

논술 모의고사 문제지

(자연계열) : 120분

모집단위		전형유형	논술우수자
수험번호		성명	

■ 일반 유의사항

1. 시험시간은 120분, 배점은 100점입니다.
2. 답안을 구상할 때 문제지의 여백이나 문제지 내의 연습장을 사용하십시오.
3. 답안을 작성할 때 반드시 흑색 필기구만을 사용하십시오(연필, 샤프 사용 가능, 사인펜 불가).
4. 답안을 정정할 때 두 줄을 긋고 정정하십시오(수정 테이프, 지우개 사용 가능, 수정액 불가).
5. 답안은 반드시 해당 문항의 답란에 작성하고, 답란 밖에는 작성하지 마시오.
6. 본인이 지원한 모집단위에 해당하는 문항을 선택하여 답안을 작성하십시오.

(다른 모집단위 문항의 답안을 작성하면 0점 처리 됩니다.)

※ 답안지는 절대 교체할 수 없습니다.

■ 답안 작성 유의사항

1. 수험번호, 성명 등 신상에 관련된 사항을 답란이나 답안지의 여백에 드러내지 마시오.
2. 풀이과정이나 설명 없이 간략히 답만 쓰면 0점 처리됩니다.
3. 풀이의 과정을 순차적으로 서술하되, 필요한 경우에 수식 및 그림을 사용할 수 있으며, 수식은 반드시 문장 속에 포함 시키시오.



인하대학교
INHA UNIVERSITY

[자연계열 - 일반]

(의예과 제외)

👉 의예과는 7쪽부터 푸시오.

논술 모의고사 (자연계열 - 일반(의예과 외))

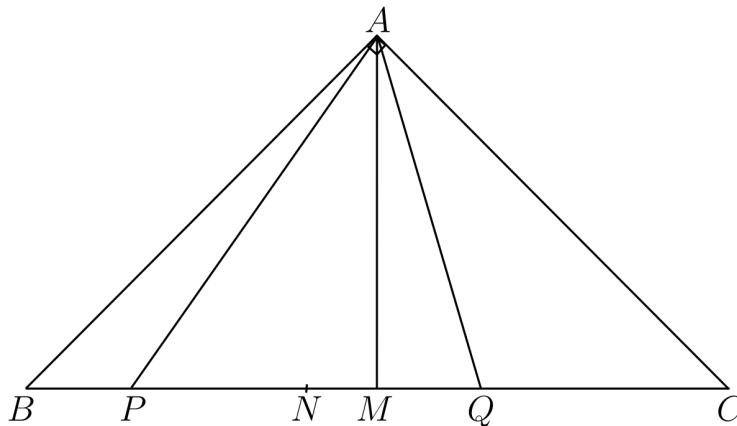
[문제 1] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

임의의 각 α, β 에 대하여 $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ 이다. 따라서 임의의 각 θ 에 대하여 $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$ 이고, 이 공식을 이용하면 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 일 때 다음과 같은 공식을 얻을 수 있다.

(i) $\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}}$

(ii) $\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}$

(※) 다음 그림과 같이 삼각형 ABC 는 $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ 인 직각이등변삼각형이다. 변 BC 의 중점을 M 이라 하자. 점 P, Q 는 선분 BC 위에 있고 $\angle PAQ = \frac{\pi}{4}$ 이다. $\overline{BC} = 10$ 일 때 다음 질문에 답하시오.



(1-1) $\overline{PM} = \overline{MQ}$ 일 때 \overline{PQ} 의 값을 구하시오. [10점]

(1-2) 선분 PQ 의 중점을 N 이라 하고, 변 BC 위에 점들이 위의 그림과 같이 P, N, M, Q 의 순서로 놓여 있다고 하자. $\overline{PQ} = k$ 라 할 때, \overline{NM} 의 값을 k 로 나타내시오. [10점]

(1-3) $\overline{BP} = x$ ($0 \leq x \leq 5$)라 할 때, 선분 PQ 의 길이를 x 로 나타내고, 그 최솟값을 구하시오. [15점]

논술 모의고사 (자연계열 - 일반(의예과 외))

[문제 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) x 축의 양의 방향과 이루는 각이 α 이고 점 (x_0, y_0) 을 지나는 직선의 방정식은

$$y = \tan\alpha(x - x_0) + y_0$$

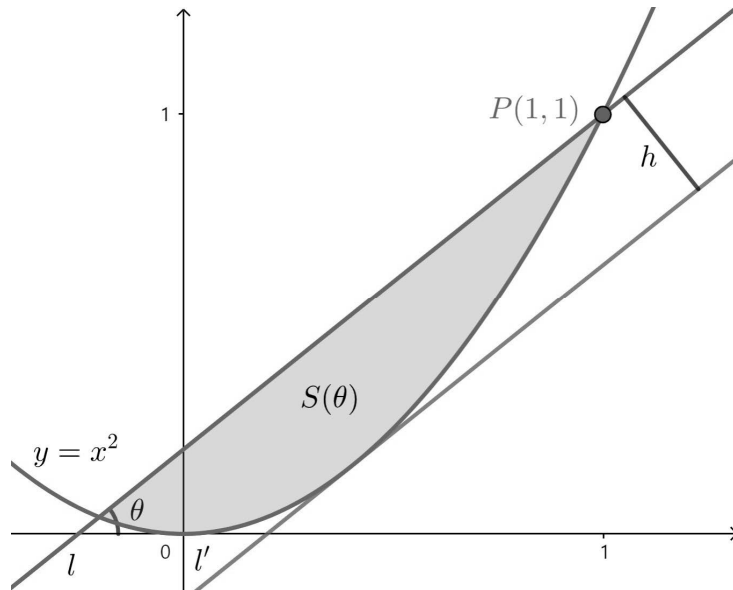
(나) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 및 두 직선 $x = a$, $x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

(다) 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

(※) 포물선 $y = x^2$ 위의 점 $(1, 1)$ 을 P 라 하자. $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 인 θ 에 대하여 점 P 를 지나고 x 축의 양의 방향과 이루는 각이 θ 인 직선 l 과 포물선 $y = x^2$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, 다음 질문에 답하시오.



(2-1) $S(\pi/6)$ 를 구하시오. [10점]

(2-2) $S(\theta)$ 의 값을 θ 의 식으로 나타내시오. [10점]

(2-3) 직선 l 과 평행하며 $y = x^2$ 의 그래프와 제 1사분면에서 접하는 직선을 l' 라 하자. 직선 l 과 l' 사이의 거리를 h 라 할 때, h 를 θ 에 관한 식으로 나타내고, l 의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 일 때, $\frac{dh}{d\theta}$ 의 값을 구하시오. [15점]

논술 모의고사 (자연계열 - 일반(의예과 외))

[문제 3] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) [평균값 정리] 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a,b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a,b) 에서 미분가능할 때, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ 인 c 가 열린구간 (a,b) 에 적어도 하나 존재한다.

(나) 함수 $f(x)$ 가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 < x_2$ 일 때 $f(x_1) < f(x_2)$ 이면 함수 $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다고 한다. 또 $x_1 < x_2$ 일 때 $f(x_1) > f(x_2)$ 이면 함수 $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다고 한다.

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a,b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a,b) 에서 미분가능할 때, (a,b) 의 모든 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이면 $f(x)$ 는 $[a,b]$ 에서 증가한다.

(※) 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & (x \geq 0) \\ x^2 + 4x + 3 & (x < 0) \end{cases}$$

에 대하여 다음 질문에 답하시오.

(3-1) 다음 명제가 참이 되도록 하는 실수 a 의 값의 집합을 구하시오. [7점]

$t > a$ 인 어떤 실수 t 에 대하여 $f(t) < f(a)$ 가 성립한다.

(3-2) (a) 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족할 때, 함수 $g(x)$ 의 그래프의 개형을 그리시오. [6점]

모든 실수 a 에 대하여 $g(a) = \lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$ 이다.

(b) 다음 명제는 거짓이다. 이 명제가 성립하지 않는 a, b 의 예를 찾으시오. [7점]

두 실수 a, b (단, $b > a$)에 대하여

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \lim_{x \rightarrow c+} f'(x) \text{이고 } a < c < b \text{인 실수 } c \text{가 존재한다.}$$

(3-3) 다음 명제가 참이 되도록 하는 상수 k 의 최솟값을 구하시오. [10점]

$b-a > k$ 인 임의의 두 실수 a, b 에 대하여

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \lim_{x \rightarrow c+} f'(x) \text{이고 } a < c < b \text{인 실수 } c \text{가 존재한다.}$$

[자연계열 - 의예과]

논술 모의고사 (자연계열 - 의예과)

[문제 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) [평균값 정리] 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a,b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a,b) 에서 미분가능할 때, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ 인 c 가 열린구간 (a,b) 에 적어도 하나 존재한다.

(나) 함수 $f(x)$ 가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 < x_2$ 일 때 $f(x_1) < f(x_2)$ 이면 함수 $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다고 한다. 또 $x_1 < x_2$ 일 때 $f(x_1) > f(x_2)$ 이면 함수 $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다고 한다.

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a,b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a,b) 에서 미분가능할 때, (a,b) 의 모든 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이면 $f(x)$ 는 $[a,b]$ 에서 증가한다.

(※) 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & (x \geq 0) \\ x^2 + 4x + 3 & (x < 0) \end{cases}$$

에 대하여 다음 질문에 답하시오.

(1-1) 다음 명제가 참이 되도록 하는 실수 a 의 값의 집합을 구하시오. [7점]

$t > a$ 인 어떤 실수 t 에 대하여 $f(t) < f(a)$ 가 성립한다.

(1-2) (a) 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족할 때, 함수 $g(x)$ 의 그래프의 개형을 그리시오. [6점]

모든 실수 a 에 대하여 $g(a) = \lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$ 이다.

(b) 다음 명제는 거짓이다. 이 명제가 성립하지 않는 a, b 의 예를 찾으시오. [7점]

두 실수 a, b (단, $b > a$)에 대하여

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \lim_{x \rightarrow c+} f'(x)$ 이고 $a < c < b$ 인 실수 c 가 존재한다.

(1-3) 다음 명제가 참이 되도록 하는 상수 k 의 최솟값을 구하시오. [10점]

$b-a > k$ 인 임의의 두 실수 a, b 에 대하여

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \lim_{x \rightarrow c+} f'(x)$ 이고 $a < c < b$ 인 실수 c 가 존재한다.

논술 모의고사 (자연계열 - 의예과)

[문제 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$ 가 어떤 열린구간에서 미분가능할 때, 그 열린구간에 속하는 모든 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이면 $f(x)$ 는 그 열린구간에서 증가하고, $f'(x) < 0$ 이면 $f(x)$ 는 그 열린구간에서 감소한다.

(나) 닫힌구간 $[a, b]$ 를 포함하는 열린구간에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 각각 연속인 도함수를 가질 때

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

(다) 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속인 두 함수가 $f(x) \leq g(x)$ 를 만족하면

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

(2-1) 두 양수 a, b 에 대하여 $a \ln \frac{b}{a} \leq b - a$ 임을 보이시오. [8점]

(2-2) 모든 자연수 n 에 대하여 $\int_0^1 \sin(2n\pi x) \ln(1+x)dx \leq 0$ 임을 보이시오. [12점]

(2-3) 자연수 n 에 대하여 $f(x) = x - \sin(2n\pi x) + 1$ 일 때, $\int_0^1 f(x) \ln f(x)dx \geq \ln 4 - \frac{3}{4}$

임을 보이시오. [15점]

논술 모의고사 (자연계열 - 의예과)

[문제 3] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(수학적 귀납법) 자연수 $n(\geq 9)$ 에 대한 명제 $p(n)$ 이 모든 자연수 $n(\geq 9)$ 에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(1) $n=9$ 일 때, 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

(2) $n=k$ ($k \geq 9$)일 때 명제 $p(n)$ 이 성립한다고 가정하면, $n=k+1$ 일 때에도 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

(※) 2 이상인 서로 다른 자연수 $n(\geq 1)$ 개로 이루어진 집합 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 에 대하여 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1$ 이면 A 를 “조화로운 집합”이라 부르자. 예를 들어, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ 이므로 $\{2, 3, 6\}$ 은 조화로운 집합이다.

(3-1) 조화로운 집합 A 에 대하여 $n(A) \geq 3$ 임을 증명하시오. [5점]

(3-2) (a) 집합 A 가 조화로운 집합이면, $x \in A$ 인 모든 x 에 대하여 $2x \in B$ 인 조화로운 집합 B 가 존재함을 증명하시오. [7점]

(b) $\{3, 4, 5, 6, 20\}$ 이 2를 포함하지 않는 조화로운 집합임을 이용하여, $n(A) = 9$ 이고 $2, 3 \notin A$ 인 조화로운 집합을 하나 구하시오. [8점]

(3-3) (a) 2 이상인 자연수 m 에 대하여 $\frac{1}{m} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ 이 되는 서로 다른 자연수 p, q 의 순서쌍 (p, q) 를 하나 구하시오. [5점]

(b) 9 이상인 임의의 자연수 n 에 대하여 원소의 개수가 n 이고 2, 3을 포함하지 않는 조화로운 집합이 존재함을 증명하시오. [10점]

논술고사 (자연계열)

<연 습 장>

논술고사 (자연계열)

<연 습 장>

