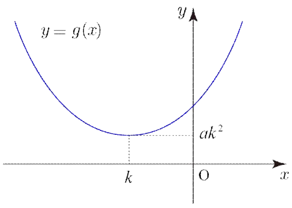
세종대학교 2023학년도 모의논술고사
자연계열 채점 기준

문항 (배점)	풀이	배점
1-1 (70점)	시각 t에서 물의 부피 $V(t)$에 대하여 $81\pi t = V(0)+\int_0^t V'(s)\,ds = V(t) = \pi\int_0^{h(t)}(20y-y^2)\,dy$ 이므로 $h(t)=9$일 때, $81\pi t = \pi\int_0^{h(t)}(20y-y^2)\,dy = \pi\left\{10h^2(t)-\frac{h^3(t)}{3}\right\} = \pi\left(10\times 9^2-\frac{9^3}{3}\right) = 567\pi$ 이다. 따라서 $t=7$이다.	▪ 물의 부피의 식 $\pi\int_0^{h(t)}(20y-y^2)\,dy$ 이 있으면 (+30점) ▪ 적분하여 $\pi\left\{10h^2(t)-\frac{h^3(t)}{3}\right\}$ 을 얻으면 (+20점) ▪ $h(t)=9$를 대입하여 $t=7$를 얻으면 (+20점)
1-2 (80점)	$81\pi t = \pi\int_0^{h(t)}(20x-x^2)dx$의 양변을 미분하면 $81\pi = \pi h'(t)\{20h(t)-h(t)^2\}$이므로 $h(t)=9$일 때 $h'(t) = \frac{81}{20h(t)-h(t)^2} = \frac{81}{20\times 9-9^2} = \frac{9}{11}$이다.	▪ 미분하여 $81\pi = \pi h'(t)\{20h(t)-h(t)^2\}$ 을 얻으면 (+40점) ▪ $h'(t)=\frac{9}{11}$를 얻으면 (+40점)
1-3 (80점)	$y=h(t)$이므로 (1-2)의 계산으로부터 $\frac{dy}{dt}=\frac{81}{20y-y^2}$이다. 따라서 $\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{81}{20y-y^2}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{81}{20y-y^2}\right)\times\frac{dy}{dt}=-\frac{81(20-2y)}{(20y-y^2)^2}\times\frac{dy}{dt}$ 를 얻는다. $y=9$, $\frac{dy}{dt}=\frac{9}{11}$를 대입하면, $\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{18}{11^3} = -\frac{18}{1331}$이다. 또한 역함수 미분법을 이용하면 $\frac{dt}{dy}=\frac{20y-y^2}{81}$이고 $\frac{d^2t}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dt}{dy}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{20y-y^2}{81}\right)=\frac{20-2y}{81}$이므로, $y=9$를 대입하면 $\frac{d^2t}{dy^2}=\frac{2}{81}$이다.	▪ $\frac{dy}{dt}=\frac{81}{20y-y^2}$ (+10점) ▪ $\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{81(20-2y)}{(20y-y^2)^2}\times\frac{dy}{dt}$를 얻으면 (+20점) ▪ $\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{18}{11^3}$ (+10점) ▪ $\frac{dt}{dy}=\frac{20y-y^2}{81}$ (+10점) ▪ $\frac{d^2t}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{20y-y^2}{81}\right)=\frac{20-2y}{81}$ (+20점) ▪ $\frac{d^2t}{dy^2}=\frac{2}{81}$ (+10점)

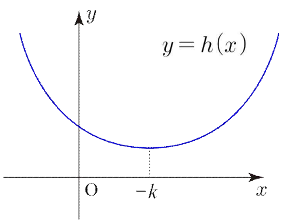
세종대학교 2023학년도 모의논술고사
자연계열 채점 기준

문항 (배점)	풀이	배점
2-1 (70점)	$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{t^2-4}{4t}$ 로부터 $0<t<2$이면 $\frac{dy}{dx}<0$, $t>2$이면 $\frac{dy}{dx}>0$ 이다. $t=0$일 때 $y=0$이고 $t=2$일 때 $y=-16$이므로 y의 최솟값은 $t=2$일 때이다. 따라서 점 Q의 좌표는 $(25,-16)$이다.	■ 미분하여 함수의 증감을 따지면 (+30점) ■ y의 최솟값은 $t=2$일 때임을 알면 (+30점) ■ $(25,-16)$를 구하면 (+10점)
2-2 (80점)	$t=0$에서 $t=a$까지의 곡선의 길이는 $\int_0^a \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^a \sqrt{(12t)^2+(3t^2-12)^2}\,dt=a^3+12a$ 이다. $a^3+12a=13$으로부터 $a=1$이다. 따라서 점 P의 좌표는 $(7,-11)$이다. $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{t=1}=\left.\frac{dy/dt}{dx/dt}\right\|_{t=1}=\left.\frac{t^2-4}{4t}\right\|_{t=1}=-\frac{3}{4}$이므로, 직선 L_1의 방정식은 $3x+4y+23=0$이다.	■ 곡선의 길이 a^3+12a를 얻으면 (+30점) ■ P의 좌표 $(7,-11)$ (+20점) ■ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{t=1}=-\frac{3}{4}$ (+20점) ■ $3x+4y+23=0$ (+10점)
2-3 (80점)	점 A의 좌표는 $3x+4\times0+23=0$으로부터 $\left(-\frac{23}{3},0\right)$. 삼각형 ABD는 $\overline{AB}=\overline{AD}$인 이등변삼각형. 점 A에서 직선 L_2에 내린 수선의 발을 H. 직선 AH에 있는 임의의 점 (x,y)는 직선 L_1과 x축으로부터 거리가 동일, $\frac{\|3x+4y+23\|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\|y\|$이 성립. 따라서 $3x-y+23=0$ 또는 $3x+9y+23=0$. 점 H는 제4사분면에 있으므로 직선 AH는 기울기가 음수. 따라서 직선 AH의 방정식은 $3x+9y+23=0$. 직선 L_2는 AH에 수직이고 점 Q$(25,-16)$을 지나므로, 직선 L_2의 방정식은 $3x-y-91=0$. 따라서 점 D의 좌표는 $\left(\frac{91}{3},0\right)$이다. **(별해)** $\angle\mathrm{BAD}=\theta$라 하면 $\angle\mathrm{HAD}=\frac{\theta}{2}$이고, $-\frac{3}{4}=\tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$임을 이용하면 $\tan\frac{\theta}{2}=-\frac{1}{3}$이므로 직선 AH의 기울기는 $-\frac{1}{3}$. 직선 L_2는 AH에 수직이고 점 Q$(25,-16)$을 지나므로, 직선 L_2의 방정식은 $3x-y-91=0$이다. 따라서 점 D의 좌표는 $\left(\frac{91}{3},0\right)$.	■ 점A의 좌표 $\left(-\frac{23}{3},0\right)$ (+10점) ■ AH의 방정식 $3x+9y+23=0$. (+30점) ■ L_2의 방정식 $3x-y-91=0$. (+30점) ■ 점 D의 좌표 $\left(\frac{91}{3},0\right)$. (+10점) **(별해)** ■ AH의 기울기 $-\frac{1}{3}$ (+30점) ■ L_2의 방정식 $3x-y-91=0$. (+40점) ■ 점 D의 좌표 $\left(\frac{91}{3},0\right)$ (+10점)

세종대학교 2023학년도 모의논술고사
자연계열 채점 기준

문항 (배점)	풀이	배점
3-1 (80점)	조건 (가)로부터 $f(x)=a(x-k)^2$. $g(x)=f(f(x))=a(ax^2-2akx+ak^2-k)^2$. $g'(x)=4a^2(ax^2-2akx+ak^2-k)(x-k)$. $ax^2-2akx+ak^2-k$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=a^2k^2-a(ak^2-k)=ak$. $a<0$일 때는 $\frac{D}{4}>0$이고 방정식 $g'(x)=0$은 서로 다른 세 실근 가지게 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다. $a>0$일 때는 $\frac{D}{4}<0$이고 방정식 $g'(x)=0$의 실근은 $x=k$뿐이며, $g(x)$는 $x=k$에서 극솟값을 가지며, 이는 $g(x)$의 유일한 극값. 따라서 $a>0$일 때 조건 (나)를 만족시키며, 포물선 $y=f(x)$는 아래로 볼록.	▪ $f(x)=a(x-k)^2$라 두고 $g(x)=a(ax^2-2akx+ak^2-k)^2$을 얻으면 (+20점) ▪ $a>0$일 때 $g(x)$가 조건 (나)를 만족시킴을 보이면 (+50점) ▪ 포물선 $y=f(x)$는 아래로 볼록. (+10점)
3-2 (80점)	$g''(x)=4a^2(3ax^2-6akx+3ak^2-k)$인데 $a>0$이고 $k<0$이므로 $3ax^2-6akx+3ak^2-k$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=3ak<0$. 모든 실수 x에 대하여 $3ax^2-6akx+3ak^2-k>0$이고 $g''(x)=4a^2(3ax^2-6akx+3ak^2-k)>0$. - $g''(x)>0$인 x의 범위는 실수 전체의 집합. 모든 실수 x에 대하여 곡선 $y=g(x)$는 아래로 볼록. $g(k)=ak^2>0$. $f(x)=a(x-k)^2$이 직선 $x=k$를 중심으로 대칭이므로 $g(x)=f(f(x))$역시 $x=k$를 중심으로 대칭. 곡선 $y=g(x)$의 개형을 그리면 다음과 같다.  $y=g(x)$가 직선 $x=k$를 중심으로 대칭이므로 $g(-1)\le g(0)$을 만족시키기 위해서는 $\lvert k-(-1)\rvert \le \lvert k-0\rvert$. 그런데 $k<0$ 이므로 이를 다시 쓰면 $\lvert k+1\rvert \le -k$, 즉 $k\le k+1\le -k$이므로 $k\le -\frac{1}{2}$를 얻어 k의 최댓값은 $-\frac{1}{2}$. **(별해)** $g(-1)=a(a(1+k)^2-k)^2=a(a+2ak+ak^2-k)^2$이고 $g(0)=a(ak^2-k)^2$인데 $a>0$, $ak^2-k>0$, $a+2ak+ak^2-k=a(1+k)^2-k\ge -k>0$이므로 $y=ax^2$이 $x>0$에서 증가 함수임에 유의하면 $g(-1)\le g(0)$ 이기 위해서는 $a+2ak+ak^2-k\le ak^2-k$. 따라서 $a+2ak=a(1+2k)\le 0$이고 $k\le -\frac{1}{2}$. 나머지 부분의 풀이는 동일.	▪ 모든 실수 x에 대하여 $g''(x)>0$임을 보이면 (+30점) ▪ $k\le -\frac{1}{2}$을 얻으면 (+40점) ▪ k의 최댓값 $-\frac{1}{2}$을 얻으면 (+10점)

세종대학교 2023학년도 모의논술고사
자연계열 채점 기준

3-3 (80점)	모든 실수 x에 대하여 $g(x)>0$이므로 $h(-k)=g(g(k))>0$. 함수 $g(x)$의 그래프는 직선 $x=k$를 중심으로 대칭이므로, 임의의 실수 c에 대하여 $h(-k+c)=g(g(k-c))=g(g(k+c))=g(g(-(-k-c)))=h(-k-c)$이고, 함수 $h(x)$의 그래프는 직선 $x=-k$를 중심으로 대칭. $h'(x)=-g'(g(-x))g'(-x)$인데 항상 $g(-x)>0$이므로 $-g'(g(-x))<0$. (i) $x<-k$: $-x>k$이므로 $g'(-x)>0$, $h'(x)=-g'(g(-x))g'(-x)<0$. (ii) $x=-k$: $-x=k$이므로 $g'(-x)=0$, $h'(x)=-g'(g(-x))g'(-x)=0$. (iii) $x>-k$: $-x<k$이므로 $g'(-x)<0$, $h'(x)=-g'(g(-x))g'(-x)>0$. 곡선 $y=h(x)$의 개형을 그리면 다음과 같다.  (i) $p=-k$: 함수 $h(x)$의 그래프는 직선 $x=-k$를 중심으로 대칭이므로 $\int_0^p h(x)\,dx=\int_0^{-k} h(x)\,dx=\int_{-k}^{-2k} h(x)\,dx=\int_p^{2p} h(x)\,dx$ (ii) $0<p<-k$: 그래프의 대칭성과 $h(x)$의 증감에 의하여 $\int_0^p h(x)\,dx>\int_p^{2p} h(x)\,dx$. (iii) $p>-k$: 그래프의 대칭성과 $h(x)$의 증감에 의하여 $\int_0^p h(x)\,dx<\int_p^{2p} h(x)\,dx$. $\int_0^p h(x)\,dx=\int_p^{2p} h(x)\,dx$를 만족시키는 p는 $-k$ 뿐이다. 그런데 $k\le -\frac{1}{2}$이므로 조건을 만족시키는 실수 p의 최솟값은 $\frac{1}{2}$이다.	▪ 곡선 $y=h(x)$의 개형을 알면 (+30점) ▪ 조건을 만족시키는 p는 $-k$ 뿐임을 보이면 (+30점) ▪ 조건을 만족시키는 실수 p의 최솟값은 $\frac{1}{2}$ (+20점)