〈자연계열〉

2023학년도
모의논술고사 출제배경 및 해설

SEOULTECH

서울과학기술대학교

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1]

1. 출제배경

기본적인 개념을 이해하고 다양한 상황에 적용할 수 있는 능력은 이공계는 물론 모든 고등교육 이수자에게 필요한 능력이다. 고교 수학의 교육 목표 역시 지엽적인 문제 풀이 방법을 학습하는 것이 아니라 주어진 정보를 활용하여 원하는 결론을 논리적으로 도출하는 방법을 학습하는 것이다. 본 문항에서는 고교 수학의 기본 개념들을 활용해 주어진 문제 상황에 적용할 수 있는 능력이 있는지 확인하고자 하였다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[1.1] 삼각함수의 최대-최소 개념과 이차부등식의 풀이 개념을 통합적으로 적용할 수 있는지 평가한다.
[1.2] 수열과 급수의 수렴성에 대한 기본 개념을 이해하고 활용할 수 있는지 평가한다.
[1.3] 합성함수의 미분 또는 지수-로그 함수의 역함수 관계를 활용할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[1.1] 집합이 주어진 함수의 치역에 포함되기 위해서는 함수의 최댓값은 3이상, 함수의 최솟값은 -1 이하여야 한다. 주어진 함수의 최댓값은 $a^2+|a|-3$이므로 $a^2+|a|-3 \geq 3$을 만족해야한다.
$a \geq 0$인 경우

$$a^2+a-6=(a+3)(a-2)\ \geq 0$$

으로부터 $a \geq 2$를 얻고, $a<0$인 경우

$$a^2-a-6=(a-3)(a+2)\ \geq 0$$

으로부터 $a \leq -2$를 얻는다. 비슷한 방법으로 부등식

$$a^2-|a|-3 \leq -1$$

을 풀면 $-2 \leq a \leq 2$이므로 $a=2$ 또는 $a=-2$가 된다. 따라서 구하고자하는 최솟값은 -2이다.

[1.2] 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 수열 a_n의 공비 r은 $-1<r<1$을 만족한다. 따라서 등비수열 a_n의 극한은

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

이다. 수열 a_n과 b_n이 모두 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = 2a_1$$

이 성립한다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r} = 2a_1$$

로부터 $r=\frac{1}{2}$을 얻는다.

[1.3] $y=f(x)$, $z=h(x)=g(y)$라 놓으면

$$h'(x)=g'(y)y'=\frac{d}{dy}[\ln y-\ln(1-y)]\times\frac{dy}{dx}$$

이다. 여기서

$$\frac{d}{dy}[\ln y-\ln(1-y)]=\frac{y'}{y}+\frac{y'}{1-y}=\frac{y'}{y(1-y)}$$

이고

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$$

이다. 한편

$$y(1-y)=\frac{1}{1-e^{-x}}\times\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

이므로 $h'(x)=1$이다.

(별해) 지수-로그함수의 성질을 이용하면

$$h(x)=g(f(x))=x$$

임을 보일 수 있다. 이로부터 $h'(x)=1$을 얻는다.

3. 출제근거

「삼각함수」, 『고등학교 수학I』, 비상, 2021, 64-91쪽.
「이차부등식」, 『고등학교 수학』, 좋은책신사고, 2021, 87-92쪽.
「수열의 극한값의 계산」, 『고등학교 미적분』, ㈜교학사, 2021, 17-22쪽.
「급수」, 『고등학교 미적분』, 비상, 2020, 28-31쪽.
「급수의 수렴과 발산」, 『고등학교 미적분』, 천재교과서, 2021, 30-33쪽.
「지수함수와 로그함수」, 『고등학교 수학I』, 비상, 2021, 10-34쪽.
「지수함수와 로그함수의 미분」, 『고등학교 미적분』, ㈜교학사, 2021, 60-63쪽.
「합성함수」, 『고등학교 수학』, ㈜교학사, 2021, 219-222쪽.
「합성함수의 미분법」, 『고등학교 미적분』, 지학사, 2021, 88-94쪽.

[문제 2]

1. 출제배경

대학에서 이공계로 전공을 선택한 학생들에게 미분은 꼭 필요한 수학 개념 중 하나이다. 이를 바르게 학습하고 적용할 수 있는지 확인하기 위해, 다항함수의 그래프에 접하는 접선을 구하는데 미분을 이용할 수 있는지 평가하는 문제이다. 또한 다항함수의 그래프들이 접하거나 평행 혹은 수직인 위치관계에 있을 때 이를 수식으로 표현할 수 있는지 평가하는 문항들로 이루어져 있다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[2.1] 제시한 변수와 미분을 이용하여 이차함수에 접하는 직선의 방정식을 표현할 수 있는지 평가한다.
[2.2] 주어진 직선에 수직인 직선의 방정식을 구하고, 두 직선의 교점이 만족하는 성질을 보이기 위해 연립방정식을 풀 수 있는지 평가한다.
[2.3] 주어진 직선에 평행한 직선의 방정식을 구할 수 있는지 평가한다.
[2.4] 이전 문항들에서 구한 도형의 방정식을 이용하여 이들의 교점을 구할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[2.1] $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$일 때 $y'=x$이다. 직선 l_1은 점 $\mathrm{A}(a,\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2})$에서 곡선에 접하므로 접선의 기울기가 a가 되어 l_1의 방정식은 $y=ax-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}$이다. 비슷하게 직선 l_2와 곡선의 접점을 $(b,\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2})$이라 하면 l_2의 방정식은 $y=bx-\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}$이다. l_1과 l_2가 수직이므로 $ab=-1$ 즉, $b=-\frac{1}{a}$이다. 따라서 l_2의 방정식은 $y=-\frac{1}{a}x-\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2}$이다.

[2.2] l_1과 l_2의 교점 P의 y좌표가 0임을 보이면 된다. l_2의 방정식 $y=-\frac{1}{a}x-\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2}$의 양변에 a^2을 곱하여 $a^2y=-ax-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a^2$을 얻고, 이 식과 l_1의 방정식 $y=ax-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}$을 더하면 $(a^2+1)y=0$ 즉, $y=0$이다. 따라서 P의 y좌표는 항상 0이므로 P는 x축 위의 점이다.

[2.3] 수선의 발 H의 좌표는 $(a,0)$이다. 직선 l_3는 기울기가 $-\frac{1}{a}$이고 H를 지나므로 l_3의 방정식은 $y=-\frac{1}{a}x+1$이다.

[2.4] 수선의 발 H$'$의 좌표는 $(-\frac{1}{a},0)$이다. 직선 l_4는 기울기가 a이므로 l_4의 방정식은 $y=ax+1$이다. 이 식과 l_3의 방정식을 연립하면 교점 Q의 좌표는 $(0,1)$이다.

3. 출제근거

「접선의 방정식」, 『고등학교 미적분』, ㈜교학사, 2021, 108-111쪽.
「접선의 방정식은 어떻게 구할까」, 『고등학교 미적분』, 좋은책신사고, 2021, 97-99쪽.
「직선의 방정식」, 『고등학교 수학』, ㈜교학사, 2021, 116-119쪽.
「직선의 방정식」, 『고등학교 수학』, 좋은책신사고, 2021, 119-121쪽.
「두 직선의 평행과 수직」, 『고등학교 수학』, ㈜교학사, 2021, 120-123쪽.
「두 직선의 평행과 수직」, 『고등학교 수학』, 좋은책신사고, 2021, 122-124쪽.

[문제 3]

1. 출제배경

수열의 극한으로 표현된 함수가 연속이기 위한 상수를 구하고 이 함수가 나타내는 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는지 평가하는 문제이다. 원하는 결과를 얻기 위해서는 제시문과 고등학교 수학 지식을 적절히 이용하여야 하며, 부분적분법을 활용할 수 있어야 한다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[3.1] 수열의 극한으로 표현된 함숫값을 계산할 수 있는지 평가한다.
[3.2] 제시문에서 주어진 수열의 극한값의 대소 관계를 이용하여 수열의 극한을 구할 수 있는지 평가한다.
[3.3] 함수의 연속을 이해하고 이를 활용하여 주어진 구간에서 함수가 연속이 되기 위한 상수를 구할 수 있는지 평가한다.
[3.4] 삼차함수로 주어진 곡선과 두 직선으로 둘러싸인 도형을 이해하고 그 넓이를 구할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[3.1] $x=1$을 대입하면

$$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin k+1}{1+\cos\frac{\pi}{2}+1}=\frac{\sin k+1}{2}$$

이다.

[3.2] 분모와 분자를 x^n으로 나누면

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x\sin kx+\frac{1}{x^{n-1}}}{1+\frac{1}{x^{n-1}}\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{x^n}}$$

이다. $x>1$이므로 제시문 (나)에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$이고, 제시문 (가)에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{n-1}}\cos\frac{\pi x}{2}=0$이므로 $f(x)=x\sin kx$이다.

[3.3] $1<x\le 2$에서는 연속이므로 $x=1$에서 연속이 되도록 k값을 구하면 된다. $x=1$에서 연속이려면 $\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$이어야 하므로

$$\lim_{x\to 1^+}x\sin kx=\sin k=\frac{\sin k+1}{2}$$

이다. 따라서 $\sin k=1$이고 $k=\frac{\pi}{2}$이다.

[3.4] $f(x) = x\sin\frac{\pi x}{2}$ 이므로 구하는 넓이는

$$S = \int_1^2 x\sin\frac{\pi x}{2}\,dx$$

이다. 부분적분하면

$$\begin{aligned} S &= \left[x \cdot \left(-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\right)\right]_1^2 - \int_1^2 \left(-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\right)dx \\ &= \left[-\frac{2}{\pi}x\cos\frac{\pi x}{2} + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sin\frac{\pi x}{2}\right]_1^2 \\ &= \frac{4}{\pi} - \frac{4}{\pi^2} \end{aligned}$$

이다.

3. 출제근거

「수열의 극한에 대한 기본 성질」, 『고등학교 수학I』, 지학사, 2021, 16-20쪽.
「삼각함수의 뜻」, 『고등학교 수학I』, 지학사, 2021, 75-79쪽.
「함수의 연속」, 『고등학교 수학II』, 지학사, 2021, 31-35쪽.
「사인함수와 코사인함수의 미분」, 『고등학교 미적분』, 지학사, 2021, 73-75쪽.
「부분적분법」, 『고등학교 미적분』, 지학사, 2021, 148-149쪽.
「넓이」, 『고등학교 미적분』, 지학사, 2021, 164-165쪽.