\}=0$ …… ㉡

의 해와 같다.

㉡의 해가 $x=k$뿐이므로 이차방정식 $x^2-ax+2a=0$의 해가 $x=k$뿐인 경우와 이차방정식 $x^2+(2-a)x+a=0$의 해가 $x=k$뿐인 경우로 나누어 생각해 보자.

두 이차방정식 $x^2-ax+2a=0$, $x^2+(2-a)x+a=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$D_1=(-a)^2-4\times1\times2a=a^2-8a$,

$D_2=(2-a)^2-4\times1\times a=a^2-8a+4$

(i) 이차방정식 $x^2-ax+2a=0$의 해가 $x=k$뿐인 경우

$D_1=0$이므로 $D_2=D_1+4=4>0$

이 되어 이차방정식 $x^2+(2-a)x+a=0$은 서로 다른 2개의 실근을 갖는다. 따라서 ㉡은 $x=k$뿐만 아니라 k가 아닌 다른 실근을 더 갖게 되므로 이 경우는 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 이차방정식 $x^2+(2-a)x+a=0$의 해가 $x=k$뿐인 경우

$D_2=0$이므로 $D_1=D_2-4=-4<0$

이 되어 이차방정식 $x^2-ax+2a=0$은 실근을 갖지 않는다.

따라서 ㉡의 해는 $x=k$뿐이므로 이 경우는 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여 $D_2=0$이므로

$a^2-8a+4=0$ …… $(*)$

$a=4+2\sqrt{3}$ 또는 $a=4-2\sqrt{3}$

따라서 조건을 만족시키도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은

$(4+2\sqrt{3})+(4-2\sqrt{3})=8$

답 ④

참고

$(*)$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 8이므로 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은 8이다.

6 점 $A(x_1,\ y_1)$은 곡선 $y=\ln\frac{x}{2}$ 위의 점이므로

$y_1=\ln\frac{x_1}{2}$

점 $B(x_2,\ y_2)$는 곡선 $y=\ln\frac{2}{x}$ 위의 점이므로

$y_2=\ln\frac{2}{x_2}$

점 C의 y좌표가 0이고 점 A가 선분 BC의 중점이므로

$\frac{y_2+0}{2}=y_1$, 즉 $y_2=2y_1$에서

$\ln\frac{2}{x_2}=2\ln\frac{x_1}{2}$

$\ln\frac{2}{x_2}=\ln\left(\frac{x_1}{2}\right)^2$

$\frac{2}{x_2}=\left(\frac{x_1}{2}\right)^2$

즉, $x_1^2x_2=8$ …… ㉠

$f(x)=\ln\frac{x}{2}$라 하면

$f(x)=\ln\frac{x}{2}=\ln x-\ln 2$에서 $f'(x)=\frac{1}{x}$

$g(x)=\ln\frac{2}{x}$라 하면

$g(x)=\ln 2-\ln x$에서 $g'(x)=-\frac{1}{x}$

$f'(x_1)=\frac{1}{x_1}$, $g'(x_2)=-\frac{1}{x_2}$이므로 조건 (나)에서

$\frac{1}{x_1}\times\left(-\frac{1}{x_2}\right)=-1$

즉, $x_1x_2=1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 풀면

$x_1=8$, $x_2=\frac{1}{8}$

이므로

$|x_1-x_2|=\left|8-\frac{1}{8}\right|=\frac{63}{8}$

따라서 $p=8$, $q=63$이므로

$p+q=8+63=71$

답 71

7 조건 (가)에서 $f(0)=g(0)=0$이므로 두 상수 a, b에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를 각각

$f(x)=x(x-a)$, $g(x)=x(x-b)$

로 놓을 수 있다.

이때 $f(3)=15$이므로

$f(3)=3\times(3-a)=15$

$a=-2$

즉, $f(x)=x(x+2)$이므로 구간 $(-1, \infty)$에서 $1+f(x)>0$이다.

로그의 성질에 의하여

$\ln\{1+f(x)\}^{g(x)}=g(x)\times\ln\{1+f(x)\}$

이고 조건 (나)에서 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\{1+f(x)\}^{g(x)}}{x^2}=2$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\{1+f(x)\}^{g(x)}}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{g(x)\times\ln\{1+f(x)\}}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{g(x)}{x}\times\frac{\ln\{1+f(x)\}}{f(x)}\times\frac{f(x)}{x}\right\}$$

이때 $f(x)=t$로 놓으면 $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\{1+f(x)\}}{f(x)}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

이고

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x+2)}{x}=\lim_{x\to0}(x+2)=2,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x-b)}{x}=\lim_{x\to0}(x-b)=-b$$

이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\{1+f(x)\}^{g(x)}}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x}\times\lim_{x\to0}\frac{\ln\{1+f(x)\}}{f(x)}\times\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$$
$$=-b\times1\times2$$
$$=-2b=2$$

에서 $b=-1$

따라서

$f(x)=x(x+2)$, $g(x)=x(x+1)$

이므로

$f(1)=1\times3=3$

이고

$g(f(1))=g(3)=3\times4=12$

답 ①

Level 3 실력 완성

본문 38쪽

1 61 **2** ① **3** ③

1 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다. 즉,

$$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0+}g(x)=g(0) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이어야 한다.

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)이라 하면 이차함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)=c$$

또

$$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-2\sin\left\{3\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-2\sin\left(3x+\frac{3}{2}\pi\right)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)+2\cos3x}{x^2}$$

에서 극한 $\lim\limits_{x\to0+}g(x)$가 존재하고 $\lim\limits_{x\to0+}x^2=0$이므로

$\lim\limits_{x\to0+}\{f(x)+2\cos3x\}=0$이어야 한다.

즉, $f(0)+2\cos0=c+2=0$이므로 $c=-2$

이때

$$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)+2\cos3x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{ax^2+bx-2+2\cos3x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0+}\left(\frac{ax^2+bx}{x^2}-2\times\frac{1-\cos3x}{x^2}\right)$$

이고

$$\lim_{x\to0+}\frac{1-\cos3x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{(1-\cos3x)(1+\cos3x)}{x^2(1+\cos3x)}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{1-\cos^2 3x}{x^2(1+\cos3x)}$$
$$=\lim_{x\to0+}\left\{\frac{\sin^2 3x}{(3x)^2}\times9\times\frac{1}{1+\cos3x}\right\}$$
$$=1^2\times9\times\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$$

또 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{ax^2+bx}{x^2}=\lim\limits_{x\to0+}\left(a+\dfrac{b}{x}\right)$이므로

$b>0$이면 극한 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{ax^2+bx}{x^2}$는 양의 무한대로 발산하고,

$b<0$이면 극한 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{ax^2+bx}{x^2}$는 음의 무한대로 발산하여

$\lim_{x\to 0+} g(x)$가 존재하지 않는다.

$b=0$이면 $\lim_{x\to 0+}\dfrac{ax^2+bx}{x^2}=\lim_{x\to 0+} a=a$이므로 수렴하고

$\lim_{x\to 0+} g(x)$가 존재한다.

따라서 $b=0$이고

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} g(x)&=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)+2\cos 3x}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{ax^2+bx}{x^2}-2\times\frac{1-\cos 3x}{x^2}\right)\\&=\lim_{x\to 0+} a-2\lim_{x\to 0+}\frac{1-\cos 3x}{x^2}\\&=a-2\times\frac{9}{2}\\&=a-9\end{aligned}$$

한편, $g(0)=f(0)=c=-2$이다.

㉠에 의하여 $-2=a-9$이므로

$a=7$

따라서 $f(x)=7x^2-2$이므로

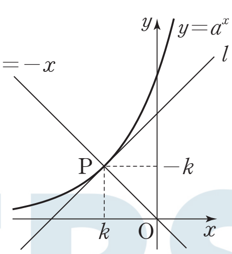
$f(3)=7\times 3^2-2=61$

답 61

2 직선 l 및 x축, y축으로 둘러싸인 도형이 이등변삼각형이므로 직선 l의 기울기는 1 또는 -1이다.

이때 직선 l은 곡선 $y=a^x$ $(a>1)$과 직선 $y=-x$의 교점 P를 지나고 곡선 $y=a^x$에 접하는 직선이므로 기울기는 1이다.

곡선 $y=a^x$이 직선 $y=-x$와 만나는 점 P의 좌표를 $(k,\ -k)$ $(k<0)$이라 하자.



점 $\mathrm{P}(k,\ -k)$가 곡선 $y=a^x$ 위의 점이므로

$-k=a^k$ …… ㉠

$y=a^x$에서 $\dfrac{dy}{dx}=a^x\ln a$

이고 곡선 $y=a^x$ 위의 점 $\mathrm{P}(k,\ -k)$에서의 접선의 기울기가 1이므로

$a^k\ln a=1$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-k\ln a=1$ …… ㉢

㉠의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln(-k)=\ln a^k=k\ln a$ …… ㉣

㉣을 ㉢에 대입하면

$-\ln(-k)=1$

$\ln(-k)=-1$

$-k=e^{-1}$

$k=-\dfrac{1}{e}$

즉, 점 P의 좌표가 $\left(-\dfrac{1}{e},\ \dfrac{1}{e}\right)$이므로 점 P의 y좌표는 $\dfrac{1}{e}$이다.

답 ①

3 직선 PQ가 점 P에서 호 AB에 접하므로

$\overline{\mathrm{OP}}\perp\overline{\mathrm{PQ}}$

직각삼각형 POQ에서 $\angle\mathrm{POQ}=\theta$이므로

$\dfrac{\overline{\mathrm{OP}}}{\overline{\mathrm{OQ}}}=\cos\theta$에서

$\overline{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\overline{\mathrm{OP}}}{\cos\theta}=\dfrac{1}{\cos\theta}$

$\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{OP}}}=\tan\theta$에서

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{OP}}\tan\theta=\tan\theta$

직각삼각형 ROQ에서 $\dfrac{\overline{\mathrm{QR}}}{\overline{\mathrm{OQ}}}=\tan\theta$이므로

$\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{OQ}}\tan\theta=\dfrac{\tan\theta}{\cos\theta}$

한편, 두 직각삼각형 ROQ, RQP에서

$\angle\mathrm{OQR}=\angle\mathrm{QPR}=\dfrac{\pi}{2}$이고 $\angle\mathrm{ORQ}=\angle\mathrm{QRP}$(공통)이므로 두 직각삼각형 ROQ, RQP는 서로 닮은 도형이다.

따라서

$\angle\mathrm{PQR}=\angle\mathrm{QOR}=\theta$

이므로 삼각형 PQR의 넓이 $g(\theta)$는

$$\begin{aligned}g(\theta)&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{QR}}\times\sin(\angle\mathrm{PQR})\\&=\frac{1}{2}\times\tan\theta\times\frac{\tan\theta}{\cos\theta}\times\sin\theta\\&=\frac{1}{2}\tan^3\theta\end{aligned}$$

또 직각삼각형 ROQ에서 $\dfrac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\overline{\mathrm{OR}}}=\cos\theta$이므로

$\overline{\mathrm{OR}}=\dfrac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\cos\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

한편, 직선 RS가 점 S에서 호 AB에 접하므로

$\overline{\mathrm{OS}}\perp\overline{\mathrm{SR}}$

직각삼각형 SOR에서

$$\overline{SR}=\sqrt{\overline{OR}^2-\overline{OS}^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^2-1^2}$$
$$=\sqrt{\frac{1-\cos^4\theta}{\cos^4\theta}}$$
$$=\sqrt{\frac{(1-\cos^2\theta)(1+\cos^2\theta)}{\cos^4\theta}}$$
$$=\sqrt{\frac{\sin^2\theta(1+\cos^2\theta)}{\cos^4\theta}}$$
$$=\frac{\sin\theta\sqrt{1+\cos^2\theta}}{\cos^2\theta}$$

삼각형 SOR의 넓이 $f(\theta)$는

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{OS}\times\overline{SR}$$
$$=\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sin\theta\sqrt{1+\cos^2\theta}}{\cos^2\theta}$$
$$=\frac{\sin\theta\sqrt{1+\cos^2\theta}}{2\cos^2\theta}$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta\times\{f(\theta)\}^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\tan^3\theta}{\theta\times\left(\frac{\sin\theta\sqrt{1+\cos^2\theta}}{2\cos^2\theta}\right)^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{\sin^3\theta}{2\cos^3\theta}}{\theta\times\frac{\sin^2\theta(1+\cos^2\theta)}{4\cos^4\theta}}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(2\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\cos\theta}{1+\cos^2\theta}\right)$$
$$=2\times1\times\frac{1}{1+1^2}=1$$

답 ③

04 여러 가지 미분법

유제 본문 40~48쪽

1 ①	2 ③	3 ①	4 ②	5 ④	6 ②
7 ②	8 9	9 ⑤	10 ⑤		

1 $f(x)=\frac{x+a}{x^2}=x^{-1}+ax^{-2}$에서

$f'(x)=-x^{-2}-2ax^{-3}=-\frac{1}{x^2}-\frac{2a}{x^3}$

$f'(2)=1$에서

$-\frac{1}{4}-\frac{a}{4}=1,\ -\frac{a}{4}=\frac{5}{4}$

따라서 $a=-5$

답 ①

2 $f(x)=\tan x+\sec x$에서

$f'(x)=\sec^2x+\sec x\tan x$

$$=\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{\cos x}\times\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1+\sin x}{\cos^2x}$$
$$=\frac{1+\sin x}{1-\sin^2x}=\frac{1+\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$$
$$=\frac{1}{1-\sin x}$$

$f'(\alpha)=\frac{5}{2}$에서 $\frac{1}{1-\sin\alpha}=\frac{5}{2}$, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{4}{5}$

따라서

$f(\alpha)=\tan\alpha+\sec\alpha$

$$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}$$
$$=\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=2$$

답 ③

3 $f(x)=\cos\frac{\pi x}{6}$에서

$f'(x)=-\sin\frac{\pi x}{6}\times\left(\frac{\pi x}{6}\right)'$

$$=-\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi x}{6}$$

이므로

$f'(2)=-\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}$

$$=-\frac{\pi}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{12}\pi$$

답 ①

4 $k(x)=e^{2x}+1$이라 하면

$$g(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(e^{2x+2h}+1)-f(e^{2x}+1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(k(x+h))-f(k(x))}{h}$$
$$=\{f(k(x))\}'$$
$$=f'(k(x))k'(x) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$k(x)=e^{2x}+1$에서 $k'(x)=2e^{2x}$이므로

$k(0)=e^0+1=2$, $k'(0)=2$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉡

$g(0)=8$이고 ㉠, ㉡에서

$g(0)=f'(k(0))k'(0)$

$8=f'(2)\times 2$

따라서 $f'(2)=4$

답 ②

5 $x=\ln(t^2+1)$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{2t}{t^2+1}$,

$y=e^{2t-4}$에서 $\frac{dy}{dt}=2e^{2t-4}$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2e^{2t-4}}{\frac{2t}{t^2+1}}=\frac{(t^2+1)e^{2t-4}}{t} \text{ (단, } t\neq 0)$$

따라서 $t=2$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은

$\frac{5\times 1}{2}=\frac{5}{2}$

답 ④

6 $x=\sqrt{t}+\frac{1}{2t}=t^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}t^{-1}$에서

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}t^{-2}=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}(1-t^{-\frac{3}{2}})$,

$y=t+\frac{2}{\sqrt{t}}=t+2t^{-\frac{1}{2}}$에서 $\frac{dy}{dt}=1-t^{-\frac{3}{2}}$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-t^{-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}(1-t^{-\frac{3}{2}})}$$
$$=2t^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{t} \text{ (단, } t>1)$$

$t=a$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은 $2\sqrt{a}$이고 조건에서 $t=a$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 a이므로

$2\sqrt{a}=a$, $4a=a^2$

$a>1$이므로 $a=4$

답 ②

7 $x+2y+e^{xy}=0$에서 y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x)+\frac{d}{dx}(2y)+\frac{d}{dx}(e^{xy})=\frac{d}{dx}(0)$$
$$1+2\frac{dy}{dx}+e^{xy}\times\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=0$$
$$(2+xe^{xy})\frac{dy}{dx}=-1-ye^{xy}$$
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1+ye^{xy}}{2+xe^{xy}} \text{ (단, } 2+xe^{xy}\neq 0)$$

따라서 점 $(-1, 0)$에서의 접선의 기울기는

$-\frac{1+0}{2-1}=-1$

답 ②

8 곡선 $x\tan y-\pi\sin x=0\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$가 직선 $x=\frac{\pi}{2}$와 만나는 점의 좌표를 $\left(\frac{\pi}{2}, a\right)$라 하면

$\frac{\pi}{2}\tan a-\pi\sin\frac{\pi}{2}=0$에서 $\tan a=2$

$x\tan y-\pi\sin x=0$에서 y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x\tan y)-\frac{d}{dx}(\pi\sin x)=\frac{d}{dx}(0)$$
$$\tan y+x\sec^2 y\frac{dy}{dx}-\pi\cos x=0$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\pi\cos x-\tan y}{x\sec^2 y} \text{ (단, } x\neq 0)$$

$\tan a=2$이면

$\sec^2 a=1+\tan^2 a=1+2^2=5$

이므로 주어진 곡선 위의 점 $\left(\frac{\pi}{2}, a\right)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{\pi\cos\frac{\pi}{2}-\tan a}{\frac{\pi}{2}\sec^2 a}=\frac{\pi\times 0-2}{\frac{\pi}{2}\times 5}$$
$$=\frac{-2}{\frac{5}{2}\pi}=-\frac{4}{5\pi}$$

따라서 $p=5$, $q=4$이므로

$p+q=5+4=9$

답 9

9 $f(x)=ax+\sin x$에서 $f(\pi)=a\pi+\sin\pi=a\pi$이고

$f(\pi)=2\pi$이므로

$a\pi=2\pi$, $a=2$

$f(x)=2x+\sin x$에서

$f'(x)=2+\cos x$

$f(\pi)=2\pi$에서 $g(2\pi)=\pi$이므로 역함수의 미분법에 의하여

$$g'(2\pi)=\frac{1}{f'(g(2\pi))}=\frac{1}{f'(\pi)}=\frac{1}{2+\cos\pi}$$
$$=\frac{1}{2+(-1)}=1$$

답 ⑤

참고

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=2+\cos x>0$이다.
따라서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다.

10 $f(x)=x\sqrt{x}+\ln x=x^{\frac{3}{2}}+\ln x$에서

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+x^{-1}$$
$$f''(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}-x^{-2}=\frac{3}{4\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}$$

따라서

$$\lim_{h\to0}\frac{f'(1+h)-f'(1)}{h}=f''(1)=\frac{3}{4}-1=-\frac{1}{4}$$

답 ⑤

Level 1 기초 연습

본문 49~50쪽

1 ①	**2** ④	**3** ②	**4** ⑤	**5** ④	**6** ③
7 ⑤	**8** 43				

1 $f(x)=\frac{x}{x+1}$에서 함수의 몫의 미분법에 의하여

$$f'(x)=\frac{(x)'\times(x+1)-x\times(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

따라서 $f'(1)=\frac{1}{4}$

답 ①

2 $f(x)=(x+1)\sec x$라 하면 $f(0)=1$이고
$f'(x)=\sec x+(x+1)\sec x\tan x$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{(x+1)\sec x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$=f'(0)=1+1\times1\times0=1$$

답 ④

3 $x>0$일 때 $f(x)=\sqrt[3]{x^m}=x^{\frac{m}{3}}$에서

$$f'(x)=\frac{m}{3}x^{\frac{m}{3}-1}$$

$$f'(27)=\frac{m}{3}\times27^{\frac{m}{3}-1}=\frac{m}{3}\times(3^3)^{\frac{m}{3}-1}=\frac{m}{3}\times3^{m-3},$$
$$f'(8)=\frac{m}{3}\times8^{\frac{m}{3}-1}=\frac{m}{3}\times(2^3)^{\frac{m}{3}-1}=\frac{m}{3}\times2^{m-3}$$

이므로

$$\frac{f'(27)}{f'(8)}=\frac{\frac{m}{3}\times3^{m-3}}{\frac{m}{3}\times2^{m-3}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{m-3}$$

$\frac{f'(27)}{f'(8)}=\frac{3}{2}$에서

$m-3=1$, $m=4$

답 ②

4 $f(x)=\ln\left(\frac{2x-5}{4}\right)^2=2\ln\left|\frac{2x-5}{4}\right|$

$=2\ln|2x-5|-2\ln|4|$

$=2\ln|2x-5|-2\ln4$

에서

$$f'(x)=2\times\frac{(2x-5)'}{2x-5}=\frac{4}{2x-5}$$

$f'(a)=-4$에서

$\frac{4}{2a-5}=-4$, $2a-5=-1$

따라서 $a=2$

답 ⑤

5 주어진 곡선에서 $t=b$에 대응하는 점이 $\mathrm{A}(3, 2)$라 하면

$ae^{-b}=3$, $e^{2b}-e^b=2$

$e^{2b}-e^b=2$에서 $e^{2b}-e^b-2=0$, $(e^b-2)(e^b+1)=0$

$e^b>0$이므로 $e^b=2$ …… ㉠

$ae^{-b}=3$에서 $\frac{1}{2}a=3$, $a=6$

$x=6e^{-t}$에서 $\frac{dx}{dt}=-6e^{-t}$,

$y=e^{2t}-e^t$에서 $\frac{dy}{dt}=2e^{2t}-e^t$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2e^{2t}-e^t}{-6e^{-t}}=\frac{2e^{3t}-e^{2t}}{-6} \quad \cdots\cdots ㉡$$

$t=b$에 대응하는 점 A에서 이 곡선에 접하는 직선의 기울기 m은 ㉠, ㉡에서

$$m=\frac{2e^{3b}-e^{2b}}{-6}=\frac{2\times2^3-2^2}{-6}=\frac{12}{-6}=-2$$

따라서 $a+m=6+(-2)=4$

답 ④

참고

$e^b=2$에서 $b=\ln2$

6 점 $(b,\ -1)$이 곡선 $x-xy+ay^2=2$ 위에 있으므로

$b+b+a=2,\ a+2b=2$ …… ㉠

$x-xy+ay^2=2$에서 y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하면

$1-y-x\dfrac{dy}{dx}+2ay\dfrac{dy}{dx}=0$

$(2ay-x)\dfrac{dy}{dx}=y-1$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-1}{2ay-x}$ (단, $x\neq 2ay$)

주어진 곡선 위의 점 $(b,\ -1)$에서의 접선의 기울기가 -1이므로

$\dfrac{-2}{-2a-b}=-1,\ 2a+b=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=2$

따라서 $a+b=-2+2=0$

답 ③

7 $f(x)=x-\dfrac{2}{x}=x-2x^{-1}$에서

$f'(x)=1+2x^{-2}=1+\dfrac{2}{x^2}$ …… ㉠

역함수의 미분법에 의하여 $f'(g(a))=\dfrac{1}{g'(a)}$이고

$g'(a)=\dfrac{1}{3}$이므로

$f'(g(a))=3$

㉠에서

$f'(g(a))=1+\dfrac{2}{\{g(a)\}^2}=3$

$\{g(a)\}^2=1$

함수 $f(x)$의 정의역이 구간 $(0,\ \infty)$이므로 함수 $g(x)$의 치역이 구간 $(0,\ \infty)$이다.

$g(a)>0$에서 $g(a)=1$

즉, $a=f(1)=1-2=-1$

따라서 $a+f'(g(a))=-1+3=2$

답 ⑤

8 $f(x)=(-2x+n)e^x$에서

$f'(x)=-2e^x+(-2x+n)e^x=(-2x-2+n)e^x$

$f''(x)=-2e^x+(-2x-2+n)e^x=(-2x-4+n)e^x$

모든 실수 x에 대하여 $e^x>0$이므로 $f''(x)>0$이려면

$-2x-4+n>0,\ x<\dfrac{n-4}{2}$ …… ㉠

이어야 한다.

$f''(x)>0$을 만족시키는 자연수 x의 개수가 8이면 부등식 ㉠을 만족시키는 자연수가 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8$이어야 하므로

$8<\dfrac{n-4}{2}\le 9,\ 20<n\le 22$

따라서 자연수 n의 값은 21, 22이고 그 합은

$21+22=43$

답 43

Level 2 기본 연습 본문 51~52쪽

1 ④	**2** ④	**3** ⑤	**4** ①	**5** ③	**6** 111
7 ⑤	**8** 240				

1 $2x^2+6xy+y^3=k$에서 y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하면

$4x+6y+6x\dfrac{dy}{dx}+3y^2\dfrac{dy}{dx}=0$

$(6x+3y^2)\dfrac{dy}{dx}=-4x-6y$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-4x-6y}{6x+3y^2}$ (단, $6x+3y^2\neq 0$)

곡선 위의 점 $(3,\ a)$에서의 접선이 x축에 평행하므로

$\dfrac{-12-6a}{18+3a^2}=0$

$-12-6a=0$

$a=-2$

점 $(3,\ -2)$가 곡선 $2x^2+6xy+y^3=k$ 위의 점이므로

$k=18-36-8=-26$

답 ④

2 $\{f(x)\}^2+\dfrac{f'(0)}{2e^{2x}}=\ln(x^2+1)$에서

$\{f(x)\}^2+\dfrac{1}{2}f'(0)e^{-2x}=\ln(x^2+1)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$\{f(0)\}^2+\dfrac{1}{2}f'(0)=0$

$f'(0)=-2\{f(0)\}^2$ …… ㉡

㉠의 양변을 미분하면

$2f(x)f'(x)+\dfrac{1}{2}f'(0)\times(-2e^{-2x})=\dfrac{2x}{x^2+1}$ …… ㉢

㉢의 양변에 $x=0$을 대입하면

$2f(0)f'(0)-f'(0)=0$

$f'(0)\{2f(0)-1\}=0$

$f'(0)=0$ 또는 $f(0)=\dfrac{1}{2}$

$f'(0)=0$이면 ㉡에서 $f(0)=0$이 되어 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $f(0)=\frac{1}{2}$이고,

㉡에서 $f'(0)=-\frac{1}{2}$

따라서

$f(0)\times f'(0)=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$

답 ④

참고

함수 $f(x)=\sqrt{\frac{1}{4}e^{-2x}+\ln(x^2+1)}$은 조건을 만족시킨다.

3 $f(x)=\frac{x}{\tan x}=x\cot x$에서

$f'(x)=\cot x+x\times(-\csc^2 x)=\cot x-x\csc^2 x$

$f''(x)=-\csc^2 x-\{\csc^2 x+2x\csc x\times(-\csc x\cot x)\}$

$\quad=-2\csc^2 x(1-x\cot x)$

$\quad=-2\csc^2 x\{1-f(x)\}$

이므로

$f''(a)=-2\csc^2 a\{1-f(a)\}$

$\frac{f''(a)}{1-f(a)}=-12$에서

$-2\csc^2 a=-12$, $\csc^2 a=6$

$0<a<\frac{\pi}{2}$이므로 $\csc a=\sqrt{6}$

따라서

$\frac{f(a)}{a}=\cot a$

$\quad=\sqrt{\csc^2 a-1}=\sqrt{5}$

답 ⑤

4 구간 $(0, \infty)$에서 정의된 함수

$f(x)=x+\sqrt{x}-5$

$\quad=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{21}{4}$

은 양의 실수 전체의 집합에서 증가하고, 연속이며 미분가능하다.

또한 $\lim_{x\to 0+} f(x)=-5$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $f(x)$의 치역은 구간 $(-5, \infty)$이다.

$f(x)=x+\sqrt{x}-5$에서

$f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x>0$에서 $f'(x)\neq 0$이므로 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$는 구간 $(-5, \infty)$에서 연속이고 미분가능하다.

함수 $h(x)$가 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $h(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-} h(x)=\lim_{x\to 1+} h(x)=h(1)$이어야 한다.

이때

$\lim_{x\to 1-} h(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)=1+1-5=-3$,

$\lim_{x\to 1+} h(x)=\lim_{x\to 1+}\{ag(x)+b\}=ag(1)+b$,

$h(1)=f(1)=-3$

이므로

$ag(1)+b=-3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

$f(x)=1$에서

$x+\sqrt{x}-5=1$, $(\sqrt{x})^2+\sqrt{x}-6=0$

$(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)=0$

$\sqrt{x}>0$이므로 $\sqrt{x}=2$, $x=4$

즉, $f(4)=1$, $g(1)=4$이므로 ㉡에서

$4a+b=-3$, $b=-4a-3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

함수 $h(x)$가 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=1$에서 미분가능하다. 즉,

$\lim_{x\to 1-}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}$이어야 한다.

㉠에서

$\lim_{x\to 1-}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\frac{3}{2}$,

$\lim_{x\to 1+}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{\{ag(x)+b\}-\{ag(1)+b\}}{x-1}$

$\quad=a\times\lim_{x\to 1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=ag'(1)$

$\quad=a\times\frac{1}{f'(g(1))}=a\times\frac{1}{f'(4)}$

$\quad=\frac{4}{5}a$

이므로

$\frac{3}{2}=\frac{4}{5}a$, $a=\frac{15}{8}$

㉢에서 $b=-\frac{21}{2}$

따라서

$a+b=\frac{15}{8}+\left(-\frac{21}{2}\right)=-\frac{69}{8}$

답 ①

5 $x=\ln 2t$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{(2t)'}{2t}=\frac{1}{t}$,

$y=t^2-a^2t$에서 $\frac{dy}{dt}=2t-a^2$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t-a^2}{\frac{1}{t}}=2t^2-a^2t=2\left(t-\frac{a^2}{4}\right)^2-\frac{a^4}{8}$$

$t>a$에서 $\frac{dy}{dx}$의 최솟값이 존재하지 않으려면

$\frac{a^2}{4} \le a$, $a(a-4) \le 0$, $0 \le a \le 4$

따라서 음이 아닌 실수 a의 최댓값은 4이다.

답 ③

6 $f(x)=2x+\frac{n}{x}=2x+nx^{-1}$에서

$f'(x)=2-nx^{-2}=2-\frac{n}{x^2}=\frac{2x^2-n}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x^2=\frac{n}{2}$, $x>0$이므로 $x=\sqrt{\frac{n}{2}}$

$0<x<\sqrt{\frac{n}{2}}$에서 $f'(x)<0$, $x>\sqrt{\frac{n}{2}}$에서 $f'(x)>0$이다.

(i) $\sqrt{\frac{n}{2}} \le 1$, 즉 $n \le 2$일 때

모든 자연수 k에 대하여 $f'(k) \ge 0$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

이때 50 이하의 자연수 n의 값은 1, 2이다.

(ii) $\sqrt{\frac{n}{2}} > 1$, 즉 $n>2$일 때

$\sqrt{\frac{n}{2}}$이 자연수가 아니면 $k_1 < \sqrt{\frac{n}{2}} < k_1+1$인 어떤 자연수 k_1에 대하여 $f'(k_1)<0$, $f'(k_1+1)>0$, 즉 $f'(k_1)f'(k_1+1)<0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

$\sqrt{\frac{n}{2}}=m$ (m은 1보다 큰 자연수)이면 $f'(m)=0$이고, m보다 작은 모든 자연수 k_2에 대하여 $f'(k_2)<0$, m보다 큰 모든 자연수 k_3에 대하여 $f'(k_3)>0$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

$\sqrt{\frac{n}{2}}=m$에서 $n=2m^2$ (m은 1보다 큰 자연수)

이때 50 이하의 자연수 n의 값은 8, 18, 32, 50이다.

(i), (ii)에서 구하는 자연수 n의 값의 합은

$1+2+8+18+32+50=111$

답 111

7 $y=te^{2x}+k$에서 $y'=2te^{2x}$

곡선 $y=te^{2x}+k$가 직선 $y=x$와 만나는 두 점 P, Q의 좌표를 각각 (α, α), (β, β) $(\alpha<\beta)$라 하면 두 점이 곡선 $y=te^{2x}+k$ 위에 있으므로

$\alpha=te^{2\alpha}+k$, $\beta=te^{2\beta}+k$

$k=\alpha-te^{2\alpha}=\beta-te^{2\beta}$ …… ㉠

점 Q에서의 접선의 기울기가 점 P에서의 접선의 기울기의 2배이므로

$2te^{2\beta}=2\times 2te^{2\alpha}$에서 $e^{2\beta}=2e^{2\alpha}$ …… ㉡

이때 $2e^{2\alpha}=e^{\ln 2}\times e^{2\alpha}=e^{2\alpha+\ln 2}$이므로 ㉡에서

$e^{2\beta}=e^{2\alpha+\ln 2}$, $2\beta=2\alpha+\ln 2$

$\beta=\alpha+\frac{1}{2}\ln 2$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$\alpha-te^{2\alpha}=\alpha+\frac{1}{2}\ln 2-2te^{2\alpha}$

$te^{2\alpha}=\frac{1}{2}\ln 2$ …… ㉣

㉣의 양변을 t에 대하여 미분하면

$e^{2\alpha}+2te^{2\alpha}\times\frac{d\alpha}{dt}=0$, $\frac{d\alpha}{dt}=-\frac{1}{2t}$

㉠, ㉣에서

$k=\alpha-\frac{1}{2}\ln 2$, 즉 $f(t)=\alpha-\frac{1}{2}\ln 2$

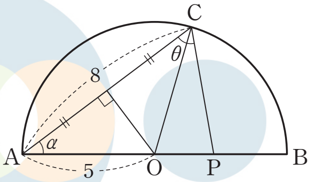
이므로

$f'(t)=\frac{d\alpha}{dt}=-\frac{1}{2t}$

따라서 $f'(3)=-\frac{1}{6}$

답 ⑤

8 선분 AB의 중점을 O라 하고 $\angle PAC=\alpha$라 하자.



삼각형 OAC는 이등변삼각형이므로

$\cos\alpha=\frac{\frac{1}{2}\overline{AC}}{\overline{OA}}=\frac{4}{5}$

α가 예각이므로 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{3}{5}$

삼각형 APC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AP}}{\sin\theta}=\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle APC)}$, $\frac{\overline{AP}}{\sin\theta}=\frac{8}{\sin(\pi-\theta-\alpha)}$

$\overline{AP}=\frac{8\sin\theta}{\sin(\theta+\alpha)}$

즉, $f(\theta)=\frac{8\sin\theta}{\sin(\theta+\alpha)}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서

$$f'(\theta)=8\times\frac{\cos\theta\sin(\theta+\alpha)-\sin\theta\cos(\theta+\alpha)}{\sin^2(\theta+\alpha)}$$
$$=8\times\frac{\sin(\theta+\alpha)\cos\theta-\cos(\theta+\alpha)\sin\theta}{\sin^2(\theta+\alpha)}$$
$$=8\times\frac{\sin(\theta+\alpha-\theta)}{\sin^2(\theta+\alpha)}$$
$$=8\times\frac{\sin\alpha}{\sin^2(\theta+\alpha)}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=8\times\frac{3}{5}\times\left(\frac{10}{7\sqrt{2}}\right)^2=8\times\frac{3}{5}\times\frac{50}{49}=\frac{240}{49}$$

따라서 $49\times f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=240$

답 240

Level 3 실력 완성 본문 53쪽

1 ③ **2** 15 **3** ①

1 최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $f(x)$는 조건 (가)에서 최댓값 $f(k)$를 갖고 $\frac{1}{3}<f(k)<1$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<1$이다.
또한 $x\le k$이면 $f'(x)\ge 0$이고, $x\ge k$이면 $f'(x)\le 0$이다. …… ㉠

$g(x)=\sin\pi x-\frac{\pi}{2}x$에서

$g'(x)=\pi\cos\pi x-\frac{\pi}{2}=\pi\left(\cos\pi x-\frac{1}{2}\right)$

$\frac{d}{dx}g(f(x))=g'(f(x))f'(x)$ …… ㉡

$0\le f(x)<1$일 때, $0\le\pi f(x)<\pi$이므로

$g'(f(x))=0$에서 $\cos\{\pi f(x)\}=\frac{1}{2}$, $f(x)=\frac{1}{3}$이다.

이때 $0\le f(x)\le\frac{1}{3}$이면 $g'(f(x))\ge 0$이고,

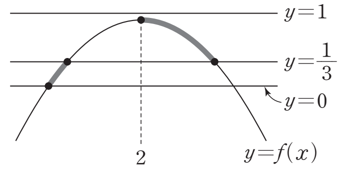
$\frac{1}{3}\le f(x)<1$이면 $g'(f(x))\le 0$이다. …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 조건 (나)의 두 부등식 $f(x)\ge 0$, $\frac{d}{dx}g(f(x))\ge 0$을 모두 만족시키려면

'$x\le k$이고 $0\le f(x)\le\frac{1}{3}$' 또는 '$x\ge k$이고 $\frac{1}{3}\le f(x)<1$' …… ㉣

이어야 한다.
이때 정수 k는 조건 (나)를 만족시킨다. 그런데 조건 (나)에서 두 부등식을 모두 만족시키는 정수 x의 값은 1, 2, 3, 4뿐이다.
따라서 $k=2$ 또는 $k=3$이다.

(i) $k=2$일 때
이차함수 $y=f(x)$의 그래프에서 ㉣을 만족시키는 부분은 그림의 굵은 선으로 표시한 부분과 같다.

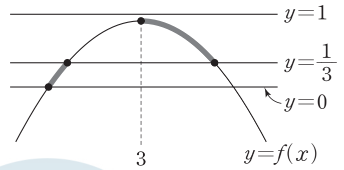


$f(1)=f(3)$이고, $0\le f(1)\le\frac{1}{3}$,

$\frac{1}{3}\le f(3)<f(2)$이므로 $f(1)=f(3)=\frac{1}{3}$이다.

그런데 $f(4)<f(3)=\frac{1}{3}$에서 $x=4$가 ㉣을 만족시키지 않게 되어 조건 (나)에 모순이다.

(ii) $k=3$일 때
이차함수 $y=f(x)$의 그래프에서 ㉣을 만족시키는 부분은 그림의 굵은 선으로 표시한 부분과 같다.



$f(2)=f(4)$이고, $0\le f(2)\le\frac{1}{3}$,

$\frac{1}{3}\le f(4)<f(3)$이므로 $f(2)=f(4)=\frac{1}{3}$이다.

$f(x)=a(x-2)(x-4)+\frac{1}{3}$($a$는 $a<0$인 상수)라 하자.

$\frac{1}{3}<f(3)<1$에서

$\frac{1}{3}<f(3)=-a+\frac{1}{3}<1$

$-\frac{2}{3}<a<0$ …… ㉤

$0\le f(1)<f(2)=\frac{1}{3}$에서

$0\le f(1)=3a+\frac{1}{3}<\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{9}\le a<0$ …… ㉥

$f(0)<0$에서 $f(0)=8a+\frac{1}{3}<0$

$a<-\frac{1}{24}$ …… ㉦

㉤, ㉥, ㉦을 모두 만족시키는 a의 값의 범위는

$-\frac{1}{9}\le a<-\frac{1}{24}$이다.

(i), (ii)에서 $k=3$이고,

$f(x)=a(x-2)(x-4)+\frac{1}{3}$

$\left(a\text{는 }-\frac{1}{9}\le a<-\frac{1}{24}\text{인 상수}\right)$이다.

따라서 $f(0)=8a+\frac{1}{3}$에서 $a=-\frac{1}{9}$일 때

$f(0)$의 값이 최소이고 그 최솟값은

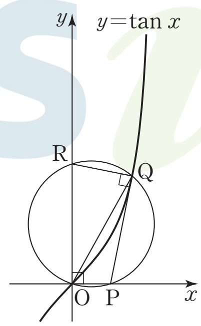
$8\times\left(-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{3}=-\frac{5}{9}$

답 ③

2 점 Q의 좌표를 $(\alpha, \tan\alpha)$, 점 R의 좌표를 $(0, \beta)$라 하면

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\beta>0$이고

$f(t)=\alpha$, $g(t)=\beta$이다.



$y=\tan x$에서 $y'=\sec^2 x$이고 점 Q에서의 접선의 기울기가 직선 PQ의 기울기와 같으므로

$\sec^2\alpha=\frac{0-\tan\alpha}{t-\alpha}$

$t-\alpha=-\tan\alpha\times\frac{1}{\sec^2\alpha}$

$=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\times\cos^2\alpha$

즉, $t=\alpha-\sin\alpha\cos\alpha$ …… ㉠

사각형 OPQR이 한 원에 내접하고 $\angle\mathrm{ROP}=\frac{\pi}{2}$이므로

$\angle\mathrm{PQR}=\frac{\pi}{2}$이고, 직선 PQ의 기울기가 $\sec^2\alpha$이므로 직선

QR의 기울기는 $-\frac{1}{\sec^2\alpha}=-\cos^2\alpha$이다.

즉, $\frac{\beta-\tan\alpha}{0-\alpha}=-\cos^2\alpha$

$\beta=\tan\alpha+\alpha\cos^2\alpha$ …… ㉡

㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$1=(1-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)\frac{d\alpha}{dt}$, $1=2\sin^2\alpha\,\frac{d\alpha}{dt}$

$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{1}{2\sin^2\alpha}$ …… ㉢

㉡의 양변을 t에 대하여 미분하면

$\frac{d\beta}{dt}=(\sec^2\alpha+\cos^2\alpha-2\alpha\cos\alpha\sin\alpha)\frac{d\alpha}{dt}$

㉢을 이 식에 대입하면

$\frac{d\beta}{dt}=(\sec^2\alpha+\cos^2\alpha-2\alpha\cos\alpha\sin\alpha)\times\frac{1}{2\sin^2\alpha}$

$=\frac{1}{2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}+\frac{1}{2\tan^2\alpha}-\frac{\alpha}{\tan\alpha}$

즉, $g'(t)=\frac{1}{2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}+\frac{1}{2\tan^2\alpha}-\frac{\alpha}{\tan\alpha}$ …… ㉣

$\tan f(a)=2$에서 $t=a$이면 $\alpha=f(a)$, $\tan\alpha=2$이다.

이때 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$이다.

㉣에서

$g'(a)=\frac{1}{2\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}+\frac{1}{2\times4}-\frac{f(a)}{2}$

$=\frac{25}{8}+\frac{1}{8}-\frac{f(a)}{2}$

$=\frac{13}{4}-\frac{f(a)}{2}$

이므로

$\frac{f(a)}{2}+g'(a)=\frac{13}{4}$

즉, $f(a)+2g'(a)=\frac{13}{2}$

따라서 $p=2$, $q=13$이므로

$p+q=2+13=15$

답 15

3 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $g(x)$, $h(x)$가 서로 역함수 관계에 있으므로 두 함수 $g(x)$, $h(x)$는 모두 치역이 실수 전체의 집합인 일대일대응이다.

이때 함수 $g(x)$는 $x\neq0$인 모든 실수에서 연속이고

$\lim_{x\to0-}g(x)$, $\lim_{x\to0+}g(x)$가 존재하므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0+}g(x)=g(0)$에서

$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$,

$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}(ke^x-\sqrt{2}-1)=k-\sqrt{2}-1$,

$g(0)=k-\sqrt{2}-1$

이므로

$f(0)=g(0)=k-\sqrt{2}-1$ …… ㉠

이때 두 함수 $g(x)$, $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $g(x)-|h(x)|$도 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$x<0$에서 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$이므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

$x\geq0$에서 함수 $g(x)=ke^x-\sqrt{2}-1$이 증가하므로 $k>0$이다.

$k>0$이므로 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)=ke^x>0$이다.

그러므로 조건 (가)의 α에 대하여 $\alpha<0$이고,

$g'(\alpha)=f'(\alpha)=0$이다.

$x<0$에서 함수 $g(x)$, 즉 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 증가하므로 $f'(x)\geq0$에서

$f'(x)=3(x-\alpha)^2$이다. …… ㉡

한편, 함수 $g(x)$는 $x\neq0$인 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$h'(x)=\frac{1}{g'(h(x))}$ $(g'(h(x))\neq0)$이고 $g'(\alpha)=0$이므로

함수 $h(x)$는 $x=g(\alpha)$에서 미분가능하지 않다.

이때 두 극한 $\lim_{x\to g(\alpha)+} h'(x)=\infty$, $\lim_{x\to g(\alpha)-} h'(x)=\infty$이므로 함수 $|h(x)|$도 $x=g(\alpha)$에서 미분가능하지 않고 $\lim_{x\to g(\alpha)} |h'(x)|=\infty$이다.

또한 함수 $h(x)$가 치역이 실수 전체의 집합인 일대일대응이므로 $h(x)=0$인 x가 단 하나 존재한다.

$h(x)=0$에서 $x=g(0)=k-\sqrt{2}-1$

그런데 $\lim_{x\to(k-\sqrt{2}-1)+} h'(x)=\lim_{x\to 0+} \dfrac{1}{g'(x)}=\dfrac{1}{k}>0$이므로

함수 $|h(x)|$는 $x=k-\sqrt{2}-1$에서 미분가능하지 않다.

그러므로 조건 (나)를 만족시키려면 함수 $g(x)-|h(x)|$는 $x=g(\alpha)$에서만 미분가능하지 않고, $x=0$과 $x=k-\sqrt{2}-1$에서 미분가능해야 한다.

함수 $|h(x)|$가 $x=k-\sqrt{2}-1$에서 미분가능하지 않고 함수 $g(x)-|h(x)|$가 $x=k-\sqrt{2}-1$에서 미분가능하므로 함수 $g(x)=\{g(x)-|h(x)|\}+|h(x)|$는 $x=k-\sqrt{2}-1$에서 미분가능하지 않다.

함수 $g(x)$는 $x\neq0$인 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $k-\sqrt{2}-1=0$, 즉 $k=\sqrt{2}+1$이어야 한다.

$k=\sqrt{2}+1$이므로 ㉠에서 $f(0)=g(0)=0$ …… ㉢

$g(0)=0$에서 $h(0)=0$이고 두 함수 $g(x)$, $h(x)$는 증가하므로

$x<0$일 때, $y=g(x)-|h(x)|=g(x)+h(x)$,

$x\geq0$일 때, $y=g(x)-|h(x)|=g(x)-h(x)$

이때 $g(0)-|h(0)|=g(0)-h(0)=g(0)+h(0)$

함수 $g(x)-|h(x)|$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)+h(x)-\{g(0)+h(0)\}}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-h(x)-\{g(0)-h(0)\}}{x-0}$$

이어야 한다. 이때

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)+h(x)-\{g(0)+h(0)\}}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}+\lim_{x\to 0-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}+\frac{1}{\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}}$$

이고

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

이므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)+h(x)-\{g(0)+h(0)\}}{x-0}=f'(0)+\frac{1}{f'(0)}$$

또한

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-h(x)-\{g(0)-h(0)\}}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}-\lim_{x\to 0+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}-\frac{1}{\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}}$$

이고

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{(\sqrt{2}+1)e^x-\sqrt{2}-1}{x-0}$$
$$=(\sqrt{2}+1)\lim_{x\to 0+}\frac{e^x-1}{x}=\sqrt{2}+1$$

이므로

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-h(x)-\{g(0)-h(0)\}}{x-0}$$
$$=\sqrt{2}+1-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$
$$=\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)=2$$

그러므로

$f'(0)+\dfrac{1}{f'(0)}=2$에서

$\{f'(0)\}^2-2f'(0)+1=0$

$\{f'(0)-1\}^2=0$

$f'(0)=1$ …… ㉣

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

㉢, ㉣에서 $c=0$, $b=1$

㉡에서 $f'(x)=3x^2+2ax+1=3(x-\alpha)^2$이므로

$2a=-6\alpha$, $1=3\alpha^2$

$\alpha^2=\dfrac{1}{3}$

$\alpha<0$이므로

$\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$2a=-6\alpha$에서 $a=-3\alpha=\sqrt{3}$

따라서 $f(x)=x^3+\sqrt{3}x^2+x$이므로

$$f(\alpha)=f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$
$$=-\frac{\sqrt{3}}{9}+\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$=-\frac{\sqrt{3}}{9}$$

답 ①

05 도함수의 활용

유제					본문 55~63쪽
1 ①	2 ④	3 ②	4 ③	5 ④	6 15
7 ①	8 ①				

1 직선 $y=8x+a$가 곡선 $y=e^{2x}$과 접하는 점의 좌표를 $(b,\ e^{2b})$이라 하자.
$y=e^{2x}$에서 $y'=2e^{2x}$이므로 곡선 $y=e^{2x}$ 위의 점 $(b,\ e^{2b})$에서의 접선의 기울기는 $2e^{2b}$이다.
이 접선의 기울기가 8이므로
$2e^{2b}=8$에서 $e^{2b}=4,\ 2b=\ln 4,\ b=\ln 2$
점 $(b,\ e^{2b})$, 즉 점 $(\ln 2,\ 4)$가 직선 $y=8x+a$ 위에 있으므로
$4=8\ln 2+a,\ a=4-8\ln 2$

답 ①

2 $ax+y-xy^2=2a$ (단, $a\neq 0$) …… ㉠
㉠에서 y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하면
$a+\dfrac{dy}{dx}-y^2-2xy\dfrac{dy}{dx}=0,\ (1-2xy)\dfrac{dy}{dx}=y^2-a$
$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2-a}{1-2xy}\left(\text{단, } xy\neq\dfrac{1}{2}\right)$ …… ㉡
㉠에 $y=0$을 대입하면 $ax=2a$에서 $a\neq 0$이므로 $x=2$
즉, $\mathrm{A}(2,\ 0)$이고 ㉡에 $x=2,\ y=0$을 대입하면
$\dfrac{0-a}{1-0}=-a$이므로 곡선 위의 점 A에서의 접선의 방정식은 $y=-a(x-2)$, 즉 $y=-ax+2a$이다.
$y=-ax+2a$를 ㉠에 대입하면
$ax+(-ax+2a)-x(-ax+2a)^2=2a$
$a^2x(x-2)^2=0,\ x=0$ 또는 $x=2$
이므로 직선 $y=-ax+2a$와 주어진 곡선이 만나는 점의 좌표는 $(0,\ 2a),\ (2,\ 0)$이다.
이 중 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$이 아닌 점이 B이므로 점 B의 좌표는 $(0,\ 2a)$이다.
곡선 위의 점 $\mathrm{B}(0,\ 2a)$에서의 접선의 기울기는 ㉡에 $x=0,\ y=2a$를 대입한 값 $\dfrac{4a^2-a}{1-0}=4a^2-a$이다.
x축 위의 서로 다른 두 점 A, C에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$이므로 두 직선 AB, BC의 기울기는 절댓값이 같으면서 부호가 서로 다르다. 따라서
$4a^2-a=-(-a),\ 2a(2a-1)=0$
에서 $a\neq 0$이므로 $a=\dfrac{1}{2}$

답 ④

3 $y=x^2+\cos 3x$에서
$y'=2x-3\sin 3x,\ y''=2-9\cos 3x$
$y''=0$에서 $\cos 3x=\dfrac{2}{9}$
$0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 $0<3x<\dfrac{3}{2}\pi$이므로 $\cos 3x=\dfrac{2}{9}$를 만족시키는 x는 하나뿐이다.
이 값을 $x=\alpha$라 하면 $\cos 3\alpha=\dfrac{2}{9}$
이때 $x=\alpha$의 좌우에서 y''의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(\alpha,\ \alpha^2+\cos 3\alpha)$이다.
이 점이 곡선 $y=x^2+a$ 위에 있으므로
$\alpha^2+\cos 3\alpha=\alpha^2+a,\ a=\cos 3\alpha$
따라서 $a=\dfrac{2}{9}$

답 ②

4 $f(x)=e^x-ae^{-x}+2ax$에서
$f'(x)=e^x+ae^{-x}+2a=e^{-x}(e^{2x}+2ae^x+a)$
모든 실수 x에 대하여 $e^{-x}>0$이므로
$f'(x)=0$에서 $e^{2x}+2ae^x+a=0$
$e^x=t\ (t>0)$이라 하면 $t^2+2at+a=0$
함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $t^2+2at+a=0$이 양의 실근을 갖고, 이 근이 중근이 아니어야 한다.
이차방정식 $t^2+2at+a=0$의 판별식을 D라 하면 $D>0$이어야 하므로
$D=4a^2-4a=4a(a-1)>0$에서 $a<0$ 또는 $a>1$
이차방정식 $t^2+2at+a=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $-2a$이고 두 근의 곱은 a이다.
$a<0$이면 두 근의 곱이 음수이므로 이차방정식 $t^2+2at+a=0$은 양의 실근 1개와 음의 실근 1개를 갖는다. 이때 함수 $f(x)$의 극값의 개수는 1이다.
$a>1$이면 두 근의 합이 음수, 곱이 양수이므로 이차방정식 $t^2+2at+a=0$은 음수인 실근 2개를 갖는다. 이때 함수 $f(x)$의 극값의 개수는 0이다.
그러므로 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는 $a<0$이다.
이때 $|a|\leq 3$이므로 정수 a의 값은 $-3,\ -2,\ -1$이고 그 개수는 3이다.

답 ③

5 $y=\sin x+\sin x\cos x+a$에서
$y'=\cos x+\cos x\cos x-\sin x\sin x$
$=\cos x+\cos^2 x-(1-\cos^2 x)$
$=2\cos^2 x+\cos x-1$
$=(2\cos x-1)(\cos x+1)$

$y'=0$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=-1$

$0\le x\le 2\pi$일 때,

$\cos x=\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$,

$\cos x=-1$에서 $x=\pi$

$0\le x\le 2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	a	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}+a$	$\searrow$	a	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}+a$	$\nearrow$	a

함수 $f(x)$는 $x=\frac{5}{3}\pi$에서 최솟값 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}+a$를 가지고

함수 $f(x)$의 최솟값이 0이므로

$-\frac{3\sqrt{3}}{4}+a=0$, $a=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$에서 최대이고 최댓값은

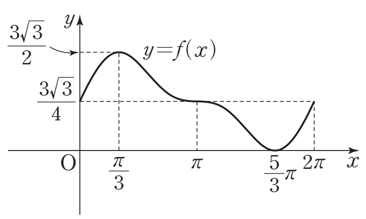
$\frac{3\sqrt{3}}{4}+a=\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

답 ④

참고

닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수

$f(x)=\sin x+\sin x\cos x+\frac{3\sqrt{3}}{4}$의 그래프는 그림과 같다.



6 $\frac{|x^2-3|}{e^x}=|x^2-3|e^{-x}=|(x^2-3)e^{-x}|$

에서 $g(x)=(x^2-3)e^{-x}$이라 하면

$\frac{|x^2-3|}{e^x}=|g(x)|$이다.

$g'(x)=2xe^{-x}-(x^2-3)e^{-x}$

$=-(x^2-2x-3)e^{-x}$

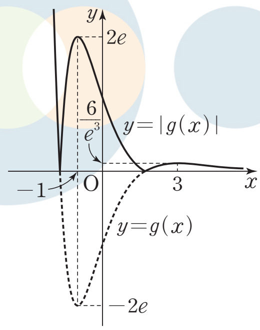
$=-(x+1)(x-3)e^{-x}$

$g'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$	$-2e$	$\nearrow$	$\frac{6}{e^3}$	$\searrow$

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=|g(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y=t$가 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 만나는 서로 다른 점의 개수가 3이 되는 t의 값의 범위는

$\frac{6}{e^3}<t<2e$ …… ㉠

$2.5<e<3$에서 $\frac{2}{9}<\frac{6}{e^3}<\frac{48}{125}$, $5<2e<6$이다.

따라서 $f(m)=3$, 즉 ㉠을 만족시키는 자연수 m의 값은 1, 2, 3, 4, 5이고 그 합은

$1+2+3+4+5=15$

답 15

7 $\frac{x^2+2}{x}\ge-3\sqrt[3]{x}+k$에서 $\frac{x^2+2}{x}+3\sqrt[3]{x}\ge k$

정의역이 $\{x|x>0\}$인 함수 $f(x)=\frac{x^2+2}{x}+3\sqrt[3]{x}$라 하자.

$f(x)=\frac{x^2+2}{x}+3\sqrt[3]{x}=x+\frac{2}{x}+3x^{\frac{1}{3}}$에서

$f'(x)=1-\frac{2}{x^2}+x^{-\frac{2}{3}}=\frac{x^2-2+x^{\frac{4}{3}}}{x^2}$이므로

$f'(x)=0$에서 $x^2-2+x^{\frac{4}{3}}=0$

$x^{\frac{2}{3}}=t\ (t>0)$으로 놓으면

$t^3+t^2-2=0$, $(t-1)(t^2+2t+2)=0$

이차방정식 $t^2+2t+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=4-8=-4<0$이므로 이 이차방정식은 실근을 갖지 않는다.

그러므로 $t=1$, 즉 $x^{\frac{2}{3}}=1$에서

$x>0$이므로 $x=1$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	6	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 6을 가지므로 모든 양수 x에 대하여 $f(x)\geq k$를 만족시키려면 $k\leq 6$이어야 한다.
따라서 실수 k의 최댓값은 6이다.

답 ①

8 $x=e^{t-1}$, $y=(t-3)e^t$에서

$\dfrac{dx}{dt}=e^{t-1}$, $\dfrac{dy}{dt}=e^t+(t-3)e^t=(t-2)e^t$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=e^{t-1}$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=e^t+(t-2)e^t=(t-1)e^t$

따라서 점 P의 시각 $t=1$에서의 가속도가 $(1,\ 0)$이므로 가속도의 크기는 1이다.

답 ①

Level 1 기초 연습

본문 64~65쪽

1 ① **2** ③ **3** ④ **4** ② **5** ③ **6** ⑤
7 ① **8** ③

1 점 $(-e,\ 0)$에서 곡선 $y=\ln(x+e)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(\alpha,\ \ln(\alpha+e))$라 하자.

$y=\ln(x+e)$에서 $y'=\dfrac{1}{x+e}$

점 $(\alpha,\ \ln(\alpha+e))$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{\alpha+e}$이므로 접선의 방정식은

$y-\ln(\alpha+e)=\dfrac{1}{\alpha+e}(x-\alpha)$

이 직선이 점 $(-e,\ 0)$을 지나므로

$-\ln(\alpha+e)=\dfrac{1}{\alpha+e}(-e-\alpha)$

$\ln(\alpha+e)=1$, $\alpha+e=e$, $\alpha=0$

따라서 접선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{e}x+1$이므로 구하는 y절편은 1이다.

답 ①

2 $x=\dfrac{a}{t}=at^{-1}$, $y=\dfrac{a}{\sqrt{t}}+\dfrac{b}{t}=at^{-\frac{1}{2}}+bt^{-1}$

$t=1$에 대응하는 점의 좌표는 $(a,\ a+b)$이고 이 점이 직선 $y=2x-1$ 위에 있으므로

$a+b=2a-1$, $a-b=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\dfrac{dx}{dt}=-at^{-2}=-\dfrac{a}{t^2}$,

$\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{a}{2}t^{-\frac{3}{2}}-bt^{-2}=-\dfrac{a}{2t\sqrt{t}}-\dfrac{b}{t^2}$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{-\dfrac{a}{2t\sqrt{t}}-\dfrac{b}{t^2}}{-\dfrac{a}{t^2}}=\frac{a\sqrt{t}+2b}{2a}\ (\text{단, } a\neq 0)$$

$t=1$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 직선 $y=2x-1$의 기울기인 2와 같으므로 $a\neq 0$이고

$\dfrac{a+2b}{2a}=2$, $b=\dfrac{3}{2}a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-2$, $b=-3$

따라서 $a+b=-2+(-3)=-5$

답 ③

3 $g(x)=x\sqrt{e^x}$이라 하면 $g(x)=xe^{\frac{x}{2}}$

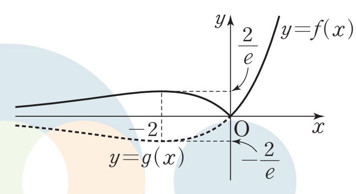
$g'(x)=e^{\frac{x}{2}}+\dfrac{1}{2}xe^{\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{2}(x+2)e^{\frac{x}{2}}$

$g'(x)=0$에서 $x=-2$

실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	$-\dfrac{2}{e}$	$\nearrow$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$, $g(0)=0$이고 $x<0$에서 $g(x)<0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 $\dfrac{2}{e}$, $x=0$에서 극솟값 0을 갖는다.

따라서 $m=2$, $s=\dfrac{2}{e}$이므로 $m\times s=2\times\dfrac{2}{e}=\dfrac{4}{e}$

답 ④

4 $y=(\ln x)^2+a\ln x$에서

$y'=\dfrac{2\ln x}{x}+\dfrac{a}{x}=\dfrac{2\ln x+a}{x}$

$$y''=\frac{\frac{2}{x}\times x-(2\ln x+a)}{x^2}=\frac{2-a-2\ln x}{x^2}$$

$y''=0$에서 $2-a-2\ln x=0$

$\ln x=\frac{2-a}{2}$, $x=e^{\frac{2-a}{2}}$

이고 $0<x<e^{\frac{2-a}{2}}$일 때 $y''>0$, $x>e^{\frac{2-a}{2}}$일 때 $y''<0$이다.

주어진 곡선이 구간 (e^2, ∞)에서 위로 볼록하려면 이 구간에서 $y''<0$이어야 하므로

$e^{\frac{2-a}{2}}\le e^2$, $\frac{2-a}{2}\le 2$, $a\ge -2$

따라서 실수 a의 최솟값은 -2이다.

답 ②

5 $f(x)=e^{\sin 2x+ax}$에서

$f'(x)=e^{\sin 2x+ax}\times(2\cos 2x+a)$ ...... ㉠

모든 실수 x에 대하여 $e^{\sin 2x+ax}>0$이고,

$2\cos 2x+a$의 최솟값은 $-2+a$, 최댓값은 $2+a$이다.

a가 양수일 때, $2+a>0$이므로 함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않으려면 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

그러므로 $-2+a\ge 0$, $a\ge 2$

이때 $a>2$이면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않는다.

$a=2$이면 $f'(x)=0$이 되는 x의 값 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 모두 양이므로 함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않는다.

따라서 a의 최솟값 $m=2$이고 $a=m$, 즉 $a=2$일 때의 함수 $g(x)$에 대하여 ㉠에서

$g'(0)=1\times(2+2)=4$

답 ③

6 $y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{4}{x}$에서

$$y'=x-1-\frac{4}{x^2}=\frac{x^3-x^2-4}{x^2}=\frac{(x-2)(x^2+x+2)}{x^2}$$

$y'=0$에서 $x=2$ 또는 $x^2+x+2=0$

이차방정식 $x^2+x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1-8=-7<0$이므로 이 이차방정식은 실근을 갖지 않는다.

$1\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{7}{2}$	↘	2	↗	$\frac{17}{6}$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각 $\frac{7}{2}$, 2이므로

최댓값과 최솟값의 차는 $\frac{7}{2}-2=\frac{3}{2}$

답 ⑤

7 $f(x)=2\tan x-4x$에서 $f'(x)=2\sec^2 x-4$

$f'(x)=0$에서 $\sec^2 x=2$

$0<x<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sec x=\sqrt{2}$

즉, $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $x=\frac{\pi}{4}$

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$2-\pi$	↗	

그러므로 $0<x\le a$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$f(x)\ge f(a)$를 만족시키려면 $0<a\le\frac{\pi}{4}$이어야 한다.

따라서 $a=\frac{\pi}{4}$일 때 $f(a)$가 최소이므로 $f(a)$의 최솟값은

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2-\pi$

답 ①

8 $x=-\cos 2t$, $y=\frac{1}{2}\sin 2t$에서

$\frac{dx}{dt}=2\sin 2t$, $\frac{dy}{dt}=\cos 2t$,

$\frac{d^2x}{dt^2}=4\cos 2t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-2\sin 2t$

이므로 점 P의 시각 t에서의 속력과 가속도의 크기는 각각

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{4\sin^2 2t+\cos^2 2t}$$
$$=\sqrt{4\sin^2 2t+(1-\sin^2 2t)}$$
$$=\sqrt{3\sin^2 2t+1},$$

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{16\cos^2 2t+4\sin^2 2t}$$
$$=\sqrt{16(1-\sin^2 2t)+4\sin^2 2t}$$
$$=\sqrt{16-12\sin^2 2t}$$

점 P의 가속도의 크기가 $2\sqrt{2}$인 순간을 시각 $t=a$라 하면

$\sqrt{16-12\sin^2 2a}=2\sqrt{2}$, $\sin^2 2a=\frac{2}{3}$

이므로 이 순간 점 P의 속력은

$\sqrt{3\sin^2 2a+1}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$

답 ③

Level 2 기본 연습 본문 66~67쪽

1 ③ 2 ⑤ 3 ③ 4 ② 5 ① 6 ②
7 ⑤ 8 ①

1 직선 $y=ax+b$가 곡선 $y=k\sqrt{x}$에 접하는 점의 좌표를 $(t,\ k\sqrt{t}\ )\ (t>0)$이라 하자.

$y=k\sqrt{x}$에서 $y'=\dfrac{k}{2\sqrt{x}}$이므로 곡선 $y=k\sqrt{x}$ 위의 점 $(t,\ k\sqrt{t}\ )$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{k}{2\sqrt{t}}$이고, 접선의 방정식은

$y-k\sqrt{t}=\dfrac{k}{2\sqrt{t}}(x-t)$, 즉 $y=\dfrac{k}{2\sqrt{t}}x+\dfrac{k\sqrt{t}}{2}$

그러므로 $a=\dfrac{k}{2\sqrt{t}}$, $b=\dfrac{k\sqrt{t}}{2}$이다.

이때 $ab=\dfrac{k}{2\sqrt{t}}\times\dfrac{k\sqrt{t}}{2}=\dfrac{k^2}{4}$이고, $a+b=5$이므로 a, b는 이차방정식 $x^2-5x+\dfrac{k^2}{4}=0$의 실근이다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D\geq 0$이어야 한다.

$D=25-k^2\geq 0$에서 $k^2\leq 25$

그러므로 자연수 k의 값은 1, 2, 3, 4, 5이고, $k_{m-1}=4$이다.

$k=k_{m-1}$, 즉 $k=4$일 때

$x^2-5x+4=0$

$(x-1)(x-4)=0$

$x=1$ 또는 $x=4$

즉, $a=1$, $b=4$ 또는 $a=4$, $b=1$

따라서 구하는 $a-b$의 최댓값은 3이다.

답 ③

참고

조건 (나)의 $a+b=5$에서 직선 $y=ax+b$는 점 $(1,\ 5)$를 지난다.

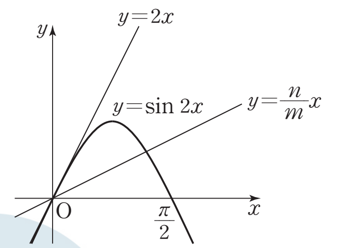
곡선 $y=k\sqrt{x}$는 점 $(1,\ k)$를 지나므로 점 $(1,\ 5)$를 지나는 직선이 곡선 $y=k\sqrt{x}$에 접하려면 $k\leq 5$이어야 한다.

2 $f(x)=m\cos 2x+nx^2$에서

$f'(x)=-2m\sin 2x+2nx$

$f'(x)=0$에서 $\sin 2x=\dfrac{n}{m}x$

함수 $g(x)$를 $g(x)=\sin 2x$라 할 때, 열린구간 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=\dfrac{n}{m}x$가 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 만나야 한다. …… ㉠



$g(x)=\sin 2x$에서 $g'(x)=2\cos 2x$

$g'(0)=2$이므로 ㉠을 만족시키려면 $0<\dfrac{n}{m}<2$이어야 한다.

이때 10 이하의 두 자연수 m, n은 $n<2m$을 만족시키면 된다.

$m=k\ (k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$일 때 n의 개수는 $2k-1$이고, $6\leq m\leq 10$일 때 n의 개수는 10이므로 구하는 모든 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는

$1+3+5+7+9+10\times 5=75$

답 ⑤

3 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=x+\frac{a}{x}+b\ln x$에서

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$이므로

$f'(x)=x+\dfrac{a}{x}+b\ln x$

즉, 함수 $f(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극소이면 $f'(1)=0$이다.

$f'(1)=1+a$이므로

$1+a=0$, 즉 $a=-1$

$f'(x)=x-\dfrac{1}{x}+b\ln x=x-x^{-1}+b\ln x$에서

$f''(x)=1+x^{-2}+\dfrac{b}{x}=1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{b}{x}=\dfrac{x^2+bx+1}{x^2}$이므로

$f''(1)=b+2$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극소가 되려면 $f''(1)\geq 0$이어야 한다.

(i) $f''(1)>0$일 때

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이다.

즉, $b+2>0$에서 $b>-2$

(ii) $f''(1)=0$일 때

$b+2=0$에서 $b=-2$

이때 $f''(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2}=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}$이고 모든 양수 x에 대하여 $f''(x)\geq 0$이므로 함수 $f'(x)$는 증가한다.

$f'(1)=0$이고 함수 $f'(x)$가 증가하므로 함수 $f'(x)$의 부호가 $x=1$의 좌우에서 음에서 양으로 바뀐다.

그러므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이다.

(i), (ii)에서 $b\geq -2$

따라서 $a=-1$, $b\geq -2$이므로 $b=-2$일 때 $a+b$의 값은

최소이고 최솟값은 $-1+(-2)=-3$이다.

답 ③

4 $f(x)=ax^2-20x+2\ln x$에서

$f'(x)=2ax-20+\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(ax^2-10x+1)}{x}$

$f''(x)=2a-\dfrac{2}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $ax^2-10x+1=0$

이차방정식 $ax^2-10x+1=0$의 판별식을 D라 하면 $0<a<25$에서 $D=100-4a>0$이고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=\dfrac{10}{a}>0$, (두 근의 곱)$=\dfrac{1}{a}>0$

이므로 이차방정식 $ax^2-10x+1=0$은 서로 다른 두 양의 실근을 갖는다. 그러므로 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 개수는 2이다.

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 가지므로 이차방정식 $ax^2-10x+1=0$의 두 근이 α, β이고,

$\alpha+\beta=\dfrac{10}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{1}{a}$

$f''(x)=0$에서 $2a-\dfrac{2}{x^2}=0$

$x>0$이므로 $x=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$이고, 함수 $f''(x)$의 부호가 $x=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$의 좌우에서 음에서 양으로 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표는 $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$이다. 즉, $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$

$\alpha\beta=\dfrac{1}{a}$이고 $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$이므로 $\gamma^2=\alpha\beta$, 즉 세 수 α, γ, β 또는 β, γ, α는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

$\alpha<\beta$와 조건 (나)에서 세 수 α, γ, β가 이 순서대로 공비가 2인 등비수열을 이루므로 α, β의 값은 각각 $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$, $\dfrac{2}{\sqrt{a}}$이다.

$\alpha+\beta=\dfrac{10}{a}$이므로

$\dfrac{1}{2\sqrt{a}}+\dfrac{2}{\sqrt{a}}=\dfrac{10}{a}$, $\sqrt{a}+4\sqrt{a}=20$, $5\sqrt{a}=20$, $a=16$

따라서 $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{16}}=\dfrac{1}{4}$이고

$f(x)=16x^2-20x+2\ln x$이므로

$\gamma\times f(1)=\dfrac{1}{4}\times(-4)=-1$

답 ②

5 조건 (가)에서 $x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq f(-1)$이므로 $x=-1$을 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x)\geq f(-1)$이다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소이다. 이때 $x<0$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하므로 $f'(-1)=0$이다.

$x<0$일 때, $f(x)=(2x^2+ax)e^{-x}$에서

$f'(x)=(4x+a)e^{-x}-(2x^2+ax)e^{-x}$

$\quad=-\{2x^2+(a-4)x-a\}e^{-x}$

$f'(-1)=(2a-6)e$이고 $f'(-1)=0$이므로

$(2a-6)e=0$, $a=3$

따라서 $x<0$일 때,

$f(x)=(2x^2+3x)e^{-x}$,

$f'(x)=-(2x^2-x-3)e^{-x}$

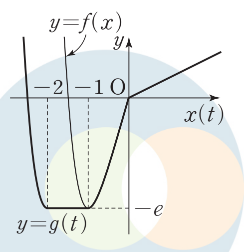
$\quad=-(x+1)(2x-3)e^{-x}$

이므로 $x<-1$에서 함수 $f(x)$는 감소하고 $-1<x<0$에서 함수 $f(x)$는 증가하며 $f(-1)=-e$이다.

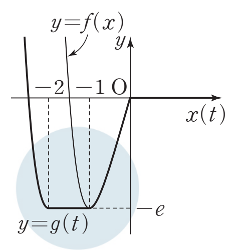
한편, $\displaystyle\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x)=f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(i) $b\geq0$인 경우

함수 $y=f(x)$의 그래프 및 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



[$b>0$인 경우]



[$b=0$인 경우]

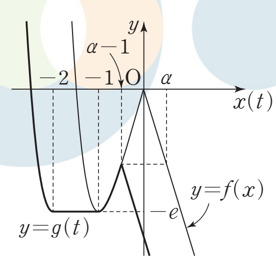
이때

$$g(t)=\begin{cases}f(t+1) & (t<-2)\\ f(-1) & (-2\leq t<-1)\\ f(t) & (t\geq-1)\end{cases}$$

이고, 함수 $g(t)$가 $t=-\dfrac{1}{2}$에서 미분가능하므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $b<0$인 경우

함수 $y=f(x)$의 그래프 및 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



$b<0$이면 $f(\alpha)=f(\alpha-1)$을 만족시키는 $0<\alpha<1$인 α가 존재한다. 이때

$$g(t)=\begin{cases} f(t+1) & (t<-2) \\ f(-1) & (-2\le t<-1) \\ f(t) & (-1\le t<a-1) \\ f(t+1) & (t\ge a-1) \end{cases} \quad \cdots\cdots ㉠$$

함수 $g(t)$는 $t=a-1$에서 미분가능하지 않으므로 조건 (나)에서

$a-1=-\frac{1}{2}$, 즉 $a=\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)$에서

$\frac{1}{2}b=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)e^{\frac{1}{2}}$, $b=-2\sqrt{e}$

따라서

$$f(x)=\begin{cases} (2x^2+3x)e^{-x} & (x<0) \\ -2\sqrt{ex} & (x\ge 0) \end{cases} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$g(-3)\times g(1)=f(-2)\times f(2)$

$\qquad =2e^2\times(-4\sqrt{e})=-8e^2\sqrt{e}$

답 ①

6 $\sin x+\cos x=ae^x$에서 $(\sin x+\cos x)e^{-x}=a$

$f(x)=(\sin x+\cos x)e^{-x}$이라 하면 방정식 $\sin x+\cos x=ae^x$의 양의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것과 같다.

$f(x)=(\sin x+\cos x)e^{-x}$에서

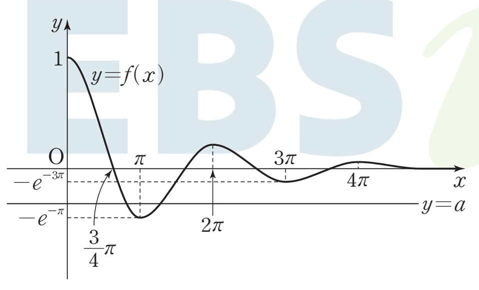
$f'(x)=(\cos x-\sin x)e^{-x}-(\sin x+\cos x)e^{-x}$

$\qquad =-2e^{-x}\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=0$

$x\ge 0$일 때, $f'(x)=0$이 되는 x의 값은 $x=0, \pi, 2\pi, \cdots$이므로 $x\ge 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π	$\cdots$	3π	$\cdots$	4π	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$\cdots$
$f(x)$	1	↘	$-e^{-\pi}$	↗	$e^{-2\pi}$	↘	$-e^{-3\pi}$	↗	$e^{-4\pi}$	$\cdots$



$f(x)=0$에서 $\sin x+\cos x=0$, 즉 $\tan x=-1$이므로 $x>0$에서 곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점의 x좌표는 $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$, $\cdots$이다.

$x>0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 점의 개수가 2이고 이 두 교점의 x좌표가 $\frac{3}{4}\pi$보다 크려면

$f(\pi)<a<f(3\pi)$, 즉 $-e^{-\pi}<a<-e^{-3\pi}$

이어야 한다.

따라서 $p=-e^{-\pi}$, $q=-e^{-3\pi}$이므로

$p\times q=-e^{-\pi}\times(-e^{-3\pi})=e^{-4\pi}$

답 ②

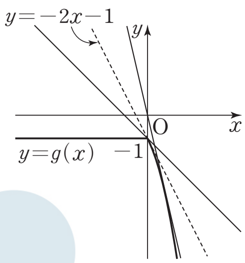
7 $g(x)=-e^x-|e^x-1|$이라 하면 모든 실수 x에 대하여 부등식 $-e^x-|e^x-1|\le tx+k$가 성립하려면 함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=tx+k$보다 아래쪽에 있거나 직선 $y=tx+k$와 한 점에서만 만나야 한다. $\cdots\cdots$ ㉠

$x<0$이면 $g(x)=-e^x+(e^x-1)=-1$

$x\ge 0$이면 $g(x)=-e^x-e^x+1=-2e^x+1$

$x>0$에서 $g'(x)=-2e^x$이므로 $\lim_{x\to 0+} g'(x)=-2$이다.

함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(i) $-2\le t<0$일 때

㉠을 만족시키는 k의 값이 최소일 때는 직선 $y=tx+k$가 점 $(0, -1)$을 지날 때이다.

이때 $k=-1$이므로

$f(t)=-1$

$-2<t<0$에서 $f'(t)=0$이므로 $f'(-1)=0$이다.

(ii) $t<-2$일 때

㉠을 만족시키는 k의 값이 최소일 때는 직선 $y=tx+k$가 곡선 $y=-2e^x+1$에 접할 때이다.

$y=tx+k$에서 $y'=t$이고 $y=-2e^x+1$에서 $y'=-2e^x$이므로 접점의 x좌표를 α라 하면

$t\alpha+k=-2e^\alpha+1$이고 $t=-2e^\alpha$

$t=-2e^\alpha$에서 $e^\alpha=-\frac{t}{2}$, $\alpha=\ln\left(-\frac{t}{2}\right)$

두 식 $t=-2e^\alpha$, $\alpha=\ln\left(-\frac{t}{2}\right)$를 $t\alpha+k=-2e^\alpha+1$에 대입하면

$t\ln\left(-\frac{t}{2}\right)+k=t+1$, $k=-t\ln\left(-\frac{t}{2}\right)+t+1$

즉, $f(t)=-t\ln\left(-\frac{t}{2}\right)+t+1$

$t<-2$에서

$$f'(t)=-\ln\left(-\frac{t}{2}\right)-t\times\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{t}{2}}+1=-\ln\left(-\frac{t}{2}\right)$$

이므로 $f'(-2e)=-\ln\left(-\frac{-2e}{2}\right)=-1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f'(-1)+f'(-2e)=0+(-1)=-1$

답 ⑤

8 $x=2\cos t-\sqrt{3a}\sin^2 t$, $y=\tan t+(1+a)\cot t$에서

$\frac{dx}{dt}=-2\sin t-2\sqrt{3a}\sin t\cos t$

$=-2\sin t(1+\sqrt{3a}\cos t)$

$\frac{dy}{dt}=\sec^2 t-(1+a)\csc^2 t$

점 P의 시각 t에서의 속력은 $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$이므로

속력이 0일 때는 $\frac{dx}{dt}=0$이고 $\frac{dy}{dt}=0$일 때이다.

즉, $-2\sin t(1+\sqrt{3a}\cos t)=0$이고

$\sec^2 t-(1+a)\csc^2 t=0$일 때이다.

$-2\sin t(1+\sqrt{3a}\cos t)=0$에서

$0<t<\frac{\pi}{2}$일 때 $\sin t\neq 0$이므로

$1+\sqrt{3a}\cos t=0$

이때 $\cos t>0$이므로 $a<0$이고

$\cos t=-\frac{1}{\sqrt{3a}}$, 즉 $\sec t=-\sqrt{3a}$ …… ㉠

$\sec^2 t-(1+a)\csc^2 t=0$에서

$\frac{1}{\cos^2 t}=(1+a)\times\frac{1}{\sin^2 t}$, $\tan^2 t=1+a$ …… ㉡

이때 $\tan^2 t>0$이므로 $1+a>0$, 즉 $a>-1$이다.

㉠, ㉡과 $1+\tan^2 t=\sec^2 t$임을 이용하면

$1+(1+a)=3a^2$

$3a^2-a-2=0$, $(a-1)(3a+2)=0$

$-1<a<0$이므로 $a=-\frac{2}{3}$

㉠에서 $\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $t=\frac{\pi}{6}$

따라서 점 P의 속력이 0일 때의 y좌표는

$y=\tan\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}\cot\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}\times\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

답 ①

Level 3 실력 완성 본문 68쪽

1 ① **2** 31 **3** 32

1 $f(1)=\frac{1}{e}$인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$g(x)=\ln|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이고 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이다.

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a>0$)으로 놓으면

$f(1)=\frac{1}{e}$에서 $a+b+c=\frac{1}{e}$ …… ㉠

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이므로 $g(x)=\ln f(x)$이다.

$f(x)=ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=2ax+b$, $f''(x)=2a$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이므로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=b^2-4ac<0$이다.

이때 $g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$,

$g''(x)=\frac{f''(x)f(x)-\{f'(x)\}^2}{\{f(x)\}^2}$이므로

$g'(x)=0$에서 $f'(x)=2ax+b=0$, 즉 $x=-\frac{b}{2a}$이고,

$g'(x)$의 부호가 $x=-\frac{b}{2a}$의 좌우에서 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=-\frac{b}{2a}$에서 극소이다.

$g''(x)=0$에서

$f''(x)f(x)-\{f'(x)\}^2=2a(ax^2+bx+c)-(2ax+b)^2$

$=-2a^2x^2-2abx-b^2+2ac=0$

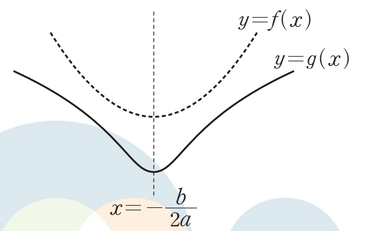
이고 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-2ab)^2+8a^2(-b^2+2ac)=-4a^2(b^2-4ac)>0$

이므로 곡선 $y=g(x)$의 변곡점의 개수는 2이다.

또한 곡선 $y=f(x)$가 직선 $x=-\frac{b}{2a}$에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=g(x)$도 직선 $x=-\frac{b}{2a}$에 대하여 대칭이다.

$\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



한편, 모든 실수 x에 대하여 $x\{g(x)-mx\}\geq 0$이므로

$x<0$이면 $g(x)-mx\leq 0$, 즉 $g(x)\leq mx$이고

$x>0$이면 $g(x)-mx\geq 0$, 즉 $g(x)\geq mx$이다.

함수 $y=g(x)-mx$가 $x=0$에서 연속이므로

$g(0)-m\times 0=0$, 즉 $g(0)=0$

$g(0)=\ln f(0)$이므로 $\ln f(0)=0$, $f(0)=1$에서

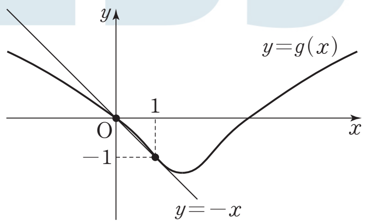
$c=1$ …… ㉡

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=mx$는 모두 원점을 지난다. 또한 $x<0$에서 곡선 $y=g(x)$는 직선 $y=mx$보다 아래쪽에 있

거나 직선 $y=mx$와 접하고, $x>0$에서 곡선 $y=g(x)$는 직선 $y=mx$보다 위쪽에 있거나 직선 $y=mx$와 접한다. …… ㉢

곡선 $y=g(x)$ 위의 원점을 지나는 직선 $y=mx$에 대하여 기울기 m의 최댓값이 존재하고 이 값이 -1이므로 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=-x$는 접한다.

그런데 $f(1)=\frac{1}{e}$에서 $g(1)=\ln f(1)=\ln\frac{1}{e}=-1$이므로 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=-x$는 모두 점 $(1,\ -1)$을 지난다. 이때 ㉢을 만족시키려면 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=-x$는 점 $(1,\ -1)$에서 접하고 원점에서 만나야 한다.



$g'(1)=-1$이고 $g'(1)=\frac{f'(1)}{f(1)}$이므로 $\frac{f'(1)}{f(1)}=-1$에서

$f'(1)=-f(1)$

$f'(x)=2ax+b$이고 $f(1)=\frac{1}{e}$이므로 $f'(1)=-\frac{1}{e}$에서

$2a+b=-\frac{1}{e}$

㉠, ㉡에서 $a+b=\frac{1}{e}-1$

두 식 $2a+b=-\frac{1}{e}$, $a+b=\frac{1}{e}-1$을 연립하여 풀면

$a=1-\frac{2}{e}$, $b=\frac{3}{e}-2$

따라서 $f(x)=\left(1-\frac{2}{e}\right)x^2+\left(\frac{3}{e}-2\right)x+1$이므로

$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{9}{4}-\frac{9}{2e}\right)+\left(\frac{9}{2e}-3\right)+1=\frac{1}{4}$

답 ①

2 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{a}{x}$에서

$f'(x)=x-3-\frac{a}{x^2}=\frac{x^3-3x^2-a}{x^2}$ …… ㉠

$f'(x)=0$에서 $x^3-3x^2-a=0$ (단, $x\neq0$)

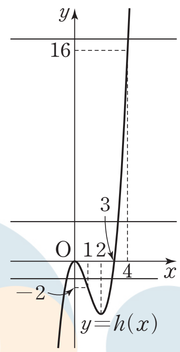
$x^3-3x^2=a$ (단, $x\neq0$)

$h(x)=x^3-3x^2$이라 하면 $f'(x)=0$을 만족시키는 실수 x의 값은 곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=a$가 만나는 점의 x좌표 중에서 0이 아닌 값과 같다.

$h'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$h'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$h(1)=-2$, $h(4)=16$이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(i) $-2<a<16$일 때

열린구간 $(1,\ 4)$에서 곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=a$는 한 점에서만 만난다.

이 교점의 x좌표를 β라 하면 $h(\beta)=a$이므로

$\beta^3-3\beta^2=a$ …… ㉡

또한 곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=-2$의 교점의 x좌표 중 가장 큰 것을 x_1이라 하면 $2<x_1<\beta<4$이다. …… ㉢

㉠에서 $x=\beta$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 연속인 함수 $f(x)$는 $x=\beta$에서 극소이면서 최소이다.

따라서 닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값 $g(a)=f(\beta)$이다.

㉡에서

$g(a)=f(\beta)=\frac{1}{2}\beta^2-3\beta+\frac{a}{\beta}$

$=\frac{1}{2}\beta^2-3\beta+\frac{1}{\beta}(\beta^3-3\beta^2)$

$=\frac{3}{2}\beta^2-6\beta$ …… ㉣

$2<\beta<4$이므로 $g(a)<\frac{3}{2}\times4^2-6\times4=0$

㉡의 양변을 a에 대하여 미분하면

$(3\beta^2-6\beta)\frac{d\beta}{da}=1$, $\frac{d\beta}{da}=\frac{1}{3\beta^2-6\beta}$

㉣의 양변을 a에 대하여 미분하면

$g'(a)=(3\beta-6)\frac{d\beta}{da}=(3\beta-6)\times\frac{1}{3\beta^2-6\beta}=\frac{1}{\beta}$

상수 k가 $g(k)=-\frac{10}{3}$을 만족시킬 때 ㉣에서

$\frac{3}{2}\beta^2-6\beta=-\frac{10}{3}$, $9\beta^2-36\beta+20=0$

$(3\beta-2)(3\beta-10)=0$

㉢에서 $\beta=\frac{10}{3}$

따라서 $g'(k)=\frac{1}{\frac{10}{3}}=\frac{3}{10}$

(ii) $a\geq16$일 때

열린구간 $(1,\ 4)$에서 곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=a$는 만

나지 않고 $h(x)<a$이므로 이 구간에서 $f'(x)<0$이다.
따라서 닫힌구간 $[1, 4]$에서 연속인 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소하므로 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최소이다.
닫힌구간 $[1, 4]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값

$$g(a)=f(4)=8-12+\frac{a}{4}=\frac{a}{4}-4$$

$a\geq16$이므로 $g(a)\geq\frac{16}{4}-4=0$

$a>16$일 때 $g'(a)=\frac{1}{4}$이므로 $g'(19)=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서

$$g'(k)+g'(19)=\frac{3}{10}+\frac{1}{4}=\frac{11}{20}$$

따라서 $p=20$, $q=11$이므로 $p+q=20+11=31$

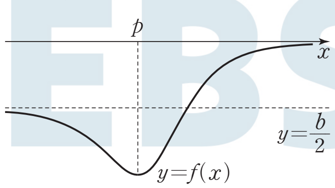
답 31

3 $f(x)=\frac{ae^x+b}{e^{2x}+2}$에서

$$f'(x)=\frac{ae^x(e^{2x}+2)-2e^{2x}(ae^x+b)}{(e^{2x}+2)^2}$$

$$=\frac{-(ae^{2x}+2be^x-2a)e^x}{(e^{2x}+2)^2}$$

모든 실수 x에 대하여 $e^x>0$, $(e^{2x}+2)^2>0$이므로
$f'(x)=0$에서 $ae^{2x}+2be^x-2a=0$
$e^x=t\ (t>0)$으로 놓으면
$at^2+2bt-2a=0$
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 이차방정식
$at^2+2bt-2a=0$의 두 근의 곱은
$\frac{-2a}{a}=-2$이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖고 이 중 양수인 실근은 하나뿐이다.
즉, $f'(x)=0$을 만족시키는 실수 x의 개수는 1이다. 이 x의 값을 p라 하면 $a<0$이므로 $x=p$의 좌우에서 함수 $f'(x)$의 부호는 음에서 양으로 바뀐다.
이때 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\frac{b}{2}$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



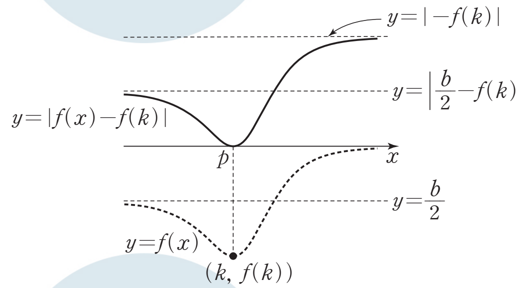
조건 (가)의 $g(0)=1$에서 직선 $y=0$이 함수 $y=|f(x)-f(k)|$의 그래프와 만나는 점의 개수가 1이다.
$0=|f(x)-f(k)|$, 즉 $f(x)=f(k)$인 x의 개수가 1이므로

$f(k)=f(p)$ 또는 $\frac{b}{2}\leq f(k)<0$

한편, 조건 (나)에서 $g(\alpha)+\lim_{t\to\alpha-}g(t)=4$ …… ㉠

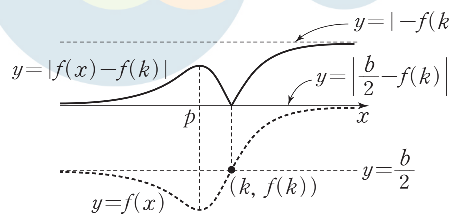
㉠을 만족시키는 α의 값을 α_1이라 하자.
함수 $g(t)$가 $t=\alpha_1$에서 연속이면 $g(\alpha_1)=\lim_{t\to\alpha_1-}g(t)$이므로
㉠에서 $g(\alpha_1)=\lim_{t\to\alpha_1-}g(t)=2$이다.
그런데 이 경우 $t=\alpha_1$에 가까운 어떤 $t=\alpha_2$에 대해서도 $g(\alpha_2)=\lim_{t\to\alpha_2-}g(t)=2$가 되어 ㉠을 만족시키는 α가 오직 하나 존재한다는 조건을 만족시키지 않는다.
그러므로 ㉠을 만족시키는 α_1에 대하여 함수 $g(t)$는 $t=\alpha_1$에서 불연속이고, 함수 $g(t)$가 $t=\beta$에서 연속이면서 $g(\beta)=2$인 실수 β가 존재하지 않아야 한다.

(i) $f(k)=f(p)$일 때
함수 $y=|f(x)-f(k)|$의 그래프는 그림과 같다.

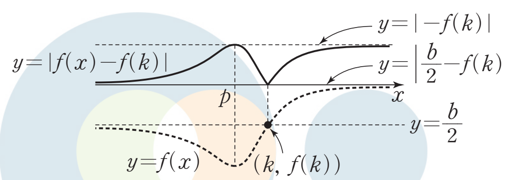


$0<\beta<\left|\frac{b}{2}-f(k)\right|$인 모든 β에 대하여 $g(\beta)=2$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

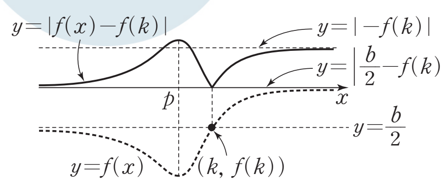
(ii) $f(k)=\frac{b}{2}$일 때



$\left[f(k)<\frac{1}{2}f(p)\text{인 경우}\right]$



$\left[f(k)=\frac{1}{2}f(p)\text{인 경우}\right]$



$\left[f(k)>\frac{1}{2}f(p)\text{인 경우}\right]$

$f(k)<\frac{1}{2}f(p)$인 경우, 함수 $g(t)$가 $t=\gamma$에서 불연속인 γ에 대하여 $g(\gamma)+\lim_{t\to\gamma-}g(t)$의 값은 1 또는 5이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

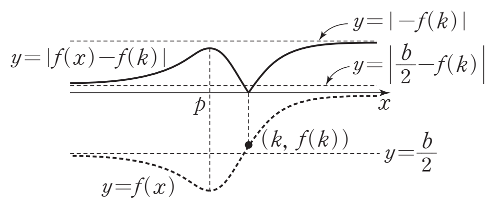
$f(k)=\frac{1}{2}f(p)$인 경우, 함수 $g(t)$가 $t=\gamma$에서 불연속인 γ에 대하여 $g(\gamma)+\lim_{t\to\gamma-}g(t)$의 값은 1 또는 4이다.

이때 ㉠을 만족시키는 α의 값은 $|-f(k)|$뿐이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

$f(k)>\frac{1}{2}f(p)$인 경우,

$|-f(k)|<\beta<|f(p)-f(k)|$인 모든 β에 대하여 $g(\beta)=2$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $f(k)>\frac{b}{2}$일 때



$0<\beta<\left|\frac{b}{2}-f(k)\right|$인 모든 β에 대하여 $g(\beta)=2$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $f(k)=\frac{b}{2}=\frac{1}{2}f(p)$이다.

조건 (가)에서 $f(k)=-1$이므로 $b=-2$, $f(p)=-2$

$b=-2$이므로 $f(x)=\frac{ae^x-2}{e^{2x}+2}$,

$f'(x)=\frac{-(ae^{2x}-4e^x-2a)e^x}{(e^{2x}+2)^2}$이다.

$f(p)=-2$에서 $\frac{ae^p-2}{e^{2p}+2}=-2$, $a=\frac{-2e^{2p}-2}{e^p}$

$f'(p)=0$에서 $ae^{2p}-4e^p-2a=0$, $a=\frac{4e^p}{e^{2p}-2}$

두 식 $a=\frac{-2e^{2p}-2}{e^p}$, $a=\frac{4e^p}{e^{2p}-2}$을 연립하면

$\frac{-2e^{2p}-2}{e^p}=\frac{4e^p}{e^{2p}-2}$, $e^{4p}+e^{2p}-2=0$

$(e^{2p}+2)(e^{2p}-1)=0$

$e^{2p}>0$에서 $e^{2p}=1$, 즉 $p=0$이므로

$a=\frac{-2\times1-2}{1}=-4$

$f(k)=-1$에서 $\frac{-4e^k-2}{e^{2k}+2}=-1$

$e^k(e^k-4)=0$, $e^k=4$

따라서

$a\times b\times e^k=(-4)\times(-2)\times4=32$

답 32

06 여러 가지 적분법

유제 본문 70~76쪽

1 ① **2** ④ **3** ③ **4** ② **5** ③ **6** ①
7 ④ **8** ④

1 함수 $f(x)=a\times2^x+b\times4^x$에 대하여 $f(1)=0$이므로

$f(1)=2a+4b=0$

$a=-2b$ ······ ㉠

이때 $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2\ln2}$에서

$\int_0^1 f(x)dx$

$=\int_0^1(a\times2^x+b\times4^x)dx$

$=\left[\frac{a\times2^x}{\ln2}+\frac{b\times4^x}{\ln4}\right]_0^1$

$=\left(\frac{2a}{\ln2}+\frac{4b}{2\ln2}\right)-\left(\frac{a}{\ln2}+\frac{b}{2\ln2}\right)$

$=\frac{2a+3b}{2\ln2}=\frac{1}{2\ln2}$

즉, $2a+3b=1$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 풀면

$a=2$, $b=-1$

따라서

$a+b=2+(-1)=1$

답 ①

2 $f'(x)=e^x+\cos x$에서

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(e^x+\cos x)dx$

$=e^x+\sin x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(0)=0$이므로

$f(0)=1+0+C=0$, $C=-1$

따라서 $f(x)=e^x+\sin x-1$이므로

$\frac{f(2\pi)}{f(\pi)}=\frac{e^{2\pi}+\sin2\pi-1}{e^\pi+\sin\pi-1}$

$=\frac{e^{2\pi}-1}{e^\pi-1}$

$=\frac{(e^\pi+1)(e^\pi-1)}{e^\pi-1}$

$=e^\pi+1$

답 ④

3 $\int_1^2 \frac{2\ln 2x}{x}dx$에서 $\ln 2x=t$로 놓으면

$x=1$일 때 $t=\ln 2$, $x=2$일 때 $t=2\ln 2$이고

$\frac{2}{2x}=\frac{dt}{dx}$에서 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int_1^2 \frac{2\ln 2x}{x}dx=\int_{\ln 2}^{2\ln 2} 2t\,dt$$
$$=\left[t^2\right]_{\ln 2}^{2\ln 2}$$
$$=4(\ln 2)^2-(\ln 2)^2=3(\ln 2)^2$$

답 ③

4 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{2h}=xe^{-x^2}$에서

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\frac{1}{2}f'(x)$$

이므로 $\frac{1}{2}f'(x)=xe^{-x^2}$

$f'(x)=2xe^{-x^2}$

$f(x)=\int f'(x)dx=\int 2xe^{-x^2}dx$에서

$-x^2=t$로 놓으면 $-2x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int 2xe^{-x^2}dx$$
$$=-\int e^t\,dt$$
$$=-e^t+C$$
$$=-e^{-x^2}+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때 $f(0)=e^{-1}-1$이므로

$f(0)=-1+C=e^{-1}-1$, $C=e^{-1}$

즉, $f(x)=-e^{-x^2}+e^{-1}$

곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 x좌표를 α라 하면

$f(\alpha)=-e^{-\alpha^2}+e^{-1}=0$

$e^{-\alpha^2}=e^{-1}$, $-\alpha^2=-1$, $\alpha^2=1$

$\alpha=-1$ 또는 $\alpha=1$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 두 점의 좌표는 $(-1, 0)$, $(1, 0)$이므로 두 점 사이의 거리는 2이다.

답 ②

참고

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)=2xe^{-x^2}$은 모든 양수 x에 대하여 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(0, \infty)$에서 증가한다.

또한 함수 $f(x)=-e^{-x^2}+e^{-1}$은 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=-e^{-(-x)^2}+e^{-1}=-e^{-x^2}+e^{-1}=f(x)$

이므로 곡선 $y=f(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.

이때 $f(1)=-e^{-1}+e^{-1}=0$이므로 $f(-1)=0$이고 곡선 $y=f(x)$는 x축과 서로 다른 두 점 $(-1, 0)$, $(1, 0)$에서만 만난다.

5 $\int_1^e (4x-1)\ln x\,dx$에서

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=4x-1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=2x^2-x$이므로

$$\int_1^e (4x-1)\ln x\,dx$$
$$=\left[(2x^2-x)\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left\{(2x^2-x)\times\frac{1}{x}\right\}dx$$
$$=\{(2e^2-e)-0\}-\int_1^e(2x-1)dx$$
$$=2e^2-e-\left[x^2-x\right]_1^e$$
$$=2e^2-e-\{(e^2-e)-0\}=e^2$$

답 ③

6 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x+\cos 2x)dx$에서

$u(x)=x$, $v'(x)=\sin x+\cos 2x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x+\cos 2x)\,dx$$
$$=\left[x\left(-\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$$
$$=0-\left[-\sin x-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=-\left\{\left(-1+\frac{1}{4}\right)-\left(0-\frac{1}{4}\right)\right\}=\frac{1}{2}$$

답 ①

7 $$\int_1^{2x+1}\{f(t)-x\}dt=\ln(x^2+a) \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=\ln a$, $a=1$

이때 ㉠에서

$$\int_1^{2x+1}f(t)dt-x\int_1^{2x+1}dt=\ln(x^2+1)$$

이고 $\int_1^{2x+1}dt=\left[t\right]_1^{2x+1}=(2x+1)-1=2x$이므로

$$\int_1^{2x+1}f(t)dt-2x^2=\ln(x^2+1) \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(2x+1)\times 2-4x=\frac{2x}{x^2+1}$$

$$f(2x+1)=2x+\frac{x}{x^2+1} \qquad \cdots\cdots \text{ ㉢}$$

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$f(3)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

따라서 $a+f(3)=1+\frac{5}{2}=\frac{7}{2}$

답 ④

8 $f(x)=\sqrt{e^x+\sec x}$로 놓고, 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 $F'(x)=f(x)$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_0^{2h}\sqrt{e^x+\sec x}\,dx=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_0^{2h}f(x)dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_0^{2h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(2h)-F(0)}{h}$$
$$=2\lim_{h\to0}\frac{F(0+2h)-F(0)}{2h}$$
$$=2F'(0)=2f(0)$$
$$=2\sqrt{e^0+\sec 0}$$
$$=2\sqrt{1+1}=2\sqrt{2}$$

답 ④

Level 1 기초 연습

본문 77쪽

1 ⑤ **2** ④ **3** ① **4** ② **5** ①

1 $4^x-2^{x+1}=0$에서

$2^x(2^x-2)=0$

$2^x>0$이므로 $2^x=2$, $x=1$

따라서 $|4^x-2^{x+1}|=\begin{cases}2^{x+1}-4^x & (x<1)\\ 4^x-2^{x+1} & (x\ge1)\end{cases}$이므로

$$\int_0^2|4^x-2^{x+1}|dx$$
$$=\int_0^1(2^{x+1}-4^x)dx+\int_1^2(4^x-2^{x+1})dx$$
$$=\left[\frac{2^{x+1}}{\ln 2}-\frac{4^x}{\ln 4}\right]_0^1+\left[\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{2^{x+1}}{\ln 2}\right]_1^2$$
$$=\left\{\left(\frac{4}{\ln 2}-\frac{4}{\ln 4}\right)-\left(\frac{2}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 4}\right)\right\}$$
$$+\left\{\left(\frac{16}{\ln 4}-\frac{8}{\ln 2}\right)-\left(\frac{4}{\ln 4}-\frac{4}{\ln 2}\right)\right\}$$
$$=\frac{5}{2\ln 2}$$

답 ⑤

2 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x(\sin^2 x)^2dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x(1-\cos^2 x)^2dx$$

$\cos x=t$라 하면

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이고

$-\sin x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x(1-\cos^2 x)^2dx$$
$$=-\int_1^0(1-t^2)^2dt$$
$$=\int_0^1(t^4-2t^2+1)dt$$
$$=\left[\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t\right]_0^1$$
$$=\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\right)-0=\frac{8}{15}$$

답 ④

3 $$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(x^2\sin x-2x\cos x)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}x^2\sin x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{3}}2x\cos x\,dx$$

이때 $\int_0^{\frac{\pi}{3}}x^2\sin x\,dx$에서

$u(x)=x^2$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면

$u'(x)=2x$, $v(x)=-\cos x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}x^2\sin x\,dx=\Big[-x^2\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}2x\cos x\,dx$$
$$=\left(-\frac{\pi^2}{18}-0\right)+\int_0^{\frac{\pi}{3}}2x\cos x\,dx$$
$$=-\frac{\pi^2}{18}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}2x\cos x\,dx$$

따라서

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(x^2\sin x-2x\cos x)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}x^2\sin x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{3}}2x\cos x\,dx=-\frac{\pi^2}{18}$$

답 ①

다른 풀이

$(-x^2\cos x)'=x^2\sin x-2x\cos x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(x^2\sin x-2x\cos x)dx=\Big[-x^2\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=-\frac{\pi^2}{18}-0$$
$$=-\frac{\pi^2}{18}$$

4 $f(x)=\int_e^x f(t)\ln t\,dt+e$ ⋯⋯ ㉠

㉠에 $x=e$를 대입하면

$f(e)=0+e=e$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=f(x)\ln x$ ⋯⋯ ㉡

㉡에 $x=e$를 대입하면

$f'(e)=f(e)\ln e=e\times 1=e$

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f''(x)=f'(x)\ln x+\frac{f(x)}{x}$

따라서

$f''(e)=f'(e)\ln e+\frac{f(e)}{e}=e\times 1+\frac{e}{e}=e+1$

답 ②

5 $f(t)=\pi^{\cos t}$로 놓고, 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면 $F'(t)=f(t)$이므로

$\lim_{x\to\pi}\frac{2}{x^2-\pi^2}\int_\pi^x \pi^{\cos t}dt$

$=\lim_{x\to\pi}\frac{2}{x^2-\pi^2}\int_\pi^x f(t)dt$

$=2\lim_{x\to\pi}\frac{1}{x^2-\pi^2}\Big[F(t)\Big]_\pi^x$

$=2\lim_{x\to\pi}\left\{\frac{1}{x+\pi}\times\frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}\right\}$

$=2\times\frac{1}{2\pi}\times F'(\pi)=\frac{1}{\pi}\times f(\pi)$

이때 $f(\pi)=\pi^{\cos\pi}=\pi^{-1}$이므로

$\lim_{x\to\pi}\frac{2}{x^2-\pi^2}\int_\pi^x \pi^{\cos t}dt=\frac{1}{\pi}\times f(\pi)$

$=\frac{1}{\pi}\times\pi^{-1}=\frac{1}{\pi^2}$

답 ①

Level 2 기본 연습

본문 78쪽

1 ②	2 ①	3 ③	4 65	5 ③

1 $f'(x)=\begin{cases}a(\cos x+1) & (x\le\pi)\\ a\sin 2x & (x>\pi)\end{cases}$에서

$\int a(\cos x+1)dx=a(\sin x+x)+C_1$

(단, C_1은 적분상수)

$\int a\sin 2x\,dx=-\frac{a}{2}\cos 2x+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

이때 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=\pi$에서도 연속이다.

따라서

$f(x)=\begin{cases}a(\sin x+x)+C_1 & (x\le\pi)\\ -\frac{a}{2}\cos 2x+C_2 & (x>\pi)\end{cases}$

$f(0)=-2\pi$이므로 $f(0)=C_1=-2\pi$

$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=2$이므로

$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=-\frac{a}{2}\cos 3\pi+C_2=\frac{a}{2}+C_2=2$

에서 $C_2=2-\frac{a}{2}$ ⋯⋯ ㉠

또한 $\lim_{x\to\pi-}f(x)=\lim_{x\to\pi+}f(x)=f(\pi)$에서

$\lim_{x\to\pi-}f(x)=\lim_{x\to\pi-}\{a(\sin x+x)+C_1\}$

$=a(\sin\pi+\pi)-2\pi=(a-2)\pi,$

$\lim_{x\to\pi+}f(x)=\lim_{x\to\pi+}\left(-\frac{a}{2}\cos 2x+C_2\right)$

$=-\frac{a}{2}\cos 2\pi+C_2$

$=-\frac{a}{2}+C_2,$

$f(\pi)=a(\sin\pi+\pi)-2\pi=(a-2)\pi$

이므로 $(a-2)\pi=-\frac{a}{2}+C_2$ ⋯⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(a-2)\pi=-\frac{a}{2}+\left(2-\frac{a}{2}\right)$

$(a-2)\pi=2-a$, $(a-2)(\pi+1)=0$

$a=2$이므로 $C_2=2-\frac{a}{2}=2-\frac{2}{2}=1$

따라서 $f(x)=\begin{cases}2(\sin x+x-\pi) & (x\le\pi)\\ -\cos 2x+1 & (x>\pi)\end{cases}$이므로

$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)}{a}dx=\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x+x-\pi)dx$

$=\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x+x)dx-\pi\int_{-\pi}^{\pi}dx$

이때 $g(x)=\sin x+x$라 하면 모든 실수 x에 대하여 $g(-x)=\sin(-x)-x=-(\sin x+x)=-g(x)$이므로

$\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x+x)dx=0$

따라서

$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)}{a}dx=\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x+x)dx-\pi\int_{-\pi}^{\pi}dx$

$=0-2\pi\int_0^{\pi}dx=-2\pi\Big[x\Big]_0^{\pi}$

$=-2\pi\times(\pi-0)=-2\pi^2$

답 ②

2 함수 $g(x)$가 함수 $f(x)=e^{2x}+e^x$의 역함수이므로

$f(g(x))=x$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))\times g'(x)=1$

$g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$이므로

$$\int_6^{20}\frac{1}{g(x)\times f'(g(x))}dx=\int_6^{20}\frac{g'(x)}{g(x)}dx$$

이때 $g(x)=t$라 하면 $g'(x)=\dfrac{dt}{dx}$

한편, $g(6)=t$에서 역함수의 성질에 의하여 $f(t)=6$이므로

$f(t)=e^{2t}+e^t=6$

$(e^t+3)(e^t-2)=0$

$e^t>0$이므로 $e^t=2$, $t=\ln 2$

또한 $g(20)=t$에서 역함수의 성질에 의하여 $f(t)=20$이므로

$f(t)=e^{2t}+e^t=20$

$(e^t+5)(e^t-4)=0$

$e^t>0$이므로 $e^t=4$, $t=\ln 4=2\ln 2$

따라서

$$\int_6^{20}\frac{1}{g(x)\times f'(g(x))}dx$$

$$=\int_6^{20}\frac{g'(x)}{g(x)}dx=\int_{\ln 2}^{2\ln 2}\frac{1}{t}dt=\Big[\ln|t|\Big]_{\ln 2}^{2\ln 2}$$

$$=\ln(2\ln 2)-\ln(\ln 2)=\ln\left(\frac{2\ln 2}{\ln 2}\right)=\ln 2$$

답 ①

참고

함수 $f(x)=e^{2x}+e^x$에서 $f'(x)=2e^{2x}+e^x$

이때 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이므로 $f'(g(x))>0$이다.

3 조건 (가)의 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)+f(0)}{x}=6$에서

$x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다. 즉,

$\lim\limits_{x\to 0}\{f(2x)-f(x)+f(0)\}=f(0)=0$

이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)+f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(2x)-f(0)}{x}-\frac{f(x)-f(0)}{x}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{2\times\frac{f(2x)-f(0)}{2x}-\frac{f(x)-f(0)}{x}\right\}$$

$=2f'(0)-f'(0)=f'(0)=6$

조건 (나)의 $f'(x)=(x+2)\sqrt{x^2+4x+k}$에서

$f'(0)=2\sqrt{k}=6$, $k=9$

즉, $f'(x)=(x+2)\sqrt{x^2+4x+9}$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x+2)\sqrt{x^2+4x+9}\,dx$$

$x^2+4x+9=t$라 하면 $2(x+2)=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int\frac{\sqrt{t}}{2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times t^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$$

$=\dfrac{1}{3}(x^2+4x+9)^{\frac{3}{2}}+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(0)=0$이므로

$f(0)=9+C=0$, $C=-9$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{3}(x^2+4x+9)^{\frac{3}{2}}-9$이므로

$$k\times f(-2)=9\times\left(\frac{5\sqrt{5}}{3}-9\right)$$

$$=3(5\sqrt{5}-27)$$

답 ③

4 $a_n=\displaystyle\int_0^n(x-n)e^x\,dx$에서

$u(x)=x-n$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$이므로

$$a_n=\int_0^n(x-n)e^x\,dx$$

$$=\Big[(x-n)e^x\Big]_0^n-\int_0^n e^x\,dx$$

$$=\{0-(-n)\}-\Big[e^x\Big]_0^n$$

$=n-(e^n-1)=n-e^n+1$

따라서 $a_n+e^n=n+1$이므로

$$\sum_{n=1}^{10}(a_n+e^n)=\sum_{n=1}^{10}(n+1)$$

$$=\frac{10\times 11}{2}+10=65$$

답 65

5 $\displaystyle\int_0^x(x-t)f(t)dt=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$

이므로

$$\int_0^x(x-t)f(t)dt=(a+2b)\sin x+(2a+b)\ln(x+1)$$

에서

$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$

$=(a+2b)\sin x+(2a+b)\ln(x+1)$ ...... ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=(a+2b)\cos x+\frac{2a+b}{x+1}$$

$$\int_0^x f(t)dt=(a+2b)\cos x+\frac{2a+b}{x+1} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=(a+2b)+(2a+b)$

$b=-a$ ...... ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$$\int_0^x f(t)dt=-a\cos x+\frac{a}{x+1} \quad \cdots\cdots ㉣$$

㉣의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=a\sin x-\frac{a}{(x+1)^2}$$

이때 $f(0)=2$이므로

$f(0)=-a=2$, $a=-2$

따라서 $f(x)=-2\sin x+\dfrac{2}{(x+1)^2}$이고

$f'(x)=-2\cos x-\dfrac{4}{(x+1)^3}$이므로

$f'(a+b)=f'(0)=-2-4=-6$

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 79쪽

1 ⑤ **2** ④ **3** ④

1 함수 $f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\sin t|dt$는 x의 값에 따라 다음과 같다.

(i) $-\pi\le x<0$일 때

$-\pi\le x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $-1\le\sin x\le 0$이고 $0\le t\le\frac{\pi}{2}$인 모든 실수 t에 대하여 $0\le\sin t\le 1$이므로

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\sin t|dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t-\sin x)dt$$

$$=\Big[-\cos t-t\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(0-\frac{\pi}{2}\sin x\right)-(-1-0)$$

$$=-\frac{\pi}{2}\sin x+1$$

(ii) $0\le x<\frac{\pi}{2}$일 때

$0\le t\le x$이면 $\sin x\ge\sin t$

$x\le t\le\frac{\pi}{2}$이면 $\sin x\le\sin t$

그러므로

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\sin t|dt$$

$$=\int_0^x(\sin x-\sin t)dt+\int_x^{\frac{\pi}{2}}(\sin t-\sin x)dt$$

$$=\Big[t\sin x+\cos t\Big]_0^x+\Big[-\cos t-t\sin x\Big]_x^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\{(x\sin x+\cos x)-(0+1)\}$$

$$+\left\{\left(0-\frac{\pi}{2}\sin x\right)-(-\cos x-x\sin x)\right\}$$

$$=\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x+2\cos x-1$$

(iii) $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$일 때

모든 실수 x에 대하여 $\sin x=\sin(\pi-x)$이므로

$0\le t\le\pi-x$이면 $\sin x\ge\sin t$

$\pi-x\le t\le\frac{\pi}{2}$이면 $\sin x\le\sin t$

그러므로

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\sin t|dt$$

$$=\int_0^{\pi-x}(\sin x-\sin t)dt$$

$$+\int_{\pi-x}^{\frac{\pi}{2}}(\sin t-\sin x)dt$$

$$=\Big[t\sin x+\cos t\Big]_0^{\pi-x}+\Big[-\cos t-t\sin x\Big]_{\pi-x}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=[\{(\pi-x)\sin x+\cos(\pi-x)\}-(0+1)]$$

$$+\left[\left(0-\frac{\pi}{2}\sin x\right)-\{-\cos(\pi-x)-(\pi-x)\sin x\}\right]$$

$$=\left(\frac{3}{2}\pi-2x\right)\sin x-2\cos x-1$$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\sin x+1 & (-\pi\le x<0)\\ \left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)\sin x+2\cos x-1 & \left(0\le x<\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \left(\dfrac{3}{2}\pi-2x\right)\sin x-2\cos x-1 & \left(\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi\right)\end{cases}$$

ㄱ. $f(0)=0+2-1=1$ (참)

ㄴ. $f_1(x)=-\frac{\pi}{2}\sin x+1$,

$f_2(x)=\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x+2\cos x-1$,

$f_3(x)=\left(\frac{3}{2}\pi-2x\right)\sin x-2\cos x-1$

이라 하면

$f_1{}'(x)=-\frac{\pi}{2}\cos x$

$f_2{}'(x)=2\sin x+\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x-2\sin x$

$\qquad=\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x$

$f_3{}'(x)=-2\sin x+\left(\frac{3}{2}\pi-2x\right)\cos x+2\sin x$

$\qquad=\left(\frac{3}{2}\pi-2x\right)\cos x$

이때 $f_1(0)=f_2(0)=1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이고,

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0}$$
$$=f_1{}'(0)=-\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{f_2(x)-f_2(0)}{x-0}$$
$$=f_2{}'(0)=-\frac{\pi}{2}$$

이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\frac{\pi}{2}$, 즉 $f'(0)=-\frac{\pi}{2}$

또 $f_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=f_3\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-1$이므로 함수 $f(x)$는

$x=\frac{\pi}{2}$에서 연속이고, 마찬가지 방법으로

$f_2{}'\left(\frac{\pi}{2}\right)=f_3{}'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=0,\ \text{즉 } f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

따라서

$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}\cos x & (-\pi<x<0)\\ \left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x & \left(0\le x<\frac{\pi}{2}\right)\\ \left(\frac{3}{2}\pi-2x\right)\cos x & \left(\frac{\pi}{2}\le x<\pi\right)\end{cases}$$

$-\pi<x<0$에서 방정식 $-\frac{\pi}{2}\cos x=0$을 만족시키는

x의 값은 $-\frac{\pi}{2}$이고,

$0\le x<\frac{\pi}{2}$에서 방정식 $\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x=0$을 만족시키는

x의 값은 $\frac{\pi}{4}$이고,

$\frac{\pi}{2}\le x<\pi$에서 방정식 $\left(\frac{3}{2}\pi-2x\right)\cos x=0$을 만족시키는 x의 값은 $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{4}\pi$이므로

닫힌구간 $[-\pi, \pi]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$f(-\pi)$	$\nearrow$	$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$	$\searrow$	$f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

x	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$\searrow$	$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)$	$\nearrow$	$f(\pi)$

$f(-\pi)=-\frac{\pi}{2}\sin(-\pi)+1$

$\qquad=1$

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+1$

$\qquad=\frac{\pi}{2}+1$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{4}+2\cos\frac{\pi}{4}-1$

$\qquad=\sqrt{2}-1$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\pi-\pi\right)\sin\frac{\pi}{2}-2\cos\frac{\pi}{2}-1$

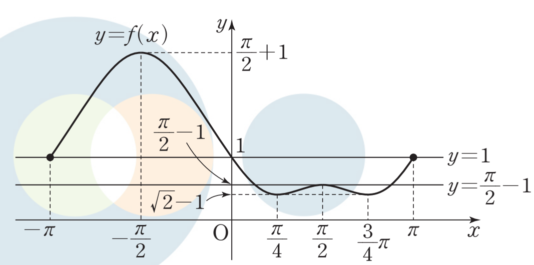
$\qquad=\frac{\pi}{2}-1$

$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{3}{2}\pi\right)\sin\frac{3}{4}\pi-2\cos\frac{3}{4}\pi-1$

$\qquad=\sqrt{2}-1$

$f(\pi)=\left(\frac{3}{2}\pi-2\pi\right)\sin\pi-2\cos\pi-1=1$

이므로 곡선 $y=f(x)$는 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{\pi}{2}+1$이다. (참)

ㄷ. x에 대한 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=k$와 만나는 서로 다른 점의 개수가 3이어야 하므로 가능한 k의 값은 1, $\frac{\pi}{2}-1$이다.

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$1+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\frac{\pi}{2}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

2 $f'(x)-f'(-x)=\{f(x)+f(-x)\}'$이므로

$f'(x)-f'(-x)=4\sec^4 x\tan x$에서

$$f(x)+f(-x)=\int\{f'(x)-f'(-x)\}dx$$
$$=\int 4\sec^4 x\tan x\,dx$$

$\sec x=t$라 하면 $\sec x\tan x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)+f(-x)=\int 4\sec^4 x\tan x\,dx$$
$$=\int 4t^3\,dt=t^4+C$$
$$=\sec^4 x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에 $x=0$을 대입하면

$2f(0)=\sec^4 0+C=1+C$

$f(0)=\frac{1+C}{2}$

이때 조건 (가)에서 $f(0)=\frac{\pi+1}{2\pi}$이므로

$\frac{1+C}{2}=\frac{\pi+1}{2\pi}$, $C=\frac{1}{\pi}$

따라서 $f(x)+f(-x)=\sec^4 x+\frac{1}{\pi}$

한편,

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$$

이므로 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(x)dx$에서 $x=-s$라 하면

$x=-\frac{\pi}{4}$일 때 $s=\frac{\pi}{4}$, $x=0$일 때 $s=0$이고

$1=-\frac{ds}{dx}$이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$$
$$=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} f(-s)ds+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$$
$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} f(-s)ds+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$$
$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} f(-x)dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$$
$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \{f(-x)+f(x)\}dx$$
$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\sec^4 x+\frac{1}{\pi}\right)dx$$
$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^4 x\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} dx$$

이때

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^4 x\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\sec^2 x\,dx$$
$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 x)\sec^2 x\,dx$$

에서 $\tan x=u$라 하면

$x=0$일 때 $u=0$, $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $u=1$이고

$\sec^2 x=\frac{du}{dx}$이므로

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 x)\sec^2 x\,dx=\int_{0}^{1}(1+u^2)du$$
$$=\left[u+\frac{1}{3}u^3\right]_0^1$$
$$=\left(1+\frac{1}{3}\right)-0=\frac{4}{3}$$

이고

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} dx=\frac{1}{\pi}\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=\frac{1}{4}$$

따라서

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^4 x\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} dx$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{1}{4}=\frac{19}{12}$$

답 ④

3 $f'(x)=x^2e^x$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int x^2e^x\,dx$

$u_1(x)=x^2$, $v_1'(x)=e^x$으로 놓으면

$u_1'(x)=2x$, $v_1(x)=e^x$이므로

$$f(x)=\int x^2e^x\,dx$$
$$=x^2e^x-\int 2xe^x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

또한 $\int 2xe^x\,dx$에서

$u_2(x)=2x$, $v_2'(x)=e^x$으로 놓으면

$u_2'(x)=2$, $v_2(x)=e^x$이므로

$$\int 2xe^x\,dx=2xe^x-\int 2e^x\,dx$$
$$=2xe^x-2e^x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=x^2e^x-(2xe^x-2e^x+C)$

$\quad=e^x(x^2-2x+2)-C$

이때 $f(0)=2$이므로

$f(0)=2-C=2$, $C=0$

즉, $f(x)=e^x(x^2-2x+2)$
한편, $f'(x)=x^2e^x$에서
$f''(x)=2xe^x+x^2e^x=x(x+2)e^x$
이므로 $f''(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$
이때 $x=-2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌고, $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표는
$(-2, f(-2))$, $(0, f(0))$이다.

$f(-2)=e^{-2}(4+4+2)=\frac{10}{e^2}$, $f(0)=2$

이므로 두 변곡점 $\left(-2, \frac{10}{e^2}\right)$, $(0, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y-2=\frac{2-\frac{10}{e^2}}{0-(-2)}(x-0)$$

즉, $y=\frac{e^2-5}{e^2}x+2$

이고, 이 직선의 x절편은 $-\frac{2e^2}{e^2-5}$, y절편은 2이다.
따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times\left|-\frac{2e^2}{e^2-5}\right|\times 2=\frac{2e^2}{e^2-5}$$

답 ④

07 정적분의 활용

유제					본문 81~89쪽
1 ①	**2** ②	**3** ②	**4** ②	**5** ⑤	**6** ①
7 ②	**8** ③	**9** ④			

1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3ke^2}{n}+\sqrt[n]{e^{2k}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(3e^2\times\frac{k}{n}+e^{2\times\frac{k}{n}}\right)$$
$$=\int_0^1(3e^2x+e^{2x})dx$$
$$=\left[\frac{3}{2}e^2x^2+\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1$$
$$=\left(\frac{3}{2}e^2+\frac{1}{2}e^2\right)-\left(0+\frac{1}{2}\right)$$
$$=2e^2-\frac{1}{2}$$

답 ①

2

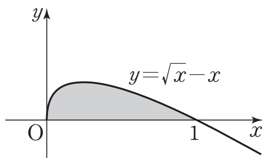
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+n}{n^2+nk+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2\times\frac{k}{n}+1}{1+\frac{k}{n}+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$
$$=\int_0^1\frac{2x+1}{1+x+x^2}dx$$

$x^2+x+1=t$로 놓으면
$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=3$이고
$2x+1=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+n}{n^2+nk+k^2}=\int_0^1\frac{2x+1}{1+x+x^2}dx$$
$$=\int_1^3\frac{1}{t}dt$$
$$=\Big[\ln|t|\Big]_1^3$$
$$=\ln 3-0=\ln 3$$

답 ②

3 곡선 $y=\sqrt{x}-x$와 x축이 만나는 점의 x좌표는
$\sqrt{x}-x=0$에서
$\sqrt{x}(1-\sqrt{x})=0$
$\sqrt{x}=0$ 또는 $\sqrt{x}=1$
즉, $x=0$ 또는 $x=1$
이때 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $y=\sqrt{x}-x\geq 0$이고,
구간 $[1, \infty)$에서 $y=\sqrt{x}-x\leq 0$이다.

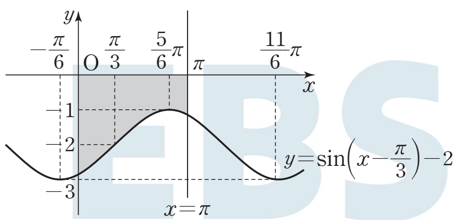


따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1 |\sqrt{x}-x|\,dx=\int_0^1 (\sqrt{x}-x)\,dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)-0=\frac{1}{6}$$

답 ②

4 곡선 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-2$는 곡선 $y=\sin x$를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.



모든 실수 x에 대하여 $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-2<0$이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^{\pi}\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-2\right|dx=\int_0^{\pi}\left\{2-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right\}dx$$
$$=\left[2x+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\pi}$$
$$=\left(2\pi-\frac{1}{2}\right)-\left(0+\frac{1}{2}\right)$$
$$=2\pi-1$$

답 ②

5 두 곡선 $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$가 만나는 점의 x좌표는

$x^3=\sqrt{x}\ (x\geq 0)$에서

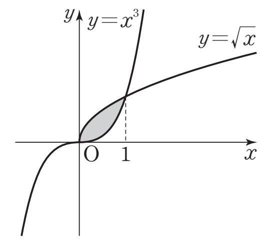
$x^6=x$, $x(x^5-1)=0$

$x(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$

$x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $x^4+x^3+x^2+x+1>0$이므로

$x=0$ 또는 $x=1$

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $x^3\leq\sqrt{x}$이므로 구하는 넓이는



$$\int_0^1 (\sqrt{x}-x^3)\,dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$
$$=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)-0=\frac{5}{12}$$

답 ⑤

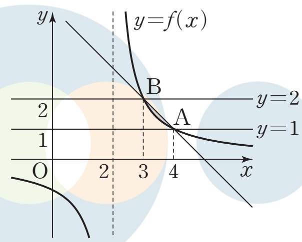
6 $f(x)=\frac{2}{x-2}$라 하면 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=\frac{2}{x}$를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=1$이 만나는 점 A의 좌표는

$\frac{2}{x-2}=1$에서 $x=4$이므로 $A(4,\ 1)$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2$가 만나는 점 B의 좌표는

$\frac{2}{x-2}=2$에서 $x=3$이므로 $B(3,\ 2)$



직선 AB의 방정식은

$y-1=\frac{2-1}{3-4}(x-4)$, 즉 $y=-x+5$

닫힌구간 $[3,\ 4]$에서 $f(x)\leq -x+5$이므로 구하는 넓이는

$$\int_3^4\left\{(-x+5)-\frac{2}{x-2}\right\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+5x-2\ln|x-2|\right]_3^4$$
$$=(-8+20-2\ln 2)-\left(-\frac{9}{2}+15-0\right)$$
$$=\frac{3}{2}-2\ln 2$$

답 ①

7 $0\leq t\leq \ln 2$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면인 정삼각형의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}\{2(2e^t+1)\}^2=\sqrt{3}(4e^{2t}+4e^t+1)$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^{\ln 2} S(t)dt$$
$$=\sqrt{3}\int_0^{\ln 2}(4e^{2t}+4e^t+1)dt$$
$$=\sqrt{3}\Big[2e^{2t}+4e^t+t\Big]_0^{\ln 2}$$
$$=\sqrt{3}\{(2e^{2\ln 2}+4e^{\ln 2}+\ln 2)-(2+4+0)\}$$
$$=\sqrt{3}\{(8+8+\ln 2)-6\}$$
$$=\sqrt{3}(10+\ln 2)$$

답 ②

8 $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$에서

$$\frac{dx}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t),$$
$$\frac{dy}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t(\cos t-\sin t)$$

이므로

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$
$$=\sqrt{e^{2t}(\sin t+\cos t)^2+e^{2t}(\cos t-\sin t)^2}$$
$$=\sqrt{e^{2t}(1+2\sin t\cos t)+e^{2t}(1-2\sin t\cos t)}$$
$$=\sqrt{2e^{2t}}=\sqrt{2}e^t$$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$$s=\int_0^a\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$
$$=\sqrt{2}\int_0^a e^t dt$$
$$=\sqrt{2}\Big[e^t\Big]_0^a=\sqrt{2}(e^a-1)$$

이때 $s=3\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{2}(e^a-1)=3\sqrt{2}$, $e^a=4$

따라서 $a=\ln 4=2\ln 2$

답 ③

9 $x=\frac{2}{3}t^3$, $y=2t^2$에서

$$\frac{dx}{dt}=2t^2,\ \frac{dy}{dt}=4t$$

이므로

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(2t^2)^2+(4t)^2}$$
$$=\sqrt{4t^2(t^2+4)}$$
$$=2|t|\sqrt{t^2+4}$$

따라서 $0\le t\le\sqrt{5}$에서 이 곡선의 길이를 l이라 하면

$$l=\int_0^{\sqrt{5}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$
$$=\int_0^{\sqrt{5}}2t\sqrt{t^2+4}\,dt$$

$t^2+4=s$로 놓으면 $t=0$일 때 $s=4$, $t=\sqrt{5}$일 때 $s=9$이고

$2t=\frac{ds}{dt}$이므로

$$l=\int_0^{\sqrt{5}}2t\sqrt{t^2+4}\,dt$$
$$=\int_4^9\sqrt{s}\,ds$$
$$=\left[\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}\right]_4^9$$
$$=\frac{2}{3}(27-8)=\frac{38}{3}$$

답 ④

Level 1 기초 연습

본문 90~91쪽

1 ④ **2** ② **3** ④ **4** ④ **5** ① **6** ⑤
7 ③ **8** ②

1 $f(x)=\sin\pi x+\frac{a}{\pi}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{2n}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sin\pi x+\frac{a}{\pi}\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x+\frac{a}{\pi}x\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=\left(0+\frac{a}{2\pi}\right)-\left(-\frac{1}{\pi}+0\right)$$
$$=\frac{a+2}{2\pi}=\frac{3}{\pi}$$

에서 $a=4$

답 ④

다른 풀이

$f(x)=\sin\pi x+\frac{a}{\pi}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{2n}\right)=\frac{1}{2}\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\sin\frac{\pi}{2}x+\frac{a}{\pi}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x+\frac{a}{\pi}x\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(0+\frac{a}{\pi}\right)-\left(-\frac{2}{\pi}+0\right)\right\}$$
$$=\frac{a+2}{2\pi}=\frac{3}{\pi}$$

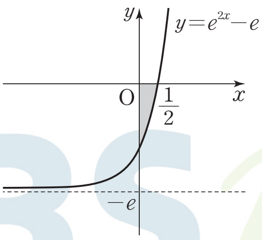
에서 $a=4$

2 곡선 $y=e^{2x}-e$와 x축이 만나는 점의 x좌표는

$e^{2x}-e=0$에서

$e^{2x}=e$, $2x=1$, $x=\frac{1}{2}$

곡선 $y=e^{2x}-e$는 곡선 $y=(e^2)^x$을 y축의 방향으로 $-e$만큼 평행이동한 것이므로 그림과 같다.



따라서 닫힌구간 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$에서

$e^{2x}-e\le 0$이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^{\frac{1}{2}}|e^{2x}-e|dx=\int_0^{\frac{1}{2}}(e-e^{2x})dx$$
$$=\left[ex-\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=\left(\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}e\right)-\left(0-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}$$

답 ②

3 닫힌구간 $[1, a]$에서 $y=\frac{1}{x}>0$이므로 곡선 $y=\frac{1}{x}$ $(x>0)$과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=a$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_1^a\frac{1}{x}dx=\Big[\ln|x|\Big]_1^a=\ln a-0=\ln a$$

넓이 S가 직선 $x=b$에 의하여 이등분되므로

$$\int_1^b\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}S$$

이때 $\int_1^b\frac{1}{x}dx=\Big[\ln|x|\Big]_1^b=\ln b-0=\ln b$이므로

$\ln b=\frac{\ln a}{2}$, $\ln a=\ln b^2$, $a=b^2$

$a+b=6$이므로

$b^2+b=6$, $(b+3)(b-2)=0$

$b>1$이므로 $b=2$이고 $a=b^2=4$

따라서 $S=\ln a=\ln 4=2\ln 2$이므로

$$\frac{S}{a\times b}=\frac{2\ln 2}{4\times 2}=\frac{\ln 2}{4}$$

답 ④

4 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 $f(x)=\sqrt{3}\tan x\ge 0$이므로 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=\frac{\pi}{3}$로 둘러싸인 부분의 넓이 S_1은

$$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{3}\tan x\,dx$$
$$=\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x}dx$$
$$=-\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$$
$$=-\sqrt{3}\Big[\ln|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=-\sqrt{3}\left(\ln\frac{1}{2}-0\right)=\sqrt{3}\ln 2$$

한편, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$이므로 S_2는 네 점 $(0, 0)$, $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}, 3\right)$, $(0, 3)$을 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이에서 S_1을 뺀 것이다.

따라서

$$S_2=\frac{\pi}{3}\times 3-S_1=\pi-\sqrt{3}\ln 2$$

이므로

$$S_2-S_1=(\pi-\sqrt{3}\ln 2)-\sqrt{3}\ln 2$$
$$=\pi-2\sqrt{3}\ln 2$$

답 ④

5 $f(x)=e\ln x$라 하면

$f'(x)=\frac{e}{x}$

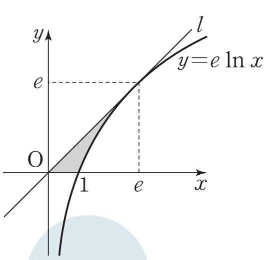
이때 $f'(e)=1$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (e, e)에서의 접선 l의 방정식은

$y-e=1\times(x-e)$, 즉 $y=x$

한편, 곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 x좌표는

$f(x)=e\ln x=0$에서 $x=1$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 l 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면



$$S=\int_0^e x\,dx-e\int_1^e\ln x\,dx$$

이때

$$\int_0^e x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^e=\frac{e^2}{2}$$

$\int_1^e\ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$이므로

$$\int_1^e\ln x\,dx=\Big[x\ln x\Big]_1^e-\int_1^e dx$$
$$=(e-0)-\Big[x\Big]_1^e$$
$$=e-(e-1)=1$$

따라서

$$S=\int_0^e x\,dx-e\int_1^e \ln x\,dx=\frac{e^2}{2}-e\times 1=\frac{e(e-2)}{2}$$

답 ①

다른 풀이

직선 l의 방정식을 구한 후, 곡선 $y=e\ln x$와 직선 l 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S를 다음과 같이 구할 수도 있다.

$y=e\ln x$에서 $\ln x=\frac{y}{e}$, $x=e^{\frac{y}{e}}$이므로

$$S=\int_0^e \left(e^{\frac{y}{e}}-y\right)dy=\left[e\times e^{\frac{y}{e}}-\frac{1}{2}y^2\right]_0^e$$

$$=\left(e^2-\frac{1}{2}e^2\right)-(e-0)=\frac{e(e-2)}{2}$$

6 $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+2=-\sin x+2$

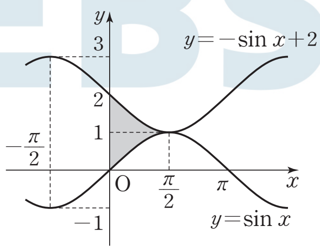
$0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 곡선 $y=\sin x$와 곡선

$y=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+2$, 즉 $y=-\sin x+2$가 만나는 점의

x좌표는

$\sin x=-\sin x+2$에서

$\sin x=1$, $x=\frac{\pi}{2}$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{(-\sin x+2)-\sin x\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-2\sin x+2)dx$$

$$=\left[2\cos x+2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=(0+\pi)-(2+0)=\pi-2$$

답 ⑤

7 $\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{\pi}{3}$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면인 정삼각형의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{\sin^3 t\cos t}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin^3 t\cos t$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}S(t)dt$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^3 t\cos t\,dt$$

$\sin t=s$로 놓으면

$t=\frac{\pi}{6}$일 때 $s=\frac{1}{2}$, $t=\frac{\pi}{3}$일 때 $s=\frac{\sqrt{3}}{2}$이고

$\cos t=\frac{ds}{dt}$이므로

$$V=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^3 t\cos t\,dt$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}s^3\,ds$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{4}s^4\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{9}{64}-\frac{1}{64}\right)=\frac{\sqrt{3}}{32}$$

답 ③

8 $f(x)=x^2-\frac{\ln x}{8}$에서

$f'(x)=2x-\frac{1}{8x}$이므로

$$\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}=\sqrt{1+\left(2x-\frac{1}{8x}\right)^2}$$

$$=\sqrt{4x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{64x^2}}$$

$$=\sqrt{\left(2x+\frac{1}{8x}\right)^2}=\left|2x+\frac{1}{8x}\right|$$

따라서 $1\le x\le 2$에서 이 곡선의 길이는

$$\int_1^2\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx=\int_1^2\left(2x+\frac{1}{8x}\right)dx$$

$$=\left[x^2+\frac{\ln|x|}{8}\right]_1^2$$

$$=\left(4+\frac{\ln 2}{8}\right)-(1+0)$$

$$=3+\frac{\ln 2}{8}$$

답 ②

Level 2 기본 연습 본문 92~93쪽

1 ① 2 ② 3 ① 4 ④ 5 ③ 6 ②

7 ④

1 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x\{\ln(kx+n)-\ln n\}}{kx+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln\left(\frac{kx}{n}+1\right)}{\frac{kx}{n}+1}$

$=\int_1^{x+1}\frac{\ln t}{t}dt$

이때 $\ln t=s$로 놓으면

$t=1$일 때 $s=0$, $t=x+1$일 때 $s=\ln(x+1)$이고

$\frac{1}{t}=\frac{ds}{dt}$이므로

$f(x)=\int_1^{x+1}\frac{\ln t}{t}dt$

$=\int_0^{\ln(x+1)}s\,ds$

$=\left[\frac{1}{2}s^2\right]_0^{\ln(x+1)}=\frac{\{\ln(x+1)\}^2}{2}$

$f'(x)=\frac{\ln(x+1)}{x+1}$이므로 방정식 $f(a)=\{f'(a)\}^2$에서

$\frac{\{\ln(a+1)\}^2}{2}=\left\{\frac{\ln(a+1)}{a+1}\right\}^2=\frac{\{\ln(a+1)\}^2}{(a+1)^2}$

$\ln(a+1)=0$ 또는 $(a+1)^2=2$

즉, $a=0$ 또는 $a=-1\pm\sqrt{2}$

이때 $a>-1$이므로 $a=0$ 또는 $a=\sqrt{2}-1$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$0+(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}-1$

답 ①

2 삼각형 OAB가 한 변의 길이가 1인 정삼각형이므로

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{AB}}=1$

점 P_k가 선분 AB를 $k:(n-k)$로 내분하는 점이므로

$\overline{\mathrm{AP}_k}=\frac{k}{n}\times\overline{\mathrm{AB}}=\frac{k}{n}\times 1=\frac{k}{n}$

$\angle\mathrm{OAB}=\frac{\pi}{3}$이므로 삼각형 OAP_k에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{OP}_k}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{AP}_k}^2-2\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AP}_k}\times\cos\frac{\pi}{3}$

$\overline{\mathrm{OP}_k}^2-\overline{\mathrm{AP}_k}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2-2\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AP}_k}\times\cos\frac{\pi}{3}$

$=1^2-2\times1\times\frac{k}{n}\times\frac{1}{2}=1-\frac{k}{n}$

따라서 $l_k=1-\frac{k}{n}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}e^{l_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}e^{1-\frac{k}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{1-\frac{k}{n}}-\frac{1}{n}\right)$

$=\int_0^1 e^{1-x}dx-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$

$=\left[-e^{1-x}\right]_0^1-0$

$=-1-(-e)$

$=e-1$

답 ②

3 곡선 $y=-\frac{6}{x+1}+a\ (x>-1)$은 곡선 $y=-\frac{6}{x}\ (x>0)$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다. 이때 함수 $f(x)=-\frac{6}{x+1}+a\ (x>-1)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면을 모두 지나려면 $a>0$, $f(0)<0$이어야 한다.

$f(0)=-6+a<0$에서 $a<6$이므로

$0<a<6$

한편, 조건 (나)에서 곡선 $y=f(x)$가 x축과 점 $(x_1, 0)$에서 만나므로 $-\frac{6}{x_1+1}+a=0$에서 $x_1=\frac{6}{a}-1$

곡선 $y=f(x)$가 y축과 점 $(0, y_1)$에서 만나므로

$y_1=f(0)=-6+a$

$x_1y_1=-8$에서 $\left(\frac{6}{a}-1\right)(-6+a)=-8$

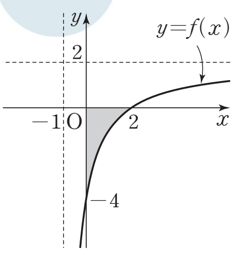
$-\frac{36}{a}+20-a=0$, $a^2-20a+36=0$

$(a-2)(a-18)=0$

$0<a<6$이므로 $a=2$이고

$x_1=\frac{6}{2}-1=2$, $y_1=-6+2=-4$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 그림과 같고 닫힌구간 $[0, 2]$에서 $f(x)\le0$이므로 구하는 넓이는



$\int_0^2|f(x)|dx$

$=\int_0^2\{-f(x)\}dx$

$=\int_0^2\left(\frac{6}{x+1}-2\right)dx$

$=\left[6\ln|x+1|-2x\right]_0^2$

$=(6\ln3-4)-0$

$=6\ln3-4$

답 ①

4 $f(x)=xe^{x^2-1}$에서

$f'(x)=e^{x^2-1}+xe^{x^2-1}\times2x=(2x^2+1)e^{x^2-1}$

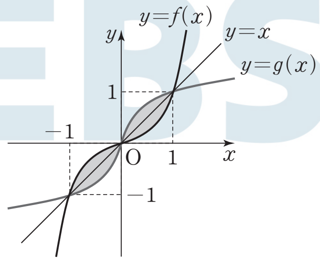
이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$, 즉 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

이때 함수 $g(x)$가 함수 $f(x)$의 역함수이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표는

$f(x)=x$, 즉 $xe^{x^2-1}=x$에서

$x(e^{x^2-1}-1)=0$, $x=0$ 또는 $e^{x^2-1}=1$
즉, $x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$
$f(0)=0$, $f'(0)=\dfrac{1}{e}<1$이고, 모든 실수 x에 대하여
$f(-x)=-xe^{(-x)^2-1}=-xe^{x^2-1}=-f(x)$
이므로 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.
이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 그림과 같다.



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

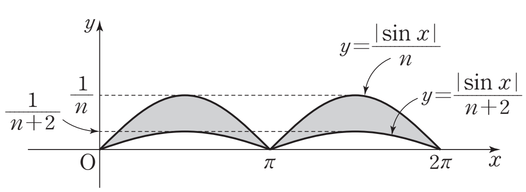
$$S=\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|dx$$
$$=2\int_{0}^{1}\{g(x)-f(x)\}dx$$
$$=4\int_{0}^{1}\{x-f(x)\}dx$$
$$=4\int_{0}^{1}x(1-e^{x^2-1})dx$$

$x^2-1=t$로 놓으면
$x=0$일 때 $t=-1$, $x=1$일 때 $t=0$이고
$2x=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$$S=4\int_{0}^{1}x(1-e^{x^2-1})dx$$
$$=2\int_{-1}^{0}(1-e^t)dt=2\Big[t-e^t\Big]_{-1}^{0}$$
$$=2\left\{(0-1)-\left(-1-\frac{1}{e}\right)\right\}=\frac{2}{e}$$

답 ④

5 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 두 곡선 $y=\dfrac{|\sin x|}{n}$, $y=\dfrac{|\sin x|}{n+2}$는 그림과 같이 세 점 $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(2\pi, 0)$에서 만난다.



닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 $\dfrac{|\sin x|}{n}\geq\dfrac{|\sin x|}{n+2}$이고 두 곡선 $y=\dfrac{|\sin x|}{n}$, $y=\dfrac{|\sin x|}{n+2}$의 주기는 모두 π이다.
또한 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 $|\sin x|=\sin x$이므로 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 두 곡선 $y=\dfrac{|\sin x|}{n}$, $y=\dfrac{|\sin x|}{n+2}$로 둘러싸인 부분의 넓이 a_n은

$$a_n=\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{|\sin x|}{n}-\frac{|\sin x|}{n+2}\right)dx$$
$$=2\int_{0}^{\pi}\left(\frac{\sin x}{n}-\frac{\sin x}{n+2}\right)dx$$
$$=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx$$
$$=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\times\Big[-\cos x\Big]_{0}^{\pi}$$
$$=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\{1-(-1)\}$$
$$=4\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$$
$$=4\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=4\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=4\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=4\times\frac{3}{2}=6$$

답 ③

6 $\sqrt{e}\leq t\leq e$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면인 반원의 넓이를 $S(t)$라 하면
$\overline{PQ}=2\sqrt{t}\ln t$
이므로

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\overline{PQ}\right)^2=\frac{\pi}{2}t(\ln t)^2$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_{\sqrt{e}}^{e}S(t)dt$$
$$=\frac{\pi}{2}\int_{\sqrt{e}}^{e}t(\ln t)^2dt$$

$u_1(t)=(\ln t)^2$, $v_1'(t)=t$로 놓으면
$u_1'(t)=\dfrac{2\ln t}{t}$, $v_1(t)=\dfrac{1}{2}t^2$이므로

$$V=\frac{\pi}{2}\int_{\sqrt{e}}^{e} t(\ln t)^2 dt$$
$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{(t\ln t)^2}{2}\right]_{\sqrt{e}}^{e}-\frac{\pi}{2}\int_{\sqrt{e}}^{e} t\ln t\,dt$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{e^2}{2}-\frac{e}{8}\right)-\frac{\pi}{2}\int_{\sqrt{e}}^{e} t\ln t\,dt$$

또한 $u_2(t)=\ln t$, $v_2'(t)=t$로 놓으면

$u_2'(t)=\frac{1}{t}$, $v_2(t)=\frac{1}{2}t^2$이므로

$$\int_{\sqrt{e}}^{e} t\ln t\,dt=\left[\frac{t^2\ln t}{2}\right]_{\sqrt{e}}^{e}-\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{1}{2}t\,dt$$
$$=\left(\frac{e^2}{2}-\frac{e}{4}\right)-\left[\frac{t^2}{4}\right]_{\sqrt{e}}^{e}$$
$$=\left(\frac{e^2}{2}-\frac{e}{4}\right)-\left(\frac{e^2}{4}-\frac{e}{4}\right)$$
$$=\frac{e^2}{4}$$

따라서

$$V=\frac{\pi}{2}\left(\frac{e^2}{2}-\frac{e}{8}\right)-\frac{\pi}{2}\int_{\sqrt{e}}^{e} t\ln t\,dt$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{e^2}{2}-\frac{e}{8}\right)-\frac{e^2}{8}\pi$$
$$=\frac{e\pi}{16}(2e-1)$$

답 ②

7 $x=a\sin t+b\cos t$, $y=b\sin t-a\cos t$에서

$\frac{dx}{dt}=a\cos t-b\sin t$, $\frac{dy}{dt}=b\cos t+a\sin t$

이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$
$$=(a\cos t-b\sin t)^2+(b\cos t+a\sin t)^2$$
$$=(a^2\cos^2 t-2ab\sin t\cos t+b^2\sin^2 t)$$
$$+(b^2\cos^2 t+2ab\sin t\cos t+a^2\sin^2 t)$$
$$=(a^2+b^2)(\sin^2 t+\cos^2 t)$$
$$=a^2+b^2$$

시각 $t=1$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리를 s_1이라 하면

$$s_1=\int_1^2\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\int_1^2 dt$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\times\Big[\,t\,\Big]_1^2$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\times(2-1)=\sqrt{a^2+b^2}$$

시각 $t=2$에서 $t=a$ $(a>2)$까지 점 P가 움직인 거리를 s_2라 하면

$$s_2=\int_2^a\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\int_2^a dt$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\times\Big[\,t\,\Big]_2^a$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\times(a-2)=(a-2)\sqrt{a^2+b^2}$$

이때 $s_1=s_2=5$이므로

$s_1=s_2$에서

$\sqrt{a^2+b^2}=(a-2)\sqrt{a^2+b^2}$

$a-2=1$, $a=3$

$s_1=5$에서

$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+b^2}=5$, $b^2=16$

따라서 $b^2-a^2=16-3^2=7$

답 ④

Level 3 실력 완성

본문 94쪽

1 ⑤ **2** ⑤ **3** ④

1 좌표평면 위에 점 O가 원점, 직선 OA가 x축, 직선 OB가 y축이 되도록 부채꼴 OAB를 놓으면 호 AB는 원 $x^2+y^2=1$의 일부이다.

중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB의 호 AB를 n등분한 각 분점이 P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_{n-1}이므로

$\angle P_kOA=\frac{\pi}{2}\times\frac{k}{n}=\frac{k}{2n}\pi$

이고 점 P_k의 좌표는 $\left(\cos\frac{k}{2n}\pi,\ \sin\frac{k}{2n}\pi\right)$이다.

이때 호 AB 위의 점 P_k에서의 접선의 방정식은

$x\cos\frac{k}{2n}\pi+y\sin\frac{k}{2n}\pi=1$

이 직선의 x절편은 $\frac{1}{\cos\frac{k}{2n}\pi}$, y절편은 $\frac{1}{\sin\frac{k}{2n}\pi}$이므로

두 점 Q_k, R_k의 좌표는 각각

$\left(\frac{1}{\cos\frac{k}{2n}\pi},\ 0\right)$, $\left(0,\ \frac{1}{\sin\frac{k}{2n}\pi}\right)$이다.

따라서 삼각형 AQ_kP_k의 넓이 S_k와 삼각형 BP_kR_k의 넓이 T_k는

$$S_k=\frac{1}{2}\times\overline{AQ_k}\times\sin\frac{k}{2n}\pi$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{\cos\frac{k}{2n}\pi}-1\right)\times\sin\frac{k}{2n}\pi$$

$T_k=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BR}_k}\times\cos\frac{k}{2n}\pi$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{\sin\frac{k}{2n}\pi}-1\right)\times\cos\frac{k}{2n}\pi$

이므로

S_kT_k

$=\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{\cos\frac{k}{2n}\pi}-1\right)\times\sin\frac{k}{2n}\pi\right\}$

$\times\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{\sin\frac{k}{2n}\pi}-1\right)\times\cos\frac{k}{2n}\pi\right\}$

$=\frac{1}{4}\left(1-\cos\frac{k}{2n}\pi\right)\left(1-\sin\frac{k}{2n}\pi\right)$

$=\frac{1}{4}\left(\sin\frac{k}{2n}\pi\cos\frac{k}{2n}\pi-\sin\frac{k}{2n}\pi-\cos\frac{k}{2n}\pi+1\right)$

이때

$\sin\frac{n}{2n}\pi\cos\frac{n}{2n}\pi-\sin\frac{n}{2n}\pi-\cos\frac{n}{2n}\pi+1$

$=\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}+1=0$

이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_kT_k$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sin\frac{k}{2n}\pi\cos\frac{k}{2n}\pi\right.$

$\left.-\sin\frac{k}{2n}\pi-\cos\frac{k}{2n}\pi+1\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{k}{2n}\pi\cos\frac{k}{2n}\pi\right.$

$\left.-\sin\frac{k}{2n}\pi-\cos\frac{k}{2n}\pi+1\right)$

$=\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{k}{2n}\pi\cos\frac{k}{2n}\pi\right.$

$\left.-\sin\frac{k}{2n}\pi-\cos\frac{k}{2n}\pi+1\right)$

$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x\cos x-\sin x-\cos x+1)dx$

$=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\sin x-\cos x+1)dx\right\}$

이때 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x dx$에서 $\sin x=t$로 놓으면

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이고

$\cos x=\frac{dt}{dx}$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x dx=\int_0^1 t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$

이고

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\sin x-\cos x+1)dx$

$=\Big[\cos x-\sin x+x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\left(0-1+\frac{\pi}{2}\right)-(1-0+0)=\frac{\pi}{2}-2$

따라서

$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_kT_k$

$=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\sin x-\cos x+1)dx\right\}$

$=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-2\right)\right\}=1-\frac{3}{\pi}$

답 ⑤

2 ㄱ. $f(x)=x\sin x$에서 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=-x\sin(-x)=x\sin x=f(x)$

이므로 곡선 $y=f(x)$는 y축에 대하여 대칭이다. (참)

ㄴ. $f(x)=x\sin x$에서

$f'(x)=\sin x+x\cos x$

$f'(n\pi)=\sin n\pi+n\pi\cos n\pi$

이때 모든 자연수 n에 대하여 $\sin n\pi=0$이고 n이 홀수이면 $\cos n\pi=-1$, n이 짝수이면 $\cos n\pi=1$이므로

$f'(n\pi)=\begin{cases}-n\pi & (n\text{이 홀수})\\ n\pi & (n\text{이 짝수})\end{cases}$

따라서

$\sum_{n=1}^{10}f'(n\pi)=-\pi+2\pi-3\pi+4\pi-\cdots-9\pi+10\pi$

$=5\pi$ (참)

ㄷ. 자연수 n이 홀수일 때 닫힌구간 $[(n-1)\pi, n\pi]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=x\sin x\geq 0$이고, n이 짝수일 때 닫힌구간 $[(n-1)\pi, n\pi]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=x\sin x\leq 0$이므로 닫힌구간 $[(n-1)\pi, n\pi]$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 a_n은

$a_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|f(x)|dx=\left|\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}f(x)dx\right|$

이때 $\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}f(x)dx=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x\sin x dx$에서

$u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$라 하면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$이므로

$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}f(x)dx$

$=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x\sin x dx$

$=\Big[-x\cos x\Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi}+\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\cos x dx$

$=\{-n\pi\cos n\pi+(n-1)\pi\cos(n-1)\pi\}$

$$+\Big[\sin x\Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi}$$

$=-n\pi\cos n\pi+(n-1)\pi\cos(n-1)\pi+(0-0)$

$=-n\pi\cos n\pi+(n-1)\pi\cos(n-1)\pi$

n이 홀수이면 $\cos n\pi=-1$, $\cos(n-1)\pi=1$이므로

$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} f(x)dx=n\pi+(n-1)\pi=(2n-1)\pi$

n이 짝수이면 $\cos n\pi=1$, $\cos(n-1)\pi=-1$이므로

$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} f(x)dx=-n\pi-(n-1)\pi=-(2n-1)\pi$

따라서 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=\left|\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} f(x)dx\right|=(2n-1)\pi$

이므로

$\sum_{n=1}^{10} a_n=\sum_{n=1}^{10}(2n-1)\pi$

$=\pi\left(2\times\frac{10\times 11}{2}-1\times 10\right)=100\pi$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

3 $g(x)=xe^{-x}$이라 하면

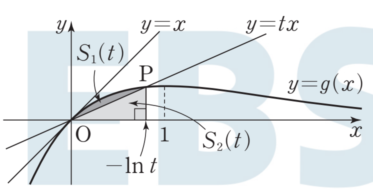
$g'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$

$g'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	극대	↘

$g(0)=0$, $g'(0)=1$, $\lim_{x\to-\infty} xe^{-x}=-\infty$이고 모든 양수 x에 대하여 $g(x)=xe^{-x}>0$이므로 곡선 $y=g(x)$는 그림과 같다.



직선 $y=tx$ $(0<t<1)$이 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점의 x좌표는

$tx=xe^{-x}$, $x(e^{-x}-t)=0$, $x=0$ 또는 $e^{-x}=t$

즉, $x=0$ 또는 $x=-\ln t$

점 P는 원점이 아닌 점이므로 점 P의 x좌표는 $-\ln t$이다.

이때 점 P가 직선 $y=tx$ 위의 점이므로

$P(-\ln t,\ -t\ln t)$이다.

직선 $y=tx$와 곡선 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이 $S_1(t)$는

$S_1(t)=\int_0^{-\ln t}(xe^{-x}-tx)dx$

$=\int_0^{-\ln t} xe^{-x}dx-t\int_0^{-\ln t} x\,dx$

$\int_0^{-\ln t} xe^{-x}dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-e^{-x}$이므로

$\int_0^{-\ln t} xe^{-x}dx=\Big[-xe^{-x}\Big]_0^{-\ln t}+\int_0^{-\ln t} e^{-x}dx$

$=t\ln t+\Big[-e^{-x}\Big]_0^{-\ln t}$

$=t\ln t-t+1$

이고

$\int_0^{-\ln t} x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{-\ln t}=\frac{(\ln t)^2}{2}$

따라서

$S_1(t)=\int_0^{-\ln t} xe^{-x}dx-t\int_0^{-\ln t} x\,dx$

$=t\ln t-t+1-\frac{t}{2}(\ln t)^2$

또한 점 P를 지나고 x축에 수직인 직선과 직선 $y=tx$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 $S_2(t)$는

$S_2(t)=\frac{1}{2}\times(-\ln t)\times(-t\ln t)=\frac{t}{2}(\ln t)^2$

이때 $f(t)=S_1(t)-S_2(t)$에서

$f(t)=\left\{t\ln t-t+1-\frac{t}{2}(\ln t)^2\right\}-\frac{t}{2}(\ln t)^2$

$=t\ln t-t+1-t(\ln t)^2$

$f'(t)=\ln t+t\times\frac{1}{t}-1-(\ln t)^2-2t\ln t\times\frac{1}{t}$

$=\ln t-(\ln t)^2-2\ln t$

$=-(\ln t+1)\ln t$

$0<t<1$인 실수 t에 대하여 $\ln t<0$이므로

$f'(t)=0$에서 $\ln t=-1$, $t=e^{-1}$

$t=e^{-1}$의 좌우에서 $f'(t)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(t)$는 $t=e^{-1}$에서 극소이다.

따라서 $\alpha=e^{-1}$이고

$f(\alpha)=f(e^{-1})$

$=e^{-1}\ln e^{-1}-e^{-1}+1-e^{-1}\times(\ln e^{-1})^2$

$=e^{-1}\times(-1)-e^{-1}+1-e^{-1}\times(-1)^2$

$=1-3e^{-1}$

이므로

$\frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{1-3e^{-1}}{e^{-1}}=e-3$

답 ④