2023학년도 모의논술고사[자연계]

1. 2023학년도 모의논술고사 예시답안

[논제 I]

(1) 정적분을 활용하여 넓이 A와 B를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$A = \frac{a^3}{12}(a+2b),\ B = \frac{b^3}{12}(2a+b)$$

(2) 넓이 A와 B가 $B=2A$를 만족하면 다음을 얻는다.

$$b^3(2a+b) = 2a^3(a+2b)$$

이를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\left(\frac{b}{a}\right)^4 + 2\left(\frac{b}{a}\right)^3 - 4\left(\frac{b}{a}\right) - 2 = 0$$

또는

$$2\left(\frac{a}{b}\right)^4 + 4\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 2\left(\frac{a}{b}\right) - 1 = 0$$

함수 $g(x) = x^4 + 2x^3 - 4x - 2$를 생각하자. 그러면 $g(1) = -3 < 0$이고 $g(2) = 22 > 0$이므로 사잇값 정리에 의해 $g(c) = 0$인 c가 열린구간 $(1, 2)$에 적어도 하나 존재한다. 따라서,

$$1 < \frac{b}{a} < 2$$

를 만족하는 a와 b가 존재한다. 다음으로,

$$\frac{b}{a} \geq 2$$

인 a와 b가 존재하는지 생각해 보자. 함수 $g(x) = x^4 + 2x^3 - 4x - 2$의 도함수 $g'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 4$를 생각하자. 그러면, $g(2) = 22 > 0$이고, $x \geq 2$에 대해서

$$g'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 4 \geq 32 + 24 - 4 = 52 > 0$$

이므로, 함수 $g(x) = x^4 + 2x^3 - 4x - 2$는 $x \geq 2$에서 x축과 만나지 않는다. 따라서, 방정식 $g(x) = 0$은 $x \geq 2$에서 근을 가지지 않고, $\frac{b}{a} \geq 2$를 만족하는 a와 b는 존재하지 않는다. 다음으로,

$$\frac{a}{b} \geq 1$$

인 a와 b가 존재하는지 생각해 보자. 함수 $h(x) = 2x^4 + 4x^3 - 2x - 1$을 생각하고, 그것의 도함수 $h'(x) = 8x^3 + 12x^2 - 2$를 생각하자. 그러면 $h(1) = 3 > 0$이고, $x \geq 1$에 대해서

$$h'(x) = 8x^3 + 12x^2 - 2 \geq 8 + 12 - 2 = 18 > 0$$

이므로, 함수 $h(x) = 2x^4 + 4x^3 - 2x - 1$는 $x \geq 1$에서 x축과 만나지 않는다. 따라서 $h(x) = 0$은 $x \geq 1$에서 근을 가지지 않고, $\frac{a}{b} \geq 1$을 만족하는 a와 b는 존재하지 않는다. 결국, 넓이 A와 B가 $B = 2A$를 만족하면 $a < b < 2a$이다.

[논제 Ⅱ]

(1) 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{AC}} = 2\sqrt{1+p^2}$이므로, A의 좌표는 $\left(\sqrt{1+p^2}, 0\right)$이다.

또한 삼각형 ABC와 삼각형 AOE가 닮았으므로 $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{AO}} : \overline{\mathrm{OE}}$이다.

$2 : 2p = \sqrt{1+p^2} : \overline{\mathrm{OE}}$에 의하여 $\overline{\mathrm{OE}} = p\sqrt{1+p^2}$이고, E의 좌표는 $\left(0, p\sqrt{1+p^2}\right)$이다.

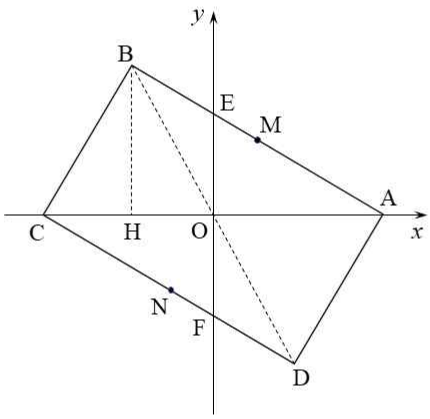
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$에 $\left(\sqrt{1+p^2}, 0\right)$을 대입하면 $\dfrac{1+p^2}{a^2} = 1$이고, $a^2 = 1+p^2$이다.

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$에 $\left(0, p\sqrt{1+p^2}\right)$을 대입하면 $\dfrac{p^2(1+p^2)}{b^2} = 1$이고, $b^2 = p^2(1+p^2)$이다.

$0 < p < 1$이므로 $a^2 - b^2 = 1+p^2 - p^2(1+p^2) = 1 - p^4 > 0$이다.

따라서 두 초점은 x축 위에 있고, 좌표는 $\left(\sqrt{1-p^4}, 0\right)$, $\left(-\sqrt{1-p^4}, 0\right)$이다.

(2)



점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

삼각형 ABC와 삼각형 AHB가 닮았으므로 $\overline{\mathrm{AC}} : \overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AH}}$, $\overline{\mathrm{AC}} : \overline{\mathrm{CB}} = \overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BH}}$이다.

$\overline{\mathrm{AB}} = 2$, $\overline{\mathrm{BC}} = 2p$, $\overline{\mathrm{AC}} = 2\sqrt{1+p^2}$를 이용하면 $\overline{\mathrm{AH}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+p^2}}$, $\overline{\mathrm{BH}} = \dfrac{2p}{\sqrt{1+p^2}}$이다.

따라서 B의 좌표는 $\left(\sqrt{1+p^2} - \dfrac{2}{\sqrt{1+p^2}}, \dfrac{2p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = \left(-\dfrac{1-p^2}{\sqrt{1+p^2}}, \dfrac{2p}{\sqrt{1+p^2}}\right)$이고,

M의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+p^2} - \dfrac{1-p^2}{\sqrt{1+p^2}}\right), \dfrac{1}{2}\left(0 + \dfrac{2p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right) = \left(\dfrac{p^2}{\sqrt{1+p^2}}, \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)$

$\dfrac{x^2}{m^2} + \dfrac{y^2}{n^2} = 1$에 $\left(\sqrt{1+p^2}, 0\right)$을 대입하면 $\dfrac{1+p^2}{m^2} = 1$이고, $m^2 = 1+p^2$이다.

$\dfrac{x^2}{m^2} + \dfrac{y^2}{n^2} = 1$에 $\left(\dfrac{p^2}{\sqrt{1+p^2}}, \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)$를 대입하고 $m^2 = 1+p^2$을 이용하면

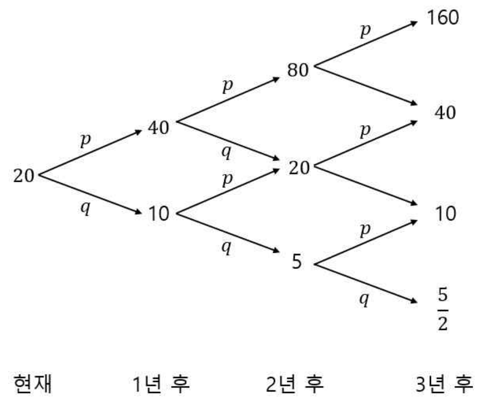
$\dfrac{p^4}{(1+p^2)^2} + \dfrac{p^2}{n^2(1+p^2)} = 1$이고, 정리하면 $n^2 = \dfrac{p^2(1+p^2)}{1+2p^2}$이다.

$b^2 = p^2(1+p^2)$이므로 $n^2 = \dfrac{p^2(1+p^2)}{1+2p^2} = \dfrac{b^2}{1+2p^2}$이고,

$0 < p < 1$에 대하여 $\dfrac{1}{1+2p^2} < 1$이므로 $n^2 < b^2$이고, 따라서 $n < b$이다.

[논제 Ⅲ]

(1)



위의 그림으로부터 총 8가지의 경로가 있다. 아래표로 정리하면

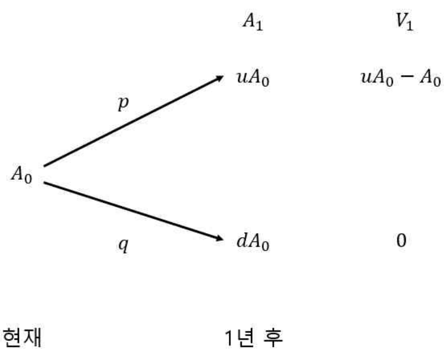
가격 변화	최저가격	이익	확률
20 -> 40 -> 80 -> 160	20	140	1/27
20 -> 40 -> 80 -> 40	20	20	2/27
20 -> 40 -> 20 -> 40	20	20	2/27
20 -> 40 -> 20 -> 10	10	0	4/27
20 -> 10 -> 20 -> 40	10	30	2/27
20 -> 10 -> 20 -> 10	10	0	4/27
20 -> 10 -> 5 -> 10	5	5	4/27
20 -> 10 -> 5 -> 5/2	5/2	0	8/27

따라서 민국이가 3년 후에 얻는 이익의 기댓값은

$$140\times\frac{1}{27}+20\times\frac{2}{27}+20\times\frac{2}{27}+0\times\frac{4}{27}+30\times\frac{2}{27}+0\times\frac{4}{27}+5\times\frac{4}{27}+0\times\frac{8}{27}=\frac{100}{9}$$

이다.

(2)



위에 그림으로부터 민국은 1년 후의 이익 V_1은 p의 확률로 $V_1=uA_0-A_0$이 되고, q의 확률로 $V_1=0$이 되므로 V_1의 기댓값 V_0은 다음과 같이 계산된다.

$$V_0=p\times(uA_0-A_0)+q\times 0=pA_0(u-1).$$

상수 β에 대해 A_1의 가격과 상관없이 $V_0+\beta A_0=V_1+\beta A_1$이 성립하므로 $A_1=uA_0$, $A_1=dA_0$일 때

대입하면 다음 두 식을 얻는다.

$$V_0 + \beta A_0 = A_0(u-1) + \beta u A_0$$
$$V_0 + \beta A_0 = 0 + \beta d A_0$$

$V_0 = pA_0(u-1)$을 위의 식에 대입하고, 연립 방정식을 풀면, $\beta = \frac{1-u}{u-d}$, $p = \frac{1-d}{u-d}$ 이다.

2. 2023학년도 모의논술고사문항 해설(출제범위 포함)

[논제 I]에서는 주어진 상황을 정적분의 성질, 사잇값 정리 등을 이용하여 수학적으로 표현할 수 있는지를 평가하고자 하였다. [논제 I]-(1)에서는 정적분과 넓이의 관계를 이해하고 있는지, 그리고 적분 계산을 정확하게 할 수 있는지를 평가하고자 하였다. [논제 I]-(2)에서는 사잇값 정리를 잘 이해하고 있는지와 그것을 이용하는 능력을 평가하고자 하였다.

[논제 Ⅱ]에서는 이차곡선인 타원의 방정식을 이해하고, 무리식의 계산을 정확하게 수행할 수 있는지 평가하는 것을 목표로 하였다. [논제 Ⅱ]-(1)에서는 삼각형의 닮음을 이용하여 장축과 단축의 길이를 구하고, 이를 이용하여 타원의 초점을 찾을 수 있는지 평가하며, [논제 Ⅱ]-(2)에서는 삼각형의 닮음을 이용하여 타원의 방정식을 찾고, 논리적으로 부등식을 설명할 수 있는지 평가하고자 하였다.

[논제 Ⅲ]에서는 미래의 상황을 논리적으로 구성하는 능력, 확률과 기댓값을 계산하는 능력을 평가하는 것을 목표로 하였다. [논제 Ⅲ]-(1)에서는 3년 후의 상황을 수형도로 그려 각 상황별 이익과 확률을 구하고 이를 이산확률분포로 표현하여 기댓값을 찾을 수 있는지 평가하며, [논제 Ⅲ]-(2)에서는 일반화된 상황에서 기댓값을 계산하고 항등식을 이용하여 이를 정리한 후 연립방정식을 풀 수 있는지 평가하고자 하였다.