2023학년도 수시모집 논술전형

# 모의 논술고사 해설지 (자연계열)

서울시립대학교
UNIVERSITY OF SEOUL

[문제 1] (85점)

쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 위의 점 P와 이 쌍곡선의 두 초점 $F_1$, $F_2$에 대하여 $\frac{\overline{PF_2}}{\overline{PF_1}}=\frac{29}{11}$일 때, 세 점 P, $F_1$, $F_2$를 지나는 이차함수의 그래프와 선분 $\overline{PF_2}$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라. (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)

**[예시답안]** $\frac{\overline{PF_2}}{\overline{PF_1}}=\frac{29}{11}>1$로부터 $\overline{PF_2}>\overline{PF_1}$이므로 $F_1(5,0)$, $F_2(-5,0)$이다. 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF_2}-\overline{PF_1}=2\cdot 3=6$이므로 $\frac{\overline{PF_2}}{\overline{PF_1}}=\frac{29}{11}$과 연립하여 풀면 $\overline{PF_1}=\frac{11}{3}$이다. $\overline{PF_1}=\sqrt{(x-5)^2+(y-0)^2}=\frac{11}{3}$에서 $y^2=-x^2+10x-\frac{104}{9}$이고, 점 $P(x,y)$는 쌍곡선 위의 점이므로 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$로부터 $5x^2-18x-8=(5x+2)(x-4)=0$이다. 점 P는 제1사분면 위의 점이므로 $x=4$이고, $y=\frac{4}{3}\sqrt{7}$이다. 따라서 점 P의 좌표는 $\left(4,\frac{4}{3}\sqrt{7}\right)$이다.

세 점 P, $F_1$, $F_2$를 지나는 이차함수는 $y=-\frac{4}{27}\sqrt{7}(x^2-25)$이므로 구하고자 하는 부분의 영역의 넓이는

$$\int_{-5}^{4}-\frac{4}{27}\sqrt{7}(x^2-25)dx-\frac{1}{2}\cdot(4-(-5))\cdot\frac{4}{3}\sqrt{7}=18\sqrt{7}$$

이다.

[문제 2] (총 95점)
어떤 주머니에 흰 공, 빨간 공, 파란 공들이 들어있다. 이 주머니에서 다음의 규칙을 따르는 시행을 한다.

| |
|---|
| 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 그 색을 확인하고 같은 색의 공을 한 개 추가하여 뽑은 공과 함께 주머니에 다시 넣는다. |

처음에 흰 공 2개, 빨간 공 1개, 파란 공 1개가 들어있는 주머니에 대해, 이 시행을 7회 반복한 후, 주머니에 들어있는 공이 11개가 되면 멈춘다. 주머니에 있는 11개의 공 중에서 7개가 흰 공, 2개가 빨간 공, 2개가 파란 공인 사건을 $A$라 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(a) 사건 $A$가 일어날 확률을 구하여라. (40점)
(b) 사건 $A$가 일어났을 때, 7회의 각 시행 후에 주머니에 있는 흰 공의 개수가 항상 나머지 공의 개수보다 크거나 같을 조건부 확률을 구하여라. (55점)

[예시답안]
(a) 사건 $A$가 일어나기 위해서는 흰 공을 5회, 빨간 공을 1회, 파란 공을 1회 뽑아야 한다. 이와 같이 공을 뽑는 순열의 수는 $\frac{7!}{5!1!1!}=42$이다. 각 순열이 발생할 확률은 뽑힌 공의 색의 순서와 상관없이 서로 같으며, 그 확률은 $\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot1\cdot1}{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}=\frac{1}{840}$이다. 따라서, $\mathrm{P}(A)=\frac{42}{840}=\frac{1}{20}$이다.

(b) 7회의 각 시행 후에 적어도 한 번은 주머니 속의 흰 공의 개수가 나머지 공의 개수보다 작은 사건을 $B$라 하자. 첫 시행에서 뽑힌 공의 색에 따라 경우를 나누어, 사건 $A\cap B$가 일어나는 경우의 수를 구해보자.
(i) 첫 시행에서 빨간 공을 뽑았을 때: 이후의 시행에서 파란 공을 1번, 흰 공을 5번 뽑으면 사건 $A\cap B$가 일어난다.
(ii) 첫 시행에서 파란 공을 뽑았을 때: 이후의 시행에서 빨간 공을 1번, 흰 공을 5번 뽑으면 사건 $A\cap B$가 일어난다.
(iii) 첫 시행에서 흰 공을 뽑았을 때: 두 번째와 세 번째의 시행 모두에서 흰 공이 아닌 공을 뽑고, 이후의 시행에서는 모두 흰 공을 뽑으면 사건 $A\cap B$가 일어난다.
위의 (i)의 경우의 수는 6이고, (ii)의 경우의 수도 6이다. 또한 (iii)의 경우의 수는 2이다. 따라서, 사건 $A\cap B$가 일어나도록 공을 뽑는 순열의 수는 14이다. 이때 각 경우가 일어날 확률은 $\frac{1}{840}$이므로, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{14}{840}=\frac{1}{60}$이다.
또한,

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{20}-\frac{1}{60}=\frac{1}{30}$$

이므로, 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B^C|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{2}{3}$$

이다.

[문제 3] (105점)
실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $\{f(1)\}^2+\{g(1)\}^2$의 값을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_0^x e^t f(t)\,dt = \frac{e^x\{f(x)-g(x)\}+1}{2}$

(2) $\displaystyle\int_0^x e^t g(t)\,dt = \frac{e^x\{f(x)+g(x)\}-1}{2}$

**[예시답안]** 조건 (1)과 (2)에 $x=0$을 대입하여 정리하면 $f(0)=0$이고 $g(0)=1$이다. 부분적분법에 의해 $\displaystyle\int_0^x e^t f(t)\,dt = e^x f(x) - \int_0^x e^t f'(t)\,dt$이므로 조건 (1)과 (2)에 의해

$$\int_0^x e^t f'(t)\,dt = \frac{e^x\{f(x)+g(x)\}-1}{2} = \int_0^x e^t g(t)\,dt$$

이다. 모든 실수 $x$에 대해 $\displaystyle\int_0^x e^t\{f'(t)-g(t)\}\,dt=0$이므로 정적분과 미분의 관계에 의해 $e^x\{f'(x)-g(x)\}=0$이다. 따라서 모든 실수 $x$에 대해 $f'(x)=g(x)$이다. 마찬가지로 $\displaystyle\int_0^x e^t g(t)\,dt = \{e^x g(x)-1\} - \int_0^x e^t g'(t)\,dt$이므로 모든 실수 $x$에 대해 $g'(x)=-f(x)$이다.
함수 $h(x)=\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$라 하면, $h(x)$는 모든 실수 $x$에 대하여 미분가능하고

$$h'(x)=2f'(x)f(x)+2g'(x)g(x)=2g(x)f(x)-2f(x)g(x)=0$$

이므로 $h(x)$는 상수함수이다. $f(0)=0$이고 $g(0)=1$이므로

$$h(0)=\{f(0)\}^2+\{g(0)\}^2=1$$

이다. 따라서 모든 실수 $x$에 대해

$$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=h(x)=h(0)=1$$

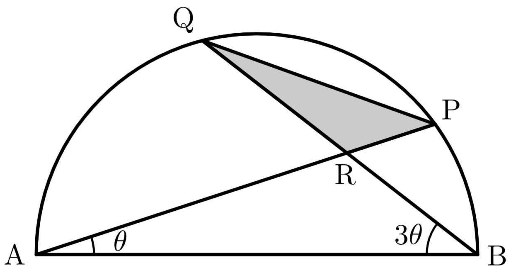
이고

$$\{f(1)\}^2+\{g(1)\}^2=1$$

이다.

[문제 4] (115점)

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle PAB = \theta$, $\angle QBA = 3\theta$가 되도록 잡고, 두 선분 AP, BQ의 교점을 R이라 하자. 삼각형 PQR의 내접원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{r(\theta)}{\theta}$의 값을 구하여라. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{8}$이다.)




[예시답안]

원주각의 성질로부터 $\angle PAB = \angle PQB$, $\angle QBA = \angle QPA$이므로 $\Delta BAR$과 $\Delta PQR$은 서로 닮았고, 이때 닮음비는 $\overline{BR} : \overline{RP}$이다. $\Delta BAR$의 내접원의 반지름의 길이를 $s(\theta)$라고 하면, $\Delta BAR$의 넓이는 $\frac{s(\theta)}{2}(\overline{AB}+\overline{BR}+\overline{RA})$이고 $\Delta PQR$의 넓이는 $\frac{r(\theta)}{2}(\overline{QR}+\overline{RP}+\overline{PQ})$이므로,

$$\frac{s(\theta)}{2}(\overline{AB}+\overline{BR}+\overline{RA}) : \frac{r(\theta)}{2}(\overline{QR}+\overline{RP}+\overline{PQ}) = \overline{BR}^2 : \overline{RP}^2$$

이다. 즉 $r(\theta) = s(\theta)\frac{\overline{RP}}{\overline{BR}}$이다.

$\Delta BAR$에서 사인법칙에 의해 $\frac{2}{\sin(\pi - 4\theta)} = \frac{\overline{RA}}{\sin 3\theta} = \frac{\overline{BR}}{\sin\theta}$이므로 $\overline{RA} = \frac{2\sin 3\theta}{\sin 4\theta}$, $\overline{BR} = \frac{2\sin\theta}{\sin 4\theta}$이다. $\Delta BAR$의 넓이는 $\frac{s(\theta)}{2}(\overline{AB}+\overline{BR}+\overline{RA}) = \frac{1}{2}\overline{AB}\,\overline{RA}\sin\theta$이고 $\overline{AB} = 2$이므로 $s(\theta) = \frac{2\sin 3\theta \sin\theta}{\sin 4\theta + \sin\theta + \sin 3\theta}$이다. 그리고 $\Delta ABP$는 $\angle APB$가 직각인 직각삼각형이므로 $\overline{AP} = 2\cos\theta$이고, $\overline{RP} = \overline{AP} - \overline{RA} = 2\cos\theta - \frac{2\sin 3\theta}{\sin 4\theta}$이다. 따라서

$$r(\theta) = s(\theta)\frac{\overline{RP}}{\overline{BR}} = \frac{2\sin 3\theta \sin\theta}{\sin 4\theta + \sin\theta + \sin 3\theta} \cdot \left(2\cos\theta - \frac{2\sin 3\theta}{\sin 4\theta}\right) \cdot \frac{\sin 4\theta}{2\sin\theta}$$

이므로

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{r(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \to 0+} \left(2 \cdot \frac{\sin 3\theta}{\theta} \cdot \frac{1}{\frac{\sin 4\theta}{\sin\theta} + 1 + \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}} \cdot \left(2\cos\theta - \frac{2\sin 3\theta}{\sin 4\theta}\right) \cdot \frac{\sin 4\theta}{2\sin\theta}\right) = \frac{3}{4}$$

이다.